بنك المسائل الهامة

المسألة الأولى / بنك المسائل الهامة

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = 3e^x - x - 3$$

الطلب الأول:

أثبت ان المستقيم $d: y = -x-3$ مقارب مائل للخط c وادرس الوضع النسبي وادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

نريد اثبات ان $d: y = -x-3$ مقارب للخط c

بما ان التابع f معرف على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

سندرس فيما اذا كان d مقارب للخط عند $+\infty$ وعند $-\infty$

عند $-\infty$

$f(x) - y_d$

$= 3e^x - x - 3 - (-x-3)$

$= 3e^x - x - 3 + x + 3 = 3e^x$

$f(x) - y_d = 3e^x$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \to -\infty} 3e^x$$

$= 0$

لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

ومنه المستقيم $d: y = -x-3$ مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$

عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

ومنه المستقيم d مقارب للخط البياني c فقط في جوار $-\infty$

- دراسة الوضع النسبي

- درس إشارة الفرق

$$f(x) - y_0 = 3e^x > 0$$

ومنه الخط C فوق d

- دراسة تغيرات التابع

$$f(x) = 3e^x - x - 3$$

- التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 - (-\infty) - 3$

$= +\infty$

لأنّ

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ح.ع.ت

لإزالة حالة عدم التعيين نخرج x عامل مشترك

$$f(x) = x\left(\frac{3e^x}{x} - \frac{x}{x} - \frac{3}{x}\right)$$

$$f(x) = x\left(\frac{3e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$= +\infty(+\infty - 1 - 0)$$

$$= +\infty(+\infty) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = 3e^x - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3e^x - 1 = 0$$

$$3e^x = 1$$

$$e^x = \frac{1}{3}$$

$e^x = \frac{1}{3}$

$\ln e^x = \ln \frac{1}{3}$

$x = \ln 1 - \ln 3$

$\ln 1 = 0$

$x = 0 - \ln 3$

$x = -\ln 3$

$f(-\ln 3) = 3e^{-\ln 3} + \ln 3 - 3$

$= \frac{3}{e^{\ln 3}} + \ln 3 - 3$

بنزلها للمقام نعكس اشارة الأس

$= \frac{3}{3} + \ln 3 - 3$

$e^{\ln 3} = 3$

$= 1 + \ln 3 - 3$

$= -2 + \ln 3$

$\boxed{f(-\ln 3) = -2 + \ln 3}$

نرسم جدول تغيرات التابع

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2+\ln 3$	↗	$+\infty$

الطلب الثاني:

استنتج ان للمعادلة $f(x)=0$ جذرين

أحدهما يساوي الصفر والآخر α

$-3 < \alpha < -2$

التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, -\ln 3[$

$0 \in f(]-\infty, -\ln 3[) =]-2+\ln 3, +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد ضمن المجال $]-\infty, -\ln 3[$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\ln 3, +\infty[$

$0 \in f(]-\ln 3, +\infty[) =]-2+\ln 3, +\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد ضمن المجال $]-\ln 3, +\infty[$

نريد اثبات ان احد جذور المعادلة $f(x)=0$ هو $x=0$

$f(0) = 3e^0 - 0 - 3$

$= 3 - 3 = 0$

بما أن $f(0)=0$ احد جذور المعادلة $f(x)=0$ هو $x=0$

• نريد اثبات ان الجذر الأصغر يقع ضمن

$-3 < \alpha < -2$

اي نريد اثبات ان

$\alpha \in]-3, -2[$

سنثبت ان

$f(-3) . f(-2) < 0$

ملاحظات:

$f(-3) = 3e^{-3} + 3 - 3$
$= 3e^{-3} > 0$

$f(-2) = 3e^{-2} + 2 - 3$
$= 3e^{-2} - 1 < 0$

• بما ان $f(-3) . f(-2) < 0$

$\Leftarrow$ الجذر الاصغر للمعادلة يقع ضمن المجال $]-3, -2[$

أي يحقق $-3 < \alpha < -2$

الطلب الثالث:

ارسم الخط c واحسب مساحة السطح المحصور بين c و المحور ox والمستقيم $x = \ln 2$

جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

رسم المقارب

$d: -x-3$

$x=0 \Rightarrow y=-3$

$(0,-3)$

$y=0 \Rightarrow x=-3$

$(-3,0)$

رسم الخط البياني

$(0,0)$

$(-\ln 3, -2+\ln 3)$

$-\ln 3 \simeq -1.1$

$-2+\ln 3 \simeq -0.9$

التعويض بالحد الاعلى _ التعويض بالحد الأدنى

$$= \left[3e^{\ln 2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - 3(\ln 2)\right] - \left[3e^{0} - 0 - 0\right]$$

$e^{\ln 2} = 2$

$e^{0} = 1$

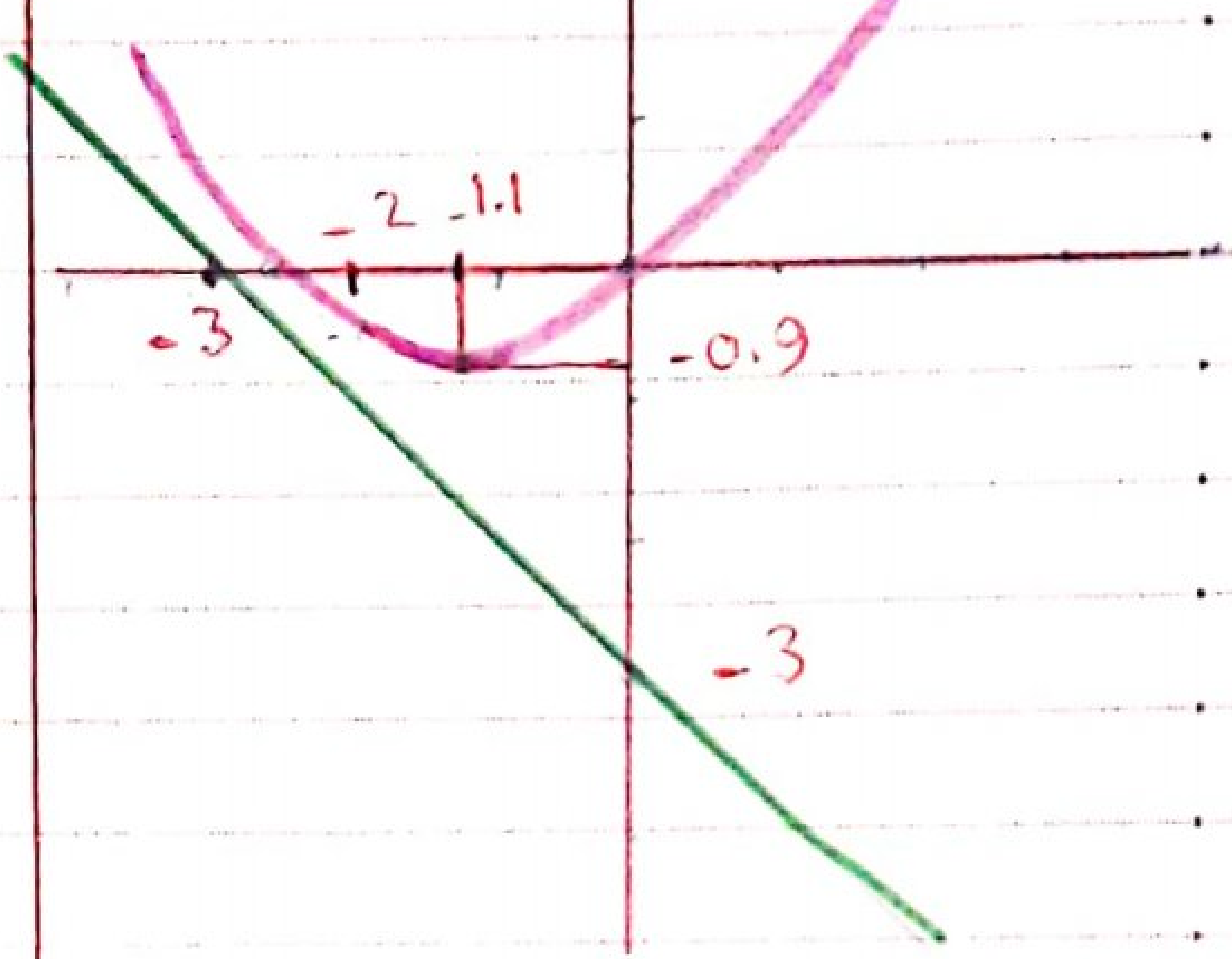
=

$$= \left[3(2) - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2^3\right] - 3$$

$$= 6 - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 8 - 3$$

$$= 3 - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 8$$

$$S = 3 - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 8$$



الطلب الرابع :

احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور ox والمستقيم $x = \ln 2$.

$\ln 2 \simeq 0.6$

$$S = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (3e^x - x - 3)\,dx$$

$$= \left[3e^x - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^{\ln 2}$$

المسألة الثانية / بنك تحليل

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

نبرهن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط C و ادرس الوضع النسبي للخطين C و d.

الحل

$$f(x) - y_d = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1)$$

$$= x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1)$$

$$f(x) - y_d = \frac{-\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

من مجموعة التعريف $]0,+\infty[$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

• دراسة الوضع النسبي:

؟

ندرس إشارة الفرق.

$$-\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$

$$e^{\ln x} = e^{0}$$

$$x = 1$$

$e^{0} = 1$

$e^{\ln x} = x$

نرسم جدول الوضع النسبي

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_d$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق d		C تحت d	

$(1,2)$
نقطة تقاطع

المسألة الثالثة / بنك تحليل

لتكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$

وفق

$$f(x) = x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم أثبت أن المستقيم $d: y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

التابع مستمر واشتقاقي على المجال $I =]1,+\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1+1+\infty = \infty.$

لأنّ

$$\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

- نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = 1+2\left[\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right]$$

$$= 1+2\left[\frac{\frac{(1)(x-1)-(1)(x)}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right]$$

$$= 1+2\left[\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}\right]$$

$$= 1+2\left[\frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)}{x}\right]$$

$$= 1+2\left[\frac{-(x-1)}{x(x-1)^2}\right]$$

$$= 1+2\left[\frac{-1}{x(x-1)}\right]$$

$$f(2) = 2+1+2\ln\left(\frac{2}{2-1}\right)$$

$$= 3 + 2\ln(2)$$

$$\boxed{f(2) = 3 + 2\ln(2)}$$

نرسم جدول تغيرات التابع

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

أثبت أن $d: y = x+1$
مقارب للخط c في جوار $+\infty$

$f(x) - y_d$

$$= x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x - 1$$

$$= 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= 0$$

$$= 1 - \frac{2}{x(x-1)}$$

نوحد مقامات

$$= \frac{1}{1} - \frac{2}{x(x-1)}$$

$x(x-1)$

$$= \frac{x(x-1) - 2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

اما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \longrightarrow$ مرفوض لا ينتمي لمجموعة التعريف

لأنّ

$$\lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t}{t-1}\right) = 0$$

ومنه $y = x + 1$ مقارب للخط البياني C في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق.

$$f(x) - y_d = 2\ln\frac{x}{x-1}$$

نلاحظ أنّ

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

لأن البسط أكبر من المقام

ومنه

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln 1$$

نضرب بـ 2

$$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 2\ln 1$$

$\ln 1 = 0$

$$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

ومنه

$$f(x) - y_d > 0$$

ومنه الخط البياني للتابع C يقع فوق المقارب

ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم ارسم الخط البياني C.

المستقيم d

$(0,1)$

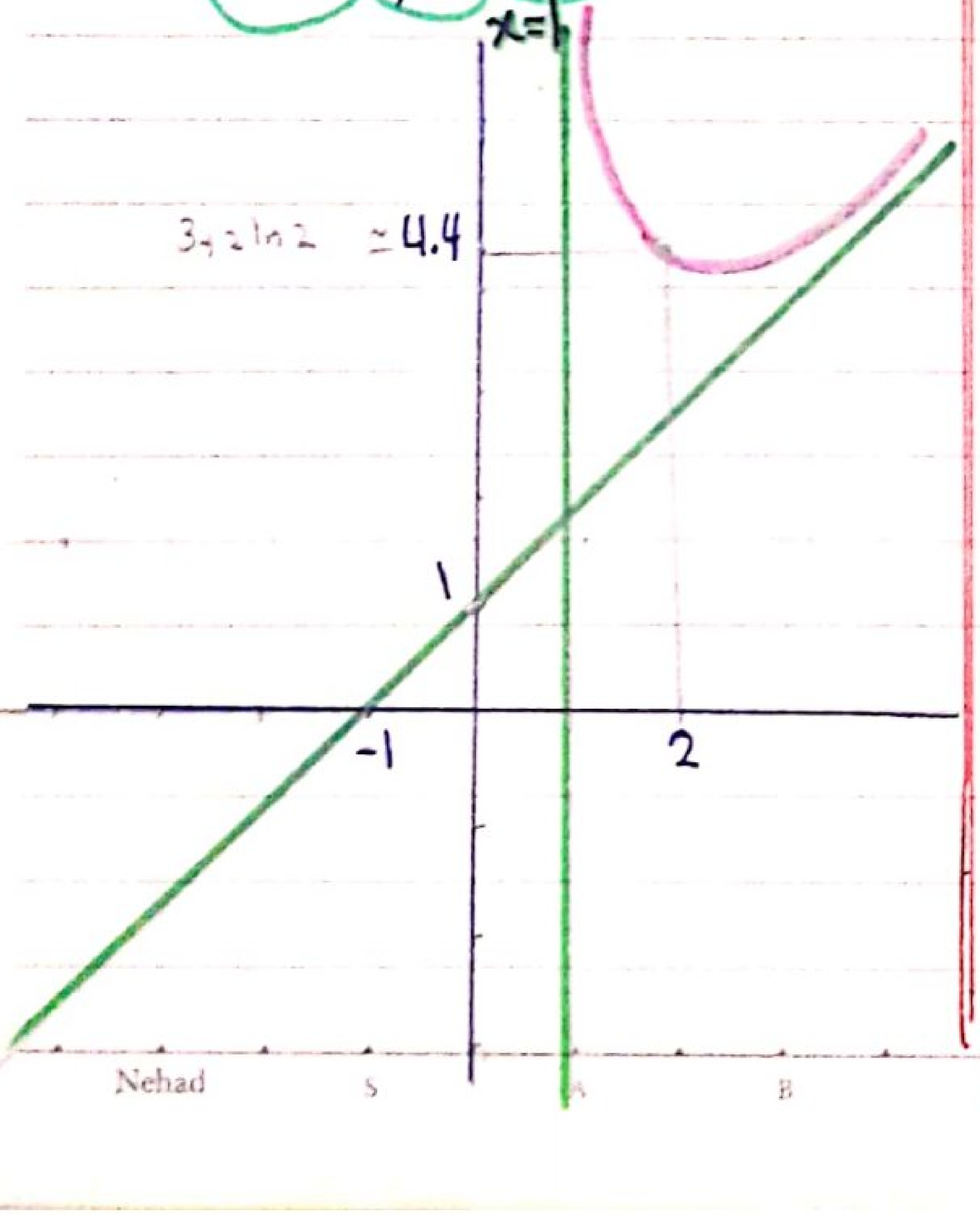
$(-1,0)$

الخط البياني

$x = 1$ مقارب شاقولي

$(2, 3+2\ln 2)$ نقطة مساعدة

$3 + 2\ln 2 \simeq 4.4$



المسألة الثالثة / بنك المسائل الهامة / الطلب الثالث

$$u_n = f(n) = n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$S_n = u_2 + \dots + u_n$$

$$u_2 = 2 + 1 + 2\ln\left(\frac{2}{2-1}\right) = 3 + 2\ln(2)$$

$$u_3 = 3 + 1 + 2\ln\left(\frac{3}{3-1}\right) = 4 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$u_4 = 4 + 1 + 2\ln\left(\frac{4}{4-1}\right) = 5 + 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\vdots$$

$$u_n = n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$S_n = u_2 + \dots + u_n$$

نفصل الحدود السابقة لـ مجموع

$$S_n = 3 + 2\ln 2 + 4 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 5 + 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) \dots + n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$S_n = 3 + 4 + 5 + \dots + n + 1 + \ln(2)^2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \dots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^2$$

$$S_n = 3 + 4 + 5 + \dots + n + 1 + \ln\left(2^2 \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^2}{3^2} \times \dots \times \frac{n^2}{(n-1)^2}\right)$$

باختصار الحدود

$$S_n = 3 + 4 + 5 + \dots + n + 1 + \ln(n^2)$$

$$2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 + 2\ln 4 - 2\ln 3$$

$$\dots + 2\ln n - 2\ln(n-1)$$

متتالية حسابية

دليل النهاية - دليل البداية + 1 = عدد الحدود

$$= n + 1 - 3 + 1$$

عدد الحدود $= n - 1$

مجموع ح س = عدد الحدود × $\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}$

$$S_n = (n-1) \times \frac{3+n+1}{2} + \ln(n^2)$$

$$S_n = (n-1) \times \frac{4+n}{2} + \ln(n^2)$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

Monir d Al-ebraheem

المسألة الرابعة / بنك تحليل

ليكن التابع

$$f(x) = x - \ln x$$

المعرف على $I =]0, +\infty[$

والمطلوب:

① جد $f(1)$ وأوجد $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$

$$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$\ln 1 = 0$

$f(1) = 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1$$

$$f'(1) = 0$$

$f'(1) = 0$

الطلب الثاني:

ما نهاية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$$

$x - \ln x = f(x)$

$1 = f(1)$

ومنه

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

ومنه

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} = f'(1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1} = 0$$

المسألة الخامسة / بنك تحليل

لتكن C هو الخط البياني للتابع f

المعرف على وفق

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$$

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

أثبت أن g اشتقاقي عند 0

ثم أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

• اثبات ان g اشتقاقي عند 0

Note

لاثبات ان g اشتقاقي عند 0

يجب ان تحقق

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \text{عدد}$$

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$$g(0) = 0$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \underbrace{0}_{\text{عدد}} \in R$$

ومنه g اشتقاقي عند الصفر.

• استنتج ان f اشتقاقي عند الصفر.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$$

نفرض $h(x) = \frac{1}{x+1}$

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

• ان $g(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

• ان $h(x)$ اشتقاقي عند الصفر

$\Leftarrow$ $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر لانه مجموع تابعين اشتقاقيين عند الصفر

- اوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

الشكل العام لمعادلة المماس:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

حيث $a = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$f(0) = \frac{1}{0+1} - 0 = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(0) = \frac{-1}{1} - 0 + 0$$

$$f'(0) = -1$$

- نعوض في معادلة المماس

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$y - 1 = -x$$

$$y = -x + 1$$ ← معادلة المماس

المسألة السادسة / بنك تحليل

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$$

① أثبت ان المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

نحسب $f(x) - y_{\Delta_1}$

$$= x + \frac{2}{e^x+1} - x$$

$$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_{\Delta_1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$$

لأنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

ومنه المستقيم $y_{\Delta_1} = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{2}{e^x+1} > 0$$

ومنه الخط C يقع فوق Δ_1.

الطلب الثاني:

هل $\Delta_2 : y = x + 2$ مقارب للخط C عند $-\infty$؟
وادرس الوضع النسبي.

$$f(x) - y_{\Delta_2} = x + \frac{2}{e^x+1} - x - 2$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2}{e^x+1} - 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 2 - 2 = 0$$

لأنّ

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

ومنه المستقيم

$y_{D_2} = x+2$

مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق.

$$f(x) - y_{D_2} = \frac{2}{e^x+1} - \frac{2}{1}$$

نوحد المقامات

$$= \frac{2 - 2(e^x+1)}{e^x+1}$$

$$= \frac{2 - 2e^x - 2}{e^x+1}$$

$$f(x) - y_{D_2} = \frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$$

ومنه الخط C يقع تحت D_2.

الطلب الثالث:

ادرس تغيرات التابع f وارسم C وارسم المقاربات.

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$$

التابع مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$. $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + 2 = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

لأن:

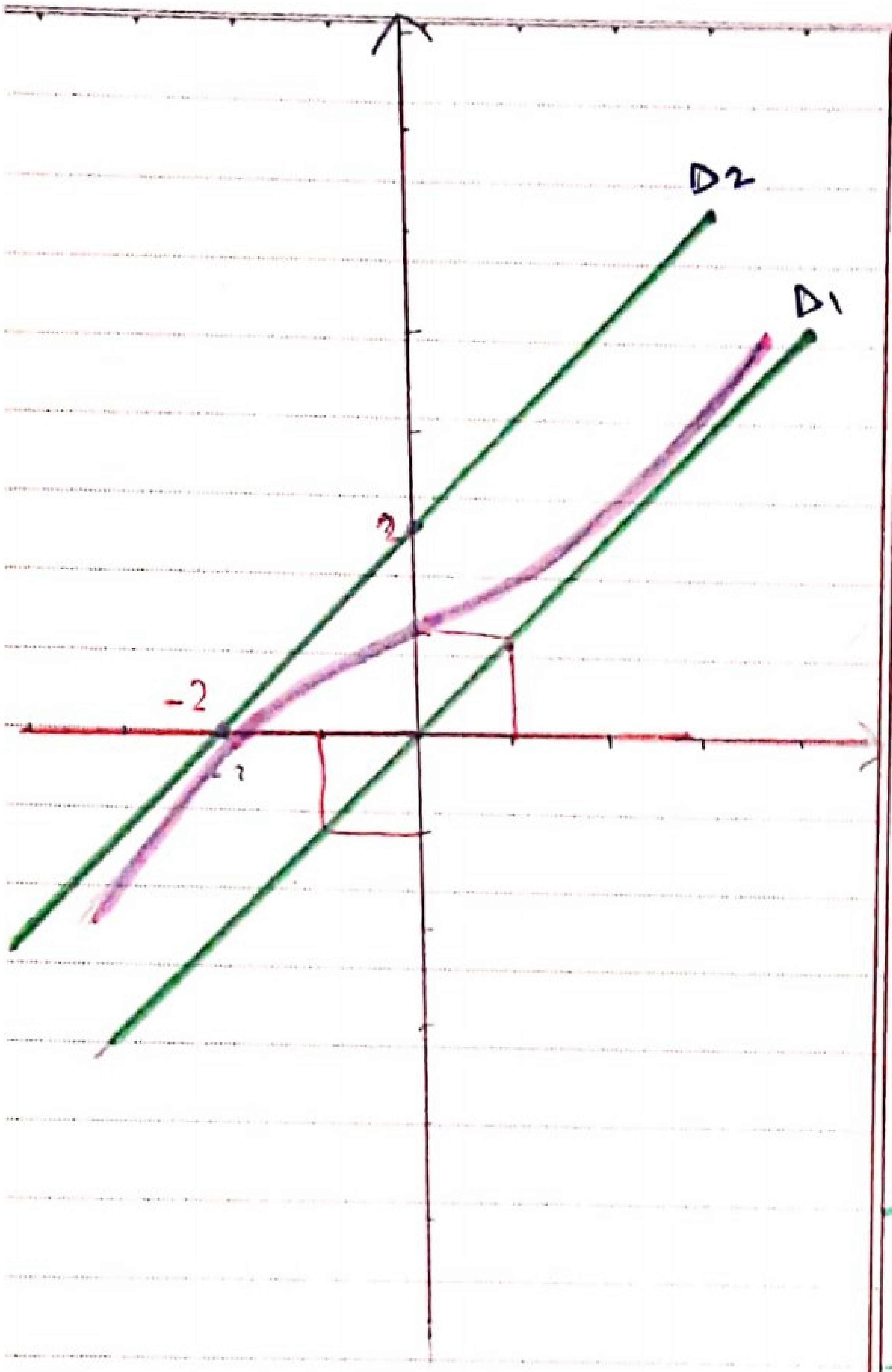
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = \frac{1}{1} + \frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$

نوحد المقامات

$$= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$



$$f'(x) = \frac{(e^{x}+1)^{2} - 2e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$$

نفك المطابقة

$$= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^{x} - 2e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$$

$$= \frac{e^{2x}+1}{(e^{x}+1)^{2}} > 0$$

$$f'(x) > 0$$

ومنه التابع متزايد تماماً.

نرسم جدول تغيرات التابع.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

رسم الخط البياني:

الخط البياني ← $(0,1)$ نقطة مساعدة

المقاربات:
- $y = x$ ← $(1,1)$ ، $(-1,-1)$
- $y = x+2$ ← $(0,2)$ ، $(-2,0)$

المسألة السابعة / بنك تحليل

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$

$$f(x)=\frac{x^3-x+2}{x^2-1}$$

① أثبت ان المستقيم $d: y=x$ مقارب مائل للخط C .

اولاً: نقسم قسمة إقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3-x+2 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline +2 & \end{array}$$

الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\frac{x^3-x+2}{x^2-1}=x+\frac{2}{x^2-1}$$

لإثبات ان $y=x$ مقارب مائل .

$$f(x)-y_d=x+\frac{2}{x^2-1}-x$$

$$f(x)-y_d=\frac{2}{x^2-1}$$

- $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=0$
- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0$

ومنه المستقيم $d: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

لندرس إشارة الفرق

$$f(x)-y_d=\frac{2}{x^2-1}$$

$$f(x) - y_d = \frac{2}{x^2-1}$$

لدراسة الاشارة البسط موجب.
اشارة الكسر تحددها اشارة المقام.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$
الوضع النسبي	C فوق D		C تحت D		C فوق D

الطلب الثاني:

احسب A, B حيث

$$f(x) = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x^2-1} \longrightarrow \text{متطابقة}$$

$$= x + \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$x + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

ومنه

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

توحيد مقامات

$$= \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx + B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A\ B)}{(x-1)(x+1)}$$

بالمطابقة

$$2 = A - B$$

$$0 = A + B \longrightarrow \text{معامل } x$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (بالجمع)

$$2 + 0 = A + A - B + B$$

$$2 = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{2}$$

$$A = 1$$

$0 = A + B$ نعوض في المعادلة

$$0 = 1 + B \Rightarrow B = -1$$

$A = 1$, $B = -1$

ومنه بالتعويض بقيمة A و قيمة B

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

أوجد

$$I = \int_0^t [f(x) - x]$$

$$= \int_0^t \left[x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} - x\right] dx$$

$$= \int_0^t \left[\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right] dx$$

البسط مشتق المقام فالتكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام.

$$= \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^t \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_0^t$$

التعويض بالحد الاعلى _ التعويض بالحد الأدنى

$$(\ln|t-1| - \ln|t+1|) - (\ln|-1| - \ln|1|)$$

$$(\ln|t-1| - \ln|t+1|) - \underbrace{(\ln 1 - \ln 1)}_{0}$$

ومنه

$$I = \int_0^t [f(x) - x]\,dx = \ln|t-1| - \ln|t+1|$$

الطلب الثالث:

احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم d والمستقيمين

$x = 3$, $x = 2$

$$S = \int_2^3 |f(x) - y_d|\,dx$$

$$= \int_2^3 \left|x + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} - x\right| dx$$

$$= \int_2^3 \left|\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right| dx$$

البسط مشتق المقام فالتكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

$$= \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^3$$

التعويض بالحد الاعلى _ التعويض بالحد الادنى

$$S = \left[\ln|3-1| - \ln|3+1|\right] - \left[\ln|2-1| - \ln|2+1|\right]$$

$$= \left[\ln|2| - \ln|4|\right] - \left[\ln|1| - \ln|3|\right]$$

$$= \left[\ln 2 - \ln 4\right] - \left[0 - \ln 3\right]$$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\ln 1 = 0$

$$= \ln \frac{2}{4} - (-\ln 3)$$

$$= \ln \frac{2}{4} + \ln 3$$

$$S = \ln\left(\frac{2}{4} \times 3\right)$$

$$= \ln\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$S = \ln \frac{6}{4}$$

$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$

المسألة الثامنة / بنك تحليل

ليكن التابع f المعرف على

$I =]0, +\infty[$

وفق

$f(x) = x - 1 - \ln x$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع وبين القيم الصغرى و الكبرى محلياً.

• التابع مستمر واشتقاقي على المجال

$I =]0, +\infty[$

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 1 - (-\infty) = +\infty$

ومنه $x = 0$ مقارب شاقولي

لأن

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

حالة عدم تعيين

$f(x) = x - 1 - \ln x$

نخرج x عامل مشترك.

$f(x) = x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]$

$\lim_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]$

$= +\infty\,[1 - 0 - 0] = +\infty$

لأن

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

• نشتق ونعدم المشتق.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x)=0$

$1-\frac{1}{x}=0$

نوحد مقامات

$\frac{x-1}{x}=0$

$x-1=0$

$\Rightarrow x=1$

نحسب $f(1)$

$f(1)=1-1-\ln 1$

$=0$

$\ln 1=0$

$f(1)=0$

نرسم جدول تغيرات التابع:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من الجدول $f(1)=0$

قيمة حدية كلية صغرى

الطلب الثاني:

استنتج من تغيرات التابع أنّ

$\ln x < x$ أياً يكن

$x \in]0,+\infty[$

نلاحظ أنّ

نريد إثبات أن

$\ln x < x$

من جدول تغيرات التابع وجدنا أن

$f(1)=0$ قيمة كلية صغرى ومنه

$f(x)>0$

نعوض قيمة $f(x)$

$x-1-\ln x>0$

$x-\ln x>1$

$x-\ln x>1>0$

ومنه $x-\ln x>0$

$-\ln x>-x$

نضرب بـ -1 ونعكس جهة التراجح

$\ln x<x$

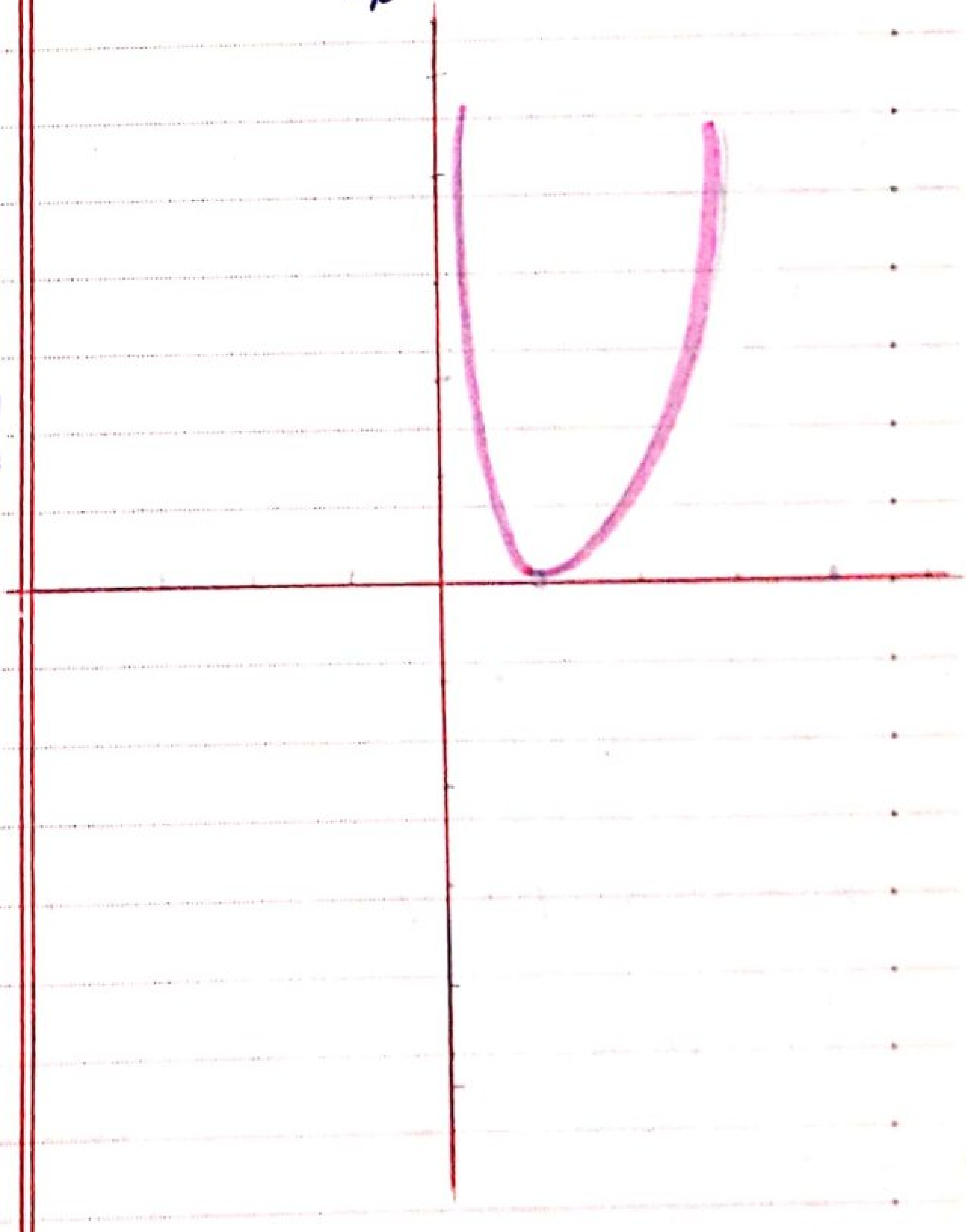
الطلب الثالث:

ارسم الخط البياني؟

$x=0$ مقارب شاقولي

$(1,0)$ نقطة

ماعدة $x=0$



الطلب الرابع:

أثبت أن التابع

$$g(x)=\frac{x^2}{2}-x\ln x$$

تابع أصلي للتابع f على المجال $]0,+\infty[$

يكون $g(x)$ تابعاً أصلياً لـ f إذا تحقق

$$g'(x)=f(x)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x\ln x$$

$$g'(x)=\frac{2}{2}x-\left[(1)\ln x+x\frac{1}{x}\right]$$

$$=x-\ln x-1$$

ومنه $g'(x)=f(x)$

وجدنا أن g تابع اشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وأيضاً
$g'(x)=f(x)$

$\Leftarrow$

$g(x)$ تابع أصلي لـ f على المجال
$]0,+\infty[$

المسألة التاسعة / نمذجة تحليل

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x - \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$$

الطلب الاول:

أثبت انه اياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1}$$

- نبدأ بإثبات ان التابع $f(x)$ يكتب بالشكل

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1}$$

$$= x + \left(-1 + \frac{2}{e^{x}+1}\right)$$

$$(e^{x}+1) \qquad (1)$$

- نوحد مقامات الحد الثاني والثالث

$$= x + \left(\frac{-(e^{x}+1) + 2}{e^{x}+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^{x} - 1 + 2}{e^{x}+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^{x} + 1}{e^{x}+1}\right)$$

$$= x - \frac{e^{x} - 1}{e^{x}+1}$$

نخرج من البسط -

ومنه وجدنا

$$x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1} = x - \frac{e^{x} - 1}{e^{x}+1}$$

ومنه $f(x)$ يكتب بالشكل

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1}$$

الطلب الثاني:

أثبت انه اياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

• نوحد مقامات ثاني حدين

$$f(x) = x + \left(\underset{(e^x+1)}{1} - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= x + \left(\frac{-e^x+1}{e^x+1}\right)$$

$$= x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$$ نخرج - من البسط

ومنه وجدنا أن

$$x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

ومنه التابع f كتب بالشكل

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

• ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

• التابع f مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

نستخدم لدراسة التغيرات شكل التابع

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

لأنّ

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

● نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

● نوحد مقامات

$$= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

نفك المتطابقة بالبسط

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

ومنه

$f'(x) > 0$

$\Leftarrow$ f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ أثبت ان للمعادلة

$$x(e^x+1) = e^x - 1$$

حل وحيد ثم أوجده

$$x(e^x+1) = e^x - 1$$

نقسم الطرفين على

e^x+1

فيصبح لدينا

$$\frac{x(e^x+1)}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$x = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0$$

ومنه اصبح

$f(x) = 0$

اصبح المطلوب:

أثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ثم أوجده.

● من جدول تغيرات f نجد أن:

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,+\infty[$

$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

● ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

إيجاد الحل الوحيد للمعادلة

سنوجد الحل الوحيد بالتجريب

نجرب $x=0$

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(0) = 0 - \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1} \qquad e^0 = 1$$

$$f(0) = 0 - \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

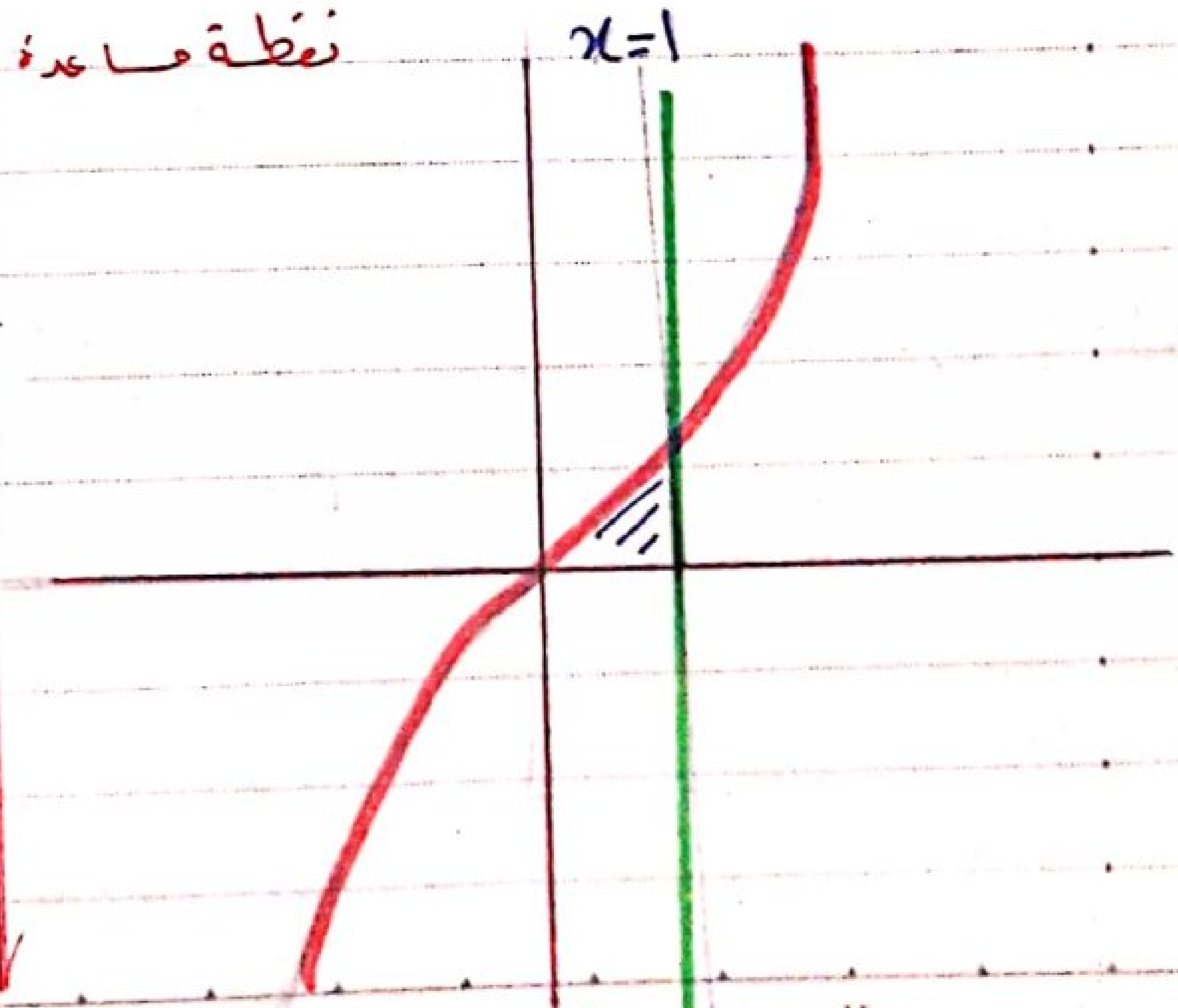
$$f(0) = 0$$

ومنه الحل الوحيد هو $x=0$

الطلب الرابع:

ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$:

رسم C ← $(0,0)$ نقطة مساعدة



$$S = \int_0^1 f(x)\,.dx$$

نستخدم شكل التابع

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$S = \int_0^1 x + 1 - 2\frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)\,dx - 2\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

البسط مشتق المقام فالتكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 - 2\left[\ln|e^x + 1|\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 0\right] - 2\left[\ln(e+1) - \ln(e^0+1)\right]$$

$$= \frac{3}{2} - 2\left[\ln(e+1) - \ln(2)\right]$$

$$= \frac{3}{2} - 2\left[\ln\frac{e+1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} - 2\left[\ln\frac{e+1}{2}\right]$$

$$S = \frac{3}{2} - 2\ln\frac{e+1}{2}$$

المسألة العاشرة/ زبك تحليل

في الرسم المجاور

① كم حل للمعادلة $f(x)=1$

- نرسم المستقيم $y=1$ يقطع الخط البياني في 4 نقاط
- ومنه للمعادلة 4 حلول

② ما هي قيمة $f'(0)$ ؟

- نلاحظ عند النقطة التي فاصلتها 0 يوجد مماس أفقي.
- ومنه المشتق عند النقطة التي فاصلتها صفر يكون معدوم

$$f'(0)=0$$

③ كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل وما هي؟

- قيمة صغرى محلياً $f(2)=0$
- قيمة صغرى محلياً $f(-2)=0$
- قيمة كبرى محلياً $f(0)=3$

④ عين $f(]-2,2[)$

- نرسم المستقيمين $x=-2$ ، $x=2$
- نحصر الخط البياني بين المستقيمين
- نسقط الخط البياني على محور التراتيب

$$]0,3]$$

الصفر فتحنا عندها المجال لأنه صورة للعدد 2 وصورة للعدد -2 والمجال عند 2 و عند -2 مفتوح.

أغلقنا المجال لأن 3 هي صورة للصفر والصفر ضمن المجال

⑤ أوجد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

نمشي مع الخط البياني الى أقصى اليمين ثم نسقطها على محور التراتيب

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

المسألة الحادية عشر / بنك تحليل

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب:

① أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي.

• مجموعة تعريف التابع $]-\infty, +\infty[$

. تمتد الخط البياني للتابع من اليسار لليمين على محور الفواصل

• المستقر الفعلي $[0, +\infty[$

. يمتد الخط البياني للتابع من الأسفل إلى الأعلى على محور التراتيب

② هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك؟

• التابع زوجي

. لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

③ أوجد

$f(-1) = 3$

$f(1) = 3$

$f(0) = 4$

$f(2) = 0$

$f(-2) = 0$

Note

لإيجاد $f(1)$

① نحدد 1 على محور الفواصل

② نسقط على الخط البياني

③ نسقط على محور التراتيب

وبالمثل لأي عدد آخر

④ أوجد

• $f'(1)$

نبحث عن المماس للخط البياني عند النقطة التي فاصلتها 1

$f'(1)$ → $(1,3)$ نقطة من المماس ، $(0,5)$ نقطة من المماس

$$f'(1) = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}} = \frac{5-3}{0-1}$$

$$f'(1) = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f'(1) = -2$$

• $f'(0) = 0$

يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها تساوي الصفر

• $f'(2) = 0$

يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها تساوي 2

• $f'(-2) = 0$

يوجد مماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها تساوي -2

⑤ الطلب الخامس:

أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1)

إن الشكل العام لمعادلة المماس

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$a = 1$ نعوض في معادلة المماس

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f(1) = 3$ $\quad$ $f'(1) = -2$

نعوض في معادلة المماس.

$y - 3 = -2(x-1)$

$y - 3 = -2x + 2$

$y = -2x + 2 + 3$

$\boxed{y = -2x + 5}$ → معادلة المماس

الطلب السادس:

أوجد $f([-2,2])$

• نرسم المستقيمين $x=-2$ ، $x=2$

• نحصر الخط البياني بين المستقيمين

• نسقط الخط البياني على محور التراتيب.

$f([-2,2]) = [0,4]$

الصفر هو صورة -2 وصورة 2 وعندها المجال مغلق

الـ 4 هي صورة الصفر وعندها المجال مغلق

الطلب السابع:

ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

• نرسم المستقيم $y = 5$

• نسقط قطع الخط البياني التي تقع فوق المستقيم على محور الفواصل

حل المتراجحة $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

الطلب الثامن:

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$

- نرسم المستقيم $y = 2$
- نلاحظ انه يقطع الخط البياني بـ 4 نقاط
- ومنه للمعادلة $f(x)=2$ 4 حلول.

الطلب التاسع:

نظم جدول تغيرات التابع.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

قيمة صغرى كلياً

قيمة كبرى كلياً

قيمة صغرى محلياً

المسألة الثانية عشر / بنك تحليل

x	0	1 الحل	الحل e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ ‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ (4) ↘	0 (4) ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-1

الطلب الاول :

ماهي القيم الحدية المحلية؟ وما نوعها؟

$f(1)=0$ قيمة صغرى محلياً .

الطلب الثاني :

هل يوجد مقاربات مائلة

لا يوجد مقاربات مائلة

لأنه لا يوجد $\lim_{x\to\infty}=\infty$

الطلب الثالث :

ماهي المقاربات الأفقية والشاقولية

$x=0$ مقارب شاقولي

$x=e$ مقارب شاقولي

$y=-1$ مقارب افقي

الطلب الرابع :

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$

احصرها بمجالات

للمعادلة $f(x)=4$ حلان ضمن

المجال $]1,e[$

وحل ضمن المجال $]0,1[$

الطلب الخامس :

اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x=1$

الشكل العام لمعادلة المماس عند $x=1$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$f(1)=0$ ← من السطر الثالث بالجدول

$f'(1)=0$ ← من السطر الثاني بالجدول

تصبح معادلة المماس من الشكل

$$y-0=0(x-1)$$

$y=0$ ← معادلة المماس

الطلب السادس:

أوجد مجموعة تعريف التابع:

$]0, e[\cup]e, +\infty[$

الطلب السابع:

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$x=1$

الطلب الثامن:

برهن ان للمعادلة $f(x)=-2$ حل وحيد.

• ان التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]e, +\infty[$

$-2 \in f(]e,+\infty[) =]-\infty, -1[$

ومنه للمعادلة $f(x)=-2$ حل وحيد ضمن المجال $]e,+\infty[$

$-2 \notin f(]0,1[) =]0, +\infty[$

ومنه لا يوجد للمعادلة $f(x)=-2$ حل ضمن المجال $]0,1[$

$-2 \notin f(]1,e[) =]0,+\infty[$

ومنه لا يوجد للمعادلة $f(x)=-2$ حل ضمن المجال $]1,e[$

• ومنه للمعادلة $f(x)=-2$ حل وحيد ضمن المجال $]e,+\infty[$

الطلب التاسع:

اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث

$g(x) = \ln(f(x))$

$g(x)$ تابع لوغاريتمي معرف عندما يكون اللوغاريتم موجب تماماً

$f(x) > 0$

نأخذ المجالات من السطر الاول

$]0, 1[\cup]1, e[$

المسألة الثالثة عشر / رذاذ تحليل

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$1 \;\|\|\; -2$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3

الطلب الاول:

عين مجموعة تعريف التابع f

$]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط c.

$x = -2$ مقارب شاقولي

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$y = -3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

الطلب الثالث:

هل يوجد مماس أفقي للخط c في احدى نقاطه؟

لا يوجد مماس أفقي

الطلب الرابع:

هل f اشتقاقي عند 3؟

كلا ليس اشتقاقي عند 3.

لأن مشتقة العدد المشتق من اليمين لا تساوي مشتقة العدد المشتق من اليسار

الطلب الخامس:

عين القيم الحدية للتابع f؟

$f(3) = 0$ قيمة كبرى عليا

المسألة الرابعة عشر / بنك تحليل

لتكن التابع f المعرف على

$I =]0, +\infty[$

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

خطه البياني c

والتابع g معرف على I وفق

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

المطلوب:

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً لها.

• التابع g مستمر واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty - 1 - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

• $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 - 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

• نشتق ونعدم المشتق.

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

نعدم المشتق $g'(x) = 0$

$$\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$$

$g'(x) = 0$

$$\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$$

نوحد مقامات (x)

$$\frac{-1-x}{x^2} = 0$$

$-1 - x = 0 \Rightarrow x = -1$.

مرفوض لأنه ليس من مجموعة تعريف التابع

• التابع متناقص تماماً

$g'(x) < 0$

نرسم جدول تغيرات التابع:

x	0	$+\infty$
$g(x)$	——	
$g'(x)$	$+\infty \searrow$	$-\infty$

الطلب الثاني:

بين ان للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α.

ثم تحقق ان $\alpha = 1$

• ان التابع g مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$$0 \in g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد.

• من أجل $\alpha = 1$

$$g(1) = \frac{1}{1} - 1 - \ln 1$$

$\ln 1 = 0$

$$= 1 - 1 - 0 = 0$$

بما ان $g(1) = 0$

ومنه $\alpha = 1$ حل للمعادلة

الطلب الثالث:

أثبت ان

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

ان

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

مشتق جداء

$$f'(x) = -e^{-x}(1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$

نزل e^{-x} للمقام ونعكس اشارة الأس

$=$

أثبت أنّ :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

نشتق $f(x)$ ونثبت صحة العلاقة

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

مشتق جداء.

$$f'(x) = -e^{-x}(1+\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(e^{-x})$$

$$= \frac{-(1+\ln x)}{e^x} + \frac{\frac{1}{x}}{e^x}$$

نزلت e^x للمقام عكست اشارة الأس:

$$f'(x) = \frac{-1-\ln x + \frac{1}{x}}{e^x}$$

لكن: $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

وهو المطلوب.

الطلب الرابع:

مستفيداً من تغيرات g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

- f مستمر واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^0(1+(-\infty))$
$= 1(-\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0(\infty)$ ح.ع.ت

$$f(x) = e^{-x}(1+\ln x)$$

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} + 1 \times \frac{\ln x}{e^x}$$

ضربنا وقسمنا ب x

$$= \frac{1}{e^x} + \frac{x}{x} \times \frac{\ln x}{e^x}$$

$$= \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 0 + (0)(0) = 0$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

لأن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ولأن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

• نشتق ونعدم المشتق:

وجدنا من الطلب السابق

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

نعدم المشتق.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = 0$$

وجدنا ان للمعادلة

$g(x) = 0$

حل وحيد $x = 1$

• $f(1) = e^{-1}(1+0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(1) = \frac{1}{e}$

• نرسم جدول تغيرات التابع:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

رسم الخط البياني :

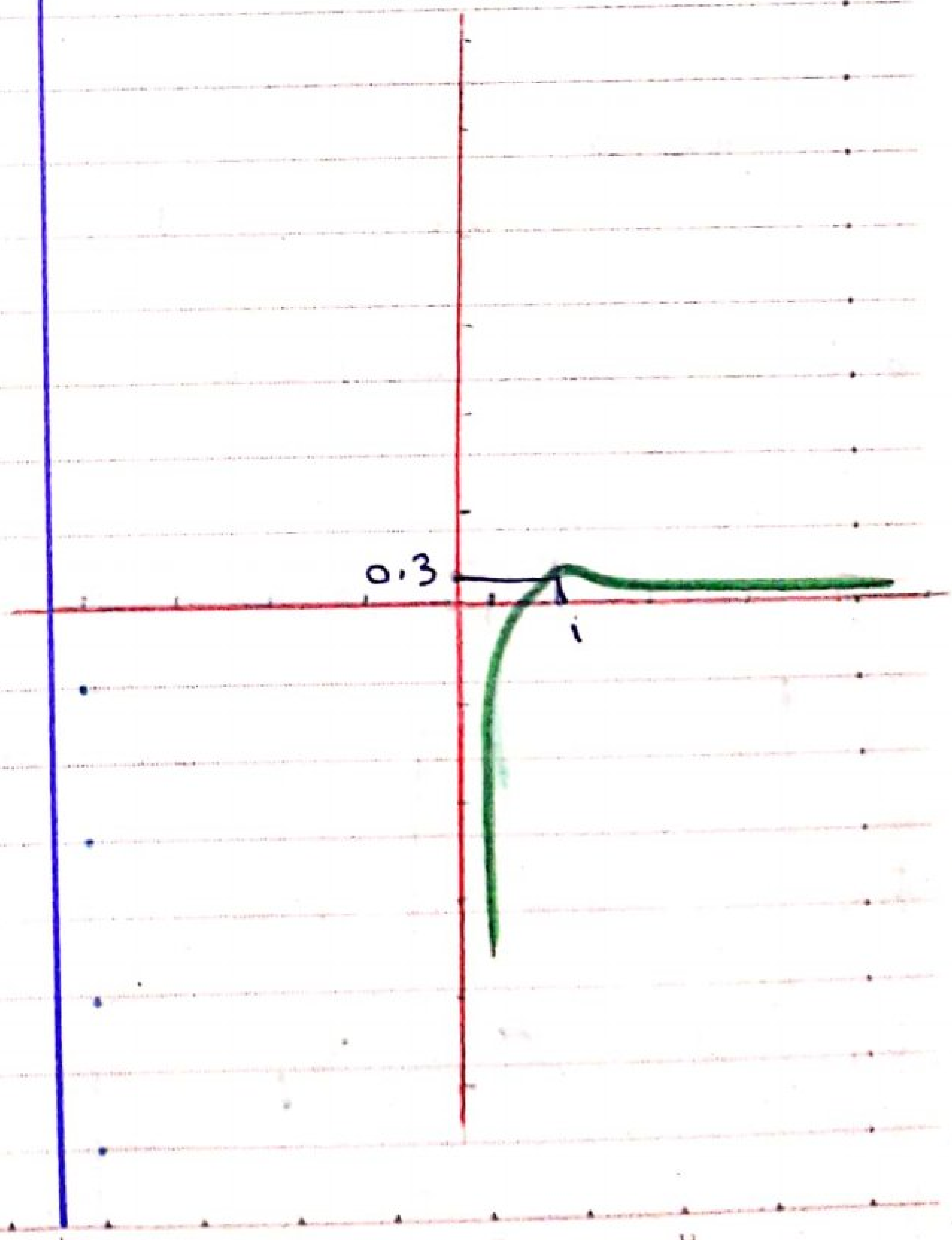
$x=0$
مقارب شاقولي

$y=0$
مقارب أفقي

رسم c

$(1, \frac{1}{e})$
نقطة مساعدة

$\frac{1}{e} \simeq 0.3$



المسألة الخامسة عشر / بنك تحليل

لتكن التابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$

$$f(x) = x - 4 + \ln\frac{x}{x+1}$$

و خطه البياني C

الطلب الأول:

أثبت أن f متزايد تماماً على I واستنتج $f(I)$

- f مستمر واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 4 + (-\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to 0} \ln\frac{x}{x+1} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 4 + 0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\frac{x}{} = 0$$

- نشتق ونعدم المشتق:

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{\frac{(1)(x+1) - (1)(x)}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x}$$

بالاختصار.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

ومنه f متزايد تماماً على I.

• نرسم جدول تغيرات التابع

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(I) = f(]0, +\infty[)$$

$$=]-\infty, +\infty[$$

الطلب الثاني:

أثبت أن المستقيم الذي معادلته

$$y = x - 4$$

مقارب للخط C في جوار $+\infty$

وادرس الوضع النسبي:

$$f(x) - y_D = x - 4 + \ln\frac{x}{x+1} - x + 4$$

$$f(x) - y_D = \ln\frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$$

لأن

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\frac{x}{x+1} = 0$$

ومنه:

$y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق.

$$f(x) - y_D = \ln \frac{x}{x+1}$$

إنّ:

$$x < x+1$$

ومنه

$$\ln x < \ln x+1$$

$$\ln x - \ln x+1 < 0$$

$$\ln \frac{x}{x+1} < 0$$

ومنه

$$f(x) - y_D < 0$$

$\Leftarrow$ الخط C تحت D.