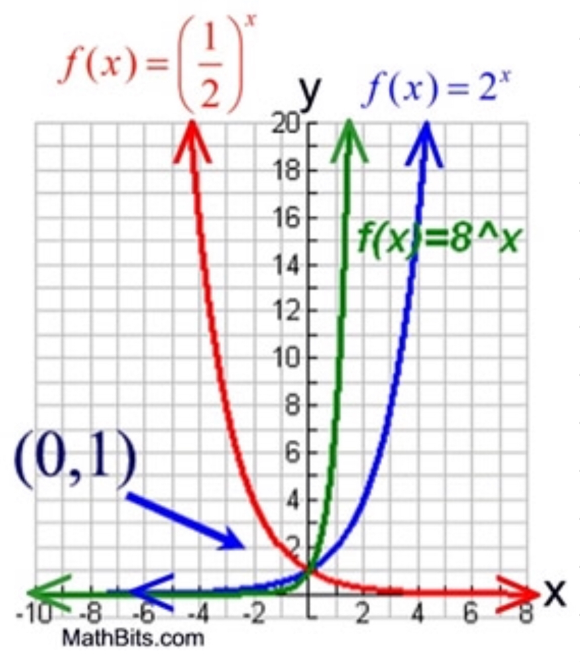
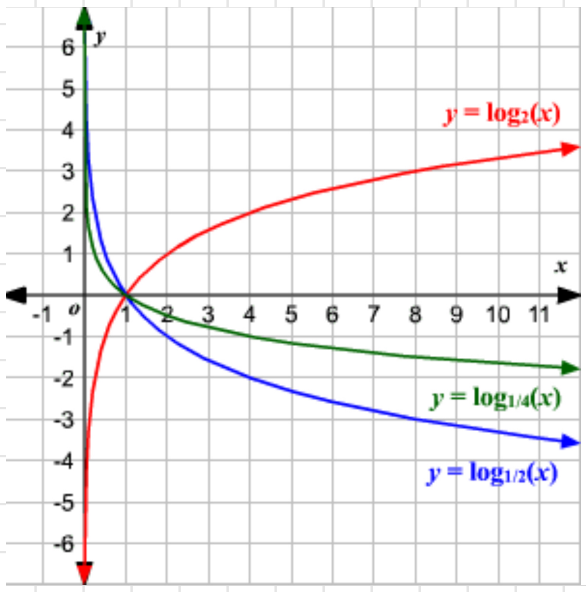
Exponential and logarithmic Function

1

Exponential function	Logarithmic function





Exponential function

- Domain = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, \infty)$
- Range = $(0, \infty)$
- F(x) pass through (1,0)
- F(x) is 1_1
- IF:
  - $b>0$ F(x) is increasing
  - $b<0$ F(x) is decreasing

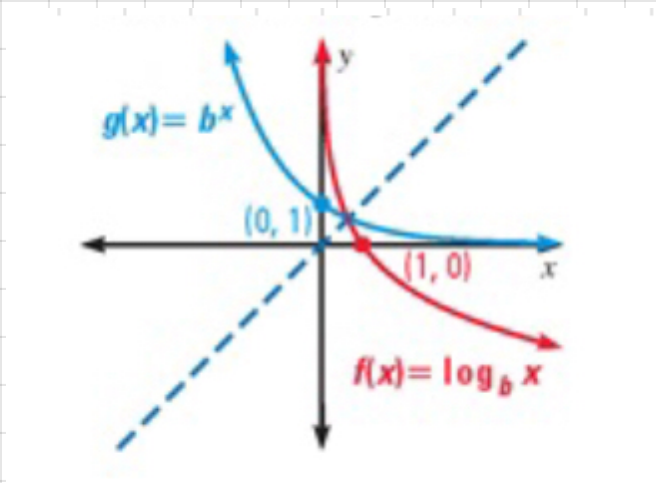
Logarithmic function

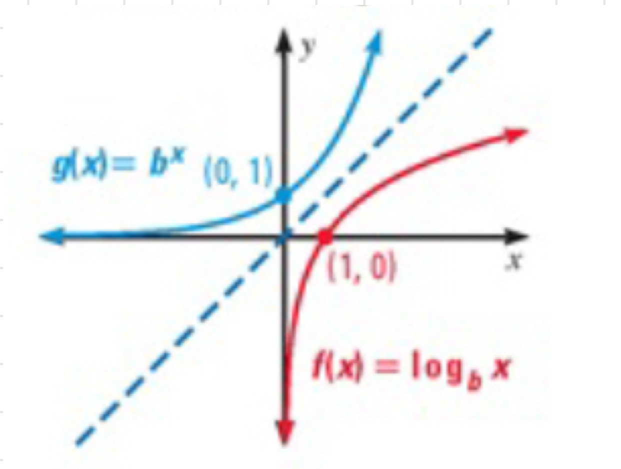
- Domain = $(0, \infty)$
- Range = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, \infty)$
- F(x) pass through (1,0)
- F(x) is 1_1
- IF:
  - $b>0$ F(x) is increasing
  - $b<0$ F(x) is decreasing

العلاقة بين
الدالة الأسية
واللوغاريتمية

$$\boxed{y = b^x \iff \log_b x = y}$$

الدالة اللوغاريتمية
هي معكوس
الدالة الأسية.





2 Properties of Exp. and Log. Functions

خواص الدالة الأسية واللوغاريتميه

Exponential Function

Remark:

Base b:

$y = b^x$

Base e:

$y = e^x$

properties:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
8. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Equation properties:

$a^x = a^y \iff x = y$

$a^x = b^x \iff a = b$

Logarithmic Function

Remark:

Base b:

$y = \log_b x$

Base e:

$y = \log_e x$

$y = \ln x$

Base 10:

$y = \log_{10} x$

$y = \log x$

Properties:

Base b	Base e
1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	$\ln xy = \ln x + \ln y$
2. $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\log_b x^y = y \log_b x$	$\ln x^y = y \ln x$

Equation properties:

$\log_b x = \log_b y \iff x = y$

usefull propeties:

$\log_b b = 1$ $\qquad$ $\ln e = 1$

$\log_b 1 = 0$ $\qquad$ $\ln 1 = 0$

Inverse properties:

1. $\log_b b^x = x$ $\qquad$ $\ln e^x = x$
2. $b^{\log_b x} = x$ $\qquad$ $e^{\ln x} = x$

يساوي

$\log_3 9 = 2$

اس

$y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x$

Log. Form	Exp. Form
$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
$\log_4 \frac{1}{64} = -3$	$4^{-3} = \frac{1}{64}$
$\log_x y = z$	$x^z = y$
$\log_3 1 = 0$	$3^0 = 1$
$\ln 1 = 0$	$e^0 = 1$
$\log 100 = 2$	$10^2 = 100$
$\log_7 7 = 1$	$7^1 = 7$

Exp. Form	Log. Form
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$3^{-4} = \frac{1}{81}$	$\log_3 \frac{1}{81} = -4$
$4^{-2} = 1/16$	$\log_4 \frac{1}{16} = -2$
$(\frac{1}{2})^{-5} = 32$	$\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$
$(\frac{1}{3})^{-3} = 27$	$\log_{1/3} 27 = -3$
$\sqrt{x} = y$	$\log_x y = \frac{1}{2}$
$8^2 = 64$	$\log_8 64 = 2$

Evaluate the following :

$\log_4 4 = 1$

$\log_e 1 = 0$

$b^{\log_b 3} = 3$

$\log_e e^{2x+1} = 2x+1$

$\log_5 1 = 0$

$\log_{10} 0.01$

$= \log_{10} 10^{-2}$

$= -2$

$16^{\log_4 8}$

$= (4^2)^{\log_4 8}$

$= 4^{2\log_4 8}$

$= 4^{\log_4 8^2}$

$= 8^2 = 64$

3 How to solve Exp. and Log. Function Equations

1. Exponintial Function

نفصل الدالة الاسيه 1. Isolate the exponintial expression

يكون لدينا حالتين 2. we will have two possible Cases.

Case 1 نفس الأساس

Same base

or

can be written to

have the same base

How to solve

1. Apply Exponintial ruls.
2. Solve for x

Case2 أساس مختلف

Not the same base

How to solve

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

1. Take log of both sides

نطبق خصائص اللوغاريتم

2. Apply logs properties
3. Solve for x

2. Logarithmic Function

log or ln

case 1 كل حد يحتوي على log او ln

Every term has the

word log or ln

How to solve:

نستخدم خصائص اللوغاريتم

1. use properties of log

   to condens logs in to one term

   نستخدم خصائص اللوغاريتم كي نختصره إلى حد واحد

2. Cancel log from both sides

   نحذف اللوغاريتم من الطرفين

3. Solve for x.

Case 2 ليس كل حد يحتوي على log او ln

Not Every term has the

word log or ln

How to solve:

1. Isolat the log expression.
2. use properties of log to condens log in one term.
3. change from log to Exp. form.
4. Solve for x.

$$y = b^{x} \Leftrightarrow \log_b y = x$$

Examples on Exponential Equation

Example: Solve the following Equation:

1. $3^x + 4 = 13$

$3^x = 13 - 4$ فصلنا الدالة الأسية

$3^x = 9$ حصلنا على حالة إمكانية اعادة كتابة الطرف الثاني ليصبح نفس أساس الدالة الأسية

$3^x = 3^2$ تم إعادة الكتابة

$\Rightarrow x = 2$ طبقنا خصائص الدالة الأسيه

2. $3^x + 6 = 9$

$3^x = 9 - 6$

$3^x = 3$

$\Rightarrow x = 1$

3. $3^x - 2 = 12$

$3^x = 12 + 2$ فصلنا الدالة الأسية

$3^x = 14$ حصلنا على حالة عدم إمكانية اعادة كتابة الطرف الثاني ليصبح نفس أساس الدالة الأسية

$\log 3^x = \log 14$ نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$x \log 3 = \log 14$ نطبق خصائص اللوغاريتم

$x = \dfrac{\log 14}{\log 3}$ نحل المعادلة بالنسبة ل x

4. $5^x = 5^2$

$x = 2$

5. $4^{x+2} = 64$

$4^{x+2} = 4^3$

$\Rightarrow x + 2 = 3$

$\Rightarrow x = 3 - 2$

$\Rightarrow x = 1$

6. $2^x = 7$

$\log 2^x = \log 7$

$x \log 2 = \log 7$

$x = \dfrac{\log 7}{\log 2}$

Examples on Logarithmic Equation

case 1:

Solve for x:

1. $\log x - \log 6 = 2\log 4$

$\log\left(\frac{x}{6}\right) = \log 4^2$

$\frac{x}{6} = 16$

$\Rightarrow x = 16.6 = 96$

2. $\log_7 3 + \log_7 x = \log_7 32$

$\log_7 (3x) = \log_7 32$

$3x = 32$

$\Rightarrow \quad x = \frac{32}{3} = 10.6$

3. $\log_2 2x = \log_2 100$

$2x = 100$

$x = 50$

4. $\ln(x+4) = \ln 7$

$x+4 = 7$

$x = 7-4$

$x = 3$

Case 2:

1. $-6 + \ln 3x = 0$

$\ln 3x = 6$

$3x = e^6$

$x = \frac{e^6}{3} = 134.47$

2. $\log(3x+1) = 2$

$10^2 = 3x+1$

$100 = 3x+1$

$99 = 3x$

$x = 33$

3. $2\log_6 4x = 0$

$6^0 = 4x$

$1 = 4x$

$x = \frac{1}{4}$

4. $2\ln 3x = 4$

$\ln 3x = 2$

$e^2 = 3x$

$x = \frac{e^2}{3} = 2.463$

Find the value of y :

1. $\log_5 25 = y$

$5^y = 25 \Rightarrow 5^y = 5^2$

$\Rightarrow y = 2$

2. $\log_5 1 = y$

$5^y = 1 \Rightarrow y = 0$

3. $\log_y 32 = 5$

$y^5 = 32$

$y^5 = 2^5$

$\Rightarrow y = 2$

4. $\log_3 1 = y$

$3^y = 1 \rightarrow y = 0$

5. $\log_2 8 = y$

$2^y = 8$

$2^y = 2^3$

$\Rightarrow y = 3$

6. $\log_9 y = -\frac{1}{2}$

$9^{-\frac{1}{2}} = y$

$\frac{1}{\sqrt{9}} = y$

$\frac{1}{3} = y$

7. $\log_{16} 4 = y$

$16^y = 4$

$(2^4)^y = 2^2$

$2^{4y} = 2^2$

$\Rightarrow 4y = 2$

$\Rightarrow y = 2$

8. $\log_7 \frac{1}{7} = y$

$7^y = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow y = -1$

9. $\log_4 \frac{1}{8} = y$

$4^y = \frac{1}{8}$

$4^y = 8^{-1}$

$(2^2)^y = (2^3)^{-1}$

$2^{2y} = 2^{-3}$

$2y = -3$

$y = \frac{-3}{2}$

10. $\log_2 \frac{1}{8} = y$

$2^y = \frac{1}{8}$

$2^y = \frac{1}{2^3}$

$2^y = 2^{-3}$

$y = -3$

11. $\log_3 \frac{1}{9} = y$

$3^y = \frac{1}{9}$

$3^y = \frac{1}{3^2}$

$3^y = 3^{-2}$

$\Rightarrow y = -2$

ملاحظات

* جميع الأمثلة هنا على الحالة الثانية من معادلات اللوغاريتم

* الخطوة ١ و٢ متحققة هنا لذلك ننتقل مباشره إلى الخطوة ٣ و ٤
وهي التحويل من ال log الى Exp ونحل لإيجاد المتغير المطلوب