③ $\left(v_n\right)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجيّاً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.

❶ تحقّق أنَّ $v_n > 0$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أنَّ المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ متتالية حسابيّة.

❸ استنتج عبارة v_n بدلالة n.

① نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ ،

❶ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 . ثُمّ عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n .

❷ أثبت بالتدريج أنّه في حالة أيّة عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

15 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ عند كلّ $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ $0 \leq u_n \leq 2$، أيّاً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

16 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ عند كلّ $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أيّاً كان العدد n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

13 أثبت بالتدريج، صحّة كلّ من الخواص الآتية أيّاً كان العدد الطبيعي n.

① « $4^n + 5$ مضاعفٌ للعدد 3».

② « $2^{3n} - 1$ مضاعفٌ للعدد 7».

③ « $n^3 + 2n$ مضاعفٌ للعدد 3».

④ « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعفٌ للعدد 7».

شكراً

$x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ و $y_n = x_n + 3$.

❶ a.أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة.

b. احسب y_n ثمّ x_n بدلالة n.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a.احسب كلّاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرّفة وفق $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعيّاً n_0 يجعل $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كلّ n أكبر تماماً من n_0.

③ المتتالية (u_n) معرّفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. نعلم أنّ $\lim u_n = +\infty$. جد عدداً طبيعيّاً n_0

⑥ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n، أنّ $2^n \leq n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

❷ استنتج ممّا سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

Scanned by CamScanner

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً بالشرطين $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$. استعمل الطريقة السابقة لتجيب عن الأسئلة الأتية :

① أتكون المتتالية مطّردة ؟ أتكون محدودة من الأدنى ؟ أتكون متقاربة ؟

② برهن صحّة النتائج التي توصلتَ إليها إن أمكن.

135 شكل المتتالية مهم

17 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرّفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

② استنتج أنّ العدد 3 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

③ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة.

18 نتأمل متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تحقق الشرط التي: يوجد عدد حقيقي $0 < \ell$ يحقق عند كل n العلاقة

19 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرّفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثمَّ استنتج أنَّ $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو الصفر.

21 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة عند كلّ $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② a. أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

b. ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

22 ليكن عند كلّ عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحقّقان عند كلّ عدد طبيعي n، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبِّرْ عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

25 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة عند كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① أثبت أنّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

26 بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ الآتيتين متجاورتان

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$ و $$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

4

27 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $u_0 = 3$ وعند كلّ عدد طبيعيّ n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$ ، أيّاً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرّفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أنَّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة واحسب نهايتها.

③ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

④ استنتج

29 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{3}{u_n}^2 + 2u_n$.

① احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5.

② نرمز بالرمز f إلى التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a. ادرس تغيّرات f ونظّمْ جدولاً بها.

b. أثبت أنّه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$.

③ استنتج من السؤال السابق أنَّ:

a. العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

b. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أنَّ $u_{n+1} = f(u_n)$.

① $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ② $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$.

[illegible]

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق: $u_0 = \dfrac{3}{2}$ وعند كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنّ $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

② a. أثبت أنّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

b. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة؟

دورة ٢٠٢٢