الجلسة الامتحانية

لمادة الرياضيات

يتضمن أبحاث المتتاليات و نهايتها و الأعداد العقدية و تطبيقاتها

إعداد المدرس عدي الخميس

السؤال الأول :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $u_n=\frac{n-1}{n}$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً .

2) أثبت أنّ $0\leq u_n<1$

ثم استنتج تقارب المتتالية و احسب نهايتها .

3) جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n\in]0.99,1.01[$

عند كل $n>n_0$.

السؤال الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد العددين الحقيقيّين $a\,,b$ اللذان يحقّقان

$$u_n=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}$$

2) في حالة n عدد طبيعي ليكن $s_n=u_0+u_1+...+u_n$

عبّر عن s_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

السؤال الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق

$$u_n=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-...-\frac{1}{2^n}$$

1) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً .

2) استنتج أنّ العدد -2 عنصر قاصر عن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

3) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة .

السؤال الرابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق

$$u_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}$$

1) أثبت بالتدريج على العدد n أنّ $n\leq2^n$ أياً كان $n\geq1$.

2) استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

السؤال الخامس :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق

$$u_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$$

1) أثبت بالتدريج أنّ $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$ أياً كان $n\geq1$.

2) أثبت أنّ $u_n<2$ ثم استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

السؤال السادس :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق $v_n=u_n+\frac{1}{n}$

1) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

2) أثبت بالتدريج أنّ $u_n\leq2-\frac{1}{n}$ أياً يكن $n\geq1$

ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

و أثبت تقاربها .

3) أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان .

السؤال السابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\end{cases}$

1) أثبت أنّ $0\leq u_n\leq2$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً .

3) استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال الثامن :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases}u_0=\frac{1}{2}\\u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+2u_n\end{cases}$

1) أثبت أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً .

3) استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال التاسع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

1) أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$.
2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة .
3) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ و احسب نهايتها .

السؤال العاشر :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

و المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالشكل $t_n = \ln(u_n) - \ln 2$

1) أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$.
2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة .
3) استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .
4) أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ هندسية و أوجد حدها العام ثم احسب نهايتها .

السؤال الحادي عشر :

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ المعرفتان وفق $u_0 = 3$ و عند كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1} \quad \text{و} \quad t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1) أثبت أنّ $u_n > 0$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.
2) أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ هندسية و احسب نهايتها .
3) استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال الثاني عشر :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$

1) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها 3 .
2) لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها 2 .
3) عبر عن v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب نهايتها .

السؤال الثالث عشر :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{6}{5}u_n + \dfrac{4}{5} \end{cases}$

1) عيّن تابعاً f يحقّق $u_{n+1} = f(u_n)$ و أثبت أنه متزايد تماماً.
2) احسب u_1 , u_2 , u_3 ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.
3) احسب L حل المعادلة $f(x) = x$.
4) نعرف $(v_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $v_n = u_n - L$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية ، و اكتب v_n بدلالة n .
5) احسب $s = v_2 + v_3 + ... + v_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\dfrac{6}{5}$.

السؤال الرابع عشر :

لتكن المتتاليتان $(s_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ المعرفتان وفق $t_0 = 1 , s_0 = 12$ و عند كل $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4} \quad \text{و} \quad t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}$$

1) أثبت أنّ المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq0}$ هندسية و احسب نهايتها .
2) أثبت أنّ المتتاليتين $(s_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متجاورتان .
3) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة ثم عين قيمتها .
4) استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين $(s_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$.

السؤال الخامس عشر :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+4u_n} \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n .
2) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ حسابية
3) اكتب عبارة v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n .
4) ليكن في حالة n عدد طبيعي $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ عبّر عن s_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

السؤال السادس عشر :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $v_n = \ln(u_n) - 2$

1) أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية عيّن أساسها و حدها الأول.

2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) تحقّق من أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^2$.

السؤال السابع عشر :

لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق

$$w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

1) أثبت أنّ $\frac{1}{2} \leq w_n \leq \frac{n}{n+1}$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$.

2) ادرس اطراد المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أنها متقاربة .

السؤال الثامن عشر :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases} , \quad v_n = u_n - 2n + 6$$

1) أثبت أنّ v_n هندسية عيّن أساسها و حدها الأول .

2) عبر عن u_n بدلالة n .

3) اكتب بدلالة n المجموع $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

السؤال التاسع عشر :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2} \end{cases} , \quad v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$$

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

2) عبر عن v_n بدلالة n .

3) أثبت أنّ $u_n = \frac{2\times 4^n - 1}{4^n + 1}$ و احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

السؤال العشرون :

a , b , c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$12a , 4b , c$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

احسب q .

قسم العقدية : السؤال الأول :

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية :

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i} , \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = 2\left(-\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

2) اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد الآتية :

- $z_1 = (1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
- $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{i}\right)^5$
- $z_3 = \left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)^5$
- $z_4 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_5 = (1 + i\sqrt{3})^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$

السؤال الثاني :

ليكن $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ أثبت أنّ $1 + z + z^2 + \ldots + z^6 = 0$.

السؤال الثالث :

نعطى العددين العقديين الممثلين للنقطتين B و C :

$$z_C = 2 + i \quad , \quad z_B = 1 - i$$

1) جد العدد العقدي z_A الممثل للنقطة A صورة B وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2) احسب $\frac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC .

السؤال الرابع :

ليكن العدد العقدي $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1) أوجد z^2, z^4 و استنتج أنّ z^4 تخيلي بحت .

2) اكتب z^2 بالشكل الأسي و استنتج النسب المثلثية لـ $\frac{\pi}{8}$.

السؤال الخامس :

1) حل المعادلة $2iz+\overline{z}=3+3i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

- $2z^2-6z+5=0$
- $z^2-2\cos\theta z+1=0$

3) حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases}2iz+w=2i\\3z-iw=1\end{cases}$$

4) حل المعادلة $z^2=1+i$ ثم اكتب z بالشكل الأسي و استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$.

5) حل المعادلة $z^2+(1+4i)z-5-i=0$

6) حل المعادلة $z^3=8$

السؤال السادس :

ليكن العدد العقدي $w=\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$

1) اكتب w بالشكل المثلثي و الأسي ثم الجبري .

2) أثبت أنّ w^8 حقيقي .

السؤال السابع :

ليكن z عدداً عقدياً ما ، و ليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد و هو مختلف عن الواحد .

أثبت أنّ $\frac{w\overline{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الثامن :

ليكن العدد العقدي $z=i\left(e^{2i\theta}-1\right)$ حيث $\theta\in]-\pi,0[$

اكتب علاقتي أويلر ثم استفد من ذلك في كتابة z بالشكل الأسي .

السؤال التاسع :

ليكن العدد العقدي $z=i\left(e^{2i\theta}-1\right)$ حيث $\theta\in]-\pi,0[$

اكتب علاقتي أويلر ثم استفد من ذلك في كتابة z بالشكل الأسي .

السؤال العاشر :

إذا علمت أنّ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

1) جد منشور $\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$.

2) اكتب $\sin^3\theta$ كعبارة خطية بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ.

3) احسب النهاية $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta-3\sin\theta}{\theta^3}$.

السؤال الحادي عشر :

لتكن الأعداد العقدية $a=2\,,\,b=-1+i\,\,,\,c=1-3i$

1) وضع النقاط A ، B ، C في شكل .

2) أثبت أنّ النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

3) احسب $\frac{b-a}{c-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) جد العدد العقدي m الممثل للنقطة M صورة C وفق تحاكٍ مركزه A و نسبته 4 .

5) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}=-2\vec{u}+3\vec{v}$.

6) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $ABEC$ متوازي أضلاع .

7) جد العدد العقدي F الممثل للنقطة f صورة A وفق دوران مركزه المبدأ O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، و استنتج طبيعة المثلث OFA .

8) عيّن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق

- $|z-1+3i|=2$
- $|z-1+3i|=|z+1-i|$

9) جد العدد العقدي a' الممثل للنقطة A' صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه B .

10) عيّن G مركز ثقل المثلث ABC .

11) عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,3)\,,\,(B,2)\,,\,(A,-1)$

السؤال الثاني عشر :

نتأمّل النقطتين A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان

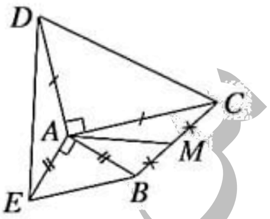
$$z_A=-\sqrt{3}+i \quad , \quad z_B=-2i$$

1) أثبت أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها يساوي 2 .

2) اكتب z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC .

3) أثبت أنّ $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

السؤال الثالث عشر :



نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، M منتصف $[BC]$

ليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A و متساويي الساقين مباشرين .

نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A .

نرمز بـ c و b إلى العددين الممثلين للنقطتين C و B .

1) احسب بدلالة $b\ ,c$ الأعداد العقدية $m\ ,d\ ,e$ الممثلة للنقاط $M\ ,D\ ,E$ بالترتيب .

2) احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أنّ (AM) هو ارتفاع في المثلث AED و أنّ $ED=2AM$.

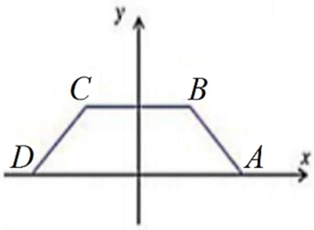
3) نفترض أنّ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$$(B,1)\ ,\ (C,1)\ ,\ (E,3)\ ,\ (D,2)$$

احسب $\dfrac{c}{b}$ ثم احسب قياس الزاوية BAC .

السؤال الرابع عشر :

في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس نصف مسدس منتظم



1) إذا علمت أنّ $a=2$ أوجد الأعداد العقدية $b\ ,c\ ,d$

2) احسب $\arg\left(\dfrac{d-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج نوع المثلث ACD .

السؤال الخامس عشر :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقاط $A\ ,B\ ,M$ التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية

$$m=1\ ,\ b=1+i\ \ ,\ a=\frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}i$$

1) جد العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه M و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-1,0)$

3) أثبت أنّ العدد $\dfrac{b-a}{c-a}$ حقيقي و استنتج أنّ النقاط A,D,C تقع على استقامة واحدة .

السؤال الخامس عشر :

ليكن كثير الحدود $P(z)=z^4+5z^3+10z^2+10z+4$

1) عيّن العددين $a\ ,b$ اللذان يحقّقان

$$P(z)=\left(z^2+az+a\right)\left(z^2+bz+a\right)$$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

السؤال السادس عشر :

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z\neq i$ بالنقطة $M'(z')$ حيث

$$z'=\frac{z+2}{z-i}$$

1) عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' حقيقياً .

2) عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' تخيّلياً صرفاً .

السؤال السابع عشر :

نعطى العددين العقديّين $z_2=1-i\ ,\ z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

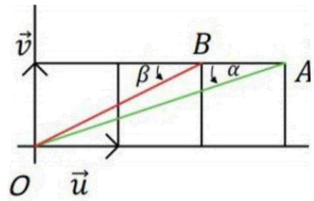
1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من $\dfrac{z_1}{z_2}\ ,z_2\ ,z_1$.

2) اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3) استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

السؤال الثامن عشر :

يبيّن الشكل المجاور ثلاثة مربعات طول ضلع كل منها 1



1) أعط z_A , z_B العددين الممثلين لـ A , B .

2) احسب $z = z_A . z_B$ بالشكل الجبري و الأسي .

3) استنتج قيمة $\alpha + \beta$.

السؤال التاسع عشر :

أوجد العددين العقديّين A و B إذا علمت أنّ جذرَي المعادلة $z^2 + Az + B = 0$ هما $z_1 = 1+2i \ , z_2 = 3-5i$.

السؤال العشرون :

ليكن العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1) أثبت أنّ $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ ثم اكتب z^2 بالشكل الأسي .

2) تحقّق أنّ $z = \exp(i\,\frac{\pi}{12})$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

السؤال الحادي و العشرون :

1) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد العقدي $w = 8 - 6i$.

2) جد الجذور التكعيبية للعدد العقدي $w = 8$.

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ خطه البياني C . **المطلوب:**

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	0 $\qquad$ 3 $\qquad$ $+\infty$
$f\,'(x)$	$+++$	$---\ 0\ +++$
$f\,(x)$	$-\infty \nearrow 5$	$+\infty \searrow -2 \nearrow 0$

1) دل على القيمة الحدية الصغرى و جد صورة المجال $]0,+\infty[$.
2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي و شاقولي للخط C .
3) ما هي مجموعة حلول المتراجحة $f\,'(x) \le 0$ ؟
4) ما عدد حلول المعادلة $f\,(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: نكرر أربع مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين و نسحب في كل مرة الوجهين الظاهرين .

X متحول عشوائي يدل على عدد الشعارات الظاهرة .

1) اكتب مجموعة قيم X و احسب احتمال الحدث A << الحصول ثلاث مرات فقط على وجهين H >>
2) احسب التوقع الرياضي $E\,(X)$ و تباينه $V\,(X)$.

السؤال الثالث: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,2,3),B(0,1,4),F(7,0,0),E(3,0,0)$. **المطلوب** :

1) اكتب تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AB]$.
2) اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ و مركزي قاعدتيها E و F و طول نصف قطرها AB .

السؤال الرابع: مجموعة أشخاص مؤلفة من رجلين و ست نساء ، نريد تشكيل لجنة ثلاثية من هؤلاء الأشخاص .

1) كم لجنة مختلفة يمكن تشكيلها ؟
2) كم لجنة مختلفة يمكن تشكيلها تضم رجلاً واحداً على الأقل ؟

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f\,(x)=ax^3+bx^2+1$.

عيّن العددين a و b إذا علمت أنّ C يقبل مماساً d معادلته $y=4x-7$ في نقطة من C فاصلتها $x=2$.

السؤال السادس: نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g\,(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$.

1) نظم جدولاً بتغيرات g على المجال $[0,\pi]$.
2) استنتج مما سبق أن للمعادلة $2\sin x=x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة للتمرين الأول – 70 درجة لكل من التمرينين الثاني و الثالث)

التمرين الأول: لتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان $a=2+2\sqrt{3}i$ ، $b=\bar{a}$

1) أثبت أن A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها المبدأ $O\,(0,0)$ و نصف قطرها يساوي 4 .
2) جد العدد العقدي c الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ O مركز ثقل المثلث ABC .
3) أثبت أنّ النقطة A هي صورة النقطة B وفق دوران مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC .

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{\ln 2}{1!} + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 2}{3!} + \ldots + \frac{\ln 2}{n!}$. **المطلوب:**

1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) استنتج أنّ العدد $\ln 4$ راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، و أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة .

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

1) احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ثم جد عدداً A يحقق الشرط : إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]-1.1, -0.9[$.

2) أثبت أنّ التابع f متناقص تماماً على $\mathbb{R}$ و احسب $f(\mathbb{R})$.

3) أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ ثم احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$.

<u>ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:</u> (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(1,1,1)$ ، $B(3,2,0)$

و المستوي Q الذي معادلته $x - y + 2z + 4 = 0$ و المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً $d: \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

1) أعطِ معادلة للمستوي P المار من النقطة B و يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً عليه .

2) جد معادلة للكرة S التي مركزها النقطة A و نصف قطرها AB ثم أثبت أنّ المستوي Q يمس الكرة S .

3) أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي Q .

4) أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

5) ليكن المستوي R الذي معادلته $x - z = 0$: جد نقطة تقاطع المستويات P و Q و R .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0,4[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ النقطة $I(2,0)$ مركز تناظر للخط البياني C .

2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة I ثم ادرس وضع الخط C بالنسبة للمماس T .

4) ارسم في معلم متجانس المماس T ثم ارسم C .

5) استنتج رسم C' الخط البياني للتابع g المعرّف وفق $g(x) = \ln(4-x) - \ln(x)$.

6) ما هي مجموعة تعريف التابع h المعرّف وفق $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

– – – – انتهت الأسئلة – – – –

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المجاور ، جدول تغيرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ خطه البياني C . **المطلوب:**

x	$-\infty$ 1	3 $+\infty$
$f'(x)$	$- - -$	$- - -\ 0\ + + +$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 5 \nearrow +\infty$

1) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ثم اكتب معادلة كل مقارب للخط C .
2) دل على القيمة الحدية مبيّناً نوعها .
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟
4) أوجد مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f'(x))$.

السؤال الثاني: صندوق يحوي 6 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتين بيضاء و كرة واحدة سوداء .
نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟ 2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون ذاته ؟
3) كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

السؤال الثالث: f تابع معرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ لكل $x\neq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f مستمر عند الصفر . 2) أوجد $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

السؤال الرابع: يوجد في معهد تعليمي 60% من الطلاب ذكور (M) و الباقي إناث (F) .

يدرس في الصف الثالث الثانوي 40% من الذكور و 10% من الإناث . نختار عشوائياً بطاقة تعريف أحد الطلبة . **المطلوب :**

1) أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة . 2) ما احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة لأحد الطلبة الذين لا يدرسون في الصف الثالث الثانوي ؟

السؤال الخامس: $ABCD$ رباعي وجوه و M هي النقطة التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. **المطلوب :**

1) عبّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج أنّ النقطة M تنتمي إلى المستوي (ABC) .
2) عيّن الأعداد الحقيقيّة α ، β ، γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) ، (B,β) ، (C,γ) .

السؤال السادس: f و g تابعان معرفان على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=x-1+e^x$ ، $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ C_f و C_g متماسان في المبدأ ثم اكتب معادلة المماس المشترك d . 2) احسب التكامل $I=\int_0^1 f(x)dx$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة للتمرين الأول – 70 درجة لكل من التمرينين الثاني و الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ $0<u_n<1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.
2) نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\frac{1}{u_n}-1$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة و اكتب عبارة v_n بدلالة n .
3) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني: في مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ليكن كثير الحدود $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$ حيث z عدد عقدي . **المطلوب :**

1) أثبت أنّ $z=-1$ حلاً للمعادلة $P(z)=0$.

2) اكتب $P(z)$ بالصيغة $P(z)=(z+1)\,Q(z)$ ثم أوجد حلول المعادلة $Q(z)=0$.

3) لتكن الأعداد العقدية $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$

أثبت أنّ $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e+e^{-x})$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ $f(x)=-x+\ln(1+e^{1+x})$ أياً تكن x من $\mathbb{R}$.

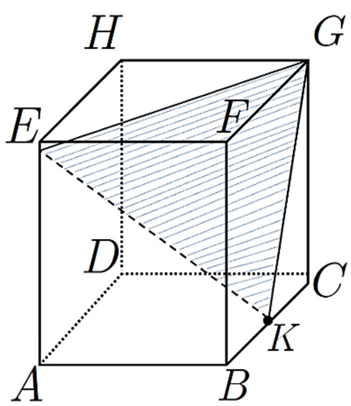
2) أثبت أنّ للخط C مستقيمين مقاربين أحدهما أفقي و الآخر مائل Δ ، ثم أثبت أنّ الخط C يقع فوق مقاربه المائل Δ .

3) أثبت أنّ التابع f متناقص تماماً و احسب $f(\mathbb{R})$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1

النقطة K منتصف $[BC]$ ، نختار المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. **المطلوب :**



1) جد إحداثيات النقاط E و F و G و K .

2) اكتب معادلة للمستوي (EGK) .

3) جد إحداثيات النقطة M المسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) .

4) اكتب معادلة للكرة التي مركزها النقطة F و تمس المستوي (EGK) .

5) احسب مساحة المثلث EFG ثم احسب حجم رباعي الوجوه $K-EFG$ ، ثم استنتج مساحة المثلث EGK .

المسألة الثانية:

ليكن g التابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=x\ln x-x+1$

و ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على I وفق $f(x)=e^x(\ln x-1)$. **المطلوب:**

1) ادرس اطّراد g و بيّن أنّ $g(x)\geq 0$ أياً كان x من I ، و استنتج حل المعادلة $g(x)=0$.

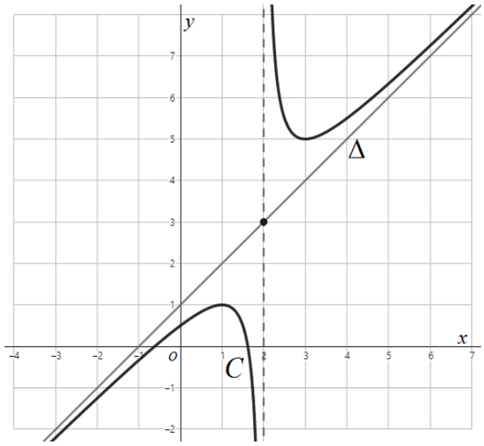
2) أثبت أنّ $f'(x)=\dfrac{e^x\,g(x)}{x}$.

3) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .

4) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– – – – انتهت الأسئلة – – – –



أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

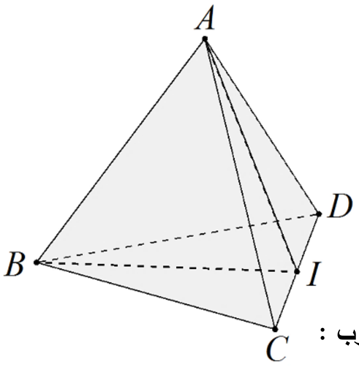
السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **المطلوب:**

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة المقارب الشاقولي للخط C ، ثم عين إحداثيات مركز تناظر الخط البياني C .
2) دل على القيم الحدية و بيّن نوعها ، و ما هو حل المعادلة $f(x)=5$ ؟
3) اكتب معادلة المقارب المائل Δ ثم ادرس وضعه النسبي بالنسبة للخط C .
4) جد مجموعة تعريف التابع g المعرّف وفق $g(x)=\sqrt{f'(x)}$.

السؤال الثاني: لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$. **المطلوب** :

1) كم عدد المجموعات الجزئيّة المكوّنة من عنصرين من S و مجموعهما عدد فردي ؟
2) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S و كل منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500 ؟

السؤال الثالث: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x}+3e^{-x}\geq 4$.



السؤال الرابع: $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 ، فيه I منتصف $[CD]$. **المطلوب** :

1) وضّع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$.
2) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرّف على المجال $I=[1,+\infty[$ وفق $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$. **المطلوب** :

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x=1$ ، و فسّر النتيجة هندسياً .
2) اكتب معادلة المماس T للخط C عند النقطة التي فاصلتها 5 ، ثم باستعمال التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية للعدد $f(5.3)$.

السؤال السادس: يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء ، و ثلاث كرات خضراء ، و واحدة بيضاء . نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً و نعرّف X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان الظاهرة بين الكرات المسحوبة . **المطلوب** :

1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟
2) احسب كلاً من $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$ ثم استنتج قيمة $\mathbb{P}(X=2)$ ، و احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$. **المطلوب** :

1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $0\leq u_n\leq 3$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.
2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .
3) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني: في معلم متجانس لتكن النقاط A ، B ، C التي تمثلها الأعداد العقديّة $a=2$ ، $b=-1+i$ ، $c=1-3i$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ النقاط A ، B ، C ليست واقعة على استقامة واحدة .
2) جد قيمة $\frac{b-a}{c-a}$ و استنتج أنّ المثلث ABC قائم و متساوي الساقين .
3) جد العدد العقدي الممثل للنقطة M صورة النقطة C وفق دوران مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACM .

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$. **المطلوب :**

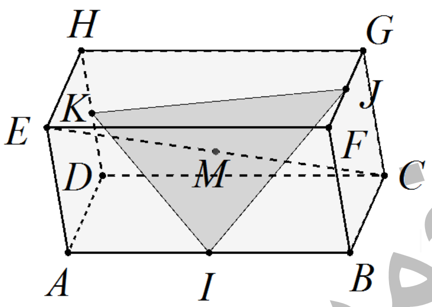
__أولاً:__ عيّن العددين الحقيقيّين a و b إذا علمت أنّ الخط C يقبل مماساً أفقياً في النقطة $A(0,-2)$ منه .

__ثانياً:__ من أجل $a=-2$ و $b=-2$:

1) عيّن معادلة المقارب المائل Δ للخط C و ادرس الوضع النسبي بين الخط C و المقارب Δ .
2) أوجد مشتق التابع f ثم استنتج مشتق التابع $h(x)=\frac{\cos^2 x-2\cos x-2}{\cos x+1}$.
3) احسب التكامل $\int_0^1 \left(f(x)-y_\Delta\right)dx$.

__ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:__ (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AD=1$ ، $AE=1$ ، $AB=2$. النقاط I ، J ، K هي منتصفات الأضلاع $[AB]$ ، $[FG]$ ، $[DH]$ بالترتيب . نختار المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. **المطلوب :**



1) جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات و إحداثيات I ، J ، K .
2) أثبت أنّ معادلة المستوي (IJK) هي $x+2y-2z-1=0$.
3) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .
4) أثبت أنّ المستقيم (EC) يقطع المستوي (IJK) في نقطة M يُطلَب تعيين إحداثياتها .
5) احسب حجم رباعي الوجوه $EIJK$.
6) اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه A و قاعدته الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$. **المطلوب:**

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و دل على المقاربات الأفقيّة و الشاقوليّة للخط البياني C .
2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، ثم دل على قيمته الحدية محلياً .
3) في معلم متجانس ارسم مقاربات C ثم ارسم الخط C .
4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محور الفواصل xx' و المستقيمين $x=e^2$ ، $x=e^3$.
5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث $g(x)=\frac{1}{x\ln x-x}$.

– – – – **انتهت الأسئلة** – – – –