
ملخص قوانين منهاج
الرياضيات

متتاليات

أعماشار الوحدة:

* يرمز لها بالرمز: $(U_n)_{n\geq 0}$

أو $(U_n)_{n\geq n_0}$

لها عدة أشكال:

1) شكل صريح:

ولها تابع ذو تعريف صريح

" هو كل حد بعطى بدلالة "n"

$\boxed{U_n = f(n)}$ نستخدم "دائماً"

2) شكل تدرجي:

ولها تابع ذو تعريف تدرجي

" وهو كل حد يعطى بدلالة "U_n"

$\boxed{U_{n+1} = f(U_n)}$ من مخطط المسائل

4) شكل تجميع

5) جداءات أو أسي

*** دراسة اطراد متتالية:**

* تكون مطردة إذا:

1) متزايدة: $U_{n+1} \geq U_n$

2) متزايدة "تماماً": $U_{n+1} > U_n$

3) متناقصة: $U_{n+1} \leq U_n$

4) متناقصة "تماماً": $U_{n+1} < U_n$

5) ثابتة: $U_{n+1} = U_n$

* تكون غير مطردة إذا لم تكن أيّ من الحالات السابقة:

Ex: $U_n = (-1)^n$

*** طرق دراسة اطراد متتالية:**

1) الفرق:

$U_{n+1} - U_n =$ + متزايدة ، - متناقصة ، 0 ثابتة

2) النسبة:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ >1 متزايدة ، <1 متناقصة ، $=1$ ثابتة

"مشروط أن تكون جميع الحدود موجبة"

3) التابع:

$U_n = f(n)$

"شكل صريح"

" المتتاليات نوعين "

متتالية حسابية		متتالية هندسية
$U_{n+1} - U_n = r$	الشرط	$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$
$U_n = U_m + (n-m)r$	الحد العام	$U_n = U_m q^{n-m}$
$S = n\frac{a+l}{2}$	المجموع	$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$
$b = \frac{a+c}{2}$	الوسط الحسابي	$b = \sqrt{a.c}$

لحساب عدد حدود متتالية (n):

$n = \frac{j - i}{r} + 1$

j: الحد الأخير ، i: الحد الأول ، r: القفزة

وهو القانون الذي يطبق على المقدار الذي يتحرك حركة انسحابية.

الاستقراء الرياضي:

* نبرهن صحة القضية من أجل حد البدء
* نفرض صحة القضية
* نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

نرمز لأي قضية من كتابنا " $E(n)$ "

نستخدم الاستقراء لـ:

1) إثبات علاقة لمجموع
2) متراجحة
3) قابلية القسمة "مضاعفات"
4) إيجاد اطراد "شكل تدرجي"

* خلاصة لدراسة الاطراد:

شكل صريح ⟸ $U_n = f(n)$

شكل تدرجي ⟸ الاستقراء

مجاميع ⟸ $U_{n+1} - U_n$

جداءات أو أسي ⟸ $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

" انتهى البحث "

ملاحظات:

1) العاملي: هو جداء الأعداد بدءاً من حتى الواحد

2) في المتراجحة في الجداء إذا حذفنا ما الطرف الأخير مقدار أكبر أو تساوي الواحد فإننا نحافظ على إشارة المتراجحة

3) حساب الحدود الأولى من متتالية قد تفيد في التعرف على نوعية المتتالية.

4) $\sin 2x = 2\sin(x).\cos(x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5) أي متتالية من الشكل: $U_{n+1} = aU_n + b$ تالفية تسلك سلوك هندسي ولتتميز عبارة U_n نتبع الدستور التالي:

" $U_n = U_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}$ "

6) $a^{n+m} = a^n . a^m$

$(n+1)n! = (n+1)!$

$0! = 1$

نهايات متتاليات

الشكل العام:

$\lim_{n\to+\infty} U_n = ?$

فيكون الجواب

1) عدد 2) $\pm\infty$ 3) ليس لها نهاية

حساب نهاية متتالية هندسية:

$-1<q<1 \Rightarrow \lim U_n = 0$

$q>1 \Rightarrow \lim U_n = +\infty$

$q \le -1 \Rightarrow \lim U_n = \pm\infty$

$q=1 \Rightarrow \lim U_n = 1$

حساب نهاية متتالية:

* شكل تجميعي: نحسب المجموع S_n ونوجد نهاية

* شكل صريح: $U_n = f(n)$

* شكل تدريجي: نثبت أنها متناقصة + محدودة من الأدنى

نثبت أنها متزايدة + محدودة من الأعلى

"وهو شرط التقارب."

=> متقاربة من أحل المعادلة: نهايتها حل: $f(x)=x$

محدودة متتالية:

نقول عن متتالية أنها محدودة من الأعلى إذا كانت: $U_n \le M$

وهو عنصر أكبر عليها

نقول عن متتالية أنها محدودة من الأدنى إذا كانت $m \le U_n$

وهو عنصر أصغر عنها

إذا كانت المتتالية محدودة من الأدنى والأعلى <= "محدودة"

حالات حساب محدودية متتالية:

* شكل تجميعي: طريقتين: 1) استقراء [16] 2) نستفيد من الطلب الأول

* شكل صريح:

طرح: الحدود معطاة

تشكيل: الحدود غير معطاة "ننطلق من حد البدء"

تغيرات: $U_n = f(n)$

من الحدود التي نبدأ بتشكيلها: $(-1)^n$, $n!$

* شكل تدريجي: الاستقراء

التمثيل الهندسي لحدود متتالية

هندسية:

فقد يكون شكل تدريجي:

• شكل تدريجي $U_{n+1} = f(U_n)$.

• يلزم تمثيل الرسم المستقيم

• $f(x)=x$ مستقيم ثابت الرسم يمر بـ $(0,0)$ منصف للربع الأول والثالث

• نعين حد البدء على xx' نسقطه

على المستقيم $x = f(x)$ ثم yy' ثم $x = f(x)$ وذلك لإعادته إلى xx'

وتسمى النقطة الجديدة "الحد الجديد" U_1 ...... وهكذا.

الهدف: • إيجاد النهاية المحتملة للمتتالية.

• إيجاد جهة اطراد المتتالية.

- المتتاليتين المتجاورتين: "V_n و U_n"

الشرط: إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

• $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

النتيجة: المتتاليتين المتجاورتان لهما نفس النهاية ومتقاربتين.

$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell$

انتهى البحث

ملاحظات:

1) المتتالية المتباعدة: هي عكس المتقاربة أي ليست محدودة، نهايتها المحتملة $\pm\infty$

2) يمكن حذف الحد الموجب من الطرف الصغير، ويمكن إضافة حد موجب إلى الطرف الأكبر "لاستمرار جهة التراجح"

3) شرط التزايد $U_{n+1} - U_n > 0$

4) $U_n = q^n$ هي متتالية هندسية أساسها q.

5) لإثبات صحة قضية يجب أن يكون التحقيق صحيحة دوماً أي كانت (n)، ولإثبات عدم صحتها يكفي إيراد مثال واحد معاكس. [20]

6) لتوحيد المقامات نوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وهو جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس.

ماذا نضرب تحت كل كسر؟؟

نضرب تحت كل كسر مضاعف مشترك الأصغر ÷ مقام الكسر.

7) إذا كانت للمعادلة جذر مضاعف من مرتبة زوجية فالنقطة هي نقطة تماس، وإذا كانت للمعادلة جذر بسيط "واحد" أو جذر مضاعف من مرتبة فردية فالنقطة هي نقطة تقاطع. [28]

8) أهي متقاربة؟؟

أثبت تقاربها؟؟

أثبت تقاربها فهي إما متقاربة من عدد حقيقي "توجد نهاية" أما إما متقاربة علينا استنتاج محدوديتها وجهة اطرادها <= أنها متقاربة.

9) جميع المتتاليات المرجعية من الشكل: $\{n, n^2, n^3, \sqrt{n}\}$ متتالية متباعدة نحو $+\infty$

10) مجموع أعداد موجبة أكبر من أي جزء منها: $n^2+1 > n^2$

11) لإثبات أن متتالية ما هندسية نحسب الحد الذي يلي الحد العام أمثال المتتالية ثابت مشترك

النهايات والاستمرار

حل المعادلة $f(x)=k$ "هندسياً"

- k خطه البياني مستقيم
- $f(x)$ " " منحني

عدد حلول المعادلة: نقاط تقاطع المنحني C للتابع f مع المستقيم d.

حلول المعادلة: فواصل نقاط التقاطع C مع المستقيم d.

التابع المستمر:

f مستمر على I $\Longleftrightarrow$ خطه البياني متصل

f غير مستمر $\Longleftrightarrow$ خطه البياني متقطع

خطوات دراسة تغيرات تابع عددي:

- نوجد مجموعة تعريف التابع ونكتبه على شكل مجال أو مجالات "اجتماع".
- نعين مجموعة استمرار التابع.
- نوجد القيم عند أطراف المجالات المغلقة ونوجد النهاية عند الأطراف المفتوحة.

$[a, b[$ ، $f(a)$ ، $\lim_{x \to b} f(x)$

- ندرس اطراد التابع وذلك من خلال دراسة إشارة المشتق

$f'(x) > 0 \Leftarrow$ متزايد تماماً

$f'(x) < 0 \Leftarrow$ متناقص تماماً

تذكرة:

$I =]a, b[\Rightarrow b > a$

- طول المجال: $l = b - a$
- مركز المجال: $c = \frac{a+b}{2}$
- نصف قطر المجال: $r = \frac{b-a}{2}$

حالات عدم التعيين:

- $\frac{0}{0}$
- $\sin(\pm\infty)$ ، $\cos(\pm\infty)$
- $\infty - \infty$ ، $-\infty + \infty$
- $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$
- $\mp\infty(0)$

كيفية إزالة حالة عدم التعيين:

- $\frac{0}{0}$
  - نحلل ما يمكن تحليله ونختصر
  - نضرب بالمرافق
  - إخراج عامل مشترك
- $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$
  - عامل مشترك الحد ذات الأس الأكبر
  - المرافق "يحوي جذر"
- $+\infty - \infty$
  - مرافق إذا كانت الحد الذي خارج الجذر جزء للذي داخل الجذر.
  - عامل مشترك
- $\mp\infty(0)$
  - تغير متحول
- $\sin(\pm\infty)$ ، $\cos(\pm\infty)$
  - مبرهنة الإحاطة

النهايات والتوابع:

التابع الصحيح: نعوض $\pm\infty$ في جميع الحدود في حالة أصبح لدينا (ح.ع.ت) $\infty - \infty$ بالطرق المذكورة نزيلها.

$$\lim_{n \to \pm\infty} (an^n + bn^{n-1} + \dots + c) = \lim_{n \to \pm\infty} an^n$$

- لحساب نهاية التابع الصحيح عند $\pm\infty$ نعوض في الحد المسيطر. (المسيطر الأكبر)

التابع الجذري: الكلام ذاته ينطبق على التابع الجذري.

- نهاية الجذر = جذر النهاية

التابع الكسري: ح.ع.ت $\frac{\infty}{\infty}$

لحساب نهاية التابع الكسري عند $\pm\infty$ نقارن بين درجة البسط ودرجة المقام

1) درجة البسط $<$ من درجة المقام $= 0^{\pm}$
2) درجة البسط $>$ من درجة المقام $= \pm\infty$
3) درجة البسط $=$ درجة المقام $= \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \left(\frac{\text{أمثال الحد المسيطر}}{\text{أمثال الحد المسيطر}} \right) \Leftarrow$

تذكر:

- $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$
- $\frac{\text{عدد}}{0} = \mp\infty$
- $\sqrt{x^2} = |x| \to -x : -\infty$ ، $x : +\infty$

التابع الذي يحوي $\sin$ ، $\cos$:

باختصار: لإيجاد نهاية نسبة مثلثية نوجد نهاية الزاوية ثم نأخذ $\sin$ أو $\cos$ اللانهاية

مبرهنات المقارنة:

$\sin(\mp\infty)$ ، $\cos(\mp\infty)$: تابع صحيح أو كسري يحوي $\cos$ / $\sin$ عند $\pm\infty$ نستخدم مبرهنة الإحاطة.

1- مبرهنة الإحاطة: ثلاث توابع h, g, f

$g < f < h$

$\lim_{x \to \mp\infty} g(x) = l$ ، $\lim_{x \to \mp\infty} h(x) = l$ $\Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} f(x) = l$

2- مبرهنة الثانية: تابعين g, f

$|f(x) - c| \le g(x)$

$\lim_{x \to \mp\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} f(x) = c$

3- مبرهنة الثالثة:

$f(x) \ge g(x)$ ، $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} g(x) = -\infty$

$f(x) \ge g(x)$ ، $\lim_{x \to \mp\infty} g(x) = +\infty$ $\Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) \ge g(x)$ الصغير $(-\infty)$ $\Longleftarrow$ الكبير $(-\infty)$

$f(x) \ge g(x)$ الكبير $(+\infty)$ $\Longleftarrow$ الصغير $(+\infty)$

تذكر: نهاية الفرق = فرق النهاية

نهاية العدد الثابت قيمته

نهاية التابع عندما x تسعى لعدد حقيقي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

* أو عند الحصول على عدد 0 نعوض في مجال ممنوع من 0.

قاعدة: عند الحصول على العدد صفر في المقام فقط عندها نأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار لتحديد إشارة الصفر: $\frac{\text{عدد}}{0}$

في التقاطع نأخذ المجال الأصغر

في الاجتماع نأخذ المجال الأكبر

حلالات: كلمة استنتج $\Leftarrow$ نبدأ من النهاية لنصل إلى المطلوب.

المقاربات:

* المقارب الشاقولي: $x = a$

$\lim_{x \to a^{>}_{<}} f(x) = \mp\infty$

$x = a$ مقارب شاقولي يوازي yy'

* المقارب الأفقي: $y = b$

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b$

$y = b$ مقارب أفقي يوازي xx'

* المقارب المائل: $\Delta: y = mx + p$

$\lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

y_Δ مقارب مائل من جوار $\mp\infty$

* نقطة مقاربة: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ، (a, b)

* لا وجود للمقاربات: $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ هناك لا يوجد مقاربات شاقولية أو أفقية بل مائل

الوضع النسبي للمقارب d مع المنحني C.

① مقارب شاقولي $(x=a)$

$x \to a^{>}$ ، C يقع على يمين المقارب

$x \to a^{<}$ ، C يقع على يسار المقارب

المقارب المائل الأفقي ذات المعادلة

② مقارب أفقي ومائل ($\Delta: y=b$) ($\Delta: y=ax+b$)

• C يقطع المقارب $\Delta \Leftarrow f(x)-y_\Delta=0$

• C يقع فوق المقارب $\Delta \Leftarrow f(x)-y_\Delta>0$

• C يقع تحت المقارب $\Delta \Leftarrow f(x)-y_\Delta<0$

نأخذ الفرق

ملاحظة

مهم:

متى نطبق مبرهنة الإحاطة؟

$\sin(\mp\infty)$. $\cos(\mp\infty)$

كيف نطبق مبرهنة الإحاطة؟

أياً كان $x \in I$ كان لدينا:

① $\left\{\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos \leq 1 \end{array}\right.$

② $\left\{\begin{array}{l} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{array}\right.$

إيجاد المقارب المائل:

من الشكل: $\Delta: y=ax+b$

لإيجاد a, b:

1 $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a$

2 $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x)-ax)=b$

$y=ax+b$

ملاحظة: e^x ، $\ln x$ ، x^n ، التابعية مستمرة من $\mathbb{R}$ واستقاقيانه على $\mathbb{R}$

ملاحظة: إن أي تابع مجموعة تعريفه هو مجموعة الاستمرار جميع التوابع الجارية

ملاحظة: جميع التوابع عدا الجذري معرف ومستمر واستقاقي على $\mathbb{R}$.

• "التابع الجذري معرف ومستمر"

ملاحظة: في الاستمرار إذا كانت المقام يساوي الصفر نأخذ فيه $x \geq x_0$. $x \geq x_0$

• مجموعة التعريف = مجموعة الاستمرار

f اشتقاقي $\Leftarrow f$ مستمر

ملاحظة: لإيجاد المقاربات الشاقولية والأفقية:

نوجد مجموعة تعريف التابع ونكتبه على شكل مجالات ثم إجراء مجالات نوجد النهاية عند أطراف المجالات المفتوحة

((النهاية التي نحصل عليها نكتب مقاربها))

الاستمرار:

التابع مستمر على مجال ما إذا:

1 استمر عند $x=x_0$:

$x_0 \in I$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2 استمر عند $x=x_0$:

$x_0 \in I$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=f(x_0)$

f مستمر $\Leftarrow$ خطه البياني متصل.

f غير مستمر $\Leftarrow$ خطه البياني متقطع

ملاحظة: إذا كان التابع f مستمراً على مجال عندئذٍ f مستمر عند كل نقطة من المجال والعكس صحيح، إذا كان التابع f مستمراً على مجال عندئذٍ يكون f مستمراً على أي مجال جزئي منه.

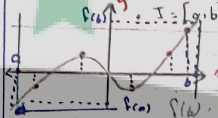
ملاحظة: إذا كان f مستمراً ليس بالضرورة أن يكون اشتقاقياً:

f مستمر $\Leftarrow$
• قد يكون اشتقاقي
• قد لا يكون اشتقاقي

مبرهنة القيمة الوسطى:

• f تابع معرف ومستمر على المجال $I=[a,b]$ ولا محصورين $f(a)$ ، $f(b)$ ،

$y=f(x)$ للمعادلة حل جذر واحد على الأقل من المجال $I=[a,b]$



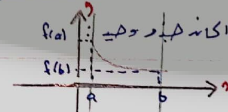
محصور بين $f(a)$ ، $f(b)$؟

① $y=f(x)$: جذر واحد

② $y=f(x)$: جذرين

③ $y=f(x)$: ثلاث جذور

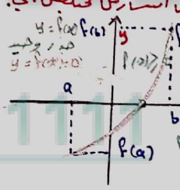
• أما إذا كان جذر وحيد



حالة خاصة: حتى يكون لـ $y=f(x)$ جذر وحيد ضمن المجال $I=[a,b]$ يجب أن نحقق:

① f مستمر ومطرد تماماً على المجال I.

② $f(a)$ ، $f(b)$ من إشارتين مختلفتين أي: $f(a) \times f(b) < 0$



ملاحظة: لإثبات أن المعادلة $g=f(x)$ حلول ضمن مجال I يجب دراسة تغيرات ونستنتج حلول المعادلة

ملاحظة:

التقاطع مع محور الإحداثيات:

1) محور الفواصل xx': $y=f(x)=0$

2) محور التراتيب yy': $x=0 \Rightarrow y=f(0)$

مبرهنات مثلثية:

$\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ $\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=1$

$\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)=1$ $\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\sin ax}\right)=1$

$\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1$ $\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)=1$

$\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{ax}\right)=1$ $\star \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\tan ax}\right)=1$

ملاحظة: عند القسمة على $\boxed{x<0}$ من الملاحظة تقلب جهة التراجح فنطبق هذه الحالة على الضرب أيضاً.

ملاحظة: ليكن D مجال التابع f غير مطرد تماماً ضمن المجال نجزئ المجال إلى مجالات بحيث يكون التابع مطرد على كل مجال جزئي.

ملاحظة: لإثبات أن المعادلة حل وحيد ضمن مجال ما يجب أن يكون مطرد وحتى يكون مطرد نستنتج لمعرفة جهة اطراده.

ملاحظة: لإيجاد "a ، b" في معادلة المقارب المائل $y=ax+b$

*) $a=\lim \frac{f(x)}{x}$

*) $b=\lim f(x)-ax$

تذكرة:

• $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

• $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

• $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc$

• $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ملاحظة: عند الحساب النهاية بقيم أكبر واصغر وظهرت لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نأخذ حالة واحدة فقط.

ملاحظة: لإثبات متراجحة كان فيها $\sin x$ $\cos x$ نستخدم الإحاطة

ملاحظة: $y=0$ مقارب أفقي في xx'

$x=0$ مقارب شاقولي في yy'

دراسة زوجية تابع:

$f(-x) \to$
$= f(x)$ زوجي
$= f(-x)$ فردي
$\neq f(x)$ ، $\neq -f(x)$ لا زوجي لا فردي
$= f(x)$ ، $= -f(x)$ زوجي وفردي

الاشتقاق $f \circ g$ $\frac{x}{z^n}$

خواص الاشتقاقات :

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(c.f)' = c.f'$

قواعد الاشتقاق :

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n x^{-n-1}$

$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$f = g.h \Rightarrow f' = g'h + h'g$

$f = \frac{g}{h} \Rightarrow f' = \frac{g'h - h'g}{(h)^2}$

$f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow f'(x) = a\cos(ax+b)$

$f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow f'(x) = -a\sin(ax+b)$

$f(x) = (ax+b)^n \Rightarrow n(ax+b)^{n-1} a$

$f(x) = g^n(x) \Rightarrow f'(x) = n g^{n-1}(x) . g'(x)$

$f(x) = \tan x \Rightarrow \tan^2 x + 1$ ①

$\frac{1}{\cos^2 x}$ ②

تطبيقات الاشتقاقات :

1 اطراد تابع اشتقاقي :
$f' > 0 \Leftarrow$ f متزايد
$f' < 0 \Leftarrow$ f متناقص

2 مشتق تركيب تابعين :

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) . g'(x)$

3 دراسة قابلية الاشتقاق :

① نشكل تابع التغير : $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

يجب أن يحقق الشرط :

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in R$ ← $f'(x_0)$ موجودة

• f اشتقاقي عند $x = x_0$

4 القيم الحدية :

تذكرة : $f'(a)$: ميل المماس المرسوم عند (a)

① قيمة حدية كبرى $f(a) = b$

② قيمة حدية صغرى $f(a) = b$

ولعب أن تحقق الشرطين :

$f'(a) = 0$, $f(a) = b$

5 إيجاد معادلة المماس :

* يعطينا نقطة ويطلب ميل $m = f'(a)$

* يعطينا ميل ويطلب نقطة

معادلة المماس من الشكل :

* $y - y_0 = m(x - x_0)$

لحساب ميل من نقطتين :

* $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

أي نقطة A تنتمي للمستقيم تحقق معادلته

6 التوابع المثلثية :

تذكرة :

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi K$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi K$

$K = 0, \pm 1, \pm 2 ...$

لحساب نسب لسعيدة "أرباع"

• نحدد الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية

• بدلالة π لا تقلب
بدلالة $\frac{\pi}{2}$ تقلب $\{ \cos x \leftrightarrow \sin x \}$

يمكن حذف عدد زوجي من الدورات

تذكر :

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\sin(x) = -\sin(x)$

دراسة التوابع المثلثية "تحولات" :

① الشرط : $f(x+T) = f(x)$

② دور التابع : $\sin(ax+b) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$

$\cos(ax+b) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$

$\tan(ax+b) \Rightarrow T = \frac{\pi}{a}$

③ مجال الدراسة : $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \cap D$

* إذا كان فردي أو زوجي ودوري
مجال الدراسة $[0, \frac{T}{2}]$

* ما عدا ذلك فندرس على المجال بأكمله
مجال الدراسة $[0, T]$

$f(-x) = $ $f(x)$ زوجي ، $-f(x)$ فردي

إيجاد نهاية تابع بالاعتماد على تعريف العدد المشتق :

نفرض البسط تابع $f(x)$
نحسب $f'(a)$ بالطريقتين ونساوي بينهما

نشتق ونعوض نجد $f'(a)$ = تابع التغير $\lim_{x \to a} g(x)$

إثبات صحة المتراجحة :

ننقل جميع الحدود لطرف واحد نفرضه تابع وندرس اطراده
السطر الثالث تميز الإشارة

ملاحظات :

• في التابع الكسري :
البسط ينعدم ← الإشارة من إشارة البسط ، المقام ينعدم ← الإشارة من إشارة المقام

• عند أطراف المجالات المغلقة هناك قيم حدية

• المقارب المائل $y = ax + b$ لحساب نطلق لرسمه

• في التابع الكسري :
المقارب المائل هو قسمة البسط على المقام بشرط أن يكون البسط أكبر من المقام بدرجة واحدة

• المشتق انعدم وغير إشارته
مماس أفقي

المشتق غير إشارته دون أن ينعدم
مماس شاقولي

المشتق انعدم وما غير إشارته
نقطة انعطاف / تموج

• عندما $m = 0 \Leftrightarrow$ هناك مماس أفقي

• إذا كان التابع $f(x)$ من درجة ثانية فمنحني أما إذا كان درجة أولى فهو مستقيم

• مجموعة تعريف المشتق لا تميز قابلية الاشتقاق

• الميل هو قيمة المشتق عند نقطة التماس

• g مقصور f مجموعة تعريف g من f "محتواة"

f أمدد g

• لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع المنحني نحل المشترك .

• أكبر قيمة للتابع هي قيمة كبرى محلية

• نبرهن أن التابع متناظر بالنسبة لـ (x_0, y_0)

① إذا كان $x \in I$ كان $(2x_0 - x) \in I$

② $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ، $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ أو $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

• إذا كان المشتق فوق محور الفواصل فالمشتق موجب فالتابع متزايد خطه البياني صاعد

• إذا كان المشتق تحت محور الفواصل

$\ln$ التابع اللوغاريتمي $\log$

يدعى بالتابع اللوغاريتمي النيبري: $f(x) = \ln(x)$

- هو تابع معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$: $x>0$
- $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \to \ln(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{x} \Leftarrow x>0 \Leftarrow f'(x)>0$
- $\ln(1)=0$ ، $\ln(e)=0$
- التابع متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
- مشتقه: مشتق ما داخل اللوغاريتم على ما داخل اللوغاريتم.

خواص

$x=1 \Longleftrightarrow \ln(x)=0$

$x>1 \Longleftrightarrow \ln(x)>0$

$0<x<1 \Longleftrightarrow \ln(x)<0$

$x_1=x_2 \Longleftrightarrow \ln(x_1)=\ln(x_2)$

$x_1>x_2 \Longleftrightarrow \ln(x_1)>\ln(x_2)$

$x_1<x_2 \Longleftrightarrow \ln(x_1)<\ln(x_2)$

$\ln(e^x) = x$

$e^{\ln x} = x$

خواص أساسية

- $\ln(a.b) = \ln(a)+\ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b)$
- $\ln(a)^n = n\ln(a)$
- $\ln\sqrt{a} = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1)-\ln(b) = -\ln b$
- $(y=\ln(x) \Longleftrightarrow x=e^y)$
- $\ln\sqrt[n]{a} = \ln(a)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln(a)$

إيجاد مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي

$f(x) = \ln(x) : x>0$

$f(x) = \ln(g(x)) : g(x)>0$

"أي يكون ما بعد اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر"

دراسة إشارة التابع اللوغاريتمي

نقارن ما داخل اللوغاريتم بـ (1)

- أكبر من الواحد
  اللوغاريتم موجب
- أصغر من الواحد
  اللوغاريتم سالب
- يساوي الواحد
  اللوغاريتم معدوم

حل المعادلة اللوغاريتمية

$\underbrace{\ln f(x)}_{I_1} = \underbrace{\ln g(x)}_{I_2}$

- $I = I_1 \cap I_2$
- نحل المعادلة $f(x) = g(x)$
- حلول المعادلة في $\mathbb{R}$.

حل المتراجحة اللوغاريتمية

$\underbrace{\ln f(x)}_{I_1} \leq \underbrace{\ln g(x)}_{I_2}$

- $I = I_1 \cap I_2$
- J : $f(x) \leq g(x)$
- حلول المتراجحة اللوغاريتمية: $S = I \cap J$

ملاحظات النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^>} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^>} x\ln(x) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{\ln(1+ax)} = 1$

أسوديز حجي بالسي

اللام قوة

$\lim\limits_{x\to\infty} x^n \ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$

لإيجاد نهاية التابع اللوغاريتمي نوجد نهاية ما بعد اللوغاريتم ونأخذ لوغاريتم النهاية التي حصلنا عليها

ملاحظات:

- للتحويل من اللوغاريتم للأسي أي للتخلص من اللوغاريتم. نأخذ e للطرفين.
- للتحويل من الأسي إلى اللوغاريتمي أي للتخلص من الـ (e) نأخذ لوغاريتم الطرفين.
- لا يجوز تطبيق أي خاصة من التابع اللوغاريتمي إلا بعد إيجاد مجموعة التعريف لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي قبل تطبيق الخاصة تختلف عن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي بعد تطبيق الخاصة.
- إذا كان ما بعد اللوغاريتم تربيع أو قيمة مطلقة مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}$ عدا القيم التي تعدم ما بعد اللوغاريتم.
- إذا كان ما بعد اللوغاريتم تابع كسري متراجحة أكبر من الصفر، أما إذا كان معادلة درجة ثانية أو تابع كسري ندرس الإشارة. أي نعدم ما بعد اللوغاريتم

- لحل متراجحة لوغاريتمية نكتفي بإيجاد مجموعة تعريف الطرف الأصغر للمتراجحة والذي يمثل مجموعة تعريف المتراجحة.
- الفرق من الشيوات والإجراءات بالمثل؟ نولد النهايات.
- المقام موجب ⇐ إذاً نسحب المقدار من إشارة البسط

$\ln(10) = 2.3$ ، $\ln(2) = 0.7$ ، $\ln 1 = 0$ ، $\ln(4) = 1.4$ ، $\ln(3) = 1.1$ ، $\ln(e) = 1$ ، $\ln(5) = 1.6$

- لا ننسى بأخذ لوغاريتم الطرفين قبل التعيين بأنه المقدارين موجبين تماماً.
- إذا لم نستطع أن نرسم منحني مقرونه تابع جديد ندرس تغيراته لنعرف إشارته.
- حتى يتحول تابعان يقبلان لمماس مشترك عند نقطة مشتركة $A(x_0, y_0)$.

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

- ما مالتا f و g وكانت $f(x) > g(x)$ ⇐ إن الخط البياني C_f يقع فوق الخط البياني C_g.
- ① لا ندرس النهايات لمعرفة الوضع النسبي لمقارب ما نأخذ الفرق ونفرضه تابع وندرس تغيراته
- ② نقارن ما بعد اللوغاريتم مع الواحد. $\ln(X)$
  $X>1$ فوق المقارب
  $X<1$ تحت المقارب

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\ln(1+ax)} = 1$

اللهم قوة

$\lim_{x\to\infty} x^n \ln x = 0$

أستودعتك حبي يالله

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$

لإيجاد نهاية التابع اللوغاريتمي نوجد نهاية ما بعد اللوغاريتم ونأخذ لوغاريتم النهاية التي حصلنا عليها

ملاحظات:

* للتحويل من اللوغاريتم للأسي أي للتخلص من اللوغاريتم: نأخذ (e) للطرفين.

* للتحويل من الأسي إلى اللوغاريتمي أي للتخلص من الـ (e) نأخذ لوغاريتم الطرفين.

* لا يجوز تطبيق أي خاصة على التابع اللوغاريتمي إلا بعد إيجاد مجموعة التعريف لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي قبل تطبيق الخاصة تختلف عن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي بعد تطبيق الخاصة.

* إذا كان ما بعد اللوغاريتم تربيع أو قيمة مطلقة مجموعة تعريف التابع R عدا القيم التي تعدم ما بعد اللوغاريتم.

* إذا كان ما بعد اللوغاريتم تابع نسبياً متراجحة أكبر من الصفر، أما إذا معادلة وحيدة شاملة أو تابع كسري ندرس إشارة، أي نعدم ما بعد اللوغاريتم

* لحل متراجحة لوغاريتمية نكتفي بإيجاد مجموعة تعريف الطرف الأصغر للمتراجحة والذي يمثل مجموعة تعريف المتراجحة.

* الفرق بين المشتقات والأطراف أنه بالمشتقة نوحد النهايات.

* العامل موجب => إذا الشارة المضاد دون الشارة السط

$\ln(10) = 2.3$ $\ln(2) = 0.7$ $\ln 1 = 0$

$\ln 4 = 1.4$ $\ln(3) = 1.1$ $\ln(e) = 1$

$\ln(5) = 1.6$

* لا نباشر بأخذ لوغاريتم الطرفين قبل التقسيم بأن نكون متأكدين أنهما موجبين تماماً.

* إذا لم نستطع أن نعدم مستقيم متراجحة تابع جديد وندرس تغيراته لنعرف إشارته.

* حتى يكون تابعان يقبلان مماساً مشتركاً عند نقطة مشتركة $A(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

* تابعان f و g وكان $f(x) > g(x)$ => إن الخط البياني C_f يقع فوق الخط البياني C_g.

* طرائق التأكد لمعرفة الوضع النسبي لمقارب
① ما نأخذ الفرق ونفرضه تابع وندرس تغيراته

② نقارن ما بعد اللوغاريتم مع الواحد $\ln(X)$.
$X > 1$ فوق المقارب
$X < 1$ تحت المقارب

التابع الأسي

تعريف: يدعى التابع الأسي النيبري هو التقابل العكسي للتابع اللوغارتمي.

« $f(x) = e^x$ »

- $f: R \to]0,\infty[: x \to e^x$
- أياً كانت $x \in R$ كان $e^x > 0$
- يُكتب بالشكل: $exp(x) = e^x$

خواص

1- $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

2- $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

3- $0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

4- $e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

5- $e^{x_1} > e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

6- $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

قواعد عامة

1- $e^a . e^b = e^{a+b}$

2- $(e^a)^b = e^{a.b}$

3- $e^a = \frac{1}{e^{-a}}$

4- $(e^a)^b = (e^b)^a$

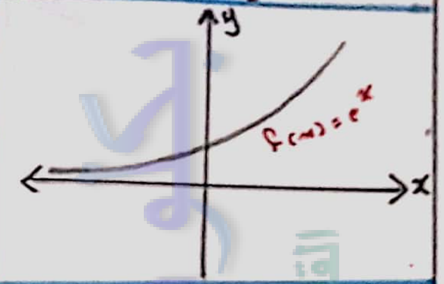
5- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

6- $\frac{e^a}{e^b} = e^a . e^{-b}$

7- $e^{\ln(a)} = a$

8- $\ln(e^a)^a = a$

خطه البياني: $f(x) = e^x$



مجموعة تعريف:

مجموعة تعريف التابع الأسي هو مجموعة تعريف الأس.

$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$

مشتق التابع الأسي:

مشتقه هو مشتق الأس بالتابع نفسه.

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$

حل المعادلة الأسية

$\underset{I_1}{e^{g(x)}} = \underset{I_2}{e^{f(x)}}$

1) $I = I_1 \cap I_2$

2) $g(x) = f(x)$

3) $x \in I$ مقبول ، $x \notin I$ مرفوض

حل المتراجحة الأسية

$\underset{I_1}{e^{g(x)}} \geq \underset{I_2}{e^{f(x)}}$

1) $I = I_1 \cap I_2$

2) $g(x) \geq f(x)$ حل المتراجحة J

3) $x \in (I \cap J)$ حل المتراجحة.

نهايات التابع الأسي:

$\lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0$	$\lim_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^n}{e^x}\right) = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$
$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$	$\lim_{x \to -\infty} (x^n . e^x) = 0$
	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = 1$

ملاحظة حول هذه النهاية:

- $\lim_{x \to -\infty} (x^n . e^x) = 0$ → 0^+ n زوجي ، → 0^- n فردي

النهايات المميزة

$\lim_{x \to 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = e$

متى نستخدم النهاية المميزة؟

- $(عدد)^{\mp\infty}$
- $(0)^0$
- $(\mp\infty)^{+\infty}$

كل تابع من النمط a^x يكتب بالشكل:

$a^x = e^{x \ln(a)}$

« e الأس باللوغاريتم الأساس »

المعادلات التفاضلية

تعريف: هي كل معادلة تحوي مشتقاً واحداً على الأقل بالنسبة لتابع مجهول y :

لحل المعادلة التفاضلية:

$y' = ay \Rightarrow y = Ke^{ax}$

$y' = ay + b \Rightarrow y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

ملاحظات:

1) الذي د نهاية التابع الأسي نوجد نهاية الأس ثم نأخذ e النهاية

2) المشتق المعدوم غير المغير إشارته يوجد مماس أفقية

3) لحساب المماس $y = V_6$ بـ (194) تدرب

إذا كانت (V_2) قيمة كبرى محلية ⇐ المنحني تحت المماس.

إذا كانت قيمة صغرى محلية ⇐ المنحني فوق المماس.

4) $e^{g(x)} = \square$ → سالب ، صفر ⇐ إنها مستحيلة الحل

5) لنتخلص من الـ (e) نأخذ لوغارتم والعكس صحيح

6) مشتق أسه بنفسه

7) أي مقدار أسه رتبته غير واضحة ندرس اطراده.

8) النقطة التي ينعدم فيها المشتق الثاني نغير جهة تقعر المنحني

« تابع القيمة المطلقة »

9) استنتاج تابع القيمة المطلقة

- الجزء الذي يقع فوق محور الفواصل منطبق
- الجزء الذي يقع تحت محور الفواصل نأخذ نظيره بالنسبة لمحور الفواصل

نتيجة:

الخط البياني لتابع القيمة المطلقة هو موجب دوماً يقع فوق محور الفواصل

10) لدراسة الوضع:

إذا كانت النهايات أعداداً حقيقية نعوض عن الفرق.

إذا كانت النهايات $\pm\infty$ نعوض عن المشتق الثاني.

- نختار رقمية قبل الصفر ورقمية بعد الصفر لمعرفة إشارة المشتق الثاني

ملخص الأفكار الأشعة "ملاحظات"

العمليات على الأشعة

علاقة شال

مجموع شعاعين متتاليين هو شعاع بدايته بداية الأول ونهايته نهاية الشعاع الثاني

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

تعميم:

مجموع عدة أشعة متتالية هو شعاع بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الأخير

قاعدة متوازي الأضلاع

مجموع شعاعين لهما المبدأ ذاته هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ من هذين الشعاعين.

الارتباط الخطي

"$\vec{U}, \vec{V}$ مرتبطين خطيا"

- $\vec{U} \parallel \vec{V}$
- $\vec{U} = \lambda \vec{V}$ أو $\vec{V} = \lambda \vec{U}$; $\lambda \in R$
- $\vec{U}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{V}(x_2, y_2, z_2)$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

$\Rightarrow$ الأشعة $\vec{U}, \vec{V}$ "مرتبطة خطيا"

(A, B, C)

تعين شعاعين:

- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ "مرتبطان خطيا"
  - $\Leftarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$
  - $\Leftarrow$ A, B, C تقع على استقامة واحدة.
  - $\Leftarrow$ تعين مستقيم.
- AB, AC "غير مرتبطان خطيا"
  - $\Leftarrow$ ABC لا تقع على استقامة واحدة.
  - $\Leftarrow$ تعين مستوي.

(A, B, C, D)

تعين ثلاث أشعة:

- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ "مرتبطة خطيا"
  - $\Leftarrow$ إن النقاط A, B, C, D تقع في مستو واحد.
- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة
  - $\Leftarrow$ إن النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوي واحد.

فوائد الارتباط الخطي لـ 3 أشعة

المستوي ABC "مجموعة النقاط M المعرفة وفق:"

علاقة الارتباط (($\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$)) ماذا تفيد؟؟

- الارتباط الخطي لثلاث أشعة
- وقوع نقاط في مستوي واحد
- وجود معادلة المستوي ABC
- المستقيم يوازي المستوي

لتكن الأشعة $\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}$ "مرتبطة خطيا"

$\Leftarrow$ $\vec{U}, \vec{V}$ غير مرتبطين خطيا" "$\vec{W} = a\vec{U} + b\vec{V}$"

المعلم المتجانس في المستوي

لدينا: $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$

مركبات الشعاع AB:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

طويلة الشعاع AB:

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

احداثيات منتصف AB.

$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

المعلم المتجانس في الفضاء

لدينا: $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$

مركبات الشعاع AB:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

طويلة الشعاع AB.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

احداثيات منتصف AB.

$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

ملخص حول إيجاد معادلة مستوي

تعريف المستوي: مجموعة غير منتهية من النقاط ممتدة بلا حدود لجميع الاتجاهات تُمثل بجزء منه على شكل متوازي أضلاع نرمز له بالرمز (Q, P, R)
- هو مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة: $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ أو $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$

كيف نعين المستوي ؟؟
1) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة
2) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه
3) مستقيمين متوازيين ، مستقيمين متقاطعين

إيجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط: (دورات)

A, B, C

نحسب $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$

$\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً ، نفرض أنه $\vec{n}(a, b, c)$ ناظمي المستوي P

$n \cdot AB = 0$ ... معادلة ①

$n \cdot AC = 0$ ... معادلة ②

نختار $c = 1$ ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها نحصل على a, b ومنه أصبح الناظم معلوم $\vec{n}(a, b, c)$

معادلة المستوي:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

إيجاد معادلة مستوي مار من نقطة ويوازي شعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$: (دورتين)

*) الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

نفرض أنه $\vec{n}(a, b, c)$ ناظمي المستوي P

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ .... معادلة ①

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .... معادلة ②

نختار $c = 1$ ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها ونحصل على a, b ومنه أصبح الناظم معلوم.

$\vec{n}(a, b, c)$

معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

حيث: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ النقطة المعلومة المار منها المستوي

إيجاد معادلة مستوي مار من نقطة ويعامد مستويين: (٣ دورات)

$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

n_1 ناظمي P_1 : $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$

n_2 ناظمي P_2 : $\vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$

$\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطياً

نفرض أنه $\vec{n}(a, b, c)$ ناظمياً على P.

$\vec{n_1} \cdot \vec{n} = 0$ .... معادلة ①

$\vec{n_2} \cdot \vec{n} = 0$ .... معادلة ②

نختار $c = 1$ ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها ونحصل على a, b ومنه أصبح الناظم معلوم $\vec{n}(a, b, c)$

معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

حيث: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ النقطة المعلومة المار منها المستوي.

إيجاد معادلة مستوي مار من نقطتين ويعامد مستوي: (دورة 2019)

$P: a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

n_1 ناظمي P : $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$

$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\vec{n_1}$ ، AB غير مرتبطين خطياً

نفرض أنه $n(a, b, c)$ ناظماً على P.

$\vec{n} \cdot \vec{n_1} = 0$ .... معادلة ①

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ .... معادلة ②

نختار $c = 1$ ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها نحصل على a, b ومنه أصبح الناظم معلوم $\vec{n}(a, b, c)$.

معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

إيجاد معادلة مستوي مار من نقطة ويوازي مستوي:

$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ ناظم على P_1 ، عندئذ

$\vec{n} = \lambda n_1 \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}^*$

$\vec{n} = 1 \cdot n_1 = \vec{n_1}$

معادلة المستوي المطلوب

$$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

معادلة المستوي المحوري للقطعة [AB]:

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

نفرض أنه $M(x, y, z)$ نقطة من المستوي المحوري عندئذٍ

$AM = BM$

$AM^2 = BM^2$

نعوض ونختصر لنحصل على المطلوب.

إيجاد معادلة مستوي كمتقاطع مستقيمين:

*) نعين نقطة تقاطع المستقيمين ولتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$

*) نعين أشعة التوجيه للمستقيمين $\vec{v_1}$ ، $\vec{v_2}$

*) نفرض أنه $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً على المستوي:

$\vec{n} \cdot \vec{v_1} = 0$ ..... معادلة ①

$\vec{n} \cdot \vec{v_2} = 0$ .... معادلة ②

ثم نعين الناظم

$\vec{n}(a, b, c)$

معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ملخص حول إيجاد معادلة مستقيم

المستقيم: هو مجموعة النقاط M المعرفة بالعلاقة $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$

مار من نقطتين A , B.
شعاع التوجيه $\vec{v} = \vec{AB} = (a, b, c)$

$$L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

مار من نقطة A ويوازي شعاع $\vec{v}(a, b, c)$.

$$L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \ ; \lambda \in [0, +\infty[\\ z = z_0 + c\lambda \end{cases}$$

مار من نقطة A ويعامد مستوي:
$P: ax + by + cz + d = 0$
ناظم P $\vec{n}(a, b, c)$

$$L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \ ; \lambda \in [0, 1] \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases}$$

فصل مشترك لمستويين:

$$\begin{cases} P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

نفرض $z = t$ وسيط ونعوض للحصول على معادلتين:

$a_1x + b_1y = -c_1t - d_1$
$a_2x + b_2y = -c_2t - d_2$

للحصول على x, y بدلالة t وضمنه

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases}$$

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي

الأوضاع النسبية $\boxed{1}$

- $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow d \parallel P$ المستقيم يوازي المستوي
- $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0 \Rightarrow$ d قاطع للمستوي
- $d \perp P \Leftrightarrow \vec{n}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً.

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنميز ثلاث حالات:

$P: ax + by + cz + d = 0$ معادلة المستوي

$$d \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \ ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases}$$ التمثيل الوسيطي للمستقيم

$\boxed{1}$ ظهور النتيجة $0 = 0$ $\Leftarrow$ المستقيم محتواة في المستوي.
$\boxed{2}$ ظهور النتيجة عدد $= 0$ $\Leftarrow$ المستقيم يوازي المستوي.
$\boxed{3}$ ظهور النتيجة عدد $= t$ $\Leftarrow$ المستقيم قاطع للمستوي.

مركز الأبعاد المتناسبة

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين
(A, α) , (B, β)
هو النقطة الوحيدة:
$(G, \alpha + \beta)$
- $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$

أو
- $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$

مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:
(A, α) , (B, β) , (C, γ)
هو النقطة الوحيدة:
$G(\alpha + \beta + \gamma)$
$\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$
أو $\vec{AG} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$
شرط $\alpha = 1 - \beta - \gamma$

ملاحظة
إذا كان للنقطتين A, B الثقل نفسه.
فإن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين هو منتصف $[AB]$
ومركز الأبعاد يقع في المنتصف حينئذ.
((والعكس))

الخاصة التجميعية
إذا كانت I مركز أبعاد متناسبة
لـ A_1 , A_2.
وكانت J مركز أبعاد متناسبة
لـ B_1 , B_2
$\Leftarrow$ M مركز أبعاد متناسبة لـ I, J
$\Leftarrow$ M مركز أبعاد متناسبة لـ
A_1 , A_2 , B_1 , B_2
((وبالعكس))

معادلة الدائرة

$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
المركز: (x_0, y_0) / نصف القطر: R
$C: x^2 + y^2 = R^2 \Leftarrow O(0, 0)$

معادلة الكرة

$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
المركز $O(x_0, y_0, z_0)$ / نصف القطر: R
$S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftarrow O(0, 0, 0)$

خواص الأشعة

$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$
$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)$
$a \cdot \vec{u} = (ax_1, ay_1, az_1)$

حالات الجداء السلمي

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

• يستخدم في حال معرفة طويلة مجموع الشعاعين وطويلة كل شعاع على حدى.

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$.

• يستخدم في حالة وجود زاوية بين الشعاعين $\vec{u}\cdot\vec{v}$ وطويلة $\vec{u}\cdot\vec{v}$ معلومتان.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v} =$

في المستوي: $\vec{u}(x_1, y_1), \vec{v}(x_2, y_2)$

في الفضاء: $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

• نستخدم في حال معرفة مركبات كل من الشعاعين $\vec{u}\cdot\vec{v}$

4. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

في المستوي: $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

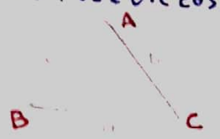
في الفضاء: $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

تطبيقات

علاقة الكاشي في المثلث

مربع طول أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع طولي الضلعين الباقيين ناقص ضعف جداء الضلعين في cos الزاوية المحصورة بينهما

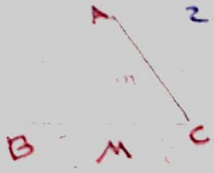
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cos A$



مبرهنة المتوسط

مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي ضعف مربع طول الخط المتوسط في المثلث زائد مربع الضلع الباقية على (2).

$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$



في متوازي الأضلاع

مجموع مربعات أطوال الأضلاع يساوي مجموع مربعي طولي القطرين.

بعد نقطة عن مستقيم.

$M(x_0, y_0)$ و $d: ax+by+c=0$

$$dist(M.d) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

"يستخدم في المستوي"

بعد نقطة عن مستوي.

$A(x_0, y_0, z_0)$, $P: ax+by+cz=0$

$$dist(A.P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خواص الجداء السلمي:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
- $(a\cdot\vec{u})(b\cdot\vec{v}) = (a\cdot b)(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

2 الوضع النسبي لمستويين:

$P_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$

$P_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$

• $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow P_1 \parallel P_2$

• $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0 \Leftarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftarrow P_1 \perp P_2$

• $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ غير مرتبطان خطياً $\Leftarrow P_1, P_2$ متقاطعان

الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء:

$d_1: \begin{cases} x = x_0 + a_1\lambda \\ y = y_0 + b_1\lambda \; ; \; \lambda \in R \\ z = z_0 + c_1\lambda \end{cases}$ $\quad \vec{u_1}(a_1, b_1, c_1)$

$d_2: \begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 + b_2 t \; ; \; t \in R \\ z = z_0 + c_2 t \end{cases}$ $\quad \vec{u_2}(a_2, b_2, c_2)$

* $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow d_2 \parallel d_1$

* $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ غير مرتبطان خطياً $\Leftarrow d_1, d_2$ غير متوازيين وهنا نميز حالتين:

3

A : d_1, d_2 يشتركان بنقطة واحدة "بالحل المشترك" نستنتج أن d_1, d_2 متقاطعين "غير متوازيان يقعان في مستوٍ واحد"

B : d_1, d_2 لا يشتركان بأي نقطة نستنتج أن d_1, d_2 غير متقاطعين "متخالفين" "غير متوازيان ولا يقعان في مستوٍ واحد" "متخالفين"

فوائد مراكز الأبعاد المتناسبة

- إثبات ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة
  * إذا كانت نقطة مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين.
- إثبات تقاطع مستقيمين
- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوي واحد
  * إذا كانت نقطة مركز أبعاد متناسبة لثلاث نقاط عندئذ النقاط تقع في مستوي واحد.

مراجعات نظرية في الأشعة
"الهندسة"

1) الشعاع $\vec{AB}$: بدايته A ونهايته B اتجاهه من A إلى B، طويلته هي المسافة بين A و B ويرمز لها بـ $\|AB\|$.
أما الحامل: هو المستقيم الموازي لـ AB "الحامل"

2) الشعاع الصفري: وتكون بدايته منطبقة مع نهايته، وليس له اتجاه ولا طويله ولا منحى

3) الشعاع المعاكس: هو شعاع طويلته تساوي الشعاع $\vec{AB}$ ولهما المنحى ذاته والاتجاه معاكس أي من B إلى A وناتج جمعهما يساوي الصفر.

4) الأشعة المتساوية: يتساوى شعاعان إذا كان لهما الطول والجهة والمنحى ذاته

5) متوازي السطوح: كل وجهين متقابلين مستطيلين ومتوازيين ومطبوقان، الأبعاد هي طول وعرض وارتفاع.

6) المكعب: متوازي مستطيلات متساوي الأبعاد الثلاث، وفي المكعب الأوجه الستة مربعات ومطبوقات وله ستة أوجه والأحرف الـ 12 متساوية

7) متوازي الأضلاع: شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين قطراه متناصفان وبالعكس إذا تناصفا قطرا شكل رباعي كان متوازي أضلاع.

8) المستطيل: هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة أو شكل رباعي جميع زواياه قائمة وقطراه متناصفان ومتساويان في الطول.

9) المربع: هو مستطيل تساوت أبعاده "الطول والعرض"

10) المعين: متوازي أضلاع تساوت فيه طولا ضلعين متجاورين.

11) شبه المنحرف: فيه ضلعين متقابلين متوازيين غير متساويين، هما قاعدتا شبه المنحرف، ارتفاع شبه المنحرف هو البعد بين القاعدتين. $S = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$ l طول القاعدة

12) قاعدة المتوسط في الأشعة: مجموع طولي ضلعين في مثلث يساوي ضعف طول الخط المتوسط "كأشعة وليس كقيم جبرية"

13) خاصية مهمة: المتوسطات في المثلث تلتقي في نقطة واحدة، فتقسم المتوسط إلى جزئين إحداهما ضعف الآخر والجزء الذي يستند إلى الضلع هو الجزء الأقصر والجزء الذي يستند إلى الزاوية هو الجزء الأطول

14) ملاحظة: مجموع أبعاد متوازي المستطيلات يساوي طول قطر متوازي المستطيلات.

مراجعات نظرية في الأسئلة
"الهندسة"

1) **الشعاع $\overrightarrow{AB}$**: بدايته A ونهايته B اتجاهه من A إلى B، طويلته هي المسافة بين A و B ويرمز لها بـ $\|\overrightarrow{AB}\|$.
أما الحامل: هو المستقيم الموازي لـ AB "الحامل"

2) **الشعاع الصفري**: وتكون بدايته منطبقة على نهايته، وليس له اتجاه ولا طويلة ولا منحى

3) **الشعاع المعاكس**: هو شعاع طويلته تساوي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ولهما المنحى ذاته والاتجاه معاكس أي من B إلى A وناتج جمعهما يساوي الصفر.

4) **الأشعة المتساوية**: يتساوى شعاعان إذا كان لهما الطول والجهة والمنحى ذاته

5) **متوازي السطوح**: كل وجهين متقابلين مستطيلين ومتوازيين ومتطابقان، أبعاده هي طول وعرض وارتفاع.

6) **المكعب**: متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاث، وفي المكعب الأوجه الستة مربعات متطابقات وله ستة أوجه والأحرف الـ 12 متساوية

7) **متوازي الأضلاع**: شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين قطراه متناصفان وبالعكس إذا تناصفا قطرا شكل رباعي كان متوازي أضلاع.

8) **المستطيل**: هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة أو شكل رباعي جميع زواياه قائمة وقطراه متناصفان ومتساوية من الطول.

9) **المربع**: هو مستطيل تساوت أبعاده "الطول والعرض"

10) **المعين**: متوازي أضلاع تساوت فيه طولا ضلعين متجاورين.

11) **شبه المنحرف**: فيه ضلعين متقابلين متوازيين غير متساويين، هما قاعدتا شبه المنحرف، ارتفاع شبه المنحرف هو البعد بين القاعدتين. $S = \frac{\ell_1+\ell_2}{2}.h$ ℓ أطوال القاعدة

12) **قاعدة المتوسط في الأشعة**: مجموع طولي ضلعين في مثلث يساوي ضعف طول الخط المتوسط "كأشعة وليس كقيم جبرية"

13) **خاصية مهمة**: المتوسطات في المثلث تلتقي في نقطة واحدة، فتقسم المتوسط إلى جزئين إحداهما ضعف الآخر والجزء الذي يستند إلى الضلع هو الجزء الأقصر والجزء الذي يستند إلى الزاوية هو الجزء الأطول

14) **ملاحظة**: مجموع أبعاد متوازي المستطيلات يساوي طول قطر متوازي المستطيلات.

تعاريف وملاحظات

- **الدائرة**: مجموعة نقاط المستوي التي تبعد عن نقطة ثابتة مسافة ثابتة، النقطة الثابتة هي مركز الدائرة والمسافة الثابتة هي نصف قطر الدائرة.
- **الكرة**: هي مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن نقطة ثابتة هي مركز الكرة مسافة ثابتة هي نصف قطر الكرة.
- أي نقطة تنتمي إلى المستوي المحوري لقطعة مستقيمة تكون متساوية البعد عن طرفي هذه أي المسافة ذاتها
- إن أي نقطتين من المستوي يعينان مستقيم محتواة في المستوي
- إذا اشترك مستقيمين بنقطة يكون المستقيمين متقاطعين.
- إذا اشترك مستقيمين بأكثر من نقطة يكون المستقيمين منطبقين.
- إذا اشترك مستويين مختلفين بنقطة كان لهما مستقيم مشترك وحيد مار بتلك النقطة ندعوه (الفصل المشترك للمستويين)
- إذا اشترك المستويين بأكثر من نقطتين يكون المستويان منطبقين.
- النقطة تقسم المستقيم إلى قسمين نسمي كل قسم منه نصف مستقيم: له بداية وليس له نهاية.
- **القطعة المستقيمة**: جزء من مستقيم محدد بنقطتين له بداية وله نهاية.
- المستقيم يقسم المستوي إلى قسمين نسمي كل جزء نصف مستوي.
- **المستوي المحوري**: المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو المستوي العمودي على القطعة المستقيمة في المنتصف "يقطعها إلى مستقيمين متساويين"
- **خاصية**: أي نقطة من المستوي المحوري تكون متساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة والعكس صحيح
- **ملاحظة**: مركز ثقل رباعي الوجوه هو مركز أبعاد متناسبة لرؤوس رباعي الوجوه ذات التثقيلات المتساوية.
  (A, α) (B, β) (C, γ) (D, δ) ؛ α = β = γ = δ = 1
- أي نقطة متساوية البعد عن نقطتين هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين.
- إذا كانت تثقيلات النقاط متساوية
  α = β = γ = δ
  ⇐ هناك نقطة هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط المتساوية
- مركز ثقل المثلث هو مركز أبعاد متناسبة للنقاط المتساوية التثقيلات
- إذا كانت النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين J و I فإن (G, I, J) تقع على استقامة واحدة

- يمكن إثبات توازي مستقيم ومستوي بإثبات أن شعاع التوجيه للمستقيم مرتبط خطياً بشعاعين متقاطعين من المستوي وبذلك يكون المستقيم والمستوي متوازيان والأشعة الثلاث في مستوٍ واحد
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث، توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها.
- لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات أن واحدة من النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الأخرى وذلك حسب تعريف مركز الأبعاد المتناسبة يفيد ذلك في إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة وذلك بكتابة أحد الأشعة الناتجة بدلالة الشعاعين الباقيين.
- لإثبات تقاطع مستقيمين وليكن d, d' نثبت أنهما غير مرتبطان خطياً ثم أنهما يقعان في مستوٍ واحد "في الفضاء"
  (غير متوازيان ⇐ متقاطعان)
- عندما نسقط شعاعاً ما على شعاع آخر في علاقة جداء شعاعين لابد أن يكون الشعاع الذي نسقط عليه موجود ضمن العلاقة الشعاعية.
- لا يمكن أن نقول عن الزاوية θ إنها زاوية محصورة بين الشعاعين إلا إذا كان لهما المبدأ ذاته.
- $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان مرتبطان خطياً $\Leftarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$
  إذا كانا بجهة واحدة $\Leftarrow \theta = 0$
  $\Leftarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
  إذا كانا بجهتين مختلفتين $\Leftarrow \theta = \pi$
  $\Leftarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
- في رباعي الوجوه المنتظم: كل حرفين متقابلين متعامدين.
- شرط انطباق مستويين:
  $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
  شرط التوازي:
  $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
- المستوي العمودي على مستويين متقاطعين عمودي على فصلهما المشترك.
- المعادلة الخطية تحوي مجاهيل من الدرجة الأولى بمعنى لا يجوز أن يكون قيمتين للمجهول.
- ارتفاع الهرم حيث هو البعد بين الرأس إلى القاعدة.
- مركز الثقل للمثلث ABC هو
  $$G = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$
- مركز ثقل رباعي الوجوه هو مركز توازنه هو مركز أبعاد متناسبة لرؤوس رباعي الوجوه.

حل جملة معادلات خطية

"الحذف بالتعويض"

①

②

③

- نأخذ جملة مؤلفة من معادلتين ليكن 3،2
- نتخذ أحد المجاهيل وسيطاً ونوجد قيمة المجهولين الباقيين بدلالته من المعادلتين اللتين اخترناهما.
- نعوض قيم x ، y في المعادلة التي لم نخترها في الخطوة الأولى
- بعد تعويض قيم x ، y في المعادلة الأخيرة نحصل على معادلة بدلالة z فقط : نميز ثلاث حالات:

* عدد $= z$ للجملة حل مشترك وحيد
* $0 = 0$ للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول وتكون حلول المعادلة قيم x ، y
* $0 =$ عدد مستحيلة الحل، وليس للجملة حل ⇐ مجموعة الحلول $S = \{\emptyset\}$

"الحذف بالجمع"

①

②

③

- نختار جملة مؤلفة من أمثال متشابهة ونحذف مجهولين عن طريق جمعها الوسيط الذي نختاره "معادلتين"
- واحدة من المعادلتين في الجملة السابقة نجمعها مع المعادلة الثالثة التي لم نخترها بحيث نحذف نفس الوسيط ذاته أيضاً عن طريق جمعهما.
- نكون قد حصلنا على معادلتين بمجهولين الأولى ناتجة من الخطوة الأولى والثانية ناتجة من الخطوة الثانية
- نوجد أمثال أحد المجهولين في المعادلتين الناتجتين ونجمعهما معاً، ليبقى في الناتج مجهول واحد فقط معلوم القيمة.
- نوجد باقي المجاهيل بتعويض قيمة في أي من المعادلات

"لا يجوز استخدام سوى جمع المعادلات"

"غاوس"

①

②

③

- نرتب المعادلات لتكون أول واحدة هي التي تحوي الحد الزائد "مجهول أمثاله (1)"
- نحول المعادلة الأولى إلى شكلين جديدين بحيث يكون أمثال الحد الزائد في الشكل الأول معاكسين لأمثال الحد نفسه في المعادلة الثالثة.
- نجمع كل شكل من الشكلين مع المعادلة المناسبة.
- نحصل على $\boxed{3}$ معادلات :

* الأولى التي تحوي الحد الزائد التي لم يطرأ عليها تغيير.
* الثانية ناتجة عن جمع الشكل الأول مع المعادلة المعاكسة له
* الثالثة الناتجة عن جمع الشكل الثاني مع المعادلة المعاكسة له

- هكذا يكون لدينا المعادلتين الجديدتين تحويان مجهولين فقط نغير أمثال أحدهما في المعادلتين ونجمعهما فنحصل على قيمة أحد المجاهيل، نعوض للتعويض قيمته في المعادلة التي قبلها ثم التي قبلها لنحدد قيم جميع المجاهيل.

الأعداد العقدية

نظرة عامة عن الوحدة:

• رمز المجموعة $\mathbb{C}$

• نرمز بـ i للعدد التخيلي الذي يحقق $\boxed{i^2=-1}$

الشكل الجبري لعدد عقدي:

من الشكل: $Z=x+iy$

العمليات الحسابية

$Z_1=x_1+iy_1 \qquad Z_2=x_2+iy_2$

1. الجمع والطرح:

$Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

2. الضرب:

3. القسمة:

$Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ إذا وجد (i) في المقام نضرب بمرافق المقام.

4. المرافق:

$Z=x+iy \Rightarrow \bar{Z}=x-iy$

خواص:

$\overline{Z^n}=\bar{Z}^n$	$\overline{Z}\ {}^{\times}_{\div}{}^{+}_{-}\ \overline{Z}=\overline{Z\ {}^{\times}_{\div}{}^{+}_{-}\ Z}$

5. الطويلة:

مقدار موجب: $|Z|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

★ $((Z.\bar{Z}=x^2+y^2=|Z^2|))$

الشكل المثلثي لعدد عقدي:

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

من الشكل

من الجبري للمثلثي

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=x+iy$

1. $\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}$
2. نحدد الزاوية بدون إشارات:
3. حسب الربع:

(1) θ (2) $\pi-\theta$ (3) $\pi+\theta$ (4) $-\theta$

من المثلثي للجبري

1. نحسب النسب المثلثية للزاوية $\frac{k\pi}{n}$

$Z=r\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

2. نحدد الإشارة حسب الربع.
3. نحذف K.

العمليات على الأعداد بالشكل المثلثي

$Z_1=r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))$

$Z_2=r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))$

1. الضرب:

$Z_1.Z_2=r_1.r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

2. القسمة:

$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$

3. القوة:

$Z^n=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

الشكل الأسي لعدد عقدي:

من الشكل: $Z=re^{i\theta}$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$i=e^{\frac{\pi}{2}i} \qquad -1=e^{\pi i} \qquad e^{-\frac{\pi}{2}i}$

دستورا أويلر

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

المعادلة من الدرجة الثانية:

• من الشكل: $aZ^2+bZ+c=0$

★ $\Delta>0$

$Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

★ $\Delta=0$

حل وحيد «$Z=-\frac{b}{2a}$»

★ $\Delta<0$

$Z_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}, \quad Z_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$

الجذران التربيعيان لعدد عقدي:

ليكن: $Z=a+bi$

الجذران التربيعيان من الشكل: $w=x+iy$

$\Rightarrow \quad w^2=Z \quad \Leftarrow$

$\underset{(1)}{x^2-y^2=a} \qquad \underset{(2)}{x^2+y^2=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \underset{(3)}{2xy=b}$

قواعد وملاحظات:

★ كل عدد تخيلي بحت موجب زاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$

كل عدد " " سالب زاويته: $-\frac{\pi}{2}$

كل عدد حقيقي موجب زاويته: 0

كل عدد حقيقي سالب زاويته: π

★ $\arg(\bar{Z})=-\arg(Z)$

★ للمقارنة بين زاويتين: نجعلهما موجبتين. ناتج جمعهما يجب أن يكون من مضاعفات (2π)

★ $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

★ لإثبات أن Z حقيقي:

1. $\operatorname{Im}Z=0$
2. $\bar{Z}=Z$
3. $\arg Z=0$
4. $\arg Z=\pi$

★ لإثبات أن Z تخيلي بحت

1. $\operatorname{Re}Z=0$
2. $\bar{Z}=-Z$
3. $\arg Z=\frac{\pi}{2}$
4. $\arg Z=-\frac{\pi}{2}$

★ فائدة المرافق:

• يفيد في حساب الشكل الجبري لخارج قسمة بسبب كون العدد $Z\bar{Z}$ عدداً حقيقياً

• يفيد في معرفة فيما إذا كان Z حقيقياً أو تخيلي بحت.

★ $(Z=\bar{\bar{Z}})$

★ في المعادلة من الدرجة الثانية إذا خلت من الوحدة التخيلية (i) فالجذران لا يكونان مترافقان.

ح) إذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R} \Leftarrow \bar{Z}_1=Z_2$ أي للمعادلة جذران عقديان مترافقان!

★ $\underline{\underline{\text{٢٥٦}}}$

لحل معادلة بالمجهول Z بأخذ المرافق

بتعويض $Z=x+iy$

★ $\arg Z=\frac{k\pi}{n}$: تمثل نصف مستقيم بدايته مبدأ الإحداثيات ويصنع مع محور الفواصل زاوية قدرها $\frac{k\pi}{n}$.

★ $\arg Z=\pi$: مجموعة النقاط تمثل محور الفواصل الجزء السالب.

★ $|Z|=a$: مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها a

★ $\operatorname{Re}(Z)=a$: مجموعة النقاط تمثل $x=a$ مستقيم يوازي محور التراتيب yy'

★ $\operatorname{Im}Z=b$: مجموعة النقاط تمثل مستقيم يوازي محور الفواصل $\Leftarrow y=b$

دساتير مثلثية:

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

★ $\sin$ مجموع زاويتين يساوي $\sin$ الزاوية الثالثة في مثلث

★ للانتقال من الأسي للجبري علينا إعادة الأسي للمثلثي ثم الجبري.

★ القيمة المطلقة لعدد عقدي تساوي طويلته.

★ $Z+\bar{Z}=2\operatorname{Re}(Z)$

$Z.\bar{Z}=2\operatorname{Im}(Z)$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

((الأعداد الممثلة))

العدد الممثل لنقطة	العدد الممثل لشعاع	العدد العقدي الممثل لزاوية	العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة	العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث	المعادلة الممثلة لمعادلة الدائرة	المعادلة الممثلة لمحور قطعة مستقيمة	العدد العقدي الممثل لمركز ابعاد متناسبة
$A(x_1,y_1)$ العدد الممثل لـ A. • $Z_A = x_1 + iy_1$ • $\alpha = x_1 + iy_1$ • $A(x_1+iy_1)$	A، B نقطتين ممثلتين بالعددين Z_A، Z_B: • $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$ قاعدة: $\lvert Z_{\vec{AB}}\rvert = AB$	• $(\vec{AB},\vec{AC}) = \arg\left(\frac{Z_{AC}}{Z_{AB}}\right)$ قاعدة: 1 $\arg(\text{البسط، المقام})$ = $\arg$(شعاع البسط، شعاع المقام) 2 $\left\lvert\frac{Z_C - Z_D}{Z_B - Z_A}\right\rvert = \frac{DC}{AB}$	I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$: • $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$	• $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$	Z_0 العدد العقدي الممثل لـ A مركز الدائرة و r نصف القطر: • $\lvert Z - Z_0\rvert = r$	• $\lvert Z - Z_A\rvert = \lvert Z - Z_B\rvert$ هي معادلة محور لقطعة مستقيمة.	G مركز أبعاد لعدة نقاط متناسبة $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)$ ممثلة بالأعداد: $Z_{A_1}, Z_{A_2}, \dots, Z_{A_n}$ • $Z_G = \frac{\alpha_1 Z_{A_1} + \alpha_2 Z_{A_2} + \dots + \alpha_n Z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

- الانسحاب: $Z' = Z + b$ و b شعاع الانسحاب
- الدوران: $Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$ و w مركز
- التحاكي: $Z' - w = k(Z - w)$
- التناظر: هو دوران مركزه نفس المركز وزاويته π.
- التناظر بالنسبة لـ ox: $Z' = \bar{Z}$
- التناظر المحوري بالنسبة للمبدأ O: $Z' = -\bar{Z}$

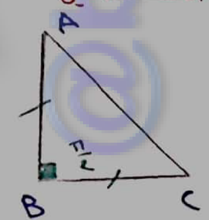
والأشكال المفتاحية

للمثلث القائم ومتساوي الساقين

$a - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - b)$

• A صورة c وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

⇐ أن المثلث قائم في B ومتساوي الساقين

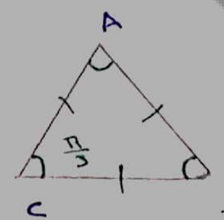


للمثلث متساوي الأضلاع

$a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$

• A صورة c وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$

⇐ أن المثلث متساوي الأضلاع



ملاحظات

- نقول عن نقطة أنها تنتمي لدائرة إذا كان العدد العقدي الممثل لها حقق معادلة الدائرة
- العدد $b - a$ يمثل الشعاع $\vec{AB}$
- لإثبات تعامد مستقيمين $\vec{AB}$، $\vec{CD}$ نثبت أن $\arg\left[\frac{c-d}{b-a}\right] \in \pm\frac{\pi}{2}$ •

$\Longleftrightarrow$

• $\frac{c-d}{b-a}$ "تخيلي بحت"

- لإثبات وقوع A، B، C على استقامة واحدة نثبت أن $\arg\left[\frac{c-a}{b-a}\right] \in \{0,\pi\}$

$\Longleftrightarrow$

$\frac{c-a}{b-a}$ "حقيقي"

- كل مثلث قائم تمر من رؤوسه دائرة مركزها منتصف الوتر.
- $\arg(\alpha) + \arg(\beta) = \arg(\alpha \cdot \beta)$
- تساوي شعاعين ⇔ تساوي الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين
-

التحليل التوافقي

علم التحليل التوافقي:
هو العلم الذي يعطي عدد نتائج تجربة دون كتابتها بالتفصيل

لحل مسائل التحليل التوافقي

* العدد
عدد المسحوبات، الاتفاقات، العناصر، النور، المجموعات...
* الملاحظة
فيما إذا أفاد الترتيب أو لم يفيد
* العملية:
ويتم تحديدها تبعاً للملاحظة.

لدينا نوعين من المسائل:

• للترتيب أهمية

مع إعادة	دون إعادة
n^r	P_n^r

العملية

الحالات

كل التتالي، واحد تلو الآخر، تشكيل رقم، تشكيل كلمة، لجنة مع ذكر المناصب، جوائز مختلفة "النتيجة على شكل ترتيبة"

• ليس للترتيب أهمية

$\binom{n}{r}$

معاً، مجموعة، لجنة...

• $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ $=\binom{n}{n-r}$

$\binom{n}{0}=1$	$\binom{n}{n}=1$	$\binom{n}{1}=n$

منشور ذو الحدين

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

• $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n$

• $(a+b)^n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$

تذكر:

• الترتيب: هو اختيار عناصر مجموعة.
• التوافيق: هو اختيار مجموعة جزئية من مجموعة.
• n: عدد العناصر المتاحة في البند الواحد.
• r: عدد البنود في النتيجة الواحدة

ملاحظات

• قاعدة:
$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$
فيما لو:
أما $p=q$
أو $p+q=n$

• في العملية P_n^r:
إذا كانت $n=r$ ⟸ إن كل نتيجة تسمى "تبديلة"

• شروط التبديلة:
العملية P_n^r أو n^r أي للترتيب أهمية
يوجد حياد بينها
أي إذا كانت العناصر مختلفة لكن تغير التفسير "النص الكلامي"

• كيف يمكننا معرفتها "كمية"
$\left(\frac{r!}{r! \times r!}\right)$

• ثلاث كرات مختلفة الألوان تضرب بـ $3!$
• كرتين من لون وكرة مختلفة تضرب بـ 3

• المستطيل ينتج عن تقاطع أربع مستقيمات اثنان أفقيان واثنان شاقوليان س11

• المضلع المحدب:
هو المضلع الذي تقع جميع أضلاعه بجهة واحدة بالنسبة لحامل كل ضلع من أضلاعه "جميع أقطاره بداخله"

• القطر: قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين. س15

• عدد الأقطار في أي مضلع محدب يعطى بالعلاقة:
"$\binom{n}{2} - n$"
n: عدد أضلاع المضلع

• الحد الثابت المستقل عن x في المنشور
* نجمع الأس ونجعله مساوياً للصفر (لا x)
* ونوجد قيمة r

• مجموع زوايا مضلع: $(n-2)\pi$ أنشطة

• في طلبات: على الأقل، على الأكثر
فنحل باستخدام المعاكس ثم نطرحه من الكلي لنعطي المطلوب.

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
• $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

• $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

• يعطى عدد نقاط التقاطع الداخلية لأقطار مضلع بالعلاقة:
"$\binom{n}{4} + n$"

• $\sin^4 x$ "مثلاً"
نستفيد من علاقة أويلر ونختزل الأسس، ثم منشور ذو الحدين.