سبحانك لا إله إلا أنت سبحانك، أستغفرك لذنبي
وأسألك رحمتك. اللهم زدني علماً، ولا تزغ قلبي
بعد إذ هديتني، وهب لي من لدنك
رحمة، إنك أنت الوهاب.

منشورات جامعة حلب
كليـة العلـوم

آمين وصلى الله على
سيدنا محمد وعلى آله و
صحبه وسلم

الرياضيات العامة «٩»

حميدي (٢)

متتاليات وسلاسل

تحليل عددي

الدكتور
هيثم عرابي

الدكتور
نديم حنبلاس

لطلاب السنة الأولى

قسم ر . ف . ك

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٢١ هـ — ٢٠٠٠ م

القسم الأول

الفصل الأول

المتتاليات العددية

1- تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف (1-1) :

المتتالية العددية هي تابع عددي f منطلقه N^* ومستقره مجموعة جزئية A من R.

فإذا كانت $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ الصور المباشرة وفق f للأعداد $1, 2, \ldots, n, \ldots$ -على الترتيب- فإننا نعبر عن المتتالية f عندئذٍ بـ $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ أو اختصاراً بـ $\{a_n\}$.

نسمي الأعداد $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ حدود المتتالية أما a_n فيسمى الحد العام للمتتالية.

وهكذا فإن المتتالية تكون معطاة بمعرفة التابع الذي يحدد القاعدة التي تعطي كل حد من حدودها.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها منطلق التابع العددي f مجموعة جزئية منتهية B من N^*، حيث $Card(B)=k$، ومستقره مجموعة جزئية A من R، فإننا نسمي المتتالية العددية $\{a_k\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ متتالية عددية منتهية.

في كل دراستنا القادمة سنستخدم كلمة متتالية للتعبير عن المتتالية العددية غير المنتهية ما لم ننوه إلى غير ذلك.

ملاحظة (2-1):

بما أن كل متتالية يعبر عنها بالشكل $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ فإن معرفة الحد العام للمتتالية يمكننا من استنتاج كافة حدودها، وبالعكس فإن معرفة عدد منته من حدودها الأولى يمكننا من استنتاج حدها العام.

أمثلة (3-1):

1- إن $\{(-1)^n\}$ متتالية حدها العام $a_n = (-1)^n$ وبتعويض $n=1,2,3,\ldots$ في صيغة الحد العام نحصل على جميع حدود المتتالية والتي هي $\{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}$.

2- كذلك فإن $\left\{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ متتالية حدها العام $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ وهي تكتب بشـــكل مفصل على النحو التالي

$$\left\{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots, \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \cdots\right\}$$

3- إذا كان $a_n = (-1)^n n$ الحد العام لمتتالية فإن هذه المتتالية تكتب على الشكل

$$\left\{(-1)^n n\right\} = \left\{-1, 2, -3, 4, -5, \cdots, (-1)^n n, \cdots\right\}$$

4- إذا كانت لدينا المتتالية $\{1,3,5,7,9,\ldots\}$ فإنه لإيجاد حدها العام نلاحظ أن حدودها الأول فردية و متتالية وهذا يعني أنه يمكن التعبير عنها بالشكل $2n-1$ والذي يمثل حدها العام إذا $a_n = 2n-1$ و $\{2n-1\} = \{1,3,5,7,9,\ldots,2n-1,\ldots\}$.

قد يتبادر إلى الذهن أن الأعداد الفردية المتتالية يمكن التعبير عنها أيضا بالشكل $2n+1$، لكن بما أن $n=1,2,3,\ldots$ فإنه في هذه الحالة نجد أن $a_1 = 3$ وهو لا يمثل الحد الأول في المتتالية. لذا اخترنا الصيغة $2n-1$ لأنها تعطي جميع حدود المتتالية.

5- لتكن لدينا المتتالية $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}$ نلاحظ أن

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad \text{و} \quad a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad \text{و} \quad a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$$

وهكذا يمكن أن نستنتج الحد العام لهذه المتتالية برصد الصفة المميزة لعناصرها المعروضة والتي هي $a_n = \frac{1}{2^n}$ وبالتالي فإن

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$$

6- لتكن لدينا المتتالية العددية المنتهية

$$\{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32\}$$

إن إيجاد صيغة الحد العام لهذه المتتالية المنتهية، أي قاعدة تعريف التابع الذي يمثل هـــذه المتتالية المنتهية، يقتضي التعبير عن كل حد من حدودها بدلالة العدد الذي يقابله مـــن N^*. فإذا لاحظنا أن $a_1 = 2$ نجد مثلاً أن

$$a_7 = 32 = 2 + 30 = 2 + 5 \times 6 = 2 + 5 \times (7-1)$$
$$a_6 = 27 = 2 + 25 = 2 + 5 \times 5 = 2 + 5 \times (6-1)$$

....

وهكذا نجد أن $\forall k \in \{1, 2, \cdots, 7\};\ a_k = 2 + 5(k-1) = 5k-3$

إذاً $\{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32\} = \{5k-3\}\ ;\ k=1, 2, \ldots, 7$

نتيجة (1-4):

بما أن المتتالية العددية هي عبارة عن تابع فإنه يمكن تمثيلها بيانياً في مستوٍ منسوب إلى جملة محاور إحداثية. ونترك للقارئ تطبيق هذه النتيجة على الأمثلة السابقة.

تعريف (1-5):

1- نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي $k>0$ بحيث يكون $|a_n| \le k$ أي أن $a_n \in [-k, k]$، وهذا يعني أن جميع حدود المتتالية تنتمي إلى المجال المغلق $[-k,k]$ ونعبر عن ذلك رياضيا كما يلي:

$\{a_n\}$ محدودة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\exists k \in R^{+*};\quad |a_n| \le k$$

2- نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها غير محدودة إذا كان من أجل أي عدد حقيقي $k>0$ توجد حدود للمتتالية تقع خارج المجال $(-k,k)$ ونعبر عن ذلك بقولنا:

$\{a_n\}$ غير محدودة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall k \in R^{+*},\quad \exists n \in N\ ;\quad a_n \notin (-k, k)$$

3- نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى أو من اليمين إذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون $a_n \le M$ من أجل جميع قيم n، أي أن $a_n \in (-\infty, M]$ ونعبـــر عـــن ذلك كما يلي:

$$\{a_n\} \text{ محدودة من الأعلى } \Leftrightarrow \exists M \in R,\quad \forall n \in N\ ;\quad a_n \le M$$

نقول عن M في هذه الحالة بأنه حد أعلى للمتتالية $\{a_n\}$، وواضح أنه إذا وجد حد أعلى للمتتالية فهو ليس وحيدا.

4- نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأدنى أو من اليسار إذا وجد عدد حقيقي m

بحيث يكون $m \le a_n$ من أجل جميع قيم n ، أي أن $a_n \in [m, +\infty)$ ونعبر عن ذلك بقولنا:

$$\{a_n\} \text{ محدودة من الأدنى } \Leftrightarrow \quad \exists m \in R, \quad \forall n \in N \; ; \quad m \le a_n$$

نقول عن m في هذه الحالة بأنه حد أدنى للمتتالية $\{a_n\}$، وواضح أنه إذا وجد حد أدنى لمتتالية فهو ليس وحيداً.

نتائج (1-6):

(i) $\{a_n\}$ محدودة $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

(ii) قد تكون $\{a_n\}$ غير محدودة ولكنها محدودة من الأعلى أو من الأدنى. أو غير محدودة من الطرفين

أمثلة (1-7):

1- المتتالية $\{n\}$ محدودة من الأدنى فقط.

2- المتتالية $\{-n\}$ محدودة من الأعلى فقط.

3- المتتالية $\{(-1)^n n\}$ غير محدودة.

4- المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ محدودة لأن $\left|\frac{1}{n}\right| \le 1$ مهما يكن n.

5- المتتالية $\left\{\mathrm{Sin}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ محدودة لأن $\left|\mathrm{Sin}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ مهما يكن n.

تعريف (1-8):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية ما و L عدد حقيقي. نقول أن L نهاية للمتتالية $\{a_n\}$ ، ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، إذا تحقق الشرط التالي:

مهما يكن $\varepsilon > 0$ (حيث ε عدد حقيقي صغير بقدر كاف) يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه من أجل جميع حدود المتتالية التي أدلتها N<n تتحقق المتراجحة $|a_n - L| < \varepsilon$. ونعبر عن ذلك كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in N^* ; \quad n > N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

نلاحظ هنا أن العدد N يتعلق دوما بالعدد ε المختار أولاً. لذا فإننا نجد بعض الكتب التي تعتمد كتابة N بالشكل $N(\varepsilon)$ للدلالة على تابعية ~~N~~ لـ ε .

تعريف (1-9): موجودة ومحدودة

إذا وجد لمتتالية ما نهاية قلنا عنها أنها متقاربة، وفي الحالة المعاكسة نقول عن المتتالية أنها متباعدة.

ملاحظة (1-10):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية متقاربة من L، أي أن $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، إذ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad \text{من أجل} \quad N<n$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \text{من أجل} \quad N<n$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{من أجل} \quad N<n$$

$$\Leftrightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \quad \text{من أجل} \quad N<n$$

$\Leftrightarrow$ جميع عناصر المتتالية $\{a_n\}$ عدا عدد محدود من حدودها الأولى ينتمي إلى أي جوار لـ L.

نتيجة (1-11):

ينتج من تعريف نهاية متتالية أنه إذا تم حذف أو إضافة أو تغير عدد منته من الحدود الأولى لمتتالية متقاربة كانت المتتاليات الناتجة متقاربة أيضاً ولها نفس نهاية المتتالية الأصلية.

أمثلة (1-12):

1- برهن أن المتتالية $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ متقاربة من الصفر، وذلك بتطبيق التعريف (1-8)

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ أي عدد موجب صغير بقدر كاف، ولنبحث عن عدد صحيح موجب N يقابل ε بحيث تتحقق المتراجحة $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$ وذلك عندما يكون n>N.

في الواقع لدينا

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

وإذا اخترنا N و N^* بحيث يحقق المتراجحة $N > \frac{1}{\varepsilon}$ نجد أنه إذا كـان $n>N$ فـإن

$$n > N \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$ (اعتماداً على التكافؤات السابقة)

إذاً

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists N \in \mathbb{N}^* ;\; n > N \;\Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

والتعريف محقق، أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ والمتتالية المعطاة متقاربة من الصفر.

2- إذا كان $a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}$ الحد العام لمتتالية، فبرهن باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

الحل: لنبرهن على أنه

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N}^* \;;\; n > N \;\Rightarrow\; \left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| < \varepsilon$$

في الواقع إن

$$\left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{-n-1}{n^2+1}\right| = \left|-\frac{n+1}{n^2+1}\right| = \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{n+1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2 - 1 + 1}$$

$$< \frac{n+1}{n^2 - 1} = \frac{n+1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

ومن هذه المتراجحة نجد أن

$$\frac{1}{n-1} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

وباختيار N بحيث يكون $N > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ نجد أنه

$$n > N \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \;\Rightarrow \left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| < \varepsilon$$

والنهاية صحيحة.

3- برهن باستخدام التعريف أن نهاية المتتالية التي حدها العـام $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ تساوي $\frac{1}{2}$.

الحل: نلاحظ أولاً أن

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\,\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

وهكذا فإن

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right| = \left|-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} < \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{2\left(\sqrt{1}+1\right)} = \frac{1}{4n} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon}$$

∞

وباختيار N بحيث يكون $N > \frac{1}{4\varepsilon}$ نجد أنه

$$n > N \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{4\varepsilon} \;\Rightarrow\; \left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

والنهاية صحيحة.

ملاحظة (13-1):

يمكن الاستفادة من منشور ثنائي الحد لـ نيوتن -الكرخي ومن متراجحة برنسولي في معرفة إذا ما كانت متتالية ما محدودة، أو في التأكد من صحة نهاية متتالية. ونذكّر هنا بـأن منشور ثنائي الحد لـ نيوتن - الكرخي هو

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$$

حيث

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

أما متراجحة برنولي فيمكن استخلاصها بسهولة من المنشور السابق ونجد

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad ; \qquad x \geq 0 \qquad (*)$$

وإذا وضعنا $1+x=A$ في المتراجحة السابقة حصلنا على المتراجحة

$$A^n \geq 1+n(A-1) \qquad (**)$$

إن المتراجحتين (*) و (**) صحيحتان من أجل أي عدد طبيعي n.

أمثلة (1-14):

1- هل المتتالية $\{a^n\}$ ، حيث $a>1$ ، محدودة ؟

الحل: بما أن $a>1$ فإن $a^n>1$ أي أن المتتالية محدودة من الأدنى. ولكن إذا وضعنا $a=1+\alpha$ ، حيث $\alpha>0$ ، فإننا نجد حسب متراجحة برنولي - أن

$$a^n=(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$$

أي من أجل قيم لـ n كبيرة بقدر كاف فإن حدود المتتالية ستكون أكبر من أي عدد $0<k$ معطى سلفاً. إذاً المتتالية غير محدودة من الأعلى، وبالتالي فهي غير محدودة.

2- ليكن $a_n=\alpha^n$ ، حيث $0<\alpha<1$ ، الحد العام لمتتالية. برهن أن $\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$.

الحل: بما أن $0<\alpha<1$ ، فإن α يكتب بالشكل $\alpha=\frac{1}{1+h}$ حيث $h>0$

وحسب برنولي لدينا $(1+h)^n\geq 1+nh$ ومنه

$$|\alpha^n-0|=|\alpha^n|=\alpha^n=\left(\frac{1}{1+h}\right)^n=\frac{1}{(1+h)^n}\leq\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow nh>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon h}$$

وباختيار $\frac{1}{\varepsilon h}<N$ نجد أنه

$$n>N\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon h}\Rightarrow |\alpha^n-0|<\varepsilon$$

والنهاية صحيحة.

3- ليكن $a_n=n\alpha^n$ ، حيث $0<\alpha<1$ ، الحد العام لمتتالية. برهن أن $\lim_{n\to\infty}a^n=0$.

الحل: بوضع $\alpha=\frac{1}{1+h}$ حيث $h>0$ فإنه بحسب نيوتن -الكرخي لدينا

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\dots>\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

ومنه

$$|n\alpha^n-0|=|n\alpha^n|=n\alpha^n=\frac{n}{(1+h)^n}<\frac{2n}{n(n-1)h^2}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)h^2}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1$$

وباختيار $\frac{2}{\varepsilon h^2}+1<N$ نجد أنه

$$n>N\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1\Rightarrow |n\alpha^n-0|<\varepsilon$$

والنهاية صحيحة.

4- لتكن لدينا متتالية حدها العام $a_n=\sqrt[n]{n}$. برهن أن $\lim_{n\to\infty}a^n=1$.

الحل: مهما يكن $n\in N^*$ فإن $\sqrt[n]{n}$ يمكن أن يكتب بالشكل

$\sqrt[n]{n}=1+h$ حيث $h>0$

وهكذا فإن

$$n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\dots>\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-1}>h^2\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{n-1}}>h$$

وبالتالي فإن

$$|\sqrt[n]{n}-1|=|h|=h<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2}{n-1}<\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{n-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$$

وباختيار $\frac{2}{\varepsilon^2}+1<N$ نجد أن

$$n>N\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1\Rightarrow|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$$

والنهاية صحيحة.

5- إذا كانت جميع حدود المتتالية $\{a_n\}$ تساوي عدداً واحداً هو a، فبرهن أن

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

الحل: في الواقع لدينا من أجل أي $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

وهذه المتراجحة محققة دوما من أجل جميع عناصر المتتالية. إذاً فالنهاية صحيحة.
إن هذا التمرين هو برهان على أن نهاية أي ثابت يساوي الثابت نفسه. أي إذا كان c ثابتاً ما فإن $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2- خواص المتتاليات المتقاربة

نظرية (2-1):

1) إذا وجد لمتتالية ما نهاية كانت تلك النهاية وحيدة.

البرهان: لتكن $\{a_n\}$ متتالية متقاربة، ولنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ وأن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$،
فإذا كان $\varepsilon > 0$ فإن $0 < \frac{\varepsilon}{2}$ وبالتالي واعتماداً على الفرض فإنه يمكننا إيجاد عددين N_1 و N_2 من $\mathbf{N}^*$ بحيث يكون

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n > N_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وهكذا إذا أخذنا $N = \max(N_1, N_2)$ فإنه من أجل جميع قيم $n>N$ سوف تتحقق المتراجحتان السابقتان بآن معاً وبالتالي نجد أن

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \le |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن الفرق بالقيمة المطلقة بين العددين L_1 و L_2 أصغر من أي عدد موجب ε، وهذا يعني أن $L_1 - L_2 = 0$ أي $L_1 = L_2$ والنهاية وحيدة.

نظرية (2-2):

2) كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

البرهان: لتكن $\{a_n\}$ متتالية متقاربة ولنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. عندئذٍ من أجل $\varepsilon = 1$ يمكن، بحسب تعريف نهاية متتالية، إيجاد عدد $N \in \mathbf{N}^*$ بحيث يكون

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < 1$$

ولكن من أجل جميع قيم $n>N$ لدينا

$$|a_n| = |a_n - L + L| \le |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

فإذا فرضنا أن

$$k = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + 1 + |L|$$

فإن $k \in \mathbf{R}^{+*}$ وهو يحقق المتراجحة $|a_n| < k$ من أجل جميع قيم $n \in \mathbf{N}^*$، أي أن المتتالية محدودة بحسب التعريف (1-5-1) وهو المطلوب.

تجدر الإشارة هنا إلى أن عكس النظرية السابقة ليس صحيحا في الحالة العامة، أي إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة فليس بالضرورة أن تكون متقاربة وهذا ما يؤكده المثال التالي:

وجدنا في المثال (1-7-5) أن المتتالية $\left\{\mathrm{Sin}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ محدودة لأن $\left|\mathrm{Sin}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ وذلك مهما يكن $n \in \mathbf{N}^*$. وحتى تكون هذه المتتالية متقاربة من عدد حقيقي ما مثل L فإنه بحسب الملاحظة (1-10) يجب أن تكون جميع حدود هذه المتتالية، عدا عدد محدود من حدودها الأولى، ينتمي إلى أي جوار لـ L. فإذا أخذنا ε أي عدد حقيقي موجب يحقق المتراجحة $0 < \varepsilon < 1$ فإن طول أي جوار $(L-\varepsilon \,,\, L+\varepsilon)$ لـ L هو $\frac{L+\varepsilon-L+\varepsilon}{2} = \varepsilon < 1$، وبما أن حدود المتتالية إما أن تساوي «1» وإما أن تساوي «0» وإما أن تساوي «-1» وفي كل مرة يوجد عدد غير منتهٍ من هذه الحدود، وبما أن البعد بين كل من الـ«0» والـ«1» وبين الـ«0» و الـ«-1» على المحور الحقيقي يساوي «1» فإن الجوار $(L-\varepsilon \,,\, L+\varepsilon)$ للنهاية المفترضة سوف يحوي على الأكثر إحدى القيم «1» أو «0» أو «-1» وبالتالي سوف يقع عدد غير منتهٍ من حدود المتتالية خارج هذا الجوار وذلك مهما يكن $0 < \varepsilon < 1$، وهذا يعني أنه لا يوجد $L \in \mathbf{R}$ بحيث يكون نهاية لهذه المتتالية.

3- العمليات على المتتاليات

مجموع متتاليتين (3-1):

إن مجموع المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هو بالتعريف المتتالية $\{a_n + b_n\}$ حيث

$$\{a_n + b_n\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \cdots, a_n + b_n, \cdots\}$$

طرح متتاليتين (3-2):

طرح المتتالية $\{b_n\}$ من المتتالية $\{a_n\}$ هو بالتعريف المتتالية $\{a_n - b_n\}$ حيث

$$\{a_n - b_n\} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \cdots, a_n - b_n, \cdots\}$$

جداء متتاليتين (3-3):

جداء المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هو بالتعريف المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ حيث

$$\{a_n \cdot b_n\} = \{a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \cdots, a_n \cdot b_n, \cdots\}$$

قسمة متتاليتين (3-4):

قسمة المتتالية $\{a_n\}$ على المتتالية $\{b_n\}$ ، بفرض أن $b_n \neq 0$ لجميع قيم n، هو بالتعريف المتتالية $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ حيث

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}, \cdots\right\}$$

ضرب متتالية بعدد (3-5):

ضرب المتتالية $\{a_n\}$ بعدد ما مثل c يمكن النظر إليه كجداء المتتالية $\{a_n\}$ بالمتتالية $\{b_n\} = \{c\}$ التي كل حد من حدودها يساوي c وهكذا يكون حاصل ضرب المتتالية $\{a_n\}$ بالعدد c -اعتماداً على تعريف جداء متتاليتين- هو المتتالية $\{ca_n\}$ حيث

$$\{ca_n\} = \{ca_1, ca_2, ca_3, \cdots, ca_n, \cdots\}$$

4- العمليات على النهايات

نظرية(4-1):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين متقاربتين حيث $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

البرهان: سنبرهن النظرية في حالة الجمع ، ويتم برهان حالة الفرق بطريقة مماثلة.

بحسب الفرض فإنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عددان N_1 و N_2 من N^* بحيث يكون

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نفرض أن $N = \max(N_1, N_2)$ ، عندئذ ومن أجل جميع قيم $n > N$ لدينا

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن المتتالية $\{a_n + b_n\}$ متقاربة ونهايتها تساوي A+B.

نظرية (4-2):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين متقاربتين من A و B على الترتيب، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

البرهان: بما أن $\{b_n\}$ متقاربة فهي محدودة بحسب النظرية (2-2)، هذا يعني أنه يوجد $k \in R^{+*}$ حيث $|b_n| \le k$ من أجل جميع قيم n.

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً اختيارياً، عندئذ وبحسب الفرض يمكن إيجاد عددين N_1 و N_2 من N^* بحيث يكون

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2k}$$
$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$$

لنفرض أن $N = \max(N_1, N_2)$ ، عندئذ ومن أجل جميع قيم $n > N$ لدينا

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |(a_n \cdot b_n - Ab_n) + (Ab_n - A \cdot B)| \le$$
$$|b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B| < k\frac{\varepsilon}{2k} + |A|\frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$$

أي أن المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متقاربة ونهايتها تساوي $A \cdot B$.

نتيجة(4-3):

ينتج من هذه النظرية مباشرةً أنه من أجل أي عدد حقيقي λ ، إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة من A فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda A$.

نظرية مساعدة (4-4):

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة حيث $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ وكان $A \neq 0$ ، فإنه يوجد دليل n_1 من مجموعة الأدلة $n=1, 2, \ldots, n_1 \ldots$ بحيث يكون $a_n \neq 0$ من أجل جميع قيم n المحققة للمتراجحة $n > n_1$. بشكل أدق فإن $|a_n| > \frac{|A|}{2}$ من أجل جميع $n_1 < n$

البرهان: في الواقع من أجل العدد $\varepsilon > \frac{|A|}{2}$ يوجد $n_1 \in N^*$ بحيث يكون

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{|A|}{2}$$

وعندئذ يكون لدينا

$$|a_n| = |-a_n| = |(-a_n + A) - A|$$
$$= |A - (-a_n + A)| \geq |A| - |-a_n + A| = |A| - |a_n - A| > |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} > 0$$

نظرية(4-5):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين متقاربتين حيث $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ وكان $B \neq 0$ و $b_n \neq 0$ لجميع قيم n فإن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ وذلك من أجل جميع قيم n المحققة للمتراجحة $n > n_1$ (حيث n_1 أحد الأدلة $n=1,2,3,\ldots,n_1\ldots$).

البرهان: لنبرهن انه من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يمكن إيجاد $N \in N^*$ بحيث يكون

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon$$

في الواقع لدينا

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - b_n A}{b_n B}\right|$$
$$\leq \frac{|a_n - A||B|}{|b_n||B|} + \frac{|A||B - b_n|}{|b_n||B|} = \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A||b_n - B|}{|b_n||B|} \qquad (*)$$

ولكن بحسب النظرية المساعدة (4-4) لدينا $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ من أجل $n_1 < n$ ؛

وبما أن المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقاربتان من الفرض فإنه من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ يمكن إيجاد عددين N_1 و N_2 من N^* بحيث يكون

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - A| < |B|\frac{\varepsilon}{4}$$

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - B| < |B|^2 \frac{\varepsilon}{4|A|}$$

فإذا فرضنا أن $N = \max(n_1, N_1, N_2)$ ، نجد من المتراجحة (*) ومن أجل قيم $N<n$، أن

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A||b_n - B|}{|b_n||B|} < \frac{2|B|\varepsilon}{4|B|} + \frac{2|A||B|^2\varepsilon}{4|B|^2|A|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

اي أن المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متقاربة ونهايتها تساوي $\frac{A}{B}$.

نتيجة (4-6):

ينتج من النظرية (4-2) والنظرية (4-5) أنه إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة من A، فإنه من أجل أي عدد صحيح p تكون المتتالية $\{a_n^p\}$ متقاربة من A^p أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = A^p$.

أمثلة (4-7):

1- أوجد نهاية المتتاليات $\left\{\frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6}\right\}$ ، $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$ ، $\left\{\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4\right\}$.

الحل: بالاستفادة من النظريات السابقة نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{5+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{7}{n}}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

2- أدرس تقارب المتتالية $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right\}$.

الحل: $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$

نلاحظ أنه عندما يكون n عدداً زوجياً فإنه نهاية الحد العام للمتتالية المعطاة هي« $-\frac{1}{2}$ » ، وعندما يكون n عدداً فردياً فإنه نهاية الحد العام هي « $\frac{1}{2}$ » ، وهذا يعني أن نهاية المتتالية ليست وحيدة وبالتالي فالمتتالية متباعدة .

3- ادرس تقارب المتتالية $\{8-2n\}$.

الحل: $\lim_{n\to\infty}(8-2n)=\lim_{n\to\infty}8-\lim_{n\to\infty}2n=8-2\lim_{n\to\infty}n=8-\infty=-\infty$

أي أن المتتالية متباعدة .

4- ادرس تقارب المتتالية $\left\{\frac{n}{e^n}\right\}$. صام صام

الحل: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}n}{\lim_{n\to\infty}e^n}=\frac{\infty}{\infty}$

وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نطبق قاعدة لوبيتال، ولكن بما أن n و e^n قيم حقيقية فإن اشتقاقهما مباشرةً لايفي بالغرض المطلوب، لذا نبدل، في صيغة الحد العام a_n ، x بـ n فنحصل على التطبيق $f(x)=\frac{x}{e^x}$. إن عملية التبديل هذه ممكنة دوماً وفق التعريف(1-1)

الذي ينص على أن المتتالية العددية هي تطبيق عددي f منطلقة N^* ومستقرة مجموعة جزئية A من R. وهكذا نطبق قاعدة لوبيتال على التطبيق $f(x)$ فنجد أن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$$

وبالعودة إلى المتتالية المفروضة نجد أن $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$ أي أن المتتالية متقاربة من الصفر.

5- الانتقال إلى النهايات في المتراجحات

نظرية (5-1):

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة وكان $a_n\geq 0$ من أجل جميع قيم n فإن $\lim_{n\to\infty}a_n\geq 0$.

البرهان: لنفرض أن $\lim_{n\to\infty}a_n=L<0$ ، عندئذ من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد $N\in N^*$ بحيث يكون

$$n>N\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$$

ومنه

$$n>N\Rightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$$

وإذا اخترنا ε بحيث يكون $0<\varepsilon<\frac{|L|}{2}$ نجد من المتراجحة $a_n<L+\varepsilon$ أن

$$a_n<L+\varepsilon<L+\frac{|L|}{2}=L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}<0$$

وهذا يناقض الفرض بأن $a_n\geq 0$ لجميع قيم n، إذاً $\lim_{n\to\infty}a_n=L\geq 0$

نظرية (5-2):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين متقاربتين تحققان المتراجحة $a_n\leq b_n$ لجميع قيم n فإن $\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n$

البرهان: لنأخذ المتتالية $\{b_n-a_n\}$. إن $b_n-a_n\geq 0$ لجميع قيم n (حسب الفرض) وبالتالي فإنه بحسب النظرية (5-1) يكون

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)\geq 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n\geq 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}b_n\geq\lim_{n\to\infty}a_n$$

ملاحظة(5-3):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين متقاربتين بحيث أن $a_n < b_n$ لجميع قيم n

فإن هذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

فمثلاً: المتتاليتان $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ تحققان الشرط $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ لجميع قيم n على حين نرى أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$$

نظرية (5-4): هام خواص المتتاليات المتقاربة

إذا كانت المتتاليات $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ تحقق الشرط $a_n \le b_n \le c_n$ لجميع قيم n ، وكانت $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ متقاربتين ولهما نفس النهاية L فإن $\{b_n\}$ تكون متقاربة أيضاً ولها نفس النهاية L.

البرهان: من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد بحسب الفرض $N_1, N_2 \in N^*$ بحيث يكون

$$n > N_1 \;\Rightarrow\; L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$
$$n > N_2 \;\Rightarrow\; L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$$

وإذا فرضنا أن $N = \max(N_1, N_2)$ ، فإنه من أجل جميع قيم $N<n$ يكون لدينا

$$L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon \;\Rightarrow\; L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$$
$$\Rightarrow\; |b_n - L| < \varepsilon$$

إذاً $\{b_n\}$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ والنظرية صحيحة.

حالة خاصة: ينتج من هذه النظرية أنه إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين و L عدد حقيقي ما بحيث يكون $L \le a_n \le b_n$ من أجل جميع قيم n، فإنه إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

فإن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

مثال(5-5): هام هام هام

لتكن $\{a_n\}$ متتالية حدها العام معطى بالمساواة

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

هل هذه المتتالية متقاربة ؟ وإذا كانت كذلك احسب نهايتها .

الحل: نعلم أن $\qquad n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad (*)$

بما أن $\sqrt{n^2+1} > n$ فإن $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$

وبما أن $\sqrt{n^2+n} < n+1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{n+1}$.

مما سبق وبالاستفادة من (*) نجد أن

$$\frac{n}{n+1} < n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{n} = 1$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ بحسب النظرية(5-4)

إذاً المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة ونهايتها تساوي الواحد.

6- اللامتناهيات في الكبر

تعريف (6-1):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها لا متناهية في الكبر إذا حققت عناصرها الشرط التالي:

من أجل أي عدد حقيقي موجب M يمكن إيجاد عدد $N \in N^*$ بحيث يكون

$$n \ge N \;\Rightarrow\; |a_n| > M$$

بالاستفادة من خواص القيمة المطلقة وبإجراء محاكمات منطقية مشابهة لتلك التي أجريناها في الملاحظة (1-10) نستنتج بأن هذا التعريف يكافئ قولنا بأن المتتالية $\{a_n\}$ تكون لا متناهية في الكبر إذا وفقط إذا كانت جميع حدودها باستثناء عدد منته من حدودها الأولى، تقع خارج المجال المغلق $[-M, M]$ وذلك من أجل أي عدد حقيقي موجب M.

يصطلح على أنه إذا كانت $\{a_n\}$ لا متناهية في الكبر وكانت جميع حدودها بدءاً من حد معين تحافظ على إشارة واحدة (« + » أو « - »). فإننا نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ تبعاً لإشارتها أنها تسعى إلى « $+\infty$ » أو « $-\infty$ » ونكتب: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ، وبما أن الرمزين « $+\infty$ » و « $-\infty$ » لا ينتسبان إلى مجموعة

الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فهذا يعني بحسب التعريف (1-8) أن جميع المتتاليات اللامتناهيـــة في الكبر ليس لها نهاية سواء أكانت تسعى إلى « $+\infty$ » أو إلى « $-\infty$ ».

طبعاً هنالك متتاليات لامتناهية في الكبر ولا يمكن القول بأنها تسـعى إلى « $+\infty$ » أو إلى « $-\infty$ » كالمتتالية $\{(-1)^n n\}=\{-1, 2, -3, 4, -5, \cdots, (-1)^n n, \cdots\}$ وهكـــذا فإن اللامتناهيات في الكبر هي في جميع الأحوال متتاليات متباعدة بحسب التعريف (1-9).

أمثلة (6-2):

1- المتتاليتان $\{n\}$ و $\{-n\}$ لامتناهيتان في الكبر.

2- المتتالية $\{q^n\}$ لامتناهية في الكبر إذا كان $|q|>1$ في الواقع لدينا

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n > M \iff n\ln|q| > \ln M$$

$$\iff n > \frac{\ln M}{\ln|q|} \qquad (\ln|q|>0 \text{ وبالتالي } |q|>1 \text{ لأن})$$

فإذا اخترنا N بحيث يكون $N > \frac{\ln M}{\ln|q|}$ فإننا نجد أن

$$n > N \Rightarrow n > \frac{\ln M}{\ln|q|} \Rightarrow |a_n| > M$$

والمتتالية لامتناهية في الكبر.

3- المتتالية $\{8-2n\}$ التي درسنا تقاربها في المثال (4-7-3) لامتناهية في الكبر.

خواص اللامتناهيات في الكبر (6-3):

(i) إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة و $\{b_n\}$ متتالية متباعدة حيث $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 \;;b_n\neq 0, \forall n$$

(ii) إذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متباعدتين وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

فإن $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$ و $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=+\infty$

(iii) إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة حيث $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$ وكانت $\{b_n\}$ متتالية متباعدة حيث $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\begin{cases}+\infty & ;L>0\\ -\infty & ;L<0\end{cases}$$

(iv) إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متقاربة من L وكانت $\{b_n\}$ متتاليـــة متبـــاعدة حيـــث $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ وبفرض أن $b_n \neq 0$ لجميع قيم n فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

(v) إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متباعدة حيث $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ وكانت المتتالية $\{b_n\}$ متقاربة من L وبفرض أن $b_n > 0$ لجميع قيم n فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}+\infty & ;L>0\\ -\infty & ;L<0\end{cases}$$

7- اللامتناهيات في الصفر

تعريف (7-1):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها لامتناهية في الصفر إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. أي أنـه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد $N \ni N^*$ بحيث يكون

$$n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

أمثلة (7-2):

1- المتتاليات $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ، $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ، $\left\{\text{Sin}\frac{\pi}{n}\right\}$ لامتناهيات في الصفر.

2- كذلك فإن المتتالية $\{q^n\}$ لامتناهية في الصفر إذا كان $|q|<1$. لأنه إذا كان $|q|<1$ فإن q تكتب بالشكل $q=\frac{r}{s}$ حيث r, s عددين حقيقيين و $s \neq 0$ و $|r|<|s|$

ومنه

$$q=\frac{r}{s} \Rightarrow q^n=\frac{r^n}{s^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{s^n}=0$$

نظرية (7-3): هامة

$\lim a_n = 0$

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية محدودة و $\{b_n\}$ متتالية لامتناهية في الصفر فإن هذا يؤدي لنا لامتناهية في الصفر

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$$

البرهان: بما أن $\{a_n\}$ محدودة فإنه يوجد عدد حقيقي $0<k$ بحيث يكون $|a_n| \le k$ وذلك لجميع قيم n. ليكن الآن $\varepsilon > 0$ عددا اختياريا، إن ε يقابله N و N^* بحيث يتحقق الشرط

$$n > N \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{k}$$

وهكذا فإن من أجل جميع قيم $N<n$ لدينا

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$ والمتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ لامتناهية في الصغر.

أمثلة (4-7):

إن مجموع أو جداء متتاليتين لامتناهيتين في الصغر هو متتالية لامتناهية في الصغر. أما فيما يتعلق بتقسيم متتالية لامتناهية في الصغر على أخرى لامتناهية في الصغر؛ وكذلك جداء متتالية لامتناهية في الصغر بأخرى لامتناهية في الكبر فلا يمكن التنبؤ مسبقا بطبيعة المتتالية الناتجة، إذ قد تكون لامتناهية في الصغر أو لامتناهية في الكبر وقد تكون متقاربة إلى عدد L حيث $L \ne 0$ وقد لا تكون متقاربة؛ إضافة إلى احتمالات وقوع حالات عدم التعيين التي يجب إزالتها للوصول إلى جواب قطعي. والأمثلة التالية توضح بعضاً من هذه الحالات:

1- لتكن المتتاليتان $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{b_n = \frac{1}{n^2}\right\}$. نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

إذاً المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ لامتناهية في الكبر.

على حين أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

أي أن المتتالية $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ لامتناهية في الصغر.

2- إذا كانت $\left\{a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ و $\left\{b_n = \frac{1}{n}\right\}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n = \pm 1$$

إذاً المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ غير متقاربة.

3- إذا كانت $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{b_n = \frac{2}{n}\right\}$، فنجد أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

أي أن المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متقاربة من $\frac{1}{2}$.

4- لتكن $\left\{a_n = \frac{1}{n^2}\right\}$ و $\{b_n = n^2\}$، إذا

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} \cdot n^2\right) = 1$$

إذاً المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متقاربة ونهايتها تساوي الواحد.

5- لتكن $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ و $\{b_n = n^2\}$، إذا

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

والمتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ لامتناهية في الكبر.

6- إذا كانت $\left\{a_n = \frac{1}{n^2}\right\}$ و $\{b_n = n\}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

أي أن المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ لامتناهية في الصغر.

7- إذا كانت $\left\{a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}$ و $\{b_n = n^2\}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot n^2\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = \pm 1$$

أي لا توجد نهاية والمتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متباعدة.

نتيجة(5-7):

إذا كانت $\{a_n\}$ لامتناهية في الصغر وكان $a_n \neq 0$ لجميع قيم n فإن $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ لامتناهية في الكبر، والعكس صحيح.

8- الـ sup والـ inf لمتتالية

تعريف (8-1):

1- نقول عن العدد الحقيقي s أنه حد أعلى أصغري للمتتالية $\{a_n\}$، ونكتب $s = \sup\{a_n\}$، إذا حقق الشرطين التاليين:

- $a_n \le s$ لجميع قيم n ، أي أن s حد أعلى للمتتالية $\{a_n\}$.
- من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد بين عناصر المتتالية حد واحد على الأقل يكون أكبر تماماً من $s - \varepsilon$.

2- نقول عن العدد الحقيقي i أنه حد أدنى أعظمي للمتتالية $\{a_n\}$ ،ونكتب $i = \inf\{a_n\}$ ، إذا حقق الشرطين التاليين:

- $i \le a_n$ لجميع قيم n، أي أن i حد أدنى للمتتالية $\{a_n\}$.
- من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد بين عناصر المتتالية حد واحد على الأقل يكون أصغر تماما من $i + \varepsilon$.

بمقارنة التعريفين السابقين مع التعريفين (1-5-3)و(1-5-4) على الترتيب نستنتج أن $\sup\{a_n\}$ هو أصغر الحدود العليا، ولا يكون موجوداً إلا إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة أو محدودة من الأعلى، وفي حال وجوده فإنه وحيد. كذلك فإن $\inf\{a_n\}$ هو أكبر الحدود الدنيا، ولا يكون موجوداً إلا إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة أو محدودة من الأدنى، وفي حال وجوده فإنه وحيد.

أمثلة (8-2):

1- لتكن المتتالية $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ ، إن $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$ لأن $a_n \le 1$ لجميع قيم n، ولأنه

مهما يكن $\varepsilon > 0$ فإن $1 - \varepsilon < a_1 = 1$. كذلك فإن $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$ لأن $0 < a_n$ لجميع قيم n، ولأنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ فإن يوجد $n \in N$ بحيث يكون $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon = \varepsilon$.

2- لتكن لدينا المتتالية $\{a_n\} = \{2, -2, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$

إن $\sup\{a_n\} = 2$ لأن $a_n \le 2$ لجميع قيم n، ولأنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ فإن $2 - \varepsilon < a_1 = 2$.

أما $\inf\{a_n\} = -1$ لأن $-1 \le a_n$ لجميع قيم n، ولأنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ فإن $a_4 = -1 < -1 + \varepsilon$.

9- المتتاليات المطردة

تعريف (9-1):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية مفروضة .

1- نقول أن $\{a_n\}$ متزايدة إذا حققت عناصرها المتراجحة $a_n \le a_{n+1}$ وذلك لجميع قيم n وهذا يكافئ الشرط $a_n - a_{n+1} \le 0$ وذلك لجميع قيم n.

2- نقول أن $\{a_n\}$ متزايدة تماماً إذا حققت عناصرها المتراجحة $a_n < a_{n+1}$ وذلك لجميع قيم n وهذا يكافئ الشرط $a_n - a_{n+1} < 0$ وذلك لجميع قيم n.

3- نقول أن $\{a_n\}$ متناقصة إذا حققت عناصرها المتراجحة $a_n \ge a_{n+1}$ وذلك لجميع قيم n، وهذا يكافئ الشرط $a_n - a_{n+1} \ge 0$ وذلك لجميع قيم n.

4- نقول أن $\{a_n\}$ متناقصة تماماً إذا حققت عناصرها المتراجحة $a_n > a_{n+1}$ وذلك لجميع قيم n، وهذا يكافئ الشرط $a_n - a_{n+1} > 0$ وذلك لجميع قيم n.

5- نقول أن $\{a_n\}$ مطردة إذا كانت تحقق أحد التعاريف الأربعة السابقة.

نتيجة (9-2): صا م صا م

ينتج من هذا التعريف ومن التعريف (1-5) أنه :

1- إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة أو متزايدة تماماً فإنها محدودة من الأدنى، وبالتالي فإن أي متتالية متزايدة أو متزايدة تماماً إذا كانت محدودة من الأعلى فهي محدودة.

2. إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة أو متناقصة تماماً فإنها محدودة من الأعلى، وبالتالي فلكي أي متتالية متناقصة أو متناقصة تماما يكفي أن تكون محدودة من الأدنى حتى تكون محدودة.

أمثلة(9-3):

1. هل المتتالية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ مطردة ؟

الحل: لدينا هنا $a_n = \frac{n}{n+1}$ و $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ ، ونلاحظ أن

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

وبما أن $(n+1)(n+2)>0$ لجميع قيم n، فإن $-\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$ لجميع قيم n، أي

لذلك n تبدأ من $n = 1, 2, 3, \dots$ (مجموعة الأعداد الطبيعية ما عدا الصفر)

أن $a_n - a_{n+1} < 0$ والمتتالية متزايدة تماما.

2. هل المتتالية $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}$ ، حيث n عدد صحيح موجب أكبر تماما من الواحد، مطردة ؟

الحل: لدينا هنا $a_n = \frac{n}{n-1}$ و $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}$ ، ونلاحظ أن

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2-n^2+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

وبما أن $n(n-1)>0$ لجميع قيم n، لأن $n>1$ ، فإن $\frac{1}{n(n-1)} > 0$ لجميع قيم n حيث $n>1$

إذاً $a_n - a_{n+1} > 0$ والمتتالية متناقصة تماماً.

نظرية(9-4):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة ومحدودة فإنها متقاربة من الحد الأعلى الأصغري لعناصرها.

البرهان: بما أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة فهي محدودة من الأعلى وبالتالي يوجد حد أعلى أصغري لها سنرمز له بـ s ، وهذا يعني – بحسب التعريف (8-1-1) – أن $a_n \le s$ لجميع قيم n، وأنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد على الأقل حد من حدود المتتالية وليكن a_N يحقق المتراجحة $s - \varepsilon < a_N$ وبالتالي، وبما أن $\{a_n\}$ متزايدة، فإنه من أجل جميع الأدلة $n>N$ يكون $a_n > s - \varepsilon$ ومنه $-a_n < -s+\varepsilon$ وبالتالي $s - a_n < \varepsilon$

ولكن $0 \le s - a_n$ ، لأن $a_n \le s$ لجميع قيم n، إذاً $0 \le s - a_n < \varepsilon$ ومنه $|s-a_n| < \varepsilon$ أي $|a_n - s| < \varepsilon$ وذلك لجميع قيم $N<n$ إذاً $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ وهو المطلوب.

إن النظرية السابقة محققة إذا كانت $\{a_n\}$ متزايدة تماماً ومحدودة. أما بالنسبة للمتتاليات المتناقصة (أو المتناقصة تماما) والمحدودة فيأخذ نص النظرية الشكل التالي:

نظرية(9-5):

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة (أو متناقصة تماماً) ومحدودة فإنها متقاربة من الحد الأدنى الأعظمي لعناصرها.

نترك برهان هذه النظرية للقارئ.

نتيجة(9-6):

1. ينتج من النظرية (9-4) أنه إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متزايدة (أو متزايدة تماماً) وكانت متقاربة من L مثلا، أي $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، فإن $L = \sup\{a_n\}$ ستبريموم وبالتالي فإن

$$a_n \le \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{لجميع قيم } n$$

2. كذلك ينتج من النظرية (9-5) أنه إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متناقصة (أو متناقصة تماماً) وكانت متقاربة من L مثلاً، أي $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، فإن $L = \inf\{a_n\}$ وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le a_n \quad \text{لجميع قيم } n.$$

ملاحظة (9-7): هام هام

نذكّر بأن المتتالية العددية التي يعطى حدها العام بالعبارة $b_n = a \cdot q^{n-1}$ ، حيث a و $q \ne 1$ عددان حقيقيان مغايران للصفر، تدعى متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها q إذا

$$\{a \cdot q^{n-1}\} = \{a, aq, aq^2, aq^3, \cdots, aq^{n-1}, \cdots\}$$

كما نذكّر بأن مجموع العناصر الـ n الأولى من هذه المتتالية يعطى بالعلاقة

$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \cdots + a\cdot q^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

وذلك لأنه إذا رمزنا بـ S للطرف الأيسر من هذه المساواة، ثم حسبنا الجداء $q \cdot S$ - ومن ثم المجموع $S - q \cdot S$ لوجدنا أن

$$S = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \cdots + a\cdot q^{n-1}$$
$$-q\cdot S = -a\cdot q - a\cdot q^2 - a\cdot q^3 - a\cdot q^4 - \cdots - a\cdot q^n$$
$$S - qS = a - a\cdot q^n = a\left(1 - q^n\right)$$

ومنه

وبالتالي فإن $S(1-q) = a(1-q^n)$ وهكذا نجد أن $S = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

نظرية (9-8):

إن العدد النيبري e هو نهاية لمتتالية حدها العام يعرف بالعبارة التالية

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{أي أن} \quad \boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

البرهان: سنبرهن أن المتتالية $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ محدودة ومطردة، فتكون بحسب النظرية (9-4) أو (9-5) متقاربة.

لدينا بحسب منشور ثنائي الحد لنيوتن – الكرخي

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (*)$$

نلاحظ أن كل حد من حدود المنشور (*) يحوي جداء أقواس قيمة كل منها أصغر من الواحد، وهذا يعني أنه يمكن كتابة المنشور على النحو التالي

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

كذلك نلاحظ أن

$$2! = 1\cdot 2 = 2^1$$
$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 > 1\cdot 2\cdot 2 = 2^2$$
$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

أي أن $n! > 2^{(n-1)}$ وهكذا فإن الصيغة الأخيرة لمنشور a_n تصبح على الشكل

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

نلاحظ أنه في الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة و ابتداءً من الحد الثاني لدينا مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول يساوي الواحد وأساسها $q = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن مجموعها يعطى بحسب الملاحظة(9-7) بالعلاقة :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

وبالتالي يكون

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3$$

أي أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى لأن $a_n < 3$ وذلك لجميع قيم n.

بقي أن نبرهن أن المتتالية $\{a_n\}$ مطردة. لنأخذ العنصر a_{n+1} ونطبق نشر ثنائي الحد لنيوتن-الكرخي مرة أخرى فنجد بمحاكمات مشابهة لما سبق أن

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \quad (*')$$

وبما أن
$$\left(1-\frac{R}{n}\right)<\left(1-\frac{R}{n+1}\right)$$

فإنه بمقارنة الطرف الأيمن من ($*'$) مع الطرف الأيمن من ($*$) نجد أنه اعتباراً من الحد الثالث يكون كل حد من حدود منشور a_{n+1} أكبر من الحد الذي يقابله في منشور a_n، إضافة إلى أن منشور a_{n+1} يحوي حداً إضافياً موجباً وهكذا نستنتج أن

$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{لجميع قيم } n$$

أي أن المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة تماماً وبما أنها محدودة من الأعلى فإنه بحسب النظرية (9-4) تكون متقاربة أي أن النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ موجودة وهو المطلوب.

ملاحظة (9-9):

يمكن التحقق حسابياً من صحة النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ وذلك بإعطاء قيم كبيرة لـ n. فمثلاً من أجل n=10000 نجد أن $(1+\frac{1}{n})^n = 2,718 \approx e$ وكلما كبرت n حصلنا على قيمة أدق لـ e.

سنقبل بدون برهان النظرية التالية:

نظرية(9-10):

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية جميع حدودها مختلفة عن الـ «0» والـ «-1»، وكانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.

نتيجة (9-11):

إذا فرضنا في النظرية السابقة أن $b_n=\frac{1}{a_n}$ فإن نصها يصبح على الشكل التالي:

إذا كانت $\{b_n\}$ متتالية جميع حدودها مختلفة عن الـ «0» والـ «-1»، وكانت $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$.

10- متتالية كوشي

تعريف (10-1):

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متتالية كوشي إذا أمكن من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد طبيعي $N\in N^*$ بحيث يتحقق الشرط التالي

$$n>N \ \& \ m>N \ \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$$

ونعبر عن ذلك كما يلي

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N^*;\ n>N \ \& \ m>N \ \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$$

كما يمكن صياغة تعريف متتالية كوشي على النحو التالي:

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متتالية كوشي إذا أمكن من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد طبيعي $N\in N^*$ بحيث يتحقق الشرط التالي

$$n>N \ \& \ p\in N^* \ \Rightarrow |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

نظرية (10-2):

كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي.

البرهان: لتكن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من L، أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$، ولنبرهن أنها متتالية كوشي. في الواقع من أجل $\frac{\varepsilon}{2}>0$، وبما أن $\{a_n\}$ متقاربة، فإنه يمكن إيجاد N من N^* بحيث يكون

$$n>N \ \Rightarrow |a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي يكون

$$m>N \ \Rightarrow |a_m-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أنه من أجل جميع قيم N<n و N<m لدينا

$$|a_n-a_m|=|a_n-L+L-a_m|\le|a_n-L|+|L-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

إذا فالمتتالية $\{a_n\}$ هي متتالية كوشي.

تمارين

1- أوجد الحد العام للمتتاليات التالية:

(i) $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{-5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{-9}{17}, \dots\right\}$.

$(-1)^{n+1}\frac{n}{n+4}$

(ii) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots\right\}$.

$\frac{n}{n+1}$

(iii) $\left\{\frac{4}{6}, 0, \frac{6}{8}, 0, \frac{8}{10}, \dots\right\}$.

(iv) $\left\{0, \frac{2}{3}, 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{6}{7}, 0, \frac{8}{9}, \dots\right\}$.

(v) $\left\{\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{6}{7}, 0, \frac{8}{9}, \dots\right\}$.

2- باستخدام تعريف نهاية متتالية برهن على صحة ما يلي:

(i) نهاية المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ تساوي الصفر.

(ii) إذا كان $a_n = \frac{n+1}{n}$ الحد العام لمتتالية فبرهن أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(iii) المتتالية $\left\{\frac{3n+1}{5n+2}\right\}$ متقاربة من $\frac{3}{5}$.

(iv) المتتالية التي حدها العام $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ متقارب من $\frac{1}{2}$.

3- برهن باستخدام متراجحة برنولي أن نهاية المتتالية $\{\sqrt[n]{q}\}$، حيث $q>0$، تساوي الواحد (ميز حالتي $q \ge 1$ و $q < 1$).

4- برهن أن المتتالية $\{3^n - n\}$ متباعدة مستفيداً من متراجحة برنولي.

5- احسب – اعتماداً على خواص النهايات– كلاً مما يلي:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1 = -1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+5} = \frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n}} = \frac{3}{2}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+1)}{n^2}$

$= \frac{6n^2+2n+3n+1}{n^2} = \frac{6n^2+5n+1}{n^2}$

$= 6 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 6$

6- برهن أن $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn} - an\right) = \frac{b}{2a}$.

7- برهن أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+6^n+7^n} = 7$.

8- أثبت أن نهاية المتتالية $\{C_n^k / n^k\}$ تساوي $\frac{1}{k!}$، ثم أستنتج نهاية المتتالية $\{C_n^3 / n^3\}$.

9- برهن أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$ و أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = e$ و أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$.

(9)

① نفرض أن $n+1 = T \Rightarrow n = T-1$ ، $n\to\infty \Leftrightarrow T\to\infty$

$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^{T-1}$

$\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^T \cdot \lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^{-1} = e\cdot(1)^{-1} = e\cdot\frac{1}{1} = e$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ نفرض أن $n-1 = T \Rightarrow n = T+1$

$n\to\infty \Leftrightarrow T\to\infty$

$\left(\frac{T+1}{T}\right)^{T+1} = \lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^{T+1}$

$\left(1+\frac{1}{T}\right)^T \cdot \lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^1 = e\cdot 1 = e$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$; بقلب الكسر

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

الفصل الثاني

السلاسل العددية

1-تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف (1-1) :

لتكن لدينا المتتالية $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ ، ولنشكل المجموع

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

إن هذا المجموع يسمى سلسلة عددية غير منتهية لعناصر المتتالية $\{a_n\}$ (أو للأعداد الحقيقية $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$)، ونرمز لهذا المجموع اختصارا بـ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

أي أن

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

نسمي العناصر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ حدود السلسلة، كما نسمي a_n بالحد العام للسلسلة، ونلاحظ أن كتابة الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة مرتبط بمعرفة الحد العام للسلسلة. إن الأمثلة على السلاسل العددية غير المنتهية كثيرة، فمثلاً ناتج قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي آخر لا يقبل القسمة عليه هو سلسلة عددية غير منتهية كما هو الحال في العملية التالية:

$$1 \div 3 = \frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

في حالة خاصة إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ منتهية، فإن مجموع عناصرها سوف يعطينا السلسلة العددية المنتهية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ملاحظات (1-2):

1- في كل ما يلي سنستخدم كلمة سلسلة للدلالة على السلسلة العددية غير المنتهية ما لم

برهن ان

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn}-an\right)=\frac{b}{2a}$$

نضرب ونقسم على المرافق

$$\sqrt{a^2n^2+bn}-an \times \frac{\sqrt{a^2n^2+bn}+an}{\sqrt{a^2n^2+bn}+an} = \frac{\left(\sqrt{a^2n^2+bn}\right)^2-(an)^2}{\sqrt{a^2n^2+bn}+an}$$

$$= \frac{a^2n^2+bn-a^2n^2}{\sqrt{a^2n^2+bn}+an} = \frac{bn}{\sqrt{a^2n^2+bn}+an} = \frac{bn}{n\sqrt{a^2+\frac{b}{n}}+an}$$

$\sqrt{n^2} = n$ (∞ +)

$$= \frac{bn}{n\left(\sqrt{a^2+\frac{b}{n}}+a\right)} = \frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{n}}+a} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn}-an\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{n}}+a}\right) = \frac{b}{a+a} = \frac{b}{2a}$$

7 برهن ان

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5^n+6^n+7^n}\right)=7$$

تنوه إلى غير ذلك.

2- كما هو الحال في المتتاليات، فإن معرفة عدد منتهٍ من الحدود الأولى لسلسلة يمكننا من استنتاج حدها العام، وبالعكس فإنه من خلال معرفة الحد العام للسلسلة يمكن تعيين كافة حدودها.

أمثلة (1-3):

1- أوجد الحد العام لسلسلة حدودها الأولى هي $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$

الحل: إن البسوط في جميع حدود السلسلة متساوية وتساوي الواحد، على حين أن كل مقام يتألف من العدد « 2 » مرفوع إلى قوة تنقص بمقدار واحد عن العدد الدال على ترتيب هذا الحد، وبالتالي فإن الحد العام للسلسلة المفروضة هو من الشكل $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$، إذاً

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

2- اكتب منشور السلسلة التي حدها العام معطى بالعلاقة $a_n=\frac{2n-1}{n!}$.

الحل: إن $a_1=\frac{1}{1!}$ و $a_2=\frac{3}{2!}$ و $a_3=\frac{5}{3!}$ و ...

إذاً فالسلسلة المطلوبة هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\cdots+\frac{2n-1}{n!}+\cdots$$

تعريف (1-4):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلة ما، ولنفرض أن

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

فنحصل على المتتالية $\{S_n\}$ وهي متتالية عددية غير منتهية نسميها متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة المعطاة، كما نسمي المجموع المنته $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ بالمجموع الجزئي النوني للسلسلة المعطاة.

فإذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة من S، أي أن $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ ، فإن S سيكون - بناءً على تعريف عناصر المتتالية $\{S_n\}$ - من الشكل

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

ونسمي S عندئذٍ مجموع السلسلة المعطاة.

تعريف (1-5):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلة ما. اعتماداً على ما سبق فإننا نقول عن هذه السلسلة أنها متقاربة (أو لها مجموع) إذا تقاربت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ ، كما نقول عن هذه السلسلة أنها متباعدة (أو ليس لها مجموع) إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة وهذا يعني - كما وجدنا في الفصل الأول - أنه

إما $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S=\infty$ (أو $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S=-\infty$) وفي هذه الحالة نقول أن السلسلة متباعدة من اللانهاية.

وإما أن يكون للمجموع $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ أكثر من قيمة.

أمثلة (1-6):

1- ادرس تقارب السلسلة $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}}$ سؤال هنا

الحل: لنوجد متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة المعطاة. لدينا

$S_1=1,\quad S_2=1-1=0,\quad S_3=1-1+1=1,\quad S_4=1-1+1-1=0$

وهكذا نجد أن

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^n=\frac{1-(-1)^n}{2}$$

$a=1\ ,\ q=a_2-a_1=1-1-1=-1$

$S_n=1\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$

إذاً $\{S_n\} = \left\{\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}$ وبما أن هذه المتتالية متباعدة لأن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases}1 \ ; & n \text{ فردي}\\ 0 \ ; & n \text{ زوجي}\end{cases}$$

فإن السلسلة المعطاة متباعدة.

2- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

الحل: لنوجد متتالية المجاميع الجزئية. لدينا

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},\dots,\quad S_n=\frac{n}{n+1}$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة المفروضة هي $\{S_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

أما نهاية الحد العام لهذه المتتالية فهي $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$

إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها يساوي الواحد.

يمكن حساب المجموع الجزئي النوني S_n للسلسلة المعطاة بطريقة أخرى إذا لاحظنا أن حدها العام يحلل وفق قواعد تفريق الكسور كما يلي:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$$

ومنه $1=(A+B)n+A$

بمطابقة أمثال n بين طرفي هذه المساواة نجد أن $A=1$ و $A+B=0$ ومنه $B=-1$.

وهذا يعني أن الحد العام للسلسلة المعطاة يكتب بالشكل التالي

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

وبالتالي فإن

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

صام صام جـ أ

3- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

يطلق على هذه السلسلة اسم سلسلة هندسية لأن حدودها هي حدود متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها q.

الحل: لنوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة. إن الحد العام هذا ما هـو إلا المجموع الجزئي النوني للسلسلة والذي يمثل مجموع الحدود الـ n الأولى منها، وقد وجدنا في الملاحظة (7-9) من الفصل الأول أن هذا المجموع يعطى بالعلاقة $a\frac{1-q^n}{1-q}$ إذاً

$$\{S_n\}=\left\{a\frac{1-q^n}{1-q}\right\}$$

لحساب نهاية الحد العام لهذه المتتالية نميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان $|q|<1$ فإن

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(a\frac{1-q^n}{1-q}\right)=a\frac{1-\lim_{n\to\infty} q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

أي أن السلسلة الهندسية التي حدها الأول a وأساسها q حيث $|q|<1$ متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{a}{1-q}$، إذاً $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}\ ;\ |q|<1$

الحالة الثانية: إذا كان $|q|>1$ فإن

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(a\frac{1-q^n}{1-q}\right)=\infty$$

والسلسلة متباعدة. إذاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=\infty\ ;\ |q|>1$$

الحالة الثالثة: إذا كان $q=-1$ فإن متتالية المجاميع الجزئية تأخذ الشكل $\{S_n\}=\left\{a\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}$

وعندئذ نجد أن $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases}a \ , & n \text{ فردي}\\ 0 \ ; & n \text{ زوجي}\end{cases}$ وبالتالي فالسلسلة الهندسية متباعدة.

أما إذا كان $q=1$ فإن السلسلة الهندسية تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} a$ وبالتالي فإن المجموع الجزئي النوني لها سيكون $S_n = n\cdot a$ ، وواضح أن $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ والسلسلة الهندسية متباعدة أيضاً.

إن برهان الحالتين الثانية والثالثة يتم مباشرة اعتماداً على النظرية (2-1) التي ستأتي لاحقاً.

4-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$. هام

الحل: لدينا هنا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

وهي سلسلة هندسية حدها الأول $a = \frac{3}{10}$ وأساسها $|q| = \frac{1}{10} < 1$ فهي بحسب المثال(3) متقاربة ومجموعها هو

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

5- عين الكسر العادي للكسر العشري $0.784\ 784\ 784\cdots$. هام

الحل: لدينا

$$0.784\,784\,784\cdots = 0.784 + 0.000784 + 0.000\,000\,784 + \cdots$$
$$= \frac{784}{10^3} + \frac{784}{10^6} + \frac{784}{10^9} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{784}{10^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{784}{10^3}\cdot\frac{1}{10^{3n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{784}{10^3}\cdot\left(\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}$$

وهي سلسلة هندسية حدها الأول $a = \frac{784}{10^3}$ وأساسها $|q| = \frac{1}{10^3} < 1$ فهي إذاً متقاربة بحسب المثال (3) ومجموعها S يعطى بالعلاقة

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{784}{10^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{784}{999}$$

إذاً $0.784\ 784\ 784\cdots = \frac{784}{999}$

6- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$. هام

الحل: لدينا لنوجد المجموع الجزئي النوني متتالية المجاميع الجزئية:

$S_1 = 1$ و $S_2 = 1+1 = 2$ و $S_3 = 1+1+1 = 3$ و $\cdots$

$S_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ مرة}} = n$ و $\cdots$

وبالتالي فإن $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ والسلسلة متباعدة.

7- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$ هام

الحل: إن الحد العام للسلسلة يكتب بالشكل $a_n = 2n-1 = n^2-(n-1)^2$

وهكذا فإن $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$= (1^2-0) + (2^2-1^2) + (3^2-2^2) + \cdots + (n^2-(n-1)^2) = n^2$$

ومنه فإن $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ والسلسلة متباعدة.

من خلال الأمثلة السابقة نلاحظ أن إيجاد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لسلسلة معطاة ليس أمراً سهلاً في الحالة العامة ومرد ذلك أنه يتطلب حساب مجموع الحدود الـ n الأولى من متتالية عددية، لذا نورد فيما يلي نظرية تساعد في حساب بعض المجاميع المنتهية.

نظرية (1-7):

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(ii)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \text{(iii)}$$

البرهان:

(i) لنفرض أن $\sum_{k=1}^{n} k = S$ أي أن $S = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$

إن S يمكن أن يكتب أيضاً بالشكل $S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$

بجمع العبارتين الأخيرتين طرفاً إلى طرف نجد أن

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n} = n(n+1)$$

ومنه

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) لدينا

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

وبأخذ المجموع للطرفين من k=1 وحتى k=n نحصل على

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right) \qquad (*)$$

إن الطرف الأيسر من (*) يساوي إلى

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) = -1 + (n+1)^3$$

أما الطرف الأيمن من (*) فيساوي إلى

$$\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n \qquad \text{(حسب (i))}$$

وهكذا فإن (*) تأخذ الشكل التالي

$$-1 + (n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

ومنه فإن

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n - 1$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right]$$

$$= (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

وهكذا نجد أن

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) لبرهان الجزء الثالث من النظرية ننطلق من العبارة

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

وبإجراء محاكمات مشابهة لتلك التي أجريناها في (ii) نصل إلى المطلوب.

يمكن برهان هذه النظرية – في الحالات الثلاث – بتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي؛ ونترك ذلك للطالب.

نهاية متتالية متقاربة كمجموع سلسلة (8-1):

وجدنا أن مجموع سلسلة هو نهاية متتالية مجاميعها الجزئية، أي أن مجموع سلسلة يمثل نهاية متتالية متقاربة، فهل نهاية أي متتالية متقاربة تمثل مجموع سلسلة ما.

في الواقع لتكن $\{b_n\}$ متتالية متقاربة من b، أي أن $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. فإذا فرضنا أن

$$a_1 = b_1$$
$$a_2 = b_2 - b_1$$
$$a_3 = b_3 - b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = b_n - b_{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

حصلنا على متتالية جديدة $\{a_n\}$، وبحساب مجموع الحدود الـ n الأولى من هذه المتتالية نجد أن

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n$$

ومنه فإن

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

فإذا رمزنا لـ $\lim_{n\to\infty} A_n$ بـ S نجد أن

$$S = \lim_{n\to\infty} A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$= b_1 + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) + \cdots$$

$$= b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$$

إذاً

$$b = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$$

أي أن نهاية المتتالية المتقاربة $\{b_n\}$ والتي رمزنا لها بـ b تمثل مجموع سلسلة حدودها تنتج عن حدود المتتالية $\{b_n\}$ وفق العلاقة السابقة.

أمثلة (1-9):

1-أوجد السلسلة التي مجموعها هو نهاية المتتالية التي حدها العام $b_n = \frac{1-n}{n}$.

الحل: نلاحظ هنا أن $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n} = -1$

وبحسب النتيجة السابقة نجد أن

$$-1 = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-n}{n+1} - \frac{1-n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n^2+n^2-1}{n(n+1)}$$

ومنه

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n(n+1)}$$

2- أوجد السلسلة التي مجموعها يساوي إلى نهاية المتتالية التي حدها العام $b_n = \frac{2n+1}{3n-1}$

الحل: لدينا هنا $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$

وبالتالي فإن

$$\frac{2}{3} = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2n+1}{3n-1}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5}{9n^2+3n-2}$$

باقي سلسلة (1-10): ونقيم بيره

وجدنا أن المجموع S لسلسلة ما مثل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو نهاية مجموع الحدود الـ n الأولى لها، عندما يسعى العدد n إلى اللانهاية، أي $S = \lim_{n\to\infty} S_n$، وهذا يعني أن المجموع S الذي نحصل عليه هو في الواقع قيمة تقريبية للمجموع الحقيقي للسلسلة، أما الخطأ المرتكب في حساب هذه القيمة التقريبية فيحسب بالعلاقة $|S - S_n|$ $\Delta = |R_n| = |S - S_n|$

نهاية اكبر العناصر للمتتالية المجاميع الجزئية لـ $\{S_n\}$

صام للسلاسل المتباعدة

نسمي R_n باقي السلسلة، ونلاحظ، بأخذ نهاية طرفي المساواة الأخيرة، أن

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

$S \approx S_n$

أي أنه كلما كان n كبيراً كلما كان باقي السلسلة صغيراً وكانت الدقة أكبر في حساب مجموع السلسلة.

واضح من تعريف باقي سلسلة أن هذا الباقي هو عبارة عن سلسلة غير منتهية ناتجة عن حذف الحدود الـ n الأولى من السلسلة المفروضة أي أن

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

أما قيمة هذا الباقي فتبقى غير معلومة في معظم الأحيان لذا تتركز الدراسة حول إيجاد قيمة تقريبية له. وأخيراً عندما يطلب منا إيجاد مجموع سلسلة بدقة عدد ع يبلغ فإنه يجب علينا إيجاد n (عدد حدود) حيث تكون $|R_n| \leq \varepsilon$

أمثلة (1-11):

1- لتكن لدينا السلسلة المنتهية $\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)q)$ حيث a و q عددان حقيقيان ثابتان

والمطلوب:

(i) احسب مجموع هذه السلسلة.

(ii) استفد من (i) في حساب مجموع السلسلة $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$.

(iii) احسب مجموع الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي عددها n والبادئة بالعدد 1.

(iv) احسب مجموع الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة التي عددها n والبادئة بالعدد 2.

الحل:

(i) إن السلسلة المنتهية $\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)q)$ تمثل مجموع الحدود الـ n الأولى لمتتالية حسابية حدها الأول a وأساسها q، لذا تدعى سلسلة حسابية منتهية. ولدينا

$$\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)q) = a + (a+q) + (a+2q) + \cdots + (a+(n-1)q)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a + q\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na + q\frac{n(n-1)}{2}$$

حيث طبقنا هنا النظرية ((i)-7-1) على المجموع $\sum_{k=1}^{n}(k-1)$ والحاوي على $(n-1)$ حداً

إذاً (*) $$\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)q) = na + q\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}[2a + q(n-1)]$$

وهو مجموع السلسلة الحسابية المنتهية المعطاة.

(ii) لدينا

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = 2+5+8+11+\cdots+(3n-1)$$
$$= 2+(2+3\times1)+(2+3\times2)+(2+3\times3)+\cdots+(2+3(n-1))$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2+3(k-1))$$

وهي سلسلة حسابية منتهية حدها الأول a=7 وأساسها q=3، وبالتالي فــإن مجموعــه حسب (*) هو

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2+3(k-1)) = \frac{n}{2}(2\times2+3(n-1)) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

(iii) مجموع الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي عددها n والبادئة بالعدد 1 هو

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = 1+(1+2\times1)+(1+2\times2)+\cdots+(1+2(n-1))$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(1+2(k-1))$$
$$= \frac{n}{2}(2+2(n-1)) \qquad \text{(حسب (*) حيث a=1 و q=2)}$$
$$= n^2$$

(iv) مجموع الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة التي عددها n والبادئة بالعدد 2 هو

$$2+4+6+\ldots+2n = (1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n)-(1+3+5+\ldots+(2n-1))$$

ولكن $$1+2+3+\cdots+(2n-1)+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2+n$$

وذلك بحسب النظرية ((i)-7-1) مع ملاحظة أن المجموع يحوي 2n حداً.

كذلك فإن $$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$ بحسب (iii)

إذاً $$2+4+6+\cdots+2n = 2n^2+n-n^2 = n(n+1)$$

٢٥

2- برهن على أن السلسلة $\cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1$ ، والتي تدعى بالسلسلة التوافقية، متباعدة.

الحل: وجدنا في النظرية (9-8) من الفصل الأول أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

وخلال برهان نفس النظرية وجدنا أن المتتالية $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ متزايدة أي أن كل حد من حدودها أصغر تماماً من e بحسب النتيجة (9-6) من الفصل الأول، إذاً

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad ; \quad n=1,2,3,\cdots$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المتراجحة نجد أن

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \quad ; \quad n=1,2,3,\cdots \quad \Rightarrow$$
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad ; \quad n=1,2,3,\cdots \quad \Rightarrow$$
$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad ; \quad n=1,2,3,\cdots$$

وبإعطاء n قيماً من 1 حتى n في المتراجحة الأخيرة نحصل على

$$n=1 \quad , \quad \ln 2 - 0 < 1$$
$$n=2 \quad , \quad \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$
$$n=3 \quad ; \quad \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n=n \quad ; \quad \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

وبجمع جميع هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف نجد أن

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n$$

إن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة يمثل المجموع الجزئي النوني للسلسلة التوافقية،

وبما أن $\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)) = \infty$ فهذا يعني أن $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ وهذا بدوره يعني أن السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة.

3- أوجد عبارة باقي السلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

الحل: وجدنا في المثال (1-6-3) أن المجموع الجزئي النوني لهذه السلسلة يعطى بالعلاقة $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$ أما مجموعها فهو $S = \frac{a}{1-q}$ عندما $|q| < 1$، وهكذا فإن باقي هذه السلسلة –حسب (1-10)– يعطى بالعبارة

$$R_n = S - S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q}$$

2- خواص السلاسل هام

نظرية (2-1):

(i) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، أي أن الحد العام للسلسلة المتقاربة يسعى دوماً إلى الصفر عندما $n \to \infty$، ولكن العكس غير صحيح أي أن هذا الشرط لازم وغير كاف.

(ii) إذا كان a_n الحد العام لسلسلة ما وكانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن هذه السلسلة متباعدة.

مطلوب

البرهان:

(i) بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فهذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة. لنفرض أن $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ إن هذه العبارة تكافئ العبارة $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ لأن كلاً من n و n-1 يسعى إلى اللانهاية في نفس الوقت، وبما أن $a_n = S_n - S_{n-1}$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

وهو برهان لزوم الشرط. وللبرهان على عدم كفاية الشرط يكفي أن نورد المثال التالي:

رأينا في المثال (1-11-2) أن السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة بالرغم من أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

(ii) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ما ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. فإذا كانت السلسلة متقاربة لكان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بحسب القسم الأول من النظرية وهذا يناقض الفرض بأن $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ إذاً فالسلسلة متباعدة.

هامة جداً

نظرية (2-2):

(i) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها يساوي a، وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ومجموعها b فإن السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ متقاربتين ومجموعهما a+b و a-b على الترتيب.

(ii) إذا كان $c \neq 0$ ثابتاً ما، فإن السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً، وإذا كان مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يساوي a فإن مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ يساوي ca.

ملاحظة هامة

(iii) تقارب وتباعد السلاسل لا يتأثر بحذف عدد منته من الحدود الأولى من السلسلة. أي إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً فإن السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً.

غير مطلوب

البرهان:

(i) إن

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a + b$$

وبطريقة مماثلة نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

(ii) لتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، ولتكن $\{S'_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. إن

$$S'_1 = ca_1 = cS_1$$
$$S'_2 = ca_1 + ca_2 = c(a_1 + a_2) = cS_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S'_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cS_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ومنه فإن $\lim_{n\to\infty} S'_n = c\lim_{n\to\infty} S_n$

وهكذا فإن المتتاليتين $\{S_n\}$ و $\{S'_n\}$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً وهذا بدوره سوف ينطبق على السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

وإذا فرضنا أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ فهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} S'_n = ca$

أي أن $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca$.

(iii) إن برهان الجزء الثالث من النظرية ينتج مباشرة من النتيجة (1-11) من الفصل الأول، كون أن تقارب أو تباعد سلسلة ما يرتبط بتقارب أو تباعد متتالية مجاميعها الجزئية والذي بدوره يتعلق بوجود أو عدم وجود نهاية لهذه المتتالية.

3- السلاسل ذات الحدود غير السالبة

٢

تعريف (3-1):

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها سلسلة ذات حدود غير سالبة: أو سلسلة ذات حدود موجبة إذا كانت جميع حدودها أكبر أو تساوي الصفر. أي أن $a_n \geq 0$ لجميع قيم n.

ينتج من هذا التعريف مباشرة أن متتالية المجاميع الجزئية لسلسلة ذات حدود غير سالبة هي دوماً متزايدة وبالتالي محدودة من الأدنى. لأنه إذا كان S_n المجموع الجزئي النوني

للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود غير السالبة فإن $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ وبما أن $a_{n+1} \geq 0$ فإن $S_n \leq S_{n+1}$ وذلك لجميع قيم n، وبالتالي فهي محدودة من الأدنى (أنظر النتيجة (2-9) من الفصل الأول).

نظرية (3-2):

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود غير السالبة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ محدودة.

البرهان: مطلوب

لزوم الشرط: لنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، هذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة وبما أن كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة (نظرية (2-2) من الفصل الأول) إذاً $\{S_n\}$ محدودة.

كفاية الشرط: لنفرض أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للسلسلة ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ محدودة، وبما أن المتتالية $\{S_n\}$ متزايدة (كما ورد في التعريف (3-1)) فهي إذاً متقاربة بحسب النظرية (4-23) من الفصل الأول، وبالتالي فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

أمثلة (3-3):

مثال هام

1- هل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ متقاربة.

الحل: واضح أن هذه السلسلة ذات حدود غير سالبة ولنبحث فيما إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية محدودة من الأعلى. إن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة هو

$$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ولكن

$$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(أنظر برهان النظرية (9-8) من الفصل الأول).

إن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة هو مجموع الحدود الـ n الأولى لسلسلة هندسية

حدها الأول $a=1$ وأساسها $|q| = \frac{1}{2} < 1$ وبالتالي فإن هذا المجموع يساوي إلى

$a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

$$a \; v \; \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

إذاً $S_n < \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 2$ وذلك لجميع قيم n، أي أن المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى وبالتالي فهي محدودة والسلسلة المعطاة متقاربة.

2- هل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$ متقاربة.

الحل: واضح أن السلسلة موضوع البحث ذات حدود موجبة، والمجموع الجزئي النوني لها هو

$$S_n = \frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2^2+2^2} + \frac{1}{2^3+3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n+n^2}$$

ولكن $\frac{1}{2^n+n^2} < \frac{1}{2^n}$ لجميع قيم n، أي أن

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

والطرف الأيمن من هذه المتراجحة هو أيضاً مجموع الحدود الـ n الأول لسلسلة هندسية حدها الأول $a = \frac{1}{2}$ وأساسها $|q| = \frac{1}{2} < 1$، وبالتالي فهو يساوي إلى $\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

إذاً $S_n < \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ وذلك لجميع قيم n، إذاً المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى وبالتالي فهي محدودة والسلسلة المفروضة متقاربة.

ملاحظة (4-3):

ذكرنا في التعريف (1-5) أن أي سلسلة مثل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (بغض النظر عن إشارة حدودها) تكون متباعدة إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (أو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$) أو إذا كان المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ له أكثر من قيمة وذلك تبعاً لحالة متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لهذه السلسلة.

أما في حالة السلاسل ذات الحدود غير السالبة وكون أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لأي منها متزايدة دوماً فإنه

إما أن يكون لها نهاية محددة وبالتالي فالسلسلة متقاربة ولها مجموع هو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

وإما أن تكون متباعدة وبالتالي فالسلسلة متباعدة ومجموعها هو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} S_n$.

وهكذا فإنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة ومتباعدة فإنه يمكن الجزم مباشرة أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

4- اختبارات التقارب للسلاسل ذات الحدود غير السالبة

اختبار المقارنة (4-1):

نظرية (4-1-1):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين كل منهما ذات حدود غير سالبة، ولنفرض أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث أن $a_n \le b_n$ لجميع قيم $N<n$.

- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.
- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

البرهان: غير مطلوب

• بما أن $a_n \le b_n$ من أجل $N<n$ فإن

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \le b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n$$

إن الطرف الأيسر من المتراجحة الأخيرة هو عبارة عن $S_n - S_N$ حيث S_n المجموع الجزئي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و S_N هو مجموع الحدود الـ N الأول من نفس السلسلة، فإذا رمزنا للمجموع $b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n$ بالرمز σ_n حصلنا على المتراجحة $S_n - S_N \le \sigma_n$ والمحققة لجميع قيم n.

فإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ومجموعها يساوي B فهذا يعني أن $\sigma_n \le B$ وبالتالي

$$S_n - S_N \le \sigma_n \;\Rightarrow\; S_n - S_N \le B \;\Rightarrow\; S_n \le S_N + B \quad : \forall n \in N$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ محدودة من الأعلى وبالتالي محدودة، وهذا يعني بحسب النظرية (2-3) أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

• لنفرض أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، ولنبرهن على أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة، وذلك ضمن الشرط $a_n \le b_n$ لجميع قيم n.

في الواقع لو كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإنه ضمن الشرط السابق وحسب الجزء الأول من البرهان لوجدنا أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضا وهذا يناقض الفرض بأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة. إذا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

نتيجة (4-1-2):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين بحيث $a_n > 0$ و $b_n > 0$ من أجل جميع قيم $N<n$ حيث N و N^*، ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

مثالان: $\sum \frac{3}{2+5n}$ و $\sum \frac{\sqrt{n^4+7}}{n^3-17n}$ تقارنان مع التوافقية $\left(\frac{1}{n}\right)$

عندئذ يمكن أن نميز الحالات التالية:

(i) إذا كانت L محدودة وغير معدومة أي $L \ne \infty$ و $L \neq 0$ فإن السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد، أي إما متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً اعتماداً على النظرية (2-2).

(ii) إذا كانت L=0 فإن تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يؤدي إلى تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$،

(iii) إذا كانت L=0 وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فلا نستطيع تحديد نوع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iv) إذا كانت $L=\infty$ فإن تباعد $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يؤدي إلى تباعد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$؛

(v) إذا كانت $L=\infty$ وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فلا نستطيع تحديد نوع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

أمثلة (4-1-3):

1- هل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ متقاربة؟

الحل: نلاحظ أن $\frac{1}{n \cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}$ من أجل جميع قيم n، وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة (هندسية حدها الأول $a=\frac{1}{2}$ وأساسها $|q| = \frac{1}{2} < 1$)، فإنه بحسب اختبار المقارنة تكون السلسلة المعطاة متقاربة.

2- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

الحل: إذا فرضنا أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فإننا نلاحظ أن

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ne 0$$

وبما أن السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (أنظر المثال 1-11-2) فإنه بحسب النتيجة السابقة تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ متباعدة.

يمكن القول بأن السلسلة المعطاة تنتج عن السلسلة التوافقية بعد ضربها بالثابت $c=\frac{1}{2}$ وبما أن السلسلة التوافقية متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ متباعدة أيضاً بحسب النظرية (2-2-(ii)).

3- ما نوع السلسلة $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$ ؟

الحل: إن السلسلة المعطاة تنتج عن السلسلة التوافقية بعد حذف حدودها الثلاثة الأولى، وبما أن السلسلة التوافقية متباعدة فإنه بحسب النظرية (2-2-(iii)) تكون السلسلة المعطاة متباعدة.

سؤال

4- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

الحل: نعلم أن $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$ من أجل جميع قيم n، وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة فإن السلسلة المعطاة متقاربة بحسب اختبار المقارنة.

5- هل السلسلة التي حدها العام $a_n=\frac{1}{\alpha+\beta n}$ حيث $\alpha>0$ و $\beta>0$ متقاربة؟

الحل: لدينا

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\alpha+\beta n}=\frac{1}{\beta}\neq 0$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة المعطاة متباعدة بحسب النتيجة السابقة وليست متقاربة.

6- ما هو نوع السلسلة التي حدها العام $a_n=\frac{\sqrt{n^4+7}}{n^3-17n}$ ؟ أولاً نصلح الحد العام حتى نعرف بأي سلسلة سنقارنها

$$\frac{\sqrt{n^4+7}}{n^3-17n}=\frac{n^2\sqrt{1+\frac{7}{n^4}}}{n^3\left(1-\frac{17}{n^2}\right)}=\frac{n^2\sqrt{1}}{n^3\sqrt{1}}=\frac{1}{n}$$

وبالتالي فإننا نقارنها بالسلسلة التوافقية

الحل: إن

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^4+7}}{n^3-17n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{7}{n^4}}}{1-\frac{17}{n^4}}=1\neq 0$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فالسلسلة المعطاة متباعدة بحسب النتيجة (4-1-2).

ملاحظة (4-1-4):

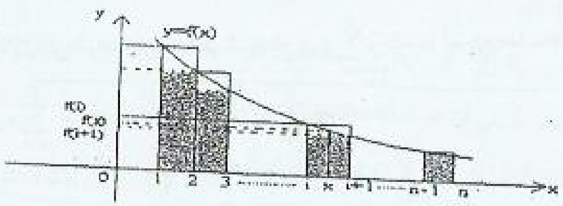
مما سبق نستنتج أن تطبيق اختبار المقارنة يتطلب منا مقارنة السلسلة المعطاة بسلسلة معروفة مسبقاً بأنها متقاربة أو متباعدة وبشكل نستطيع معه الاستفادة من هذا الاختبار.

الاختبار التكاملي (4-2): هام الاختبار التكاملي لحدود موجبة

نظرية (4-2-1):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة، f تابعاً حقيقياً موجباً ومستمراً ومتناقصاً دوماً على المجال $[1,\infty)$ وبحيث أن $f(n)=a_n$ من أجل $n=1,2,\ldots$، عندئذٍ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ والتكامل المعتل $\int_{N}^{\infty}f(x)\,dx$ حيث $N\geq 1$ و $N\in\mathbb{N}^*$، متقاربين معاً أو متباعدين معاً.

البرهان: نلاحظ أولاً أن التابع المفروض يمثل، من أجل قيم x الصحيحة والموجبة، المتتالية (a_n) التي حدودها هي حدود السلسلة المفروضة. لنأخذ على المحور ox النقاط $1,2,3,\ldots,i,i+1,\ldots,n,\ldots$، عندئذٍ من أجل أي قيمة غير صحيحة لـ x، حيث $1<x$، يوجد عدد صحيح موجب i حيث $1\leq i$ وبحيث يكون $i\leq x\leq i+1$ (أنظر الشكل ...).



إذا كانت $x\in[1,2]$ فإن مساحة السطح المحصور بين $f(x)$ ومحور ox وبين المستقيمين x=1 و x=2 هو أكبر من مساحة المستطيل الذي بعداه $(f(2),1)$
كذلك السطح المحصور هو أصغر من " " " $(f(1),1)$

$\Rightarrow f(2)<f(x)<f(1)$ $x\in[1,2]$

وبالتعميم نجد أن $x\in[i,i+1]$

$f(i+1)<f(x)<f(i)$

وبمكاملة العبارة $f(i+1) \le \int_i^{i+1} f(x) \le f(i)$

وبما أن f متناقص فإن $f(i+1) \le f(x) \le f(i)$، وبمكاملة العبارة الأخيرة من i إلى i+1 نجد أن

$$f(i+1) \le \int_i^{i+1} f(x)\,dx \le f(i)$$

وبأخذ المجموع من i=1 وحتى i=n-1 (في الحالة العامة يمكن أن يكون i=N حيث $N \ge 1$ و N^*) نجد أن

$$f(2)+f(3)+\dots+f(n) \le \int_1^n f(x)\,dx \le f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)$$

أي أن

$$a_2+a_3+\dots+a_n \le \int_1^n f(x)\,dx \le a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$$

ومنه

$$S_n-a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_n-a_n \le S_n$$

إذا

$$S_n \le a_1+\int_1^n f(x)\,dx \le S_n$$

وبأخذ النهاية للعبارة الأخيرة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le a_1+\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (*)$$

فإذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ متقاربا، أي له قيمة معينة ولتكن L لجميع قيم n، فإنه من المتراجحة اليسارية من (*) نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le a_1+L$$

أي أن المتتالية $\{S_n\}$ (متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة المفروضة) محدودة من الأعلى وبالتالي محدودة والسلسلة $\sum_{n=1}^\infty a_n$ متقاربة.

أما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ متباعدا، أي يسعى إلى اللانهاية لجميع قيم n، فإنه من المتراجحة اليمينية من (*) نجد أن

$$\infty \le \lim_{n\to\infty} S_n$$

سؤال امتحاني هام جداً: $\sum \frac{1}{n}$ عن طريق الاختبار التكاملي:

نوجد: $f(x)=\frac{1}{x}$

$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(\ln(n)-\ln(1)) = \infty$

متباعدة

أي أن المتتالية $\{S_n\}$ متباعدة وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^\infty a_n$ متباعدة، وبذلك يتم المطلوب.

نذكر بأن التكامل $\int_i^{i+1} f(x)\,dx$ يمثل هندسيا المساحة المحصورة تحت الخط البياني للتابع $y=f(x)$ والمحور ox وبين المستقيمين الشاقوليين x=i و x=i+1، وهذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيل الذي طوله $a_i=f(i)$ وعرضه يساوي الواحد، وبين مساحة المستطيل الذي طوله $a_{i+1}=f(i+1)$ وعرضه يساوي الواحد (أنظر الشكل السابق)، وهذا يؤكد صحة المتراجحة

$$f(i+1) \le \int_i^{i+1} f(x)\,dx \le f(i)$$

وبالتالي صحة المجموع

$$S_n-a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_n-a_n$$

والذي برهنا على ضوئه صحة النظرية.

أمثلة (4-2-2):

1- برهن باستخدام الاختبار التكاملي على تباعد السلسلة التوافقية. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

الحل: نلاحظ أن التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ موجب ومستمر ومتناقص من أجل جميع قيم $x \in [1,+\infty[$ $1 \le x$، كما نلاحظ أن

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}[\ln x]_1^n = \lim_{n\to\infty}[\ln n - 0] = \infty$$

أي أن التكامل المعتل الموافق للسلسلة المعطاة غير محدود فهو إذا متباعد وبالتالي فالسلسلة التوافقية متباعدة بحسب الاختبار التكاملي.

2- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

الحل: بتبديل x بـ n في عبارة الحد العام للسلسلة المعطاة نحصل على التابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ وهو تابع موجب ومستمر ومتناقص من أجل جميع قيم $1 \le x$، ولدينا

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n}+1\right] = 1$$

أي أن التكامل المعتل الموافق للسلسلة المفروضة محدود فهو إذا متقارب، وبالتالي فالسلسلة المعطاة متقاربة.

3- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ والتي تدعى سلسلة ريمن، حيث p ثابت موجب.

الحل: إن التابع $f(x)=\frac{1}{x^p}$، والذي نحصل عليه بتبديل x بـ n في عبارة الحد العام لسلسلة ريمن، موجب ومستمر ومتناقص على المجال $[1,\infty)$. لنحسب التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ فإن:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right]_1^a \quad ;p\neq 1$$

ومنه

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-p+1}-1}{1-p}$$

• فإذا كان $p>1$ فإن $\int_1^\infty f(x)\,dx=\frac{1}{p-1}$ والتكامل متقارب وبالتالي سلسلة ريمن متقاربة من أجل $p>1$.

• أما إذا كان $p<1$ فإن $\int_1^\infty f(x)\,dx=\infty$ والتكامل متباعد وبالتالي سلسلة ريمن متباعدة من أجل $p<1$.

أخيرا إذا كان $p=1$ فإن

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}[\ln x]_1^n = \lim_{n\to\infty}(\ln n)=\infty$$

والتكامل متباعد وسلسلة ريمن متباعدة أيضا من أجل $p=1$.

إن هذا المثال يؤكد صحة المثالين السابقين.

4- هل السلسلة $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n}$ متقاربة ؟

الحل: نلاحظ أولا أن التابع $f(x)=\frac{x}{2^x}$ موجب ومستمر ومتناقص على المجال $[1,\infty)$ أي أنه يمكن تطبيق الاختبار التكاملي على السلسلة المعطاة.

لنحسب التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$. لدينا

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x2^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln 2}[x\cdot 2^{-x}]_1^a + \frac{1}{\ln 2}\int_1^a 2^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_1^n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-1\right)-\frac{1}{\ln^2 2}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\ln 2}(-1)-\frac{1}{\ln^2 2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{2\ln^2 2}$$

أي أن التكامل المعتل الموافق للسلسلة المعطاة متقارب وبالتالي فالسلسلة المفروضة متقاربة.

اختبار النسبة (اختبار دالامبير) (4-3):

نظرية (4-3-1):

لتكن $\sum_{n=1}^\infty a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة. إذا وجد عدد غير سالب $q<1$ بحيث أنه بدءا من حد ما مثل a_N تكون جميع حدود السلسلة التالية لـه محققة للمتراجحة $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ حيث $N<n$، فإن السلسلة المعطاة تكون متقاربة.

أما إذا وجد عدد $q>1$ بحيث أنه بدءا من حد ما مثل a_N تكون جميع حدود السلسلة التالية له محققة للمتراجحة $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge q$ حيث $N<n$، فإن السلسلة تكون متباعدة.

البرهان: في الحالة الأولى لدينا $a_{n+1}\le a_n q$ حيث $N<n$ وبإعطاء n القيم $n=N+1,N+2,\ldots$ نحصل من المتراجحة الأخيرة على المتراجحات

$$a_{N+2}\le a_{N+1}q$$
$$a_{N+3}\le a_{N+2}q \le a_{N+1}q^2$$
$$a_{N+4}\le a_{N+3}q\le a_{N+1}q^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+p}\le a_{N+1}q^{p-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

وبجمع هذه المتراجحات طرفا إلى طرف نجد أن

$$a_{N+2}+a_{N+3}+a_{N+4}+\cdots+a_{N+p}+\cdots \le \sum_{p=2}^{\infty} a_{N+1}\, q^{p-1} \qquad (*)$$

إن الطرف الأيمن من (*) هو عبارة عن سلسلة هندسية متقاربة لأن أساسها $0 \le q < 1$ ، وبالتالي فإنه بحسب اختبار المقارنة تكون السلسلة الموجودة في الطرف الأيسر من (*) متقاربة أيضا، ولكن هذه السلسلة تنتج عن السلسلة المعطاة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بعد حذف الحدود الـ $N+1$ الأولى منها إذا فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضا بحسب النظرية (2-2-(iii)).

أما في الحالة الثانية وبإجراء محاكمات مشابهة لتلك التي أجريناها في الحالة الأولى نحصل على المتراجحة

$$a_{N+2}+a_{N+3}+a_{N+4}+\cdots+a_{N+p}+\cdots \ge \sum_{p=2}^{\infty} a_{N+1}\, q^{p-1} \qquad (**)$$

وبما أن الطرف الأيمن من (**) هو عبارة عن سلسلة هندسية متباعدة لأن أساسها $q>1$ فإن الطرف الأيسر من (**) يمثل سلسلة متباعدة بحسب اختبار المقارنة وبالتالي تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة أيضا بحسب نفس النظرية (2-2-(iii)).

من اختبار دالامبير يمكن الحصول على النتيجة التالية والمعروفة باسم اختبار دالامبير الحدي.

نتيجة (2-3-4). (اختبار دالامبير الحدي):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة وكانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ موجودة ، عندئذ:

(i) إذا كان $L<1$ فإن السلسلة متقاربة.

(ii) إذا كان $L>1$ فإن السلسلة متباعدة.

(iii) إذا كان $L=1$ فلا يمكن تحديد نوع السلسلة فيما إذا كانت متقاربة أم متباعدة.

البرهان: لنفرض أن $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجودة، أي أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث أنه

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$$

أي أن

$$L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon \qquad (*) \qquad \text{من أجل جميع } n>N$$

• فإذا كان $L<1$ وفرضنا أن $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ فإنه من المتراجحة اليمنى من (*) نجد أن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{L+1}{2} = q \qquad \text{من أجل جميع } n>N$$

وبما أن $q<1$ فإنه بحسب اختبار دالامبير تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

• أما إذا كان $L>1$ وفرضنا أن $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ فإنه من المتراجحة اليسرى من (*) نجد أن

$$q = \frac{L+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{من أجل جميع } n>N$$

وبما أن $q>1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة بحسب اختبار دالامبير.

وبذلك نكون قد برهنا على (i) و (ii).

أما في حالة $L=1$ نجد أن اختبار دالامبير لا يعود مجدياً في دراسة تقارب السلسلة المفروضة لذا نلجأ في مثل هذه الحالة إلى اختبار آخر.

أمثلة (3-3-4):

1- برهن على تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

الحل: لدينا هنا $a_n = \frac{1}{n!}$ و $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي فإن

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

إذاً فالسلسلة متقاربة حسب اختبار دالامبير الحدي.

2- اختبار تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

الحل: إن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

والسلسلة المعطاة متباعدة بحسب اختبار دالامبير الحدي.

3- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ حيث $0<x$.

الحل: إن $x > 0$;

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} x\right) = x$$

فإذا كان $x<1$ كانت السلسلة متقاربة، وإذا كان $x>1$ كانت السلسلة متباعدة وذلك بحسب اختبار دالامبير الحدي. أما إذا كان $x=1$ فإن السلسلة المعطاة تتحول إلى السلسلة التوافقية وهي متباعدة كما رأينا سابقاً.

4- اختبر السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

الحل: إن

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

والسلسلة متباعدة بحسب اختبار دالامبير الحدي.

5- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

الحل: إن

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) = 1$$

أي أن اختبار دالامبير الحدي غير مجد، لذا نلجأ إلى اختبار آخر.

نلاحظ أن التابع $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ موجب ومستمر ومتناقص على المجال $[1,\infty)$، ولدينا

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_1^{n} \frac{d(2x-1)}{2x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln(2x-1)\right]_1^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\ln(2n-1) - 0\right) = \infty$$

أي أن التكامل المعتل الموافق للسلسلة المعطاة متباعد وبالتالي فالسلسلة متباعدة.

نظرية (4-3-4):

إذا كانت السلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ذات حدود غير سالبة، وكان

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

فإن تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يؤدي إلى تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، وتباعد السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يؤدي إلى تباعد السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

البرهان: من الفرض لدينا

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}$$

$$\frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

وبضرب هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف ثم ضرب طرفي المتراجحة الناتجة بـ a_1 نحصل على المتراجحة

$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots\cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \le a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots\cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

ومنه فإن

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$$

وهكذا فإنه بحسب اختبار المقارنة نجد أنه إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، وإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

نتيجة (4-3-5):

ينتج عن اختبار دالامبير الحدي أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة وكان $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ حيث L ثابت موجب فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كان $L<1$، ومتباعدة إذا كان $L>1$، ولا نعرف عنها شيئاً إذا كان $L=1$.

اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي) (4-4):

نظرية (4-4-1):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة. إذا وجد عدد غير سالب $q<1$ بحيث أنه بدءاً من حد ما مثل a_N تكون جميع حدود السلسلة التالية لـه محققة للمتراجحة $\sqrt[n]{a_n} \le q$ حيث $N<n$، فإن السلسلة المعطاة تكون متقاربة.

أما إذا وجد عدد $q>1$ بحيث أنه بدءاً من حد ما مثل a_N تكون جميع حدود السلسلة التالية له محققة للمتراجحة $\sqrt[n]{a_n} \ge q$ حيث $N<n$، فإن السلسلة تكون متباعدة.

البرهان: في الحالة الأولى لدينا $a_n \le q^n$ من أجل جميع $N<n$ ، وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ متقاربة لأنها هندسية وأساسها $0 \le q < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بحسب اختبار المقارنة.

أما في الحالة الثانية فلدينا $a_n \ge q^n$ من أجل جميع $N<n$ ، وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ متباعدة لأنها هندسية وأساسها $q>1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة أيضاً بحسب اختبار المقارنة.

من اختبار كوشي يمكن الحصول على النتيجة التالية والمعروفة باسم اختبار كوشي الحدي.

نتيجة (4-4-2):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة وكانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ موجودة فإنه:

(i) إذا كان $L<1$ فإن السلسلة متقاربة.

(ii) إذا كان $L>1$ فإن السلسلة متباعدة.

(iii) إذا كان $L=1$ فالاختبار غير مجد لمعرفة فيما إذا كانت السلسلة متقاربة أم متباعدة.

البرهان: يتم بطريقة مشابهة تماماً لبرهان النتيجة (4-3-2).

أمثلة (4-4-3):

1-اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

الحل: إن

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$$

والسلسلة متباعدة بحسب اختبار كوشي الحدي.

2-اختبر السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$.

الحل: لدينا

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a} < 1$ $\frac{1}{a} > 1$

فإذا كان $a<1$ كانت السلسلة متباعدة، وإذا كان $a>1$ كانت السلسلة متقاربة، أما من أجل $a=1$ فاختبار كوشي الحدي غير مجد لذا نلجأ إلى طريقة أخرى.

في الواقع من أجل $a=1$ يكون المجموع الجزئي النوني للسلسلة المعطاة هو

$$S_n = \underbrace{1+1+1+\cdots+1} = n$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ وبالتالي فالسلسلة المفروضة متباعدة من أجل $a=1$.

3-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+1}{7n^2-3n+1}\right)^n$.

الحل: من اختبار كوشي الحدي نجد أن

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{7n^2-3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{7n^2-3n+1}=\frac{5}{7}<1$$

والسلسلة متقاربة.

4-اختبر السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

الحل: إن

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

واختبار كوشي الحدي غير مجد. ولكن نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$$

هام هام

إذاً فالسلسلة المعطاة متباعدة اعتماداً على النظرية (2-1-(ii)).

5-إن اختبار كوشي الحدي لا يعطي أي إجابة مقنعة عند استخدامه في دراسة تقارب سلسلة ريمن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ لأن

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{n}}}$$

لدينا في المقام حالة عدم تعيين من الشكل ∞^0 عندما $n\to\infty$ لإزالتها نتبع الخطوات التالية

- نحسب $\ln n^{\frac{p}{n}}$ فنجد أن $\ln n^{\frac{p}{n}}=\frac{p}{n}\ln n=\frac{\ln n}{\frac{n}{p}}$
- نحسب النهاية $\lim_{n\to\infty}\ln n^{\frac{p}{n}}$ ونطبق قاعدة لوبيتال لإزالة حالة عدم التعيين الناتجة من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ حيث نتعامل مع $n>0$ كمتحول حقيقي

نظرية قاعدة لوبيتال $\frac{0}{0}$

$$\lim_{n\to\infty}\ln n^{\frac{p}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{n}{p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n}=0$$

أخيراً نضع $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{p}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{p}{n}}}=e^{\lim_{n\to\infty}\ln n^{\frac{p}{n}}}=e^0=1$

(إن هذه الطريقة في إزالة حالة عدم التعيين التي من الشكل ∞^0 والتي نقبلها هنا بدون برهان، تطبق أيضاً لإزالة حالة عدم التعيين التي من الشكل 0^0 و 1^∞، شريطة أن يكون التابع الذي يشغل موضع الأساس في أي من القوى السابقة موجباً تماماً).

بالعودة إلى التمرين نجد إذاً أن $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{n}}}=1$

وهذا يوضح سبب عدم فعالية اختبار كوشي الحدي في هذا التمرين، على حين وجدنا في المثال (4-2-2-3) أن سلسلة ريمن متقاربة عندما $p>1$ ومتباعدة عندما $p\leq 1$ وذلك بتطبيق الاختبار التكاملي.

اختبار راب (4-5):

نظرية (4-5-1):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة، ولنفرض أن P_n الحد العام لمتتالية راب الموافقة لهذه السلسلة أي أن

$$P_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

فإذا كانت $\lim_{n\to\infty}P_n=L$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

(i) متقاربة إذا كان $L>1$.

(ii) متباعدة إذا كان $L<1$.

(iii) لا يمكن تحديد نوعها فيما إذا كانت متقاربة أم متباعدة إذا كان $L=1$.

البرهان:

(i) لنفرض أن $L>1$ أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)>1$ أي أنه من أجل قيم كبيرة لـ n بقدر كاف يكون لدينا $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$، عندئذٍ يمكن إيجاد عدد حقيقي r بحيث يكون

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r>1 \qquad \text{ومنه} \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{r}{n}+1 \quad (*)$$

ليكن الآن p عدداً اختيارياً محققاً للمتراجحة $r>p\geq 1$،

ولكن لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=p$$

لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نطبق قاعدة لوبيتال متعاملين مع n كمتحول حقيقي فنجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=p\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}=p$$

من كل ما تقدم نجد أنه من أجل قيم كبيرة لـ n بقدر كاف لدينا

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=p<r \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^p<\frac{r}{n}+1\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^p<\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad ((*)\ \text{بحسب})$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^p}{n^p}<\frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n^p}{(n+1)^p}=\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}$$

إن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة هو نسبة الحد b_{n+1} على الحد b_n من سلسلة ريمن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ حيث $p>1$، وبما أن هذه السلسلة متقاربة فإنه بحسب اختبار المقارنة تكون

السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة.

(ii) لنفرض الآن أن $L<1$ أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)<1$ أي أنه من أجل قيم كبيرة لـ n بقدر كاف يكون لدينا $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$ أي أن $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{n}+1$

ومنه $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}$ وبالتالي فإن $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$

إن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة هو نسبة الحد b_{n+1} على الحد b_n من السلسلة التوافقية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، وبما أن هذه السلسلة متباعدة فإن السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة أيضاً بحسب اختبار المقارنة.

أمثلة (2-5-4):

1- طبق اختبار راب في البرهان على تقارب السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

الحل: لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2>1$$

والسلسلة إذاً متقاربة.

2- أدرس تقارب السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

الحل: إن

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{n^2}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}-1\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{2n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\,\frac{n^2-2n-1}{(n+1)^2}\right)=\infty>1$$

والسلسلة إذاً متقاربة بحسب اختبار راب.

3- طبق اختبار راب في دراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

الحل: إن

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{3^n n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}-1\right)\right)$$

n^n عامل مشترك

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{(n+1)^n}{3n^n}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{(n+1)^n-3n^n}{3n^n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-3}{3}\right)$$

للبرهان على أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ سنطبق قاعدة إزالة حالة عدم التعيين من الشكل 1^∞ المشروحة في المثال (4-4-3-5) لأن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^\infty$ و $1+\frac{1}{n}>0$. إن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$$

ولكن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}$$

لذا نطبق قاعدة لوبيتال على أن نتعامل مع n كمتحول حقيقي فنجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

وهكذا فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}=e^1=e$$

وبالعودة إلى التمرين نجد أن

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-3}{3}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-3}{3}\right)$$

$$=\infty\cdot\left(\frac{e-3}{3}\right)=-\infty<1$$

فالسلسلة إذاً متباعدة، وهذه النتيجة تتطابق مع نتيجة المثال (2-3-3-4).

نتيجة (3-5-4):

ينتج عن اختبار راب أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلة ذات حدود غير سالبة وكان $\frac{a_n}{a_{n+1}}\approx 1+\frac{L}{n}$ حيث L ثابت موجب، فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة إذا كان L>1 ومتباعدة إذا كان L<1 ولا نعرف عنها شيئاً عندما L=1.

سنقبل أخيراً وبدون برهان اختبار كوشي للسلاسل ذات الحدود غير السالبة والمعطى بالنظرية التالية.

نظرية (اختبار كوشي) (6-4):

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ذات الحدود غير السالبة متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*\ ;\ m\ge n>N\ \Rightarrow\ \sum_{k=n}^{m}a_k<\varepsilon$$

في الحالة الخاصة عندما n=m فإن الشرط السابق يأخذ الشكل التالي

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N}^*\ ;\ n>N\ \Rightarrow\ a_n<\varepsilon$$

5- السلاسل المتناوبة

تعريف (1-5):

نقول عن سلسلة عددية غير منتهية بأنها سلسلة متناوبة إذا كانت إشارات حدودها المتتالية تتناوب بين موجب وسالب. فإذا كان حدها الأول موجباً فهي إذاً من الشكل

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

أما إذا كان حدها الأول سالباً فتكون من الشكل

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

حيث يكون $a_n > 0$ لجميع قيم n.

اختبار ليبنتز للسلاسل المتناوبة (2-5):

نظرية (5-2-1):

تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ متقاربة. إذا حققت الشرطين التاليين:

(i) $|a_{n+1}| \le |a_n|$ لجميع قيم n، أي أن القيم المطلقة لحدودها تشكل متتالية متناقصة.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

وفي هذه الحالة تكون القيمة المطلقة للخطأ المرتكب في حساب مجموع السلسلة (أي باقي السلسلة) لا تزيد عن القيمة المطلقة لأول حد مهمل. $|R_n| \le |a_{n+1}|$

البرهان: لنفرض بأن السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ تحقق الشرطين (i) و (ii)، ولنأخذ مجموع عدد زوجي من حدودها الأولى وليكن مؤلفاً من 2n حداً، أي أن

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

وبما أن الشرط (i) محقق فإن $a_n - a_{n+1} \ge 0$ لجميع قيم n، أي أن جميع المقادير داخل الأقواس في المجموع S_{2n} هي مقادير موجبة إذاً $S_{2n} \le a_1$

ولكن $S_{2k} \le S_{2(k+1)}$ حيث $k \le n$ لأن

$$S_{2(k+1)} = S_{2k+2} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

وبما أن $a_{2k+1} \ge a_{2k+2}$ إذاً $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \ge S_{2k}$

وهكذا نجد أن $0 \le S_2 \le S_4 \le S_6 \le \cdots \le S_{2n-2} \le S_{2n} \le a_1$

أي أن المتتالية $\{S_{2n}\}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي إذاً متقاربة، لنفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

كذلك إذا أخذنا عدداً فردياً من الحدود الأولى للسلسلة المتناوبة المعطاة وليكن مؤلفاً من 2n+1 حداً فإننا نجد أن $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. وبأخذ النهاية لطرفي المساواة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ و $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ حسب الشرط (ii) فإن $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

وبذلك نكون قد برهنا أن مجموع أي عدد زوجي أو فردي من الحدود الأولى للسلسلة المتناوبة المعطاة يسعى إلى نهاية وحيدة ومحدودة S عندما تسعى n إلى اللانهاية وهذا بدوره يعني أن السلسلة المتناوبة المحققة للشرطين (i) و (ii) متقاربة.

لإثبات الشطر الثاني من النظرية سنبرهن أن $|R_n| < a_{n+1}$.

إن الباقي R_n للسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ بعد اقتطاع الحدود الـ n الأولى منها هو كما نعلم

$$R_n = \pm a_{n+1} \mp a_{n+2} \pm a_{n+3} \mp a_{n+4} \pm \cdots$$
$$= \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots)$$
$$= \pm(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots)$$
$$\le \pm a_{n+1}$$

(حيث تتم المناقشة هنا كما تمت في برهان التقارب أعلاه)

وهذا يعني أن إشارة باقي السلسلة المتناوبة تكون دوماً من إشارة أول حد مهمل بعد حساب مجموع السلسلة، بعبارة أخرى تكون إشارة باقي السلسلة المتناوبة من إشارة أول حد من الحدود المشكلة له، أما القيمة المطلقة لهذا الخطأ فهي $|R_n| \le a_{n+1}$.

وهذا يعني أنه عند استبدال مجموع السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ بمجموعها الجزئي النوني نكون قد ارتكبنا خطأً قيمته لا تتجاوز القيمة المطلقة لأول حد مهمل، ونلاحظ هنا أنه كلما كبرت n عند حساب S_n كلما صغر الخطأ المرتكب الناجم عن عملية الاستبدال هذه.

أمثلة (5-2-2):

1- اختبر السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$، وكم يجب أن تكون قيمة n حتى يكون الخطأ

باقي السلسلة

المرتكب عند حساب R_n لا يتجاوز الـ 0.0001.

سؤال

الحل: نلاحظ أولاً أن $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n}$ وذلك لجميع قيم n. كما نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ إذاً الشروط لبينتز محققة والسلسلة المتناوبة متقاربة.

إن الخطأ المرتكب عند حساب R_n هو $|R_n| \le a_{n+1}$ وحتى لا يتجاوز هذا الخطأ المقدار 0.0001 نضع

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le 0.0001 = \frac{1}{10000} \Rightarrow n \ge 10000-1 = 9999$$

أي أنه عند حساب S_n يجب أخذ 9999 حداً فما فوق من الحدود الأولى للسلسلة المعطاة حتى لا يتجاوز الخطأ للمرتكب عند استبدال مجموع السلسلة بمجموعها الجزئي المقدار 0.0001.

هام

2- برهن على تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$، ثم أوجد الخطأ المرتكب عند الاقتصار على مجموع الحدود الخمسة الأولى منها فقط.

الحل: إن $2^n < 2^{n+1} \Rightarrow 2^n(n+1) < 2^{n+1}(n+1) < 2^{n+1}(n+2)$

وذلك لجميع قيم n وبالتالي فإن $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)} < \frac{1}{2^n(n+1)} = a_n$

وذلك لجميع قيم n، كما أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n(n+1)} = 0$

إذاً فالسلسلة المتناوبة المعطاة متقاربة بحسب اختبار لبينتز. أما الخطأ المرتكب عند الاقتصار على جمع الحدود الخمسة الأولى فهو لا يتجاوز القيمة المطلقة للحد السادس ذي الإشارة الموجبة أي أن $R_n \le a_6 = \frac{1}{2^6(6+1)} = \frac{1}{448}$.

هام

3- ادرس تقارب السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$، ثم أوجد الخطأ المرتكب عند الاقتصار على مجموع الحدود الثمانية ثم الحدود التسعة الأولى منها. كم حداً يجب أن نأخذ عند حساب S_n حتى لا يتجاوز هذا الخطأ المقدار 0.001.

الحل: واضح أن $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} = a_n$ لجميع قيم n، كما أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

فالسلسلة متقاربة بحسب اختبار لبينتز.

إن الخطأ المرتكب عند الاقتصار على مجموع الحدود الثمانية الأولى لا يزيد عن القيمة المطلقة للحد التاسع ذو الإشارة الموجبة، إذاً الخطأ لا يزيد عن $\frac{1}{17}$ وهو ذو إشارة موجبة. أما الخطأ المرتكب عند الاقتصار على مجموع الحدود التسعة الأولى فهو لا يزيد عن القيمة المطلقة للحد العاشر ذي الإشارة السالبة، أي أن الخطأ هنا ذو إشارة سالبة ولا يزيد بالقيمة المطلقة عن المقدار $\frac{1}{19}$.

وحتى لا يتجاوز هذا الخطأ المقدار 0.001 نضع

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \le 0.001 = \frac{1}{1000}$$

وبحل هذه المتراجحة، مع ملاحظة أن n عدد طبيعي، نجد أن $n \ge 500$ أي يجب أخذ 500 حداً على الأقل من الحدود الأولى للسلسلة المعطاة حتى لا يتجاوز الخطأ المرتكب عند استبدال مجموع السلسلة بمجموعها الجزئي المقدار 0.001.

6- التقارب المطلق والتقارب الشرطي للسلاسل العددية:

تعريف (6-1):

1) التقارب المطلق: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة حدودها ذات إشارات مختلفة (ليست بالضرورة متناوبة)، نقول عن هذه السلسلة أنها تتقارب مطلقاً إذا تقاربت سلسلة القيم المطلقة لحدودها، أي إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة.

تعريف (6-2):

2) التقارب الشرطي: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة حدودها ذات إشارات مختلفة. نقول عن هذه السلسلة أنها متقاربة شرطياً إذا كانت متقاربة وكانت سلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة.

أمثلة (6-3):

1-حدد نوع تقارب السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

الحل: إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة هي السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي كما نعلم سلسلة متباعدة، وقد وجدنا في المثال (5-2-2-1) أن السلسلة المتناوبة المعطاة متقاربة بحسب اختبار ليبنتز. إذاً فالسلسلة التوافقية المتناوبة متقاربة شرطياً.

Page: 73

2-حدد نوع تقارب السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

الحل: إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ وقد وجدنا في المثال (4-2-2-2) أن هذه السلسلة متقاربة إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً.

نظرية (6-4):

إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً فهي سلسلة متقاربة. بعبارة أخرى إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود مختلفة الإشارة وكانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. لكن العكس غير صحيح

... كما ... تقارب السلسلة ... المطلقة ... السلسلة ... متقاربة ليس ... ضرورة ... بالمثال التالي

البرهان: لنرمز بـ S_n للمجموع الجزئي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وبـ T_n للمجموع الجزئي النوني للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$، أي أن

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n$$
$$T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

ومنه

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + (a_3 + |a_3|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\le 2|a_1| + 2|a_2| + 2|a_3| + \cdots + 2|a_n| \\ &= 2(|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|) = 2T_n \end{aligned}$$

ولكن $\{S_n + T_n\}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة ذات الحدود غير السالبة

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ لأن $a_n + |a_n| \ge 0$ لجميع قيم n. إذاً $\{S_n + T_n\}$ متتالية متزايدة (بحسب التعريف (1-3))، وهي أيضاً محدودة من الأعلى بالمقدار $2T_n$، إذاً فهي محدودة وبالتالي متقاربة بحسب النظرية (4-9) من الفصل الأول أي أن $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n)$ موجودة، وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة من الفرض فإن المتتالية $\{T_n\}$ متقاربة والنهاية $\lim_{n\to\infty} T_n$ موجودة أيضاً. وهكذا نجد - بالاستفادة من النظرية (4-1) من الفصل الأول - أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n - T_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) - \lim_{n\to\infty} T_n$$

وبما أن النهايتين في الطرف الأيمن من هذه المساواة موجودتان فإن النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة ومن ثم فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ملاحظة (6-5):

إن المثال (6-3-1) يبين لنا بأن عكس النظرية السابقة غير صحيح إذ أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لتحقيقها شرطي ليبنتز على حين أن سلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة.

مثال (6-6)

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}$.

الحل: إن هذه السلسلة ليست متناوبة لأنه بعد كل حدين موجبين يأتي حدان سالبان، بالتالي لا يمكن تطبيق اختبار ليبنتز عليها، غير أن سلسلة القيم المطلقة لحدودها هي

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\times 3} + \frac{\sqrt{2}}{2\times 3^2} + \frac{\sqrt{2}}{2\times 3^3} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{2\times 3^n} + \cdots$$

وهي سلسلة هندسية أساسها $|q| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ وبالتالي فهي متقاربة. إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة بحسب النظرية السابقة وتقاربها مطلق.

حدها الأول $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$

7-اختبارات التقارب المطلق على السلاسل ذوات الحدود متغيرة الإشارة

إن اختبارات التقارب للسلاسل ذات الحدود غير السالبة التي عرضناها في الفقرة (4) من هذا الفصل يمكن تطبيقها على السلاسل المتناوبة أو السلاسل ذات الحدود كيفية الإشارة شريطة استبدال $|a_n|$ بـ a_n في نص كل اختبار، لذلك أطلقنا على اختبارات السلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة اسم اختبارات التقارب المطلق، وسنكتفي بعرضها دون التعرّض على براهينها.

اختبار المقارنة للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة (7-1):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين كل منهما ذات حدود متغيرة الإشارة (في حالة خاصة متناوبة)، ولنفرض أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$|a_n| \le |b_n|$ لجميع قيم $N<n$

فإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة مطلقاً فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة بحسب النظرية (6-4).

اختبار النسبة (اختبار دالامبير) للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة (7-2):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود متغيرة الإشارة، ولنفرض أن النهاية

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ موجودة، عندئذٍ:

(i) إذا كان $L<1$ فإن السلسلة متقاربة.

(ii) إذا كان $L>1$ فإن السلسلة متباعدة.

(iii) إذا كان $L=1$ فالاختبار غير مجد في تأكيد تقارب السلسلة أو تباعدها.

اختبار الجذر النوني (اختبار كوشي) للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة (7-3):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود متغيرة الإشارة وكانت النهاية

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ موجودة، عندئذٍ:

(i) إذا كان $L<1$ فإن السلسلة متقاربة.

(ii) إذا كان $L>1$ فإن السلسلة متباعدة.

(iii) إذا كان $L=1$ فلا يمكن تحديد نوع السلسلة فيما إذا كانت متقاربة أم متباعدة.

اختبار راب للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة (7-4):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة ذات حدود متغيرة الإشارة. فإذا كانت النهاية

$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = L$ موجودة، فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) متقاربة إذا كان $L>1$.

(ii) متباعدة إذا كان $L<1$.

(iii) لا يمكن تحديد نوعها فيما إذا كانت متقاربة أم متباعدة إذا كان $L=1$.

اختبار كوشي للسلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة (7-5):

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود متغيرة الإشارة متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}^*\ ;\ m \ge n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

في الحالة الخاصة عندما $n=m$ فإن الشرط السابق يأخذ الشكل التالي

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}^*\ ;\ n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

أمثلة وتمارين محلولة (7-6):

1-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

الحل: بتطبيق اختبار دالامبير على سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة نجد أن

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 < 1$$

والسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً، لأن سلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة

2-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}$.

الحل: إن
$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$
والسلسلة متقاربة مطلقاً لتقارب سلسلة القيم المطلقة لحدودها.

3-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$.

الحل: بتطبيق اختبار التقارب المطلق لـ دالامبير نجد أن
$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)=2>1$$
أي أن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة متباعدة.

يمكن الوصول إلى نفس النتيجة على النحو التالي: لدينا
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2}=\frac{\infty}{\infty}$$
نطبق قاعدة لوبيتال على أن نتعامل مع n كمتحول حقيقي فنجد أن
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(\ln 2)^2}{2}=\infty\neq 0$$
وبالتالي فالسلسلة متباعدة بحسب النظرية (2-1-(ii)).

4-ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

الحل: إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$، كما نلاحظ أن التابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$، والذي نحصل عليه بتبديل x بـ n في عبارة الحد العام لسلسلة القيم المطلقة، هو تابع موجب ومستمر ومتناقص على المجال $[1,\infty)$ ولدينا
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac12\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac12\lim_{n\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^n$$
$$= \frac12\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n^2+1)-\ln 2\right]=\infty$$
أي أن سلسلة القيم المطلقة متباعدة بحسب الاختبار التكاملي، ولكن نلاحظ أن

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}=a_n$$ وذلك لجميع قيم n

وأن $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ أي أن السلسلة المعطاة تحقق شرطي ليبنتز فهي إذاً متقاربة وبما أن سلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة فالسلسلة موضوع الدراسة إذاً متقاربة شرطياً.

5-اختبر تقارب السلسلة التالية امتحان
$$\left(\frac13\right)^2+\left(\frac{1\times4}{3\times6}\right)^2+\left(\frac{1\times4\times7}{3\times6\times9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n}\right)^2+\cdots$$

الحل: إن
$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)(3n+1)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n(3n+3)}\right)^2\left(\frac{3\times6\times9\times\cdots\times3n}{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2=1$$
أي أن اختبار دالامبير الحدي غير مجدٍ في دراسة تقارب السلسلة المعطاة، على حين نجد أن تطبيق اختبار راب يعطينا
$$L=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{12n+8}{(3n+1)^2}\right)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{8}{n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{12}{3}=4>1$$
أي أن السلسلة المفروضة متقاربة.

6-احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ هام جداً جداً

الحل: إن مجموع السلسلة لا يكون موجوداً إلا إذا كانت السلسلة متقاربة، لذا لنبين أولاً فيما إذا كانت السلسلة المعطاة متقاربة. في الواقع من اختبار النسبة للسلاسل ذات الحدود غير السالبة لدينا

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+1}\right)=0<1$$

فالسلسلة إذاً متقاربة، ولنبحث عن مجموعها. إن الحد العام للسلسلة يكتب بالشكل

$$a_n=\frac{n^3}{n!}=\frac{n^2}{(n-1)!}=\frac{n^2-1+1}{(n-1)!}=\frac{n^2-1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!} \qquad (1)$$

وهكذا فإن

$$a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n+1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n-2+2+1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

أي أن

$$a_n=\frac{n-2}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!} \qquad (2)$$

وبالتالي

$$a_n=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!} \qquad (3)$$

بتعويض n=1 في (1) و n=2 في (2) و n=3,4,... في (3) نحصل على حدود السلسلة المعطاة وهي

$$a_1=0+\frac{1}{0!}$$

$$a_2=0+\frac{3}{0!}+\frac{1}{1!}$$

$$a_3=\frac{1}{0!}+\frac{3}{1!}+\frac{1}{2!}$$

$$a_4=\frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{1}{3!}$$

....

$$a_n=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

....

وبجمع جميع هذه الحدود، والتي تمثل السلسلة المفروضة عندما n تسعى إلى اللانهاية، نحصل على مجموع السلسلة المراد حسابه، إذاً

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=\left(0+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)+\left(0+\frac{3}{0!}+\frac{3}{1!}+\frac{3}{2!}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)$$

$$=e+3e+e=5e$$

(*نذكر أن نشر التابع $f(x)=e^x$ في سلسلة ماك لوران يعطى بالمساواة

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

وهكذا فإن $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ *)

7- احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{(n+1)!}$ هام

الحل: لنرى أولاً فيما إذا كانت هذه السلسلة متقاربة. إن اختبار دالامبير للسلاسل ذات الحدود غير السالبة يبين أن

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2-(n+1)}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{n-1}\right)=0<1$$

أي أن السلسلة متقاربة فلها إذاً مجموع لنحسبه. إن الحد العام لهذه السلسلة يكتب بالشكل

$$a_n=\frac{n^2-n}{(n+1)!}=\frac{n^2}{(n+1)!}-\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n^2-1+1}{(n+1)!}-\frac{n+1-1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{n^2-1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)!}+\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{n-1}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$$

وهكذا فإن

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{(n+1)!}-\frac{2}{n!}$$

ومن أجل n=1,2,3,... نحصل على

$$a_1 = \frac{1}{0!} + \frac{2}{2!} - \frac{2}{1!}$$

$$a_2 = \frac{1}{1!} + \frac{2}{3!} - \frac{2}{2!}$$

$$a_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{4!} - \frac{2}{3!}$$

$$a_4 = \frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} - \frac{2}{4!}$$

....

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}$$

....

وبجمع كافة هذه الحدود نحصل على مجموع السلسلة المعطاة، إذاً

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$$

$$- 2\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\right)$$

$$= e + 2(e-2) - 2(e-1) = e - 2$$

8- احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

الحل: لدينا $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n}\right) = 0 < 1$

إذاً فالسلسلة متقاربة، لنحسب مجموعها. إن

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

ومن أجل $n=1,2,3,\dots$ نجد أن

$$a_1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

$$a_4 = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

....

$$a_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

....

إن مجموع كافة هذه الحدود، وعندما n تسعى إلى اللانهاية، يساوي إلى مجموع السلسلة المطلوب حسابه. إذاً $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

9- أوجد جميع جذور المعادلة $tg\, x + tg^3 x + tg^5 x + \cdots + tg^{(2n-1)} x + \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل: نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة هو مجموع سلسلة هندسية حدها الأول $a = tg\, x$ وأساسها $q = tg^2 x$، وتكون هذه السلسلة متقاربة عندما يكون $|q| = |tg^2 x| < 1$ وعندها يكون مجموع السلسلة معطى بالعلاقة $\frac{a}{1-q}$، وهكذا تصبح المعادلة المعطاة بالشكل $\frac{tg\, x}{1 - tg^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$$\sqrt{3}\, tg^2 x + 2\, tg\, x - \sqrt{3} = 0 \quad ; \quad |tg^2 x| < 1$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتحول $tg\, x$ وبحلها نجد أن $tg_1 x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $tg_2 x = -\sqrt{3}$ غير أن الجذر $tg_2 x = -\sqrt{3}$ لا يحقق شرط تقارب السلسلة الهندسية لأن $|tg_2 x| > 1$. إذاً $tg_1 x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ هو حل للمعادلة المعطاة، ومنه فإن $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \;;\; k \in Z$.

10- هل السلسلة التي حدها العام $a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ متقاربة؟

الحل: بتطبيق اختبار الجذر النوني لكوشي من أجل السلاسل ذات الحدود متغيرة الإشارة

نجد أن

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

أي أن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة متقاربة، وبالتالي فالسلسلة موضوع الدراسة متقاربة ونوع تقاربها مطلق.

11- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$ وفق اختبار راب.

الحل: بتطبيق اختبار راب للسلاسل ذات الحدود غير السالبة نجد أن

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{n^n}{e^n n!}\cdot\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}-1\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{n^n e}{(n+1)^n}-1\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}-1\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(1-1) = 0 < 1$$

وبالتالي فإن السلسلة المفروضة متباعدة.

أخيراً وقبل إنهاء هذا الفصل ننوه إلى النظرية التالية

نظرية (7-7):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ سلسلتين متقاربتين مطلقاً بمجموعهما- على الترتيب - a و b، فإن السلاسل $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot b_n)$ متقاربة مطلقاً ومجموعها على الترتيب a+b و a-b و a.b.

تمارين

1- عين الكسر العادي المقابل للكسر العشري $0.123\ 123\ 123\cdots$.

2- أوجد السلسلة التي مجموعها هو نهاية المتتالية $\frac{5n}{7n-2}$.

3- باستخدام مفهوم متتالية المجاميع الجزئية ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$، وأوجد مجموعها في حالة تقاربها.

4- عين قيم x لكي تكون السلسلة الهندسية $1+(2-x^2)+(2-x^2)^2+\cdots$ متقاربة.

5- احسب مجموع السلسلة الهندسية الناتجة عن تقسيم العدد « 1 » على العدد « 9 ».

6- ليكن T_1 مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي « 1 »؛ ولنرسم داخل T_1 مثلثاً T_2 تقع رؤوسه في منتصفات أضلاع T_1، وبنفس الطريقة ترسم المثلث T_3 داخل T_2 وهكذا ...

(i) احسب مساحة المثلث T_3.

(ii) أثبت أن متتالية مساحات المثلثات هي سلسلة هندسية متقاربة، ثم احسب مجموعها.

7- اختبر تقارب السلاسل التالية باستخدام اختبار المقارنة:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$ ، (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n+1}$ ، (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$ ، (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$ ، (viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$ ، (x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

8- استخدم اختبار دالامبير في دراسة تقارب السلاسل التالية:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot n!}{n^n}$ حيث $0\le x$؛ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ حيث $0\le x$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$ ، (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{e^n}$ ، (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^n}{(n+1)!}$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ ، (viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times5\times\cdots(3n-1)}{1\times5\times\cdots(4n-3)}$.

9- طبق الاختبار التكاملي لدراسة تقارب السلاسل التالية:

(i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ ، (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ ، (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

10- استخدم اختبار كوشي (الجذر النوني) في دراسة تقارب السلسلتين:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n^2+2n+1}\right)^n$ ، (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$.

11- من أجل أي قيمة للثابت c تكون السلسلة التالية متقاربة

$$\frac{c}{1!}+\frac{c(c+1)}{2!}+\frac{c(c+1)(c+2)}{3!}+\cdots$$

12- لتكن السلسلة

$$2+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^7}{7!}+\cdots$$

أوجد الحد العام لهذه السلسلة وادرس تقاربها ثم استنتج تقارب السلسلة

$$2-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}-\frac{2^7}{7!}+\cdots$$

13- بين أياً من السلاسل التالية متباعدة وأياً منها متقاربة وفي هذه الحالة حدد نوع التقارب، وذلك بالطريقة التي تراها مناسبة:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$ ، (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ، (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ ، (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$.

(vii) $\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ (viii) $\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n}$

(ix) $\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (x) $\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$

14- أعد برهان النظرية (1-7) باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي.

(تأكد أولا من أن مجموع السلسلة صحيح من أجل $n=1$ ثم نفرض أنه صحيح من أجل $n-1$ ونبرهن صحته من أجل n).

15- بالاستفادة من النظرية (2-1-(i)) أثبت أن:

(i) $\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n}}{n!}=0$ (ii) $\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{6^{n}!}=0$

(iii) $\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(2n)!}=0$ (iv) $\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}=0$

(v) $\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{n}}{n^{n^{2}}}=0$

الفصل الثالث

المتتاليات والسلاسل التابعية

1- المتتاليات التابعية

تعريف (1-1):

إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية كل حد من حدودها تابع حقيقي معرف على المجال I من R قلنا عن $\{f_n(x)\}$ أنها متتالية تابعية معرفة على المجال I من R.

تعريف (1-2):

نقول عن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال I من R أنها متقاربة من التابع $f(x)$، أو أن التابع $f(x)$ نهاية للمتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$، في المجال I من R أو على المجال I من R، ونرمز لذلك بـ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$، إذا تحقق الشرط التالي

من أجل أي $\varepsilon>0$ وأي $x\in I$ يوجد $N\in N^{*}$ بحيث تتحقق المتراجحة $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ من أجل جميع قيم $n>N$.

ونعبر عن ذلك كما يلي

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \forall x\in I\ ,\ \exists N\in N^{*}\ ;\ n>N\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

واضح من هذا التعريف أن العدد الطبيعي N يتعلق بكل من ε و x معاً أي أن $N=N(\varepsilon,x)$، وفي حالة خاصة إذا كان N يتبع ε فقط، أي أن $N=N(\varepsilon)$، ولا يتغير بتغير x قلنا أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من التابع $f(x)$ في المجال I أو على المجال I من R ونعبر عن ذلك كما يلي

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists N\in N^{*}\ ;\ n>N\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

في كل ما سيأتي سنقصد بمتتالية تابعية متتالية توابع حقيقية ما لم ننوه إلى غير ذلك.

ملاحظات (1-3):

1- إن التعريف السابق يبين أنه في حالة تقارب المتتالية التابعيـة $\{f_n(x)\}$ إلى $f(x)$ عندما $n\to\infty$ يعني أنه من أجل كل قيمة لـ $\varepsilon>0$ وكل قيمة لـ x من I، يمكـن تحديـد $N\in N^{*}$ بحيث تتحقق المتراجحة $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ لجميع قيم $n>N$.

هذا يعني أنه من أجل أي $\varepsilon > 0$، فإنه بإعطاء قيمة محددة لـ x من المجال I سوف تتحول المتتالية التابعية إلى متتالية عددية $\{a_n\}$ متقاربة من القيمة $f(x) = a$ ، أي تحقق المتراجحة $|a_n - a| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم $N<n$.

وكلما أعطينا لـ x قيمة أخرى من المجال I حصلنا على متتالية عددية جديدة متقاربة، وهكذا فإن المتتالية التابعية في هذه الحالة تقابل عددا غير منته من المتتاليات العددية المختلفة والمتقاربة، وكل منها يتعلق بعدد طبيعي N يتغير كلما تغيرت x.

أما في حالة التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x)\}$ من التابع $f(x)$ عندما $n \to \infty$، فإن التعريف يبين أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعي N و N^*، بغض النظر عن القيم التي يأخذها المتحول x من المجال I، بحيث تتحقق المتراجحة

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لجميع قيم } N<n$$

أي أنه يوجد عدد طبيعي واحد N و N^* يناسب كافة المتتاليات العددية الناتجة عن المتتالية التابعية المفروضة بعد إعطاء x أي قيمة من المجال I.

2- إن طبيعة التابع $f(x)$ الذي تسعى إليه المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ عندما تسعى n إلى اللانهاية ليست بالضرورة أن تكون من نفس طبيعة التوابع $f_n(x)$ المشكلة للمتتالية التابعية. إن التوافق بين خواص توابع المتتالية $\{f_n(x)\}$ وتابع نهايتها $f(x)$ لا يتحقق إلا في حالة التقارب المنتظم للمتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ من التابع $f(x)$. سنقدم في الفقرة (3) من هذا الفصل نظرية هذا الخصوص، وسنقتصر هنا على تقديم أمثلة داعمة لهذه الملاحظة.

أمثلة (1-4):

1- إن متتالية التوابع الحقيقية $\{x^n\}$ متقاربة على المجال المغلق $[0,1]$ وتابع نهايتها هو

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

واضح أن نهاية هذه المتتالية التابعية تتغير بتغير قيمة x، إذا فالتقارب هنا غير منتظم

2- كذلك فإن متتالية التوابع الحقيقية $\left\{\dfrac{1}{1+nx}\right\}$ متقاربة على المجال المغلق $[0,1]$ وتابع نهايتها هو

R

$f(x) = 0$

$\dfrac{\sin nx}{n}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0 & ; \ 0 < x \le 1 \\ 1 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

وهنا أيضاً يتغير تابع النهاية بتغير قيمة x، إذاً فالتقارب غير منتظم.

3- إن متتالية التوابع الحقيقية $\left\{\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ لأنه مهما كانت قيمة x من هذا المجال فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2nx}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

أي أن تابع النهاية لا يتعلق بالقيم التي يأخذها المتحول x من المجال $[0,1]$.

4- كذلك فإن متتالية التوابع الحقيقية $\left\{2n^2x\, e^{-n^2x^2}\right\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ لأن

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4nx}{2nx^2 e^{n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{x e^{n^2x^2}} = 0$$

(طبقنا قاعدة أوبيتال لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ معتبرين n كمتحول حقيقي)

وذلك لجميع قيم x من المجال $[0,1]$، أي أن تابع النهاية هنا أيضا لا يتعلق بقيم x.

نتيجة (1-5):

1- نلاحظ في المثال (1-4-1) أن جميع توابع المتتالية $\{x^n\}$ مستمرة على كل $\mathbf{R}$ وبالتالي على المجال $[0,1]$ لأنها توابع حقيقية حدودية؛ على حين أن تابع النهاية لها غير مستمر (متقطع) في النقطة $x=1$ لأن

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$$

كذلك هو الحال في المثال (1-4-2) حيث أن توابع المتتالية $\left\{\dfrac{1}{1+nx}\right\}$ مستمرة على كل $\mathbf{R}$ وبالتالي على المجال $[0,1]$، على حين أن تابع النهاية لها غير مستمر في النقطة $x=0$ لأن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

وهكذا نجد أنه في حالة التقارب غير المنتظم ليس من الضروري أن يكون لتوابع المتتالية $\{f_n(x)\}$ وتابع نهايتها نفس الخواص.

2- على حين نجد في المثالين (1-4-3) و (1-4-4) أنه عندما كانت توابع المتتالية $\{f_n(x)\}$ المتقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ مستمرة كان تابع النهاية للمتتالية $\{f_n(x)\}$ مستمراً أيضاً.

إن برهان التقارب أو التقارب المنتظم لمتتالية تابعية يمكن أن يتم اعتماداً على التعريف (1-2) وهذا ما سنوضحه من خلال الأمثلة التالية.

أمثلة (1-6):

1- برهن أن المتتالية التابعية $\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $f(x)=0$ وذلك ضمن مجال تعريفها $[0,1]$.

الحل: سنبرهن أنه مهما يكن $\varepsilon>0$ فإنه يمكن إيجاد عدد طبيعي N من N^* يتعلق فقط بـ ε وبحيث يتحقق الشرط التالي $n>N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

في الواقع إن

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\frac{x}{1+n^2x^2} \qquad (x\in[0,1] \text{ لأن})$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{2n}<\varepsilon \Leftrightarrow 2n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}$$

لذا نختار N أي عدد طبيعي يحقق المتراجحة $N>\frac{1}{2\varepsilon}$ فنجد أن

$$n>N \Rightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x)-0|<\varepsilon$$

أي أن المتتالية التابعية المعطاة متقاربة فعلاً من $f(x)=0$ وتقاربها منتظم لأنه استطعنا إيجاد عدد N بحيث أن $N=N(\varepsilon)$ وليس له علاقة بـ $x\in[0,1]$.

2- برهن أن المتتالية التابعية $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ المعرفة على المجال $(-\infty,+\infty)$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)=0$ على المجال $(-\infty,+\infty)$.

الحل: لنبرهن على تحقق الشرط التالي

$$\forall\varepsilon>0 \;;\; \exists N\in N^* \;,\; n>N \Rightarrow |f_n(x)-0|<\varepsilon$$

في الواقع لدينا

$$|f_n(x)-0|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|=\frac{|\sin nx|}{n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

وباختيار العدد الطبيعي N المحقق للمتراجحة $N>\frac{1}{\varepsilon}$ نجد أن

$$n>N \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x)-0|<\varepsilon$$

أي أن النهاية صحيحة والتقارب منتظم لأن N يتعلق بـ ε فقط وليس له علاقة بأي قيمة لـ x من المجال $(-\infty,+\infty)$.

3- برهن أن المتتالية التابعية $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ متقاربة من التابع $f(x)=0$ بانتظام وذلك مهما يكن x في $[0,1]$.

الحل: إن

$$|f_n(x)-0|=\left|\frac{x^n}{n}\right|=\frac{|x^n|}{n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

وباختيار $N>\frac{1}{\varepsilon}$ نجد أن

$$n>N \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x)-0|<\varepsilon$$

أي أن النهاية صحيحة والتقارب منتظم لأن $N=N(\varepsilon)$.

4- برهن أن متتالية التوابع $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ متقاربة ولكن ليس بانتظام من التابع $f(x)=0$ وذلك مهما يكن x من المجال $[0,1]$.

الحل: نلاحظ أولاً أن

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (x\in[0,1] \text{ لأن})$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{nx}+nx}<\frac{1}{nx}<\varepsilon \Leftrightarrow nx>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{1}{x\cdot\varepsilon}$$

وباختيار $N > \frac{1}{x \cdot \varepsilon}$ نجد أن

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{x \cdot \varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

أي أن النهاية صحيحة والتقارب غير منتظم لأن $N = N(x, \varepsilon)$.

للتأكد من عدم استقلالية قيمة N عن قيم $x \in [0,1]$ نلاحظ انه من اجل أي قيمة معينة لـ n نوجد قيمة لـ x هي $x_n = \frac{1}{n}$ من أجلها يكون $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ وهذا يعني ان

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots$$

وهكذا فإننا نجد بأنه من أجل أي قيمة لـ n مهما كانت كبيرة لدينا من أجل أي قيمة لـ x من $[0,1]$

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}$$

وهذا يناقض تعريف التقارب المنتظم.

5- أعد حل المثال (1-4-1) مطبقاً تعريف تقارب المتتاليات التابعية.

الحل: إن تابع النهاية للمتتالية التابعية $\{x^n\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ معطى بالعبارة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

وهكذا فإنه من أجل $0 \leq x < 1$ لدينا

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n \qquad (x \in [0,1) \text{ لأن})$$

$$= \frac{1}{k^n} < \varepsilon \qquad (\text{حيث } k > 1 \text{ عدد حقيقي})$$

$$\Leftrightarrow k^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln k > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln k}$$

وباختيار $N > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln k}$ نجد أن

$$n > N \Rightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln k} \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

وهكذا نجد أنه من أجل قيم x التي تنتمي إلى المجال $[0,1)$ تكون المتتالية متقاربة إلى تابع النهاية المعطى تقارباً غير منتظماً لأن N تتعلق بـ k الـذي يتغير بتغير x أي أن $N = N(\varepsilon, x)$.

للتأكد من أنه لا يمكن تحديد N بمعزل عن قيم x نلاحظ أنه من أجل أي قيمة مثبتة لـ n مهما كانت كبيرة نوجد قيمة لـ x في المجال $[0,1)$ مثلاً $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ يكون من أجلها

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$$

وهكذا نجد بأنه من أجل أي قيمة لـ n مهما كانت كبيرة لدينا

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{4}$$

وهذا يناقض تعريف التقارب المنتظم. إذاً تقارب المتتالية التابعية $\{x^n\}$ من التابع $f(x)=0$ على المجال $[0,1)$ ليس منتظماً وبالتالي لن يكون منتظماً على المجال $[0,1]$.

6- برهن أن متتالية التوابع $\{\text{arctg } nx\}$ المعرفة على المجال $(0,\infty)$ متقاربة من التابع $f(x) = \frac{\pi}{2}$ تقارباً غير منتظم وذلك لجميع قيم x من المجال $(0,\infty)$.

الحل: في الواقع إن

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \text{arctg } nx = \frac{\pi}{2}$$

وذلك مهما يكن x من المجال $(0,+\infty)$، أي أن المتتالية التابعية المعطاة متقاربة فعلاً من التابع $f(x) = \frac{\pi}{2}$ على المجال $(0,+\infty)$. غير أن هذا التقارب غير منتظم إذ أنه من أجل أي قيمة مثبتة لـ n، ومهما كانت كبيرة، توجد دوماً نقطة x_n من المجال $(0,+\infty)$ وهي بالتحديد $x_n = \frac{1}{n}$ يكون فيها

$$\left| f_n(x_n) - f(x_n) \right| = \left| \operatorname{arctg} n \cdot \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

إذاً من أجل أي قيمة لـ n مهما كانت كبيرة يكون

$$n > N \Rightarrow \left| f_n(x) - \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{\pi}{4}$$

وهذا يناقض تعريف التقارب المنتظم.

اختبار كوشي من أجل التقارب المنتظم للمتتاليات التابعية (1-7):

تكون المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال I متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على هذا المجال إذا وفقط إذا أمكن من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد طبيعي N من N^* بحيث أنه من أجل جميع قيم x من I تتحقق المتراجحة $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$ وذلك لجميع قيم $N<n$ و $N<m$، ونعبر عن ذلك بالعبارة المنطقية التالية

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^* \;;\; n > N \;\&\; m > N \Rightarrow \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

أي أن العدد الطبيعي N هنا يتعلق بـ ε فقط ولا يتعلق بـ x.

سنقبل هذا الاختبار بدون برهان.

2-السلاسل التابعية

تعريف (2-1) :

لتكن لدينا المتتالية التابعية $\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$ المعرفة على المجال I من R، ولنشكل المجموع $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ إن هذا المجموع يسمى سلسلة تابعية غير منتهية، لعناصر المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$، معرفة على المجال I من R، ونرمز لهذا المجموع اختصاراً بـ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ أي أن

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

نسمي $f_1(x), f_2(x), \cdots$ حدود السلسلة التابعية، كما نسمي $f_n(x)$ بالحد العام للسلسلة التابعية. نلاحظ أن كتابة الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة مرتبط بمعرفة الحد العام للسلسلة التابعية. في كل ما سيأتي سنقصد بالسلسلة التابعية مجموع غير منتهٍ لتوابع

حقيقية ما لم ننوه لغير ذلك.

تعريف (2-2):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية ما معرفة على المجال I، ولنفرض أن

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

فنحصل على المتتالية $\{S_n(x)\}$ والتي هي متتالية تابعية غير منتهية معرفة على المجال I نسميها متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ كما نسمي المجموع المنته

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x)$$

بالمجموع الجزئي النوني للسلسلة التابعية المعطاة.

فإذا كانت المتتالية التابعية $\{S_n(x)\}$ متقاربة من التابع $S(x)$ على مجال تعريفها، أي أن $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$، فإن $S(x)$ سيكون – بناء على تعريف عناصر المتتالية $\{S_n(x)\}$ – من الشكل

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

نسمي $S(x)$ عندئذٍ بمجموع السلسلة التابعية المعطاة على مجال تعريفها ونقول أيضاً بأن التابع $S(x)$ ينشر على شكل سلسلة في المجال I.

نتيجة (2-3):

ينتج من التعريفين (2-2) و (2-1) أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية معرفة على المجال I وكانت $\{S_n(x)\}$ متتالية مجاميعها الجزئية فإن

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة من $S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$ على المجال I' من I إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \forall x \in I' \;,\; \exists N \in N^* \;;\; n > N \Rightarrow \left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام من $S(x)$ على المجال I' من I إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad n > N \quad \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل أي قيمة لـ x من I'.

تعريف (2-4):

نسمي مجموعة نقاط المجال I، التي تتقارب من أجلها السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال I، بمجال تقارب أو منطقة تقارب السلسلة التابعية المعطاة.

إن كل قيمة لـ x من منطقة تقارب سلسلة تابعية تحول هذه السلسلة إلى سلسلة عددية متقاربة، لهذا فإنه عند دراسة تقارب السلاسل التابعية يمكن الاستفادة من اختبارات تقارب السلاسل العددية التي مرت معنا في الفصل الثاني.

أما خارج منطقة تقاربها فتكون السلسلة التابعية متباعدة على منطقة تعريفها، وكل قيمة لـ x من مجال تعريف السلسلة التابعية غير واقعة في منطقة تقاربها تحول السلسلة التابعية إلى سلسلة عددية متباعدة.

إن التعريف السابق يبين لنا مباشرة أن جميع خواص السلاسل العددية التي تعرضنا لها في الفقرة الثانية من الفصل الثاني تنطبق على السلاسل التابعية. أخيراً يجب الإشارة هنا إلى أن مجال تقارب السلسلة التابعية قد يتطابق مع مجال تعريفها.

باقي سلسلة تابعية (2-5):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية معرفة على المجال I ومتقاربة بانتظام على المجال الجزئي I' من I من التابع $S(x)$ إن باقي هذه السلسلة هو

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \cdots$$

وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(S(x) - S_n(x)) = S(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) - S(x) = 0$$

وذلك من أجل أي قيمة لـ x من I'

بناءً على هذا فإنه يمكننا إعادة صياغة تعريف التقارب المنتظم للسلاسل التابعية على النحو التالي:

تكون السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال I متقاربة بانتظام على المجال الجزئي I' من I إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad ; n > N \quad \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل أي قيمة لـ x من I'.

إن هذا التعريف ينطبق على أي مجال جزئي من منطقة تقارب السلسلة التابعية المعطاة، وهو يبين أن باقي السلسلة التابعية المتقاربة بانتظام يسعى إلى الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية، وذلك من أجل أي قيمة لـ x من منطقة تقارب السلسلة التابعية.

أمثلة (2-6):

1- عين منطقة ونوع تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

الحل: إن السلسلة التابعية المعطاة هي سلسلة هندسية حدها الأول $a=1$ وأساسها $q=x$، وبالتالي فهي متقاربة عندما $|q| = |x| < 1$ ومتباعدة عندما $|x| \geq 1$ (أنظر المثال (1-6-3) من الفصل الثاني) أي أن السلسلة التابعية المعطاة متقاربة داخل المجال المفتوح $(-1,1)$ ومتباعدة خارجه.

لتحديد نوع التقارب سنحسب $R_n(x)$،

إن المجموع الجزئي النوني لهذه السلسلة هو $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$، أما مجموعها فهو $S(x) = \frac{1}{1-x}$ وهكذا فإن $R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n}{1-x}$. يكون تقارب السلسلة منتظماً على المجال $(-1,1)$. إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي N من $\mathbb{N}^*$ بحيث يتحقق الشرط $|R_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow n > N$، وذلك لجميع قيم x من المجال $(-1,1)$. فإذا فرضنا أن السلسلة المعطاة متقاربة بانتظام فهذا يعني أنه من أجل $\varepsilon = \frac{1}{8}$ يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث أنه من أجل جميع $n>N$ يكون

$|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| < \frac{1}{8}$ وذلك لجميع قيم x في $(-1,1)$، لكن $\frac{|x^n|}{2} < \left|\frac{x^n}{1-x}\right| < \frac{1}{8}$

أي أن $|x|^n < \frac{1}{4}$ وذلك لجميع قيم x من المجال $(-1,1)$، غير أن هذه المتراجحة لن تبقى صحيحة من أجل $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ و $(-1,1)$. إذاً فتقارب السلسلة المعطاة ليس منتظماً على المجال $(-1,1)$.

سنرى بعد دراسة اختبار فايرشتراس للسلاسل التابعية أن هذه السلسلة متقاربة بانتظام على أي مجال مغلق محتوى تماماً في المجال $(-1,1)$ ومن الشكل $[-t,t]$ حيث $0<t<1$.

2- عين منطقة ونوع تقارب السلسلة التابعية

عام

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^{n-1}(1-x)+\cdots$$

الحل: لنوجد المجموع الجزئي النوني $S_n(x)$ لهذه السلسلة، أي الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للسلسلة التابعية المعطاة. إن

$$S_n(x) = (1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^{n-1}(1-x)$$
$$= 1-x+x-x^2+x^2-x^3+\cdots+x^{n-1}-x^n = 1-x^n$$

لنحسب الآن نهاية $S_n(x)$ عندما n تسعى إلى اللانهاية آخذين بعين الاعتبار قيم x المختلفة من R، وذلك لأن السلسلة التابعية المفروضة معرفة - كما هو واضح - على كل R.

- من أجل $|x|<1$ نجد أن $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1-x^n) = 1-\lim_{n\to\infty} x^n = 1 = S(x)$ والنهاية موجودة.
- من أجل $|x|>1$ نجد أن $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ غير محدودة.
- من أجل x=1 نجد أن $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=0$ والنهاية موجودة.
- أخيراً من أجل x=-1 نجد أن $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 2 & ; \text{n فردي} \\ 0 & ; \text{n زوجي} \end{cases}$ والنهاية غير موجودة.

إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة من أجل جميع قيم x المحققة للعبارة $-1 < x \le 1$. [illegible] للقيمة المطلقة

لنبحث الآن عن طبيعة هذا التقارب. لدينا هنا ومن أجل $|x|<1$

$-1 < x < 1$
ولكن عندما x=1 تكون
النهاية موجودة ⇐
$-1 < x \le 1$

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1-(1-x^n) = x^n$$

وهكذا فإن

$$|R_n(x)| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n\ln|x| < \ln\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$$ (لأن $|x|<1$ وبالتالي $\ln|x|<0$)

فإذا فرضنا أن $|x|<\frac{1}{2}$ لوجدنا أن $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ ...... وباختيار $N = \frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ نجد أن ......

$$\forall\varepsilon>0 \;,\; \exists N\in N^*; n>N>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow |R_n(x)|<\varepsilon$$

وذلك من أجل جميع قيم $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. إذاً فالسلسلة متقاربة بانتظام في هذا المجال.

كذلك لو أخذنا $|x|\le\frac{1}{2}$ فإنه بمناقشة مماثلة نجد أن السلسلة التابعية المعطاة متقاربة بانتظام في المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. ونحصل على نتائج مماثلة لو تابعنا توسيع مجال قيم x كأن نأخذ مثلاً $|x|\le 0.99$، أما إذا جعلنا $|x|=\pm1$ فإنه من أجل $x=\pm1$ يكون $\ln|x|=0$ وبالتالي فالكسر $\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$ لن يكون معرفاً، أي لن نستطيع تحديد أي عدد طبيعي $N>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$ وهذا بدوره يعني بأن السلسلة التابعية موضوع الدراسة لن تكون متقاربة بانتظام على المجال $[-1,1]$، على حين أنها متقاربة بانتظام على المجال $(-1,+1)$.

ملاحظة (2-7):

يتضح من الأمثلة السابقة أنه إذا كانت السلسلة التابعية متقاربة على مجال ما فليس بالضرورة أن تكون متقاربة بانتظام على نفس المجال.

تعريف (2-8):

نقول عن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال I بأنها تتقارب مطلقاً وبانتظام أو أن تقاربها طبيعي على I، أو على المجال الجزئي I' من I، إذا كانت سلسلة

القيم المطلقة لحدودها، أي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ ، متقاربة بانتظام على I أو على المجـــال الجزئي I' من I.

ملاحظة (2-9):

واضح من التعريف السابق أن التقارب الطبيعي يؤدي إلى التقارب المنتظم.

اختبارات تقارب السلاسل التابعية (2-10):

نظرية (اختبار كوشي) (2-10-1):

تكون السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال I متقاربة بانتظام على المجـــال الجزئي I' من I إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N}^* ; m \ge n > N \Rightarrow |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل جميع قيم x من I' . أي أن N يتعلق فقط بـ ε .

إن الشرط السابق يمكن أن نعبر عنه أيضاً على النحو التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad : \quad n,m > N \Rightarrow |f_{m+n}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

سنقبل هذه النظرية بدون برهان.

نظرية (اختبار فايرشتراس) (2-10-2):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على المجال I، ولتكن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث أن $|f_n(x)| \le a_n \;\; ; \;\; n = 1,2,3,\cdots$

وذلك لجميع قيم x من I. فإذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فــإن السلســـلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تتقارب طبيعياً – وبالتالي بانتظام – على المجال I.

البرهان: بما أن السلسلة العددية ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإنه، بحســب النظرية (4-6) من الفصل الثاني؛ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون

$$a_n + a_{n+1} + \cdots\cdots + a_m < \varepsilon \quad \text{عندما يكون} \quad m \ge n > N$$

من ذلك نستنتج أنه من أجل جميع قيم x من I تتحقق المتراجحة التالية

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)|$$
$$\le a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m < \varepsilon$$

وذلك عندما يكون $m \ge n > N$. وبالتالي، وبحسب النظرية (2-10-1)، تكون السلســـلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على I وهذا بدوره يعـــني أن السلســـلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة طبيعياً على I.

اختبار النسبة لدالامبير (2-10-3):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعيـــة معرفـــة علـــى المجـــال I وكـــانت النهايـــة $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = L(x)$ موجودة، فإن السلسلة التابعية المعطاة تكون:

(i) متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $L(x)<1$.

(ii) متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $L(x)>1$.

أما بالنسبة لطرفي مجال التقارب فيدرس تقارب السلسلة التابعية عندهما كل على حده.

اختبار الجذر النوني لكوشي (2-10-4):

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعيـــة معرفـــة علـــى المجـــال I وكـــانت النهايـــة $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = L(x)$ موجودة، فإن السلسلة التابعية المعطاة تكون:

(i) متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $L(x)<1$.

(ii) متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $L(x)>1$.

أما بالنسبة لطرفي مجال التقارب فيدرس تقارب السلسلة التابعية عندهما كل على حده.

اختبار المقارنة (2-10-5):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ سلسلتين تابعيتين معرفتين على المجال I، ولنفرض أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث يكون

$$|f_n(x)| \le |g_n(x)| \quad \text{لجميع قيم} \quad N<n$$

فإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة مطلقاً على المجال I' من I كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة مطلقاً على نفس المجال، وإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متباعدة على المجال I' من I كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متباعدة على نفس المجال.

ملاحظة (2-10-6):

إن الاختبارات الثلاثة الأخيرة تتحول إلى اختبارات للتقارب الطبيعي إذا كان التقارب المطلق في كل منها يحقق شروط التقارب المنتظم.

أمثلة (2-10-7):

1- برهن أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ متقاربة بانتظام على أي مجال مغلق $[-t,t]$ حيث $0<t<1$.

الحل: وجدنا في المثال (2-6-1) أن هذه السلسلة متقاربة على المجال المفتوح $(-1,1)$، والأكثر من ذلك فإن هذا التقارب مطلق وهذا ما يؤكده اختبار دالامبير.

لنفرض الآن أن $0<t<1$. بما أن $t \in (-1,1)$ فإنه توجد قيمة لـ x من هذا المجال ولتكن x_0 بحيث يكون $t < x_0$، وبما أن x_0 تنتمي إلى مجال تقارب السلسلة المدروسة فإن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$ متقاربة، هذا من ناحية ومن ناحية أخرى فإنه من أجل أي قيمة لـ x من المجال $[-t,t]$ يكون $|x| < t < x_0$ إذاً

$$\left|x^{n-1}\right| < x_0^{n-1} \quad ; n = 1,2,3,\cdots$$

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$ متقاربة فإنه بحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ متقاربة بانتظام من أجل جميع قيم x من المجال $[-t,t]$ وهو المطلوب.

2- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$.

الحل: بتطبيق اختبار النسبة نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}\cdot|x| = \frac{|x|}{3}$$

وهكذا فإن السلسلة متقاربة مطلقاً عندما $\frac{|x|}{3} < 1$ أي متقاربة مطلقاً على المجال $(-3,3)$ ومتباعدة عندما $\frac{|x|}{3} > 1$ أي خارج المجال المغلق $[-3,3]$.

أما بالنسبة لطرفي المجال فنجد أنه

- من أجل $x=3$ تتحول السلسلة التابعية المعطاة إلى السلسلة العددية ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وبما أنها متباعدة فإن السلسلة التابعية متباعدة عند $x=3$.
- من أجل $x=-3$ فإن السلسلة التابعية تتحول إلى السلسلة العددية المتناوبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

[illegible]

وهي متقاربة شرطياً (سلسلة توافقية متناوبة)، إذاً فالسلسلة التابعية متقاربة عند $x=-3$.

وهكذا فإن مجال تقارب السلسلة التابعية المدروسة هو $[-3,3)$، علماً بأن تقاربها مطلق على المجال $(-3,3)$ وشرطي عند النقطة $x=-3$.

3- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

الحل: من اختبار النسبة نجد

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{2n(2n+1)}\right| = 0$$

والسلسلة التابعية متقاربة مطلقاً لجميع قيم x من R، ومجال تقارب السلسلة هو إذاً كل R.

4- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$.

الحل: بتطبيق اختبار النسبة نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x-a)^{n+1}}{n!(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot|x-a|$$

فإذا كان $x \neq a$ فإن $L(x) = \infty$ والسلسلة التابعية متباعدة، أمـــا إذا كـــان $x=a$ فـــإن $L(x)=0$ والسلسلة متقاربة مطلقاً. إذاً فالسلسلة المدروسة متقاربة تقارباً مطلقاً على نقطـة واحدة فقط هي $x=a$ من $\mathbf{R}$.

5- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

الحل: بتطبيق اختبار الجذر النوني لكوشي نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{3}\right| = \frac{|x|}{3}$$

والسلسلة التابعية متقاربة عندما $\frac{|x|}{3} < 1$ أي متقاربة مطلقاً على المجال $(-3,3)$، ومتبـــاعدة عندما $|x| > 3$. بالنسبة لطرفي المجال فإنه

- عندما $x=3$ نحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ والتي يمكن التحقق بسهولة من أنهـــا متباعدة.
- وعندما $x = -3$ نحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ وقد رأينا في المثال (1-6-1) من الفصل الثاني أنها متباعدة أيضاً. إذاً فمجال تقارب السلسلة المدروسة هو $(-3,3)$.

6- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$ عام

الحل: من اختبار النسبة نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\cdot|x| = |x|$$

والسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً عندما $|x| < 1$ أي على المجال $(-1,1)$ ومتبـــاعدة عندمـــا $|x| > 1$.

بالنسبة لطرفي المجال فإنه من أجل $x=1$ نحصل على سلسلة ريمن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ المتقاربة لأن $p=3>1$، ومن أجل $x=-1$ نحصل على السلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ وهي أيضاً متقاربة لتحقيقها شرطي ليبنتز. إذاً فالسلسلة التابعية متقاربة على المجال $[-1,1]$.

إن تطبيق اختبار فايرشتراس على السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$، يبين لنا بأنها متقاربـــة طبيعياً على المجال $[-1,1]$، لأنه من أجل أي $x \in [-1,1]$ لدينا

$$\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3} \quad ; n = 1,2,\cdots$$

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة فإن السلسلة التابعية المدروسة متقاربة مطلقـــاً وبانتظام من أجل جميع قيم x من المجال $[-1,1]$.

7- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

الحل: نلاحظ أنه لجميع قيم x من $\mathbf{R}$ فإن

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad ; n = 1,2,3,\cdots$$

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن السلسلة التابعية المعطاة متقاربة طبيعياً على كل $\mathbf{R}$ بحسب اختبار فايرشتراس.

8- ادرس تقارب السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^2}$.

الحل: من اختبار دالامبير نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)x^2}}{e^{nx^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx^2}\cdot e^{x^2}}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{x^2} = e^{x^2}$$

واضح أن $L(x) = e^{x^2} > 1$ لجميع قيم x من $\mathbf{R}$. إذاً فالسلسلة التابعيـــة المعطـــاة متباعدة على كل $\mathbf{R}$.

3- خواص المتتاليات والسلاسل التابعية المتقاربة بانتظام

نظرية (3-1):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية مستمرة على المجال I ولنفرض أن هذه المتتالية تتقـارب بانتظام من التابع $f(x)$ على I، عندئذٍ يكون $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال I.

البرهان: بما أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I فهذا

يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N و N^* يتعلق فقط بـ ε وبحيث يتحقق الشرط

$$n > N^* \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (*)$$

وذلك لجميع قيم x من I.

ليكن الآن n_0 عدداً طبيعياً مثبتاً حيث $n_0 > N$. بما أن التابع $f_{n_0}(x)$ مستمر على I فإنه من أجل أي x_0 من I يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق الشرط التالي

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (*')$$

وحيث $x \in I$. من $(*')$ و $(*)$ بعد وضع $n = n_0$ فيها، نجد أنه إذا كان

$x \in I$ و $|x - x_0| < \delta$

فإن

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(x_0)\right| &= \left|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \\ &\le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يعني أن التابع f(x) مستمر في النقطة x_0 من I، وبما أن x_0 نقطة اختيارية من المجال I فإن التابع f(x) مستمر على I وبذلك يتم المطلوب.

نتيجة (2-3):

إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية من التوابع المستمرة على المجال I وإذا تقاربت هذه المتتالية من تابع f(x) غير مستمر على I، فإن تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التابع f(x) لا يكون منتظماً على المجال I.

أمثلة (3-3):

1- إن متتالية التوابع $\left\{\frac{1}{1+x^{2n}}\right\}$ مستمرة على كل $\mathbf{R}$ وبالتالي على المجال $I = [0,1]$، وتابع نهايتها على هذا المجال هو

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; x = 1 \end{cases}$$

وبما أن تابع النهاية هنا متقطع في النقطة x=1 فإن تقارب المتتالية المعطاة من التابع f(x) ليس منتظماً على المجال $I = [0,1]$ اعتماداً على النتيجة السابقة.

2- إن متتالية التوابع $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ مستمرة على كل $\mathbf{R}$ وبالتالي على المجال $I = [0,+\infty)$، وتابع نهايتها على هذا المجال هو

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; x = 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

وبما أن تابع النهاية هنا أيضاً متقطع في النقطة x=1 فإن تقارب المتتالية المعطاة من التابع f(x) ليس منتظماً على المجال $I = [0,+\infty)$ اعتماداً على النتيجة السابقة.

يمكن إعادة مناقشة الأمثلة (4-1) على ضوء النظرية (1-3) والنتيجة (2-3).

نظرية (4-3):

إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$، والتي جميع حدودها توابع مستمرة على المجال I، تتقارب بانتظام على I، فإن تابع مجموعها S(x) يكون مستمراً أيضاً على المجال I.

البرهان: إن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هي متتالية من التوابع المستمرة لأن كل حد من حدودها هو عبارة عن مجموع منتهٍ من التوابع المستمرة، ولأن مجموع عدد منتهٍ من التوابع المستمرة هو تابع مستمر (نظرية)، وبما أن السلسلة المفروضة متقاربة بانتظام على I فهذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I بحسب النتيجة (2-3)، وبالتالي – وبحسب النظرية (1-3) – فإن تابع نهايتها S(x)، والذي يمثل مجموع السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على المجال I، هو تابع مستمر على I.

٤-مكاملة وإشتقاق متتاليات وسلاسل التوابع

نظرية (4-1) :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية تابعية جميع حدودها مستمرة على المجال المغلق والمحدود $I=[a,b]$. إذا كانت $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I فإن $f(x)$ يكون قابلاً للمكاملة على المجال I، ويكون $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

أي أن
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

البرهان: بما أن جميع توابع المتتالية $\{f_n(x)\}$ مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ فإن التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ بحسب النظرية (3-1) وبالتالي فهو قابل للمكاملة على هذا المجال. من ناحية أخرى وبما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال $[a,b]$ فهذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد $N\in N'$ يتعلق فقط بـ ε وبحيث يتحقق الشرط

$$n>N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

وذلك لجميع قيم x من $[a,b]$، وهكذا فإنه من أجل جميع قيم n المحققة للمتراجحة $n>N$ لدينا

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|$$
$$\le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx=\varepsilon$$

وذلك لجميع قيم x من $[a,b]$. أي أن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية التكامل $\int_a^b f_n(x)\,dx$ عندما تسعى n إلى اللانهاية. إذاً $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

ملاحظة (4-2):

إذا لم يكن تقارب المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ من التابع $f(x)$ منتظماً على

المجال $[a,b]$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx$$

نظرية (4-3): هام

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة من التوابع المستمرة على المجال المغلق والمحدود $I=[a,b]$.

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام من التابع $S(x)$ على المجال I فإن $S(x)$ يكون قابلاً للمكاملة على المجال I، ويكون

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

أي أن

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

البرهان: بما أن السلسلة التابعية المعطاة متقاربة بانتظام على المجال I وتابع مجموعها هو $S(x)$ فهذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام أيضاً على المجال I، و $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$، وبما أن جميع حدود المتتالية $\{S_n(x)\}$ هي عبارة عن توابع مستمرة على I (كل حد هو عبارة عن مجموع منته لتوابع مستمرة على I) فهذا يعني بحسب النظرية (4-1) أن التابع $S(x)$ قابل للمكاملة على هذا المجال وأن $\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx=\int_a^b S(x)\,dx$

ولكن
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{n} f_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\int_a^b f_n(x)\,dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

إذاً
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b S(x)\,dx$$

ملاحظة (4-4):

إن النظرية السابقة تبين لنا أنه لمكاملة مجموع سلسلة تابعية متقاربة بانتظام وجميع حدودها مستمرة، يكفي مكاملة كل حد من حدود السلسلة على حده ومن ثم أخذ مجموع

سلسلة التكاملات الناتجة. لذلك تدعى النظرية (4-3) بنظرية مكاملة السلاسل التابعية حداً حداً.

أمثلة (4-5):

1- إذا كان $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$، فبرهن أن $\int_0^{\pi} S(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

الحل: لنبرهن أولاً أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,\pi]$.

في الواقع إن السلسلة المعطاة معرفة ومستمرة على كل $\mathbf{R}$ ولدينا

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3} \qquad ; n=1,2,3,\cdots$$

وذلك لجميع قيم x من $[0,\pi]$.

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة فإن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ متقاربة بانتظام على كل $\mathbf{R}$ بحسب اختبار فايرشتراس، وبالتالي فهي متقاربة بانتظام على المجال $[0,\pi]$، وهذا بدوره يعني أنه يمكننا مكاملتها حداً حداً - بحسب النظرية (4-3) - على المجال $[0,\pi]$. إذاً

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\cos nx}{n^4}\right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^4}$$

$$=\frac{2}{1^4}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{5^4}+\cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

2- احسب تكامل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ إذا كان ذلك ممكناً.

الحل: إن السلسلة التابعية المعطاة هي سلسلة هندسية متقاربة بانتظام على المجال $[-t,t]$ حيث $0<t<1$ (أنظر المثال (2-10-7-1)) ومجموعها $S(x)=\frac{1}{1-x}$، وبما أن جميع حدودها توابع مستمرة على كل $\mathbf{R}$ فهي مستمرة على مجال تقاربها المنتظم وبالتالي يمكن تطبيق النظرية (4-3) عليها.

وهكذا فإنه من المساواة $\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\cdots$

نجد أن

$$\int_{-t}^{t}\frac{dx}{1-x}=\int_{-t}^{t}\left(1+x^2+x^3+\cdots\right)dx$$

$$=\int_{-t}^{t}dx+\int_{-t}^{t}x^2dx+\int_{-t}^{t}x^3dx+\cdots$$

ومنه فإن

$$\ln\frac{1+t}{1-t}=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+\cdots\right)$$

حيث $0<t<1$ وهو المطلوب حسابه.

3- لتكن لدينا المتتالية التابعية $\left\{nxe^{-nx^2}\right\}$ حيث $n=1,2,3,\ldots$. برهن أنه من أجل $0\le x\le 1$، يكون

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int_0^1 f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ هو تابع نهاية المتتالية المعطاة على المجال $[0,1]$.

الحل: نلاحظ أولاً أن

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{x^2e^{nx^2}}=0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ حيث تعاملنا مع n كمتحول حقيقي)

وهذا يعني أن

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0 \qquad (*)$$

من ناحية أخرى فإن

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 nx\,e^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx^2}\,d\left(-nx^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-nx^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right)$$

ومنه نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right)\right)=\frac{1}{2} \qquad (*')$$

بمقارنة (*) و (*') نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

نظرية (4-6):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حقيقية ذات مشتقات مستمرة على المجال المغلق والمحدود $I=[a,b]$. فإذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة في المجال I من التابع $f(x)$، وكانت المتتالية $\{f'_n(x)\}$ متقاربة بانتظام في المجال I من التابع $g(x)$، فإن التابع $f(x)$ يكون قابلاً للاشتقاق في المجال I، ومن أجل كل x من I تتحقق المساواة

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)=g(x)$$

البرهان: بما أن جميع حدود المتتالية $\{f'_n(x)\}$ مستمرة في المجال I، وبما أن هذه المتتالية التابعية متقاربة بانتظام في المجال I من التابع $g(x)$ فإنه بحسب النظرية (4-1) يكون

$$\int_a^x g(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(t)dt \quad \text{وحيث} \quad a<x\le b$$

وبما أن $\int_a^x f'_n(t)dt=f_n(x)-f_n(a)$ فإن $\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}f_n(x)-\lim_{n\to\infty}f_n(a)$

ولكن من الفرض لدينا

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(a)$$

إذاً

$$\int_a^x g(t)\,dt=f(x)-f(a)$$

وبما أن $g(t)$ تابع مستمر على I، فإنه بحسب النظرية الأساسية في الحساب التكاملي (1) نستنتج أن $f'(x)$ موجود ويساوي $g(x)$ أي من أجل كل نقطة x في $[a,b]$ يكون

$$f'(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

---

(1) إن النظرية الأساسية في الحساب التكاملي تنص على ما يلي: إذا كان $g(x)$ تابعاً مستمراً على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ فإن التابع $f(x)$ المعرف بالشكل $f(x)=\int_a^x g(t)dt \quad ; a\le x\le b$ يكون قابلاً للاشتقاق على المجال $[a,b]$، ويكون لدينا $f'(x)=g(x)$ من أجل $a<x<b$ و $f'(a^+)=g(a)$ و $f'(b^-)=g(b)$ أي أن $f(x)$ هو تابع أصلي للتابع $g(x)$.

نظرية (4-7):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة توابع حقيقية ذات مشتقات مستمرة على المجال المغلق والمحدود $I=[a,b]$. فإذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة في المجال I من التابع $S(x)$، وكانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال I من التابع $g(x)$، فإن التابع $S(x)$ يكون قابلاً للاشتقاق في المجال I، ومن أجل كل x من I تتحقق المساواة

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)=g(x)$$

البرهان: بما أن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة في المجال I وتابع مجموعها هو $S(x)$، فهذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة أيضاً في المجال I و $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$. كذلك فإن جميع حدود المتتالية $\{S_n(x)\}$ هي توابع حقيقية ذات مشتقات مستمرة على I (لأن كل حد من حدودها هو عبارة عن مجموع منتهٍ لتوابع حقيقية ذات مشتقات مستمرة على I (نظرية)).

هذا من ناحية ومن ناحية أخرى، وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال I من التابع $g(x)$ فهذا يعني أن متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة بانتظام في المجال I من التابع $g(x)$، ونلاحظ هنا أن متتالية المجاميع الجزئية هذه هي المتتالية $\{S'_n(x)\}$ لأن

$$f'_1(x)=S'_1(x)$$

$$f'_1(x)+f'_2(x)=\left(f_1(x)+f_2(x)\right)'=S'_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_1(x)+f'_2(x)+\cdots+f'_n(x)=\left(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\right)'=S'_n(x)$$

وهكذا ...، وبالتالي وبتطبيق النظرية (4-6) على كل من $\{S_n(x)\}$ و $\{S'_n(x)\}$ نستنتج أن التابع $S(x)$ قابل للاشتقاق في المجال I، وأنه من أجل كل x من I لدينا

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}S'_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'_k(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)=g(x)$$

ملاحظات (4-8):

1- إن المساواة الواردة في النظرية السابقة يمكن أن نكتب بالشكل

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

وهذا يعني أنه لحساب مشتق مجموع سلسلة تابعية جميع حدودها ذات مشتقات مستمرة على المجال I ومحققة لشروط النظرية السابقة نشتق كل حد من حدودها على حده ثم نأخذ مجموع المشتقات الناتجة، لذلك تدعى النظرية (4-7) بنظرية اشتقاق السلاسل التابعية حداً حداً.

2- إن شرط التقارب المنتظم لمتتالية مشتقات حدود سلسلة تابعية متقاربة هو شرط لازم لاشتقاق السلسلة التابعية المتقاربة حداً حداً.

فمثلاً: السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2}$ متقاربة بانتظام- بحسب اختبار فايرشتراس - وذلك من أجل جميع قيم x من R ، ولنفرض أن S(x) مجموع هذه السلسلة في R .

إن $S'(x)$ لن يساوي مجموع سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos n^4 x$ وذلك لأن هذه السلسلة متباعدة من أجل عدد غير منتهٍ لقيم x، وعلى سبيل المثال من أجل x=0.

أنواع السلاسل التابعية ؟

5- سلاسل القوى أو السلاسل الصحيحة

تعاريف ونظريات أساسية (5-1):

تعريف (5-1-1):

تسمي كل سلسلة تابعية من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

سلسلة بقوى (x-c)؛ حيث $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ أعداد حقيقية لا تتعلق بـ x تدعى أمثال أو عوامل سلسلة القوى و c عدد حقيقي ثابت يدعى مركز سلسلة القوى.

في حالة خاصة إذا كان c=0 فإننا نحصل على سلسلة قوى مبسطة من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

تسمى سلسلة بقوى x.

إن الانتقال من الشكل العام لسلسلة القوى إلى الشكل المبسط وبالعكس ممكن دوماً؛ فمثلاً إذا فرضنا أن x-c = t، حيث t متحول جديد، في الشكل العام لسلسلة القوى حصلنا على سلسلة قوى بشكلها المبسط وبقوى t وهكذا ... ، لذا سنقتصر بدراستنا على سلاسل القوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دون أن يخل ذلك بعمومية المسألة.

لاحظ قبل كل شيء أن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة دوماً من أجل x=0.

نظرية (5-1-2):

إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل قيمة ما لـ x ولتكن x_0 حيث $x_0 \neq 0$ ، فإنها تتقارب مطلقاً من أجل أي قيمة لـ x تحقق المتراجحة $|x| < |x_0|$. والأكثر من ذلك فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ تكون سلسلة القوى متقاربة طبيعياً في المجال $-|x_0| + \varepsilon \le x \le |x_0| - \varepsilon$.

البرهان: بما أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ متقاربة فهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ (نظرية (2-1-(i)) من الفصل الثاني)، وبالتالي فإن المتتالية العددية $\{a_n x_0^n\}$ محدودة (نظرية(2-2) من الفصل الأول) أي يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $|a_n| \cdot |x_0|^n \le k$ حيث n=1,2,3,... .

ليكن الآن $|x| < |x_0|$، أي أن $\frac{|x|}{|x_0|} < 1$. لدينا

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \cdot |x_0|^n \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \le k \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \quad ; n = 1,2,3,\cdots$$

وبتطبيق اختبار دالامبير على السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} k \frac{x^n}{x_0^n}$ نجد أن $L(x) = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$ أي أنها سلسلة

تابعية متقاربة وبالتالي وحسب اختبار المقارنة تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة مطلقة من أجل كل x حيث $|x| < |x_0|$.

لنفرض الآن أن $|x| \le |x_0| - \varepsilon$ حيث $0 < \varepsilon$ عدد مفروض. عندئذٍ نجد أن

$$\frac{|x|}{|x_0|} \le \frac{|x_0| - \varepsilon}{|x_0|} = \theta < 1$$

حيث θ ثابت لا يتعلق بـ x، وبالتالي فإن

$$|a_n x^n| \le k \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \le k\theta^n \quad ; n = 1, 2, 3, \cdots$$ وذلك لجميع قيم x.

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} k\theta^n$ متقاربة (سلسلة ريمن) فإنه بحسب اختبار فايرشتراس تكون سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بانتظام وبالتالي طبيعياً في المجال $|x| \le |x_0| - \varepsilon$.

نتيجة (5-1-3):

إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة في النقطة $x = x_0 \ne 0$ فإنها تكون متباعدة في أي نقطة x تحقق المتراجحة $|x| > |x_0|$.

لأنه لو كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة في النقطة x حيث $|x| > |x_0|$ فإنها ستكون متقاربة عند النقطة x_0 بحسب النظرية السابقة وهذا يناقض الفرض بأن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ متباعدة.

نظرية (5-1-4): هامة جداً

عند دراسة تقارب سلسلة قوى ما $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تصادفنا إحدى الحالات الثلاث التالية:

(i) إما أن يوجد عدد حقيقي موجب R بحيث تتقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مطلقاً (ومن ثم تقاربية) من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < R$، وتتباعد من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > R$، وقد تتقارب أو تتباعد من أجل القيمتين $x=R$ و $x=-R$.

نطلق على العدد R اسم نصف قطر التقارب لسلسلة القوى ونسمي المجال $(-R, +R)$ مجال تقارب هذه السلسلة ١٣٩..

(ii) وإما أن تتقارب سلسلة القوى المدروسة من أجل جميع قيم x من $\mathbb{R}$.

(iii) وإما أن تتقارب سلسلة القوى من أجل قيمة وحيدة لـ x من $\mathbb{R}$ هي $x=0$

البرهان:

(i) بتطبيق اختبار كوشي على سلسلة القوى المعطاة نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad |x|$$

وهكذا فإن السلسلة المدروسة تكون متقاربة إذا كان $L(x) < 1$ أي عندما $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1$ وبالتالي عندما $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. فإذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ موجودة ومحدودة وغير معدومة ورمزنا بـ R للعدد الحقيقي $\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ نستنتج أن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < R$ ومتباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > R$، ولإزالة حالة الشك المرافقة لحالة $|x| = R$ فإننا ندرس تقارب السلسلتين العدديتين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ كلاً على حده.

(ii) أما إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ فإن المتراجحة $L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = 0 < 1$ محققة دوماً ولجميع قيم x من $\mathbb{R}$ وهذا بدوره يعني أن سلسلة القوى متقاربة مطلقاً على كل $\mathbb{R}$. نلاحظ في هذه الحالة أن العدد الحقيقي R غير محدود وسنصطلح على أن $R = +\infty$.

(iii) أما إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ وكان $x \ne 0$ فإن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \infty > 1$$

أي أن السلسلة متباعدة. أما إذا كان $x=0$ فنجد، بعد إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $(0 \cdot +\infty)$، أن $L(x) = 0 < 1$ أي أن السلسلة متقاربة مطلقاً من أجل $x=0$ فقط. نلاحظ في هذه الحالة أن العدد الحقيقي $R=0$.

ملاحظة (5-1-5):

إذا استخدمنا اختبار دالامبير في برهان النظرية السابقة نجد أن العدد الحقيقي R

يعطى بالعلاقة $R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

تعريف (5-1-6):

نسمي العدد الحقيقي R الوارد في برهان النظرية السابقة نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ وهو يعطى كما وجدنا بالمساواة $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ أو $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. كما نسمي المجال المفتوح (-R,R) بمجال تقارب سلسلة القوى. وقد رأينا في برهان النظرية السابقة أن $R = +\infty$ عندما تكون سلسلة القوى متقاربة مطلقاً من أجل أي $x \in \mathbb{R}$، وأن R=0 عندما تكون سلسلة القوى متقاربة مطلقاً من نقطة واحدة من $\mathbb{R}$ هي x=0.

ملاحظة (5-1-7):

إذا كانت سلسلة القوى معطاة بشكلها العام أي بالشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ فإن دراسة تقاربها تتم بنفس الطريقة المتبعة في برهان النظرية (5-1-4) غير أن منطقة تقاربها عندئذٍ ستكون مجالاً مركزه النقطة c، لأنه إذا فرضنا أن x-c=t فإن السلسلة ستكون متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم t المحققة للمتراجحة $|t| < R$ ومنه نجد أن

$$|t| < R \Rightarrow -R < t < R \Rightarrow -R < x - c < R \Rightarrow c - R < x < c + R$$

إذاً فالسلسلة متقاربة مطلقاً داخل المجال المفتوح (c-R,c+R) ومتباعدة خارج المجال $[c-R, c+R]$ ويدرس تقاربها عند النقطتين x=c-R و x=c+R كلاً على حده. وهذا هو سبب تسمية العدد الحقيقي c الوارد في العبارة العامة لسلسلة القوى بمركز السلسلة.

لتعيين مجال تقارب سلسلة قوى نطبق غالباً اختبار دالامبير للسلاسل التابعية، أو أي من الاختبارات الأخرى المطبقة على السلاسل التابعية والتي عرضناها سابقاً.

أمثلة (5-1-8):

1- عين مجال ونصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}$.

الحل: إن السلسلة المعطاة هي سلسلة بقوى (x-5)، ومركزها c=5. لتعيين منطقة تقاربها نطبق اختبار النسبة فنجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(x-5)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x-5| = |x-5|$$

والسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان L(x)<1 أي $|x-5| < 1$ وهذا يعني أن 4<x<6، إذاً فالسلسلة متقاربة مطلقاً داخل المجال (4,6) ومتباعدة خارج المجال [4,6]. أما عند طرفي هذا المجال فنجد أنه من أجل x=4 تتحول سلسلة القوى إلى السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ وهي متقاربة مطلقاً، أما من أجل x=6 فنحصل على السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ وهي أيضاً متقاربة. إذاً سلسلة القوى المدروسة متقاربة في المجال [4,6] أما نصف قطر التقارب فيعطى بسهولة من العلاقة $R = \frac{b-a}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$.

2- أوجد مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$، واحسب نصف قطر تقاربها.

الحل: إن السلسلة المفروضة هي سلسلة بقوى x ومركزها c=0، وبتطبيق اختبار دالامبير نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)!}{x^n\, n!}\right| = \lim_{n\to\infty}|x(n+1)|$$

فإذا كان x=0 فإن L(x)=0<1 والسلسلة متقاربة مطلقاً وعندئذٍ يكون R=0، أما إذا كان $x \neq 0$ فإن $L(x) = \infty > 1$ والسلسلة متباعدة.

3- ادرس تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

الحل: لدينا هنا سلسلة بقوى x، و c=0. بتطبيق اختبار دالامبير نجد أن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot|x| = 0$$

أي أن L(x)<1 لجميع قيم x وبالتالي فالسلسلة متقاربة على كل $\mathbb{R}$ ونصف قطر تقاربها هو $R = \infty$.

4-ادرس تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^{n-1}$.

الحل: لدينا هنا سلسلة بقوى $(x-3)$، و $c=3$، ونلاحظ أن لها شكل سلسلة هندسية حدها الأول $a=1$ وأساسها $q=x-3$، وبالتالي فهي متقاربة عندما $|q|=|x-3|<1$ أي من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $2<x<4$، ومتباعدة عندما $|q|\geq 1$. إذاً فالسلسلة المدروسة متقاربة على المجال $(2,4)$ ونصف قطرها $R=1$.

5- أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(n\,x)^{n}$.

الحل: لدينا

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=0$$

أي أن السلسلة تتقارب فقط عند النقطة $x=0$ وتتباعد من أجل جميع قيم x الأخرى من R.

هام

6- أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(10)^n}x^n$ ثم أوجد مجال تقاربها.

الحل: إن

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(10)^{n+1}}{n\,(10)^n}\right|=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10$$

أي أن السلسلة المفروضة تتقارب في المجال $(-10,10)$ وتتباعد خارج المجال المغلق $[-10,10]$. أما عند طرفي المجال فنجد أنه من أجل $x=10$ نحصل على السلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ المتقاربة شرطياً، ومن أجل $x=-10$ نحصل على السلسلة العددية المتباعدة $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة على المجال $(-10,10]$.

نظرية (5-1-9) :

إن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ تتقارب بانتظام في أي مجال مغلق $[a,b]$ محتوى في مجال تقاربها $(-R,R)$.

البرهان: بما أن $[a,b]\subset(-R,R)$ فإنه يوجد عدد مثل t بحيث أن $0<t<R$ وبحيث يكون t أكبر من $|a|$ و $|b|$ ، أي أن المجال $[a,b]$ محتوى تماماً في المجال $[-t,t]$. بما أن t تنتمي إلى مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ فهذا يعني أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ متقاربة مطلقاً، هذا من ناحية ومن ناحية أخرى فإنه من أجل أي قيمة لـ x من المجال $[-t,t]$ لدينا

$$\left|a_n x^n\right|\leq\left|a_n t^n\right|=\left|a_n\right|t^n\qquad;\quad n=0,1,2,\cdots$$

وهذا يعني بحسب اختبار فايرشتراس أن السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ متقاربة بانتظام على المجال $[-t,t]$ وبالتالي في المجال المغلق $[a,b]$ الجزئي من المجال $[-t,t]$.

لابد من التنويه هنا إلى أن تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ليس بالضرورة منتظماً في مجال تقاربها $(-R,R)$ كما وجدنا في المثال (2-6-1)، وفي هذه الحالة تكون سلسلة القوى متقاربة بانتظام في أي مجال جزئي $[a,b]$ محتوى تماماً في مجال تقاربها وفق النظرية (5-1-9) (انظر المثال (2-10-7-1)).

نظرية (5-1-10):

إن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ تمثل تابعاً مستمراً في مجال تقاربها.

البرهان: لتكن x_0 نقطة ما من مجال التقارب $(-R,R)$ لسلسلة القوى المفروضة، ولتكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً محتوى في المجال $(-R,R)$ وبحيث يكون $x_0\in[a,b]$، عندئذٍ وبحسب النظرية (5-1-9) تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ بانتظام على المجال $[a,b]$، وبما أن جميع حدودها توابع مستمرة في هذا المجال فإن المجموع $S(x)$ لهذه السلسلة هو تابع مستمر في المجال $[a,b]$ - اعتماداً على النظرية (3-4) - وبالتالي فهو مستمر في النقطة x_0، وبما أن x_0 نقطة كيفية من المجال $(-R,R)$ إذاً فالتابع $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ هو تابع مستمر على مجال تقارب هذه السلسلة.

ملاحظة (5-1-11):

إن النظرية السابقة تعني أنه إذا كانت x_0 نقطة من مجال تقارب سلسلة القوى

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n x^n$

في حالة خاصة، إذا كانت x_0 إحدى طرفي مجال تقارب سلسلة القوى المعطاة فإننا نكتب $x \to x_0^+$ أو $x \to x_0^-$ إذا كانت x_0 تمثل الطرف الأيسر أو الطرف الأيمن للمجال على الترتيب.

نظرية (5-1-12):

إذا تقاربت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ في أحد طرفي مجال تقاربها فإن مجال تقاربها المنتظم يتضمن ذلك الطرف.

البرهان: لنفرض أن x=1 هو أحد طرفي مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، وأن السلسلة متقاربة عند هذا الطرف. بما أن السلسلة متقاربة عند x=0 (تعريف (5-1-1)) فهذا يعني أنها متقاربة على المجال $0 \le x \le 1$، ولنبرهن على تقارب السلسلة بانتظام على هذا المجال وفق التعريف (5-2)، أي من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N \in N^*$ لا يتعلق بـ x بحيث يتحقق الشرط $n > N \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$.

إن باقي السلسلة المفروضة بعد اقتطاع n حداً منها هو

$$R_n(x) = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

لنرمز بـ R_n لمجموع السلسلة العددية $\sum_{n=n}^{\infty} a_n$ أي أن

$$R_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

بناءً على ذلك فإن $R_n(x)$ يمكن أن يكتب على النحو التالي

$$R_n(x) = (R_n - R_{n+1})x^n + (R_{n+1} - R_{n+2})x^{n+1} + (R_{n+2} - R_{n+3})x^{n+2} + \cdots$$
$$= R_n x^n + R_{n+1}(x^{n+1} - x^n) + R_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+1}) + R_{n+3}(x^{n+3} - x^{n+2}) + \cdots$$
$$= x^n\left[R_n + R_{n+1}(x-1) + R_{n+2}(x^2 - x) + R_{n+3}(x^3 - x^2) + \cdots\right]$$
$$= x^n\left[R_n + (x-1)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \cdots)\right]$$

وبأخذ القيمة المطلقة لطرفي المساواة نجد أن

$$|R_n(x)| = |x^n|\left|R_n + (x-1)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \cdots)\right|$$
$$\le \left|R_n + (x-1)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \cdots)\right| \qquad (0 \le x \le 1 \text{ لأن})$$
$$\le |R_n| + |x-1|\left(|R_{n+1}| + |R_{n+2}|x + |R_{n+3}|x^2 + \cdots\right)$$

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=n}^{\infty} a_n$ متقاربة لأن مجموعها يساوي R_n فرضاً فهذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in N^*$ بحيث يتحقق الشرط

$$i > N \ldots \Rightarrow |R_i| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{حيث } i = n, n+1, n+2, \ldots$$

وهكذا فإنه من أجل جميع n المحققة للمتراجحة n>N لدينا

$$|R_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + (1-x)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \cdots\right) \qquad (*)$$

ولكن المجموع $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \cdots$ هو سلسلة هندسية حدها الأول $a = \frac{\varepsilon}{2}$ وأساسها $q = x$، وهي سلسلة متقاربة عندما $|q| = x < 1$؛ وعندئذٍ يكون مجموعها $\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-x}$. إذاً

$$|R_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + (1-x)\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وذلك لجميع قيم x المحققة للمتراجحة $0 \le x < 1$

كذلك فإنه من أجل x=1 نجد من (*) أن $|R_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ وذلك لجميع قيم n>N إذاً فالشرط $n > N \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$ يحقق لجميع قيم x من المجال [0,1] وهو المطلوب.

مكاملة واشتقاق سلاسل القوى (5-2):

نظرية (5-2-1):

إذا كانت سلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (i)$$

متقاربة في المجال (-R,R)، فإن للسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \qquad \text{(iii)}$$

الناتجتين عن اشتقاق ومكاملة السلسلة (i) حداً حداً، نفس مجال التقارب (R,R-).

البرهان: إن حساب نصف قطر التقارب R من العلاقة $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (بفرض أن هذه النهاية موجودة أو تساوي $+\infty$) يبين أن للسلاسل الثلاث (i) و (ii) و (iii) نفس نصف قطر التقارب مما يعني أن السلاسل الصحيحة الثلاث تتقارب على نفس المجال (R,R-).

نظرية (5-2-2):

إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة في المجال (R;R-) فإن

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

حيث $[a,b]$ محتوى كلياً في مجال تقارب السلسلة المفروضة.

وفي حالة خاصة فإن $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx$ حيث $|x| < R$.

البرهان: بما أن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ (نظرية (5-1-9)) فإنه بحسب النظرية (4-3) يكون $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$.

نظرية (5-2-3):

إذا كان $S(x)$ مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ المتقاربة على المجال (R,R-) فإن

$$S'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$ على المجال (R,R-).

البرهان: لتكن x_0 نقطة ما من المجال (R,R-) ولنفرض أن $[a,b] \subset (-R,R)$ وأن

$x_0 \in [a,b]$. إن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ بحسب النظرية (5-1-9)، كذلك فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ لأن مجال تقاربها هو أيضاً المجال (R,R-) بحسب النظرية (5-2-1)، وهكذا فإنه بحسب النظرية (4-7) يكون

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

وذلك من أجل كل x من $[a,b]$ وبصورة خاصة في النقطة x_0، وبما أن x_0 نقطة كيفية من المجال (R,R-)، إذاً فالمساواة الأخيرة صحيحة في جميع نقاط المجال (R,R-).

ملاحظات ونتائج (5-2-4):

(i) إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة في أحد طرفي مجال تقاربها فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ تكون متباعدة أيضاً عند هذا الطرف، أما إذا كانت سلسلة القوى متقاربة في أحد طرفي مجال تقاربها فإن السلسلة الناتجة عن اشتقاقها قد تتقارب وقد تتباعد عند هذا الطرف.

(ii) يمكن اشتقاق سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداً حداً في مجال تقاربها عدداً اختيارياً من المرات وذلك بتطبيق النظرية (5-2-3) في كل مرة، ويكون لجميع السلاسل الناتجة نفس مجال تقارب السلسلة الأصلية وذلك بحسب النظرية (5-2-1).

(iii) إن جميع النظريات السابقة تبقى صحيحة من أجل أي سلسلة قوى معطاة بشكلها العام وضمن مجال تقاربها.

أمثلة (5-2-5):

1- احسب تكامل السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$

الحل: لنعين أولاً مجال تقارب سلسلة القوى المعطاة. لدينا بحسب دالامبير

$$L(x) = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x^2| = |x|^2$$

والسلسلة متقاربة عندما $L(x)=|x|^2<1$ أي عندما $|x|<1$ وبالتالي في المجال $-1<x<1$.

لحساب مجموع هذه السلسلة على المجال $(-1,1)$ نلاحظ أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n$$

وهي سلسلة هندسية حدها الأول $a=1$ وأساسها $q=-x^2$، وبما أن $|q|=\left|-x^2\right|<1$

فهي متقاربة ومجموعها $S(x)=\frac{1}{1+x^2}$ إذاً

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

نكامل الآن طرفي المساواة الأخيرة، مستفيدين من تحقق شروط النظرية (5-2-2)، وذلك من « 0 » إلى « x » حيث $|x|<1$ فنجد أن

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)dx$$

أي أن

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\;;\qquad |x|<1$$

2- برهن أن $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ ، ثم أوجد السلسلة المقابلة للعدد $\frac{7\pi}{4}$.

الحل: وجدنا في المثال السابق أن

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\;;\qquad -1<x<1$$

ولكن عندما $x=1$ فإن السلسلة في الطرف الأيمن تتحول إلى السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ وهي سلسلة متناوبة ومتقاربة بحسب اختبار ليبنتز، وعندما $x=-1$ تتحول إلى السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ وهي أيضاً متقاربة بحسب ليبنتز، وبالتالي وحسب النظرية (5-1-12) فإن السلسلة $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ تتقارب بانتظام على المجال المغلق $-1\le x\le 1$ وتمثل التابع $\operatorname{arctg} x$ ضمن ذلك المجال، وبتطبيق الملاحظة (5-1-11) نجد أن

$$\lim_{x\to1^-}\operatorname{arctg} x=\lim_{x\to1^-}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

كذلك فإن

$$\lim_{x\to-1^+}\operatorname{arctg} x=\lim_{x\to-1^+}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

ومنه نجد أن

$$\frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$$

3- استخدام مفهوم مكاملة سلاسل القوى في حساب التكامل $\int_0^x\frac{dx}{1+x}$.

الحل: نعلم أن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n-1}$ متقاربة من أجل $|x|<1$ ومجموعها $\frac{1}{1-x}$ أي أن

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

فإذا بدلنا في هذه المساواة $-x$ بـ x حصلنا على

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

حيث $|x|<1$، فإذا كاملنا، ضمن هذا الشرط، طرفي المساواة الأخيرة من« 0 » إلى « x »

نجد أن

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\int_0^x\left(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\right)dx$$

ومنه نجد أن

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

حيث $|x|<1$.

العمليات على سلاسل القوى (5-3):

نظرية (5-3-1):

إذا كان مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ يساوي $A(x)$ في مجال تقاربها I، وكان مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ يساوي $B(x)$ في مجال تقاربها J، فإن السلسلتين

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$ متقاربتان في المجال $I\cap J$ ومجموعها على الترتيب هو $A(x)+B(x)$ و $A(x)-B(x)$.

البرهان: واضح أن

$$
\begin{aligned}
A(x)\pm B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\\
&=\left(a_0+a_1x+a_2x+\cdots+a_nx^n+\cdots\right)\pm\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots\right)\\
&=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots+(a_n\pm b_n)x^n+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n.
\end{aligned}
$$

وهي سلسلة قوى متقاربة (لأن مجموعها موجود ومحدود) من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجالين I و J معاً أي متقاربة في المجال $I\cap J$.

نظرية (5-3-2):

إن ناتج ضرب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ المتقاربة من التابع $A(x)$ في المجال I، بسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ المتقاربة من التابع $B(x)$ في المجال J، هو سلسلة قوى جديدة متقاربة من التابع $A(x).B(x)$ من أجل جميع قيم x من المجال $I\cap J$ وعواملها تعطى بالعلاقة $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot b_{n-i}$.

البرهان: إن

$$
\begin{aligned}
A(x)\cdot B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\\
&=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\right)\cdot\\
&\quad\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n+\cdots\right)\\
&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\\
&\quad(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\cdots+\\
&\quad(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_nx^n+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n
\end{aligned}
$$

حيث $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$ وهي سلسلة قوى متقاربة من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $I\cap J$.

نظرية (5-3-3):

إن ناتج قسمة سلسلة القوى $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ على سلسلة القوى $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ حيث $B(x)\neq 0$، والمتقاربتين ضمن المجالين I و J على الترتيب، هو سلسلة قوى متقاربة من التابع $\frac{A(x)}{B(x)}$ من أجل قيم لـ x صغيرة بقدرٍ كافٍ من مجال جزئي من المجال $I\cap J$، أي أن $\frac{A(x)}{B(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$ حيث أن الأمثال d_n تحقق العلاقة

$$
a_n=\sum_{i=0}^{n}d_ib_{n-i}=d_0b_n+d_1b_{n-1}+d_2b_{n-2}+\cdots+d_nb_0
$$

بما أن $B(x)\neq 0$ نستنتج أن $b_0\neq 0$ وبالتالي فإن

$$
d_n=\frac{a_n-d_0b_n-d_1b_{n-1}-d_2b_{n-2}-\cdots-d_{n-1}b_1}{b_0}
$$

وهي العلاقة التي تمكننا من حساب كافة أمثال سلسلة القسمة.

نظرية (5-3-4):

إذا كانت سلسلتا القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ متقاربتين على نفس المجال I من نفس التابع $S(x)$ فإن $a_n=b_n$ من أجل جميع قيم n.

البرهان: بما أن التابع $S(x)$ يمثل مجموع السلسلتين المفروضتين على مجال تقاربهما I فهذا يعني أن

$$
\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n
$$

ومنه

$$
(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots=0 \quad (i)
$$

وبما أن $x=0 \in I$ (لأن جميع سلاسل القوى بشكلها المبسط متقاربة عند $x=0$) فإننا نجد،من المساواة الأخيرة ومن أجل $x=0$، أن $a_0=b_0$.

باشتقاق المساواة (i) نحصل على سلسلة قوى جديدة لها نفس مجال التقارب I ومن الشكل

$$(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)x+\cdots+n(a_n-b_n)x^{n-1}+\cdots=0$$

من هذه المساواة، ومن أجل $x=0\in I$، نجد أن $a_1=b_1$.

بالاستمرار على هذا المنوال نجد أن $a_n=b_n$ لجميع قيم n.

نتيجة (5-3-5):

إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة على المجال $[0,1]$، فإن المحاكمات المنطقية المتبعة في برهان النظرية السابقة تمكننا من الوصول إلى قانون يسمح بحساب كافة عوامل هذه السلسلة. في الواقع إذا كان $S(x)$ هو مجموع السلسلة المعطاة في المجال $[0,1]$ فإن

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$
$$S''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\, a_n + \cdots$$

ومن أجل $x=0$ نجد أن $S^{(n)}(0)=n!\,a_n$ ومنه $a_n=\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

أمثلة (6-3-5):

1- عين السلسلة الناتجة عن ضرب سلسلتي القوى $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

الحل: نعلم أن مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ من أجل $|x|<1$ هو $\dfrac{1}{1-x}$ أي أن

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

فإذا استبدلنا في هذه المساواة $-x$ بـ x حصلنا على

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

وذلك من أجل $|x|<1$. إذاً فالسلسلتان المفروضتان متقاربتان على نفس المجال $|x|<1$، وبالتالي فإن السلسلة الناتجة عن جدائهما متقاربة أيضاً على نفس المجال وعواملها تعطى وفقاً للنظرية (2-3-5) بالعلاقة $c_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$، حيث لدينا هنا $a_n=1$ و $b_n=(-1)^n$،

وهكذا فإن

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}(1)^i(-1)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}=(-1)^n+(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-n}$$

وهذا يعني أن كل c_n هو عبارة عن مجموع n+1 حداً من الحدود المتساوية في القيمة المطلقة، قيمة كل منها تساوي الواحد، والمختلفة بالإشارة. فإذا كان n فردياً كان عدد حدود المجموع زوجياً وبالتالي فإن $c_n=0$، أما إذا كان n زوجياً كان عدد حدود المجموع فردياً وبالتالي فإن $c_n=1$ وهكذا فإن سلسلة الجداء للسلسلتين المفروضتين هي

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

2- احسب عوامل سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ التي مجموعها $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$ والمتقاربة ضمن المجال $|x|<1$.

الحل: لنحسب المشتق من المرتبة n للمجموع $S(x)$ عند النقطة $x=0$ والتي تنتمي إلى مجال التقارب. إن

$$S'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\qquad S''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$
$$S'''(x)=\frac{-3!}{(1+x)^4}\quad\cdots\quad S^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

وهكذا فإن $S^{(n)}(0)=(-1)^n n!$، واعتماداً على النتيجة (5-3-5) نجد أن $a_n=(-1)^n$ فإذا كان n عدداً فردياً كان $a_n=-1$ ، وإذا كان n عدداً زوجياً كان $a_n=1$ وهكذا فإن السلسلة التي مجموعها $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$ هي

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

نشر التوابع في سلاسل قوى (5-4):

ذكرنا في التعريف (2-2) أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية متقاربة في المجال I من التابع $S(x)$، أي أن

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad ; \quad x\in I$$

فإننا نقول أن التابع $S(x)$ ينشر على شكل سلسلة تابعية في المجال I.

وهكذا فإننا نقصد بنشر التابع وفق سلسلة إيجاد سلسلة تابعية يكون مجموعها في مجال تقاربها مساوياً لهذا التابع، وسنقتصر هنا على دراسة نشر التوابع وفق سلاسل قوى.

تعريف (5-4-1):

إذا كان التابع $f(x)$ يمثل مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ على المجال $I=(c-R,c+R)$ أي أن

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots \qquad (i)$$

فإننا نسمي الطرف الأيمن من هذه المساواة بنشر التابع $f(x)$ في سلسلة بقوى $(x-c)$ (أو بقوى $(x-c)$ المتزايدة ، أو في جوار النقطة c) على المجال I.

في الحالة الخاصة إذا كان $c=0$ فإن المساواة (i) تأخذ الشكل

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (ii)$$

حيث نسمي الطرف الأيمن من (ii) بنشر التابع $f(x)$ في سلسلة بقوى x (أو بقوى x المتزايدة، أو في جوار الصفر) على المجال $(-R,R)$.

سلسلتا تايلور وماك لوران (5-4-2):

نعلم أن سلسلة القوى الممثلة للتابع $f(x)$ في العبارة (i) يمكن اشتقاقها حداً حداً عدداً اختيارياً من المرات على مجال تقاربها (انظر (5-2-4-(ii)))، وفي كل مرة نحصل على سلسلة قوى لها نفس مجال تقارب السلسلة الأصلية وهذا يعني أن للتابع $f(x)$ مشتقات من مراتب عليا على المجال I، لنحسب هذه المشتقات عند النقطة $x=c$، لدينا

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+\cdots+n\,a_n(x-c)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2\,a_3(x-c)+\cdots+n(n-1)\,a_n(x-c)^{n-2}+\cdots$$

....

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2\,a_{n+1}(x-c)+\cdots$$

وبتعويض $x=c$ في المعادلات السابقة نجد أن

$$f(c)=a_0,\ f'(c)=a_1,\ f''(c)=2a_2,\ f'''(c)=3!a_3,\cdots,f^{(n)}(c)=n!\,a_n,\cdots$$

وبالتالي فإن

$$a_0=f(c),\quad a_1=\frac{f'(c)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(c)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(c)}{3!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!},\cdots$$

وبالتعويض في (i) نحصل على

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots \qquad (iii)$$

نسمي الطرف الأيمن من (iii) بسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ بقوى $(x-c)$ أو بجوار النقطة c على المجال $I=(c-R,c+R)$.

إن حساب عوامل السلسلة (i) بهذه الطريقة يبين وحدانية النشر، للتابع $f(x)$ في سلسلة تايلور، الوارد في المساواة (iii).

في حالة خاصة إذا كان $c=0$ فإن المساواة (iii) تأخذ الشكل

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (iv)$$

حيث يسمى الطرف الأيمن من (iv) بسلسلة ماك لوران للتابع $f(x)$ بقوى x أو بجوار الصفر على المجال $(-R,R)$.

اعتماداً على (5-4-1) و (5-4-2) يمكن برهان النظرية التالية

نظرية (5-4-3):

إذا كان التابع $f(x)$ في جوار ما للنقطة c يمثل مجموع سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ فإن هذه السلسلة هي سلسلة تايلور للتابع $f(x)$.

ملاحظة (5-4-4):

رأينا أنه إذا كان التابع f(x) يمثل بمجموع سلسلة قوى بجوار النقطة c (أو بجوار الصفر) في مجال تقاربها فإن لهذا التابع مشتقات من جميع المراتب في هذه المجال وهو شرط أساسي لتمثيل التابع بسلسلة تايلور (أو ماك لوران).

إن السؤال الذي يطرح نفسه هنا هو التالي: إذا كان f(x) تابعاً قابلاً للاشتقاق عند النقطة c وفي جوار لها عدد غير منتهٍ من المرات وشكلنا سلسلة تايلور لهذا التابع بجوار النقطة c، أي شكلنا السلسلة

$$f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

فهل مجموع هذه السلسلة يتطابق مع التابع f(x) في المجال (c-R,c+R).

في الواقع إن الإجابة على هذا السؤال ليست دوماً بالإيجاب فمثلاً التابع

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

يملك مشتقات من جميع المراتب في النقطة x=0 وجميع هذه المشتقات معدومة، أي أن $f^{(n)}(0)=0$ لجميع قيم n. وهكذا فإن سلسلة ماك لوران للتابع f(x) بجوار الصفر سوف تأخذ الشكل

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots=0$$

وذلك لجميع قيم x. أي أن التابع f(x) لا يطابق مجموع سلسلة ماك لوران المقابلة له في جوار النقطة x=0.

سنبحث الآن عن الشروط التي يجب توفرها حتى تكون الإجابة على السؤال المطروح في هذه الملاحظة إيجابياً.

تعريف (5-4-5):

تسمى المجموع الجزئي النوني لسلسلة تايلور للتابع f(x) بجوار النقطة x = c بكثيرة

حدود تايلور من المرتبة n للتابع f(x) ونرمز له بـ $p_n(x)$. إذاً

$$p_n(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

وهكذا فإن باقي سلسلة تايلور للتابع f(x) بجوار النقطة x = c يعطى بالعلاقة

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

نظرية (5-4-6):

ليكن f(x) تابعاً قابلاً للاشتقاق عدداً غير منته من المرات في النقطة x = c وفي جوار لها. إن التابع f(x) يطابق مجموع سلسلة تايلور له بجوار النقطة x = c إذا وفقط إذا انتهى الباقي $R_n(x)$ لهذه السلسلة إلى الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية بقيم متزايدة.

البرهان: واضح أنه إذا كان

f(x) يطابق مجموع سلسلة تايلور المقابلة له بجوار النقطة x=c $\Leftrightarrow$

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x)$ (بحسب تعريف $p_n(x)$)

$\Leftrightarrow$ $f(x)-\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

نتيجة (5-4-7):

ينتج من النظرية السابقة أنه لمعرفة فيما إذا كان التابع f(x) يطابق مجموع سلسلة تايلور المقابلة له يكفي حساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$. فإذا كان، من أجل $x=x_0$، $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_0)=0$ فإن مجموع سلسلة تايلور في النقطة $x=x_0$ يساوي قيمة التابع f(x) في هذه النقطة. أما إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_0)\neq 0$ فإنه إما أن تكون سلسلة تايلور متباعدة في هذه النقطة أو أن مجموعها لا يساوي قيمة التابع في تلك النقطة. وهذا ينطبق على حالة النشر وفق سلسلة ماك لوران للتابع f(x).

لذلك إذا كان f تابعاً قابلاً للاشتقاق عدداً غير منته من المرات وطلب منا نشره في جوار النقطة x = c أو جوار النقطة x = 0 فإننا سنكتب أولاً

$$f(x)\approx f(o)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

أو

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ولا نبدل إشارة المساواة التقريبية ($\approx$) بإشارة المساواة، في الحالتين، إلا بعد التحقق فيما إذا كان $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ من أجل جميع قيم x المنتمية إلى مجال تقارب سلسلة القوى المدروسة.

بناءً على ما تقدم فإنه إذا أخذنا بعين الاعتبار تعريف باقي سلسلة تابعية الوارد في الفقرة (5-2) نستنتج أنه عندما يكون مجموع سلسلة قوى ما مساوياً للتابع الذي تمثله هذه السلسلة في مجال ما فإن تقاربها في هذا المجال يكون منتظماً.

تعريف (5-4-8):

وجدنا في التعريف (5-4-5) أن $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ وهكذا فإن

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x) \qquad (v)$$

تسمى هذه العلاقة بدستور تايلور في النشر المنته للتابع f(x) في جوار النقطة c (أو بقوى (x-c) المتزايدة).

في حالة خاصة إذا كان c=0 حصلنا على دستور ماك لوران في النشر المنته للتابع f(x) في جوار الصفر (أو بقوى x المتزايدة)، وهو يعطى بالعلاقة

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \qquad (vi)$$

حساب الباقي $R_n(x)$ (5-4-9):

سنحاول الآن الوصول إلى الصيغة التي توصل إليها لاغرانج في حساب $R_n(x)$ بدلالة التابع f(x).

لنفرض أن التابع f(x) يقبل الاشتقاق في النقطة c وفي جوارٍ لها I حتى المرتبة n+1، عندئذٍ يكون النشر المنته للتابع f(x) في جوار النقطة c معطى بالدستور (v)، وبالتالي فإن $R_n(x)$ يقبل الاشتقاق أيضاً في النقطة c وجوارها I حتى المرتبة (n+1).

فإذا وضعنا $x = c$ في (v) وجدنا أن $R_n(c) = 0$. وباشتقاق الدستور (v) n مرة، وحساب قيمة المشتق في كل مرة عند النقطة $x = c$ نجد أن

$$f'(c) = f'(c) + R_n'(c) \Rightarrow R_n'(c) = 0$$
$$f''(c) = f''(c) + R_n''(c) \Rightarrow R_n''(c) = 0$$

....

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + R_n^{(n)}(c) \Rightarrow R_n^{(n)}(c) = 0$$

أما من أجل المشتق من المرتبة (n+1) فنجد أن $f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x)$ وهذه العلاقة محققة من أجل جميع قيم x من الجوار I.

لنطبق الآن نظرية كوشي (*) على التابعين $R_n(x)$ و $(x-c)^{n+1}$ في المجال $[c,x]$ حيث $x \in I$، ونفرض أن c<x علماً بأن هذا الفرض لا يخل بعمومية المسألة، فنجد أن

$$\frac{R_n(x) - R_n(c)}{(x-c)^{n+1} - (c-c)^{n+1}} = \frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-c)^n}$$

حيث $x_1 \in (c,x)$، وبما أن $R_n(c) = 0$ و $(c-c)^{n+1} = 0$ فإن المساواة السابقة تعني أن

$$\frac{R_n(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-c)^n}$$

بتطبيق نظرية كوشي مرةً أخرى على التابعين $R_n'(x)$ و $(n+1)(x-c)^n$ في المجال $[c,x_1]$ نجد أن

$$\frac{R_n'(x_1) - R_n'(c)}{(n+1)(x_1-c)^n - (n+1)(c-c)^n} = \frac{R_n''(x_2)}{(n+1)n(x_2-c)^{n-1}}$$

حيث $x_2 \in (c,x_1)$. وبما أن $R_n'(c) = 0$ و $(n+1)(c-c)^n = 0$ فإن المساواة الأخيرة تعني أن

$$\frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-c)^n} = \frac{R_n''(x_2)}{(n+1)n(x_2-c)^{n-1}}$$

(*) نظرية كوشي: ليكن f و g تابعين معرفين ومستمرين على المجال [a;b]، ولنفرض أن المشتقين f′ و g′ موجودان ومحدودان في جميع نقاط المجال (a,b)، وأن $g'(x) \neq 0$ من أجل جميع قيم x من المجال (a,b). عندئذٍ توجد نقطة c في (a,b) بحيث يكون $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$، تسمى هذه المساواة بدستور كوشي.

بتكرار هذه العملية (n+1) مرة ومقارنة كافة النتائج نجد أن

$$\frac{R_n(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

حيث $x_{n+1} \in (c, x_n)$ ، فإذا رمزنا لـ x_{n+1} بـ δ ، وبما أن $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ ،

فإننا نجد أن
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

تسمى هذه المساواة بصيغة لاغرانج للحد الباقي ،حيث δ واقعة بين x و c.

أما في حال النشر المنتهي للتابع f(x) في جوار الصفر فتأخذ صيغة لاغرانج السابقة الشكل التالي $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!} x^{n+1}$ حيث δ واقعة بين x والصفر.

نلاحظ مما تقدم أن شكل الباقي $R_n(x)$ ، سواءً في الدستور (v) أو الدستور (vi)، يختلف عن الحدود التي تسبقه ومرد ذلك أن المشتق $f^{(n+1)}$ مأخوذاً في (v) بجوار النقطة c وليس عندها، وفي (vi) بجوار الصفر وليس عند الصفر.

نكتب δ أحياناً بالشكل $\delta = c + \theta(x-c)$ حيث $0 < \theta < 1$.

أمثلة (10-4-5):

1- انشر التابع $f(x) = e^x$ حسب قوى x المتزايدة.

الحل: لدينا $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$

وبالتالي فإن $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$

وهكذا فإن سلسلة ماك لوران للتابع المعطى هي

$$f(x) = e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

أما مجال تقارب هذه السلسلة فنحدده بتطبيق اختبار دالامبير. إن

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot|x| = 0 < 1$$

وبالتالي فإن السلسلة المدروسة متقاربة لجميع قيم x من R.

لمعرفة فيما إذا كان مجموع سلسلة ماك لوران للتابع f(x) يتطابق مع التابع f(x) في كل R، سنتحقق من صحة العبارة $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (نظرية (5-4-6)).

في الواقع إن الباقي هنا يعطى بالعلاقة

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^\delta}{(n+1)!}x^{n+1}$$

حيث δ واقع بين x والصفر.

فإذا لاحظنا أن $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ لأن السلسلة متقاربة (نظرية (2-1) من الفصل الثاني) فإن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^\delta}{(n+1)!}x^{n+1}\right) = e^\delta \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

وذلك لجميع قيم x من R ، أي أن مجموع سلسلة ماك لوران للتابع $f(x) = e^x$ يتطابق مع هذا التابع مهما كانت قيمة x من R. إذاً

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2- انشر التابع $f(x) = \ln x$ بقوى x-1 المتزايدة.

الحل: لدينا هنا $f(1)=0$ أما بالنسبة لباقي المشتقات فلدينا

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3} \quad\Rightarrow\quad f'''(1) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(1) = -3!$$

....

وهكذا فإن
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$.

وبالتالي فإن سلسلة تايلور للتابع المعطى في جوار النقطة $c = 1$ هي

$$f(x) = \ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$$

وبتطبيق اختبار دالامبير على هذه السلسلة نجد ان

$$L(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-1)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x-1|=|x-1|$$

والسلسلة متقاربة عندما $L(x)<1$ أي $|x-1|<1$ أي بجميع قيم x مـــن المجـــال (0,2).

لنحسب الآن $R_n(x)$، إن

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}=(-1)^n\frac{\frac{n!}{\delta^{n+1}}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}=(-1)^n\frac{1}{\delta^{n+1}}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

(حسبنا $f^{(n+1)}(\delta)$ من عبارة $f^{(n)}(x)$)، حيث δ تقع بين x و 2، وأن x ∈ (0,2).

عندئذٍ لدينا $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\delta^{n+1}}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right|=0$.

وذلك لأن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right|=0$ لجميع قيم x من المجال (0,2) لأن الســلســلة المدروســة متقاربة ضمن هذا المجال وبالتالي فإن نهاية حدها العام تساوي الصفر عندما $n\to\infty$،

وهكذا فإن مجموع سلسلة تايلور للتابع $f(x)=\ln x$ بجوار x=1 يطابق هذا التـابع في جميع نقاط المجال (0,2) إذاً

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots$$

3- انشر التابع $f(x)=\sin x$ حسب سلسلة ماك لوران.

الحل: أن f(0)=0 أما بالنسبة للمشتقات فإن

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f''(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f^{(3)}(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(0)=0$$

..............:....................

وهكذا نجد ان $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$ وأن $f^{(2n)}(0)=0$. ومن ثم فإن سلسلة ماك لوران للتابع المعطى هي

$$f(x)=\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

نلاحظ أن نصف قطر تقارب هذه السلسلة هو $R=+\infty$ لأن

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}|(2n+1)(2n)|=+\infty$$

إذاً فالسلسلة متقاربة على كل $\mathbb{R}$. أما باقي السلسلة فهو

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\sin\left(\delta+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

حيث δ تقع بين x والصفر، وبما أن $|f^{(n+1)}(\delta)|=\left|\sin\left(\delta+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$

فإن

$$|R_n(x)|\le\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

ويبين اختبار دالامبير أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ متقاربة مطلقاً لجميع قيم x من $\mathbb{R}$ أي أن $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ وذلك لجميع قيم x من $\mathbb{R}$.

إذاً مجموع سلسلة ماك لوران للتابع $f(x)=\sin x$ يطابق هذا التابع في كل مكان مـــن $\mathbb{R}$ أي أن

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

4- انشر التابع $f(x)=\cos x$ بقوى x المتزايدة.

الحل: بما أن سلسلة ماك لوران للتابع $f(x)=\sin x$ المدروسة في المثال السابق تحقـــق شروط النظرية (4-7) فإنه يمكننا اشتقاقها حداً حداً للوصول إلى النشر المطلوب والذي هو

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots$$

يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بإجراء محاكمات مماثلة لتلك التي أجريناها في المثال السابق على التابع $f(x) = \text{Cos } x$.

5- انشر التابعين القطعيين $\text{Sh } x$ و $\text{Ch } x$ وفق ماك لوران.

الحل: يمكن النشر مباشرةً كما رأينا في الأمثلة الثلاثة الأولى، أو يمكن الاعتماد على نشر التابع $f(x) = e^x$ وعلى دساتير أولر التالية

$$\text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وذلك على النحو التالي:

وجدنا في المثال الأول أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

وذلك لجميع قيم x من R. بتعويض $-x$ بـ x في هذا النشر نجد أن

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

وذلك لجميع قيم x من R، وهكذا نجد أن

$$\text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

وذلك لجميع قيم x من R. كذلك فإن

$$\text{Ch} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

وذلك لجميع قيم x من R أيضاً.

6- برهن أن $\text{Sin } x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ وأن $\text{Cos } x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

حيث $i^2 = -1$.

الحل: وجدنا في المثال الأول أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad ; \quad x \in R$$

فإذا بدلنا في هذه المساواة ix بـ x ثم $-ix$ بـ x حصلنا (على الترتيب) على العلاقتين

التاليتين

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \quad ; \quad x \in R$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{ix^7}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \quad ; \quad x \in R$$

وهكذا نجد أن

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \text{Sin } x \quad ; x \in R$$

(وذلك بحسب المثال (3)).

كذلك فإن

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \text{Cos } x \quad ; x \in R$$

(وذلك بحسب المثال (4)).

7- احسب التكامل $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$ بالتقريب لثلاثة أرقام عشرية.

الحل: نعلم أن $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$

فإذا استبدلنا $-x^2$ بـ x حصلنا على نشر التابع e^{-x^2} وفق سلسلة ماك لوران التالية

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

وبالتالي فإن $\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$

وبما أن السلسلة الموجودة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة تحقق شروط النظرية (3-4) على كل R وبالتالي على المجال $[0,1]$ من R فإنه يمكننا مكاملة طرفي المساواة على هذا

المجال ومكاملة حدود السلسلة حداً حداً لنجد أن

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx = \int_0^1\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^6}{4!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\right]dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3\times 2!}+\frac{x^5}{5\times 3!}-\frac{x^7}{7\times 4!}+\frac{x^9}{9\times 5!}-\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}-\frac{1}{7\times 4!}+\frac{1}{9\times 5!}-\cdots$$

$$\approx 1-0.16666+0.03333-0.00595+0.00092-\cdots$$

$$\approx 1-0.1667+0.0333-0.0060+0.0009\approx 0.862$$

حيث أن الخطأ المرتكب بحساب مجموع الحدود الخمسة الأولى لا يتجاوز 0.001.

8- احسب التكامل $\int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} x}{x}\,dx$

الحل: وجدنا في المثال (3) أن

$$\operatorname{Sin} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad ; \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}+\cdots \quad ; \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

وهنا أيضاً تحقق السلسلة الموجودة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة شروط النظرية (3-4) على كل $\mathbb{R}$ وبالتالي على المجال $[0,1]$ الجزئي من $\mathbb{R}$. إذاً

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} x}{x}\,dx = \int_0^1\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right]dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3\times 3!}+\frac{x^5}{5\times 5!}-\frac{x^7}{7\times 7!}+\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3\times 3!}+\frac{1}{5\times 5!}-\frac{1}{7\times 7!}+\cdots$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167=0.94611$$

حيث اقتصرنا على مجموع الحدود الثلاثة الأولى واكتفينا بالتقريب إلى خمسة أرقام عشرية.

إن الخطأ المرتكب في حساب هذا التكامل ناجم عن سببين الأول ناتج عن اقتطاع الحدود الثلاثة الأولى من السلسلة والخطأ هنا لا يتجاوز (بحسب اختبار ليبنتز للسلاسل المتناوبة) القيمة المطلقة لأول حد مهمل وهو هنا $\frac{1}{7\times 7!}=\frac{1}{35280}<0.000029$.

أما الثاني فهو ناتج عن التقريب المطبق عند حساب الحدين الثاني والثالث وهو في كل مرة أصغر من 0.000005، وبالتالي فإن مجموع الخطأ في القسم الثاني لا يتجاوز المقدار

$$0.000005+0.000005=0.00001$$

وهكذا فإن الخطأ المرتكب في حساب التكامل المعطى لا يتجاوز المقدار

$$0.000029+0.00001=0.000039<0.00004$$

9- احسب $\operatorname{Sin} 31^\circ$ باستخدام النشر وفق سلسلة قوى.

الحل: إن $\operatorname{Sin}31^\circ=\operatorname{Sin}(30^\circ+1^\circ)=\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$

أي أن المسألة تحولت إلى نشر تابع من الشكل $f(x+h)$ حيث $h=\frac{\pi}{180}$، وبنشر هذا التابع في جوار النقطة $x=\frac{\pi}{6}$ نجد أن

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots$$

إذاً

$$\operatorname{Sin}31^\circ=\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}+\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}}{1!}\frac{\pi}{180}-\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2-\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+\cdots$$

وبالاكتفاء بالنشر بثلاثة حدود فقط نجد أن

$$\operatorname{Sin}31^\circ\approx\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2$$

$$\approx 0.5+0.030229989-0.000076154\approx 0.53031$$

ملاحظة (11-4-5):

تصادف أحياناً توابعاً قابلة للاشتقاق من مراتب عليا ولكن يصعب حساب هذه المشتقات مما لا يسمح لنا بإيجاد الصيغة العامة لنشر هذه التوابع في سلاسل تايلور أو ماك لوران، لذا نكتفي في مثل هذه الحالات بحساب عدد محدود من الحدود الأولى المغايرة للصفر من هذه السلاسل.

فمثلاً: إذا كان مطلوب نشر التابع $f(x)=tg\,x$ في جوار النقطة $x=\frac{\pi}{4}$ فإننا نلاحظ أن

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{Cos^2x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$f''(x)=\frac{2\,Sin\,x}{Cos^3x} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$$

$$f'''(x)=\frac{2\left(1+2Sin^2x\right)}{Cos^4x} \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=16$$

....

وهكذا نلاحظ أن المشتق يزداد تعقيداً لدرجة يبدو فيها من الاستحالة بمكان إيجاد صيغة المشتق من المرتبة n، لذا سنكتفي بهذا القدر من الحدود فيكون

$$tg\,x\approx 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$$

سلسلة ذي الحدين (5-4-12): هام

ليكن لدينا التابع $f(x)=(1+x)^k$ حيث k عدد حقيقي ما، ولننشره في جوار النقطة $x=0$. لدينا $K\neq 1$ ، $\forall K\neq 0$

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(0)=k$$

$$f''(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(0)=k(k-1)$$

$$f'''(x)=k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \Rightarrow f'''(0)=k(k-1)(k-2)$$

....

$$f^{(n)}(x)=k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))(1+x)^{k-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

....

وهكذا فإن سلسلة ماك لوران للتابع المعطى هي

$$(1+x)^k\approx 1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

لمعرفة مجال تقارب هذه السلسلة نجد من اختبار دالامبير أن

$$(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\cdot\frac{n!}{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}\cdot\frac{1}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right|\cdot|x|=|x|$$

والسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x|<1$. يمكن البرهان على أن باقي هذه السلسلة يحقق العلاقة $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ وذلك لجميع قيم x من المجال $(-1,1)$

إذاً

$$(1+x)^k=1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (*)$$

تسمى السلسلة (*) بسلسلة ذي الحدين وهي متقاربة بانتظام- كما وجدنا أعلاه- إذا كان $|x|<1$، ومتباعدة إذا كان $|x|>1$ في حال لم يكن k عدداً طبيعياً، أما إذا كان $x=\pm 1$ فإن سلسلة ذي الحدين قد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة تبعاً للعدد k.

في الواقع إذا كان k عدداً طبيعياً فإن سلسلة ذي الحدين تؤول إلى دستور ثنائي الحد لنيوتن - الكرخي وهو كثيرة حدود بالمتحول x، وفي هذه الحالة فإن جميع عواملها ابتداءً من العامل $n=k+1$ ستكون معدومة، وبالتالي تصبح السلسلة متقاربة دوماً لجميع قيم x.

أمثلة وتمارين محلولة (5-4-13):

1- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ باستخدام سلسلة ذي الحدين.

الحل: إن $f(x)=(1+x)^{-1}$ وبتطبيق سلسلة ذي الحدين حيث $k=-1$ نجد أن

$$(1+x)^{-1}=1+\frac{-1}{1!}x+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

وهكذا فإن

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

حيث $|x|<1$.

2- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ باستخدام سلسلة ذي الحدين.

الحل: إن نشر هذا التابع في سلسلة ذي الحدين، مع مراعاة أن $k=-2$، هو

$$(1+x)^{-2}=1+\frac{-2}{1!}x+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}x^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

وهكذا فإن

$$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^n(n+1)x^n+\cdots$$

وذلك من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x|<1$.

3- انشر التابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ وفق سلسلة ذي الحدين.

الحل: إن $f(x)=(1+x)^{1/2}$ وهكذا نجد أن سلسلة ذي الحدين للتابع المعطى ومن أجل $k=\frac{1}{2}$ هي

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots$$

وبالتالي فإن

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2\times1!}x-\frac{1}{2^2\times2!}x^2+\frac{1\times3}{2^3\times3!}x^3-\frac{1\times3\times5}{2^4\times4!}x^4$$
$$+\frac{1\times3\times5\times7}{2^5\times5!}x^5-\cdots$$

وذلك لجميع قيم $-1<x<1$.

4- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ بقوى x المتزايدة.

الحل: لدينا هنا $f(x)=(1+x)^{-1/2}$ وحسب سلسلة ذي الحدين مع ملاحظة أن $k=-\frac{1}{2}$ نجد أن

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}$$
$$=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots$$

وهكذا فإن

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2\times1!}x+\frac{1\times3}{2^2\times2!}x^2-\frac{1\times3\times5}{2^3\times3!}x^3+\frac{1\times3\times5\times7}{2^4\times4!}x^4-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}x^n+\cdots$$

وذلك لجميع قيم x من المجال $(-1,1)$.

5- أنشر التابع $f(x)=\arcsin x$ بقوى x المتزايدة.

الحل: إذا عوضنا في سلسلة ذي الحدين للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$، التي وجدناها في التمرين السابق، $-x^2$ بـ x حصلنا على سلسلة ذي الحدين للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ والتي هي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2\times1!}x^2 + \frac{1\times3}{2^2\times2!}x^4 + \frac{1\times3\times5}{2^3\times3!}x^6 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}x^{2n} + \cdots$$

حيث $-1<x<1$، وبتطبيق النظرية (3-4)، لتحقق كافة شروطها، والمكاملة من « 0 » إلى « x » حيث $|x|<1$ نحصل على النشر المطلوب وهو

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\times1!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\times3}{2^2\times2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2^3\times3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

حيث $-1<x<1$.

6- انشر التابع $f(x)=\operatorname{arcth} x$ وفق سلسلة ماك لوران.

الحل: (نذكّر بأن $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}$ وأن $\operatorname{Coth} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x}$) من المعلوم أن

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

وجدنا في أمثلة سابقة أن

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots$$

وذلك لجميع قيم x المحققة للمتراجحة $-1<x<1$.

بمكاملة طرفي العلاقتين السابقتين (بحسب النظرية (3-4)) نحصل على

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad ; \quad |x|<1$$

$$\ln|1-x| = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots \quad ; \quad |x|<1$$

بالتعويض في عبارة $\operatorname{arcth} x$ نحصل على النشر المطلوب وهو

$$\operatorname{arcth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

وذلك من أجل $-1<x<1$.

7- انشر التابع $f(x)=\ln(1+x)$ وفق ماك لوران.

الحل: لدينا

$$f(0)=0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6 = -3!$$

....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

....

وهكذا فإن

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

ولدينا

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot|x| = |x|$$

والسلسلة متقاربة عندما $|x|<1$، وضمن هذا المجال لدينا

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \quad \text{(حيث } \delta \text{ تقع بين x والصفر)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(1+\delta)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(1+\delta)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = 0$$

إذاً مجموع سلسلة ماك لوران للتابع $f(x)=\ln(1+x)$ يطابق هذا التابع ضمن المجال $|x|<1$ وهكذا فإن

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad ; \quad |x|<1$$

8- انشر التابع $f(x)=a^x$ بجوار الصفر، حيث $a \neq 1$.

الحل: إن

$$f(0)=1$$
$$f'(x)=a^x \cdot \ln a \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\ln a$$
$$f''(x)=a^x \cdot \ln^2 a \quad \Rightarrow \quad f''(0)=\ln^2 a$$
$$f^{(3)}(x)=a^x \cdot \ln^3 a \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0)=\ln^3 a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=a^x \cdot \ln^n a \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0)=\ln^n a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

إذاً سلسلة ماك لوران للتابع المعطى هي

$$f(x)=a^x \approx 1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\frac{\ln^3 a}{3!}x^3+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\cdots$$

أما نصف قطر تقاربها فهو

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^n a}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\ln^{n+1} a}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\frac{1}{|\ln a|}=\infty \quad ; \quad a\neq 1$$

(أنظر الملاحظة (5-1-5)). أي أن سلسلة ماك لوران للتابع المعطى متقاربة من أجل أي قيمة لـ x من R، وهكذا نجد أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لجميع قيم x من R، إذاً

$$a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\frac{\ln^3 a}{3!}x^3+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\cdots$$

وذلك لجميع قيم x من R.

استخدام سلاسل القوى في حل بعض أنواع المعادلات التفاضلية (5-5):

مقدمة (5-5-1):

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التالية

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad \text{(i)}$$

ولنبحث عن حل هذه المعادلة الموافق لشرط البدء $y=y_0$ عندما $x=0$.

في الحقيقة إذا كان التابع $f(x,y)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة من جميع المراتب في جوار للنقطة $(0,y_0)$ فمن المعلوم أن للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة حلاً وحيداً y يكتب على شكل سلسلة قوى في جوار الصفر أي أن

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad \text{(ii)}$$

حيث $|x|<1$. إن هذا الحل يتعين تماماً بمعرفة جميع الأمثال $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.

نلاحظ أولاً أنه من أجل شرط البدء المفروض لدينا من (ii) $a_0=y_0$.

لحساب باقي الأمثال نشتق طرفي المساواة (ii) - وهذا ممكن نظراً لتحقق كافة شروط النظرية (4-7) - فنحصل على سلسلة قوى متقاربة ضمن نفس مجال تقارب السلسلة (ii) من التابع y' أي أن

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \qquad \text{(iii)}$$

بتعويض (ii) و (iii) في (i) وترتيب الطرف الأيمن من المعادلة الناتجة بحسب قوى x المتزايدة ومن ثم مطابقة الأمثال المتقابلة في الطرفين نحصل على جميع قيم العوامل $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$.

أمثلة (5-5-2):

1- أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=x^2+y$ باستخدام سلاسل القوى ومن أجل شرط البدء $y=y_0$ عندما $x_0=0$.

الحل: إن التابع $f(x,y)=x^2+y$ له مشتقات جزئية مستمرة من جميع المراتب في أي جوار لأي نقطة (x,y) من R^2 وبالتالي في أي جوار للنقطة $(0,y_0)$، وهذا يعني حسب ما تقدم في (5-5-1) أن للمعادلة التفاضلية المعطاة حلاً وحيداً من الشكل

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad ;|x|<1$$

باشتقاق طرفي هذه المساواة، حيث يتم اشتقاق السلسلة في الطرف الأيمن حداً حداً ضمن منطقة تقاربها، نحصل على سلسلة قوى متقاربة ضمن نفس مجال تقارب السلسلة الأصلية من التابع y' أي أن

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \quad ;|x|<1$$

من أجل شرط البدء المفروض نجد من عبارة y أن $a_0=y_0$.

نعوض الآن عبارتي y و y' في المعادلة التفاضلية المعطاة ونرتب الطرف الأيمن حسب قوى x المتزايدة لنجد أن

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = a_0 + a_1x + (1 + a_2)x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

بمطابقة الأمثال المتقابلة نحصل على

$$a_1 = a_0 = y_0$$

$$2a_2 = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}y_0$$

$$3a_3 = 1 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 2}y_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3!}y_0$$

$$4a_4 = a_3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4\times 3} + \frac{1}{4\times 3\times 2}y_0 = \frac{1}{4\times 3} + \frac{1}{4!}y_0$$

....

$$na_n = a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 4\times 3} + \frac{1}{n!}y_0 = \frac{1}{n!}(2 + y_0)$$

وذلك بدءاً من $n \ge 3$

....

وبتعويض قيم جميع الأمثال المحسوبة في عبارة الحل المفروض نجد أن

$$y = y_0 + y_0x + \frac{1}{2}y_0x^2 + \frac{1}{3!}(2 + y_0)x^3 + \frac{1}{4!}(2 + y_0)x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(2 + y_0)x^n + \cdots$$

$$= \left[(2 + y_0) + (2 + y_0)x + \frac{1}{2!}(2 + y_0)x^2 + \frac{1}{3!}(2 + y_0)x^3 + \frac{1}{4!}(2 + y_0)x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(2 + y_0)x^n + \cdots\right] - 2 - 2x - x^2$$

$$= (2 + y_0)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) - x^2 - 2x - 2$$

وهكذا فإن $y = (2 + y_0)e^x - x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad |x| < 1$

وهو حل المعادلة التفاضلية المعطاة الموافق لشرط البدء $y = y_0$ عندما $x=0$.

2- حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{2x - y}{1 - x}$ باستخدام سلاسل القوى وبحيث يتحقق شرط البدء $y = y_0$ عندما $x_0 = 0$.

الحل: إن التابع $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{1 - x}$ يملك مشتقات جزئية مستمرة من جميع المراتب في أي جوار للنقطة $(0, y_0)$ وبالتالي للمعادلة التفاضلية المعطاة حل وحيد من الشكل

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad ; \quad |x| < 1$$

ومن أجل شرط البدء المفروض نجد أن $a_0 = y_0$.

باشتقاق عبارة y حداً حداً ضمن منطقة تقاربها، نحصل على المساواة التالية

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \quad ; \quad |x| < 1$$

بتعويض عبارتي y و y' في المعادلة التفاضلية وترتيب طرفي المعادلة الناتجة بحسب قوى x المتزايدة نجد أن

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x} \quad \Rightarrow \quad (1 - x)y' = 2x - y \quad \Rightarrow$$

$$(1 - x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) = -a_0 - (a_1 - 2)x - a_2x^2 - a_3x^3 - \cdots - a_nx^n - \cdots \quad \Rightarrow$$

$$a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 2a_2)x^2 + (4a_4 - 3a_3)x^3 + \cdots + ((n+1)a_{n+1} - na_n)x^n + \cdots = -a_0 - (a_1 - 2)x - a_2x^2 - a_3x^3 - \cdots - a_nx^n - \cdots$$

وبمطابقة الأمثال المتقابلة في المساواة الأخيرة نجد أن

$$a_1 = -a_0 = -y_0$$

$$2a_2 - a_1 = -(a_1 - 2) \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 \quad \left(a_2 = \frac{2}{2\times 1}\right)$$

$$3a_3 - 2a_2 = -a_2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad \left(a_3 = \frac{2}{3\times 2}\right)$$

$$4a_4 - 3a_3 = -a_3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{2}{4\times 3}$$

$$5a_5 - 4a_4 = -a_4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{2}{5 \times 4}$$

....

$$na_n - (n-1)a_{n-1} = -a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{n(n-1)} \quad ; \quad n \ge 2$$

....

بالتعويض في عبارة الحل المفروض نجد أن

$$y = y_0 - y_0 x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots + \frac{2}{n(n-1)}x^n + \cdots \quad ; |x| < 1$$

ومنه فإن

$$y = y_0(1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n \quad ; \quad |x| < 1$$

3- حل المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - 4x + y + 1$ باستخدام سلاسل القوى ومن أجل شرط البدء $y_0 = 3$ عندما $x_0 = 2$.

الحل: نلاحظ هنا أن شرط البدء $y_0 = 3$ معطى من أجل $x_0 = 2 \neq 0$، ولإرجاع المسألة إلى حالة المسألتين السابقتين نفرض أن $v = x - 2$ فيكون

$$x = v + 2 \quad \text{و} \quad dx = dv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على المعادلة التالية

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} = (v+2)^2 - 4(v+2) + y + 1 = v^2 + y - 3$$

وهكذا آلت المسألة إلى إيجاد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = v^2 + y - 3 \qquad (i)$$

المحقق لشرط البدء $y_0 = 3$ عندما $v_0 = 0$، وبما أن التابع $f(v,y)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة من جميع المراتب في أي جوار للنقطة $(v_0 = 0, y_0)$ فإن للمعادلة حلاً وحيداً يعطى بسلسلة القوى التالية

$$y = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots + a_n v^n + \cdots \qquad (ii)$$

وحيث $|v| < 1$. باشتقاق هذه السلسلة حداً حداً ضمن منطقة تقاربها نحصل على سلسلة القوى التالية

$$y' = a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2 + \cdots + na_n v^{n-1} + \cdots \qquad (iii)$$

وحيث $|v| < 1$ أيضاً. من (ii) ومن أجل شرط البدء المفروض نجد أن

$$a_0 = y_0 = 3$$

وبتعويض (ii) و (iii) في (i) وترتيب الطرف الأيمن من المعادلة الناتجة بقوى v المتزايدة نجد أن

$$a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2 + 4a_4 v^3 + \cdots + na_n v^{n-1} + \cdots =$$
$$(a_0 - 3) + a_1 v + (a_2 + 1)v^2 + a_3 v^3 + \cdots + a_n v^n + \cdots$$

بمطابقة الأمثال نجد أن

$$a_1 = a_0 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$
$$2a_2 = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$
$$3a_3 = a_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3} \qquad \left(a_3 = \frac{2}{3!}\right)$$
$$4a_4 = a_3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4 \times 3} \qquad \left(a_4 = \frac{2}{4!}\right)$$
$$5a_5 = a_4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{1}{5 \times 4 \times 3} \qquad \left(a_5 = \frac{2}{5!}\right)$$

....

$$na_n = a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)\cdots 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{n!} \quad ; \quad n \ge 3$$

....

بتعويض قيم الأمثال في (ii) نحصل على

$$y = 3 + \frac{2}{3!}v^3 + \frac{2}{4!}v^4 + \frac{2}{5!}v^5 + \cdots + \frac{2}{n!}v^n + \cdots \quad ; \quad |v| < 1$$

وبالعودة إلى المتحول x نجد أن الحل المطلوب هو

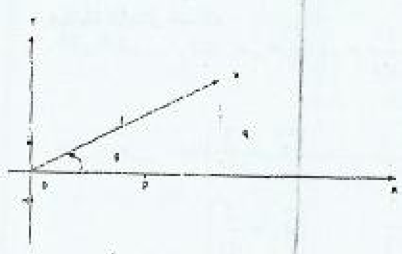
$$y = 3 + \frac{2}{3!}(x-2)^3 + \frac{2}{4!}(x-2)^4 + \frac{2}{5!}(x-2)^5 + \cdots + \frac{2}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

وذلك من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال المفتوح $(1,3)$.

6- المتتاليات والسلاسل العقدية

مقدمة:

نعلم أنه إذا كان a عنصراً من مجموعة الأعداد العقدية C فإن a يكتب بالشكل التالي a=p+iq ، حيث p و q عددان حقيقيان و $i^2 = -1$. تسمي p بالقسم الحقيقي للعدد العقدي a ونسمي q بقسمه التخيلي، أما القيمة المطلقة للعدد العقدي أو طويلة العدد العقدي a فتعطى بالعلاقة $|a| = \sqrt{p^2 + q^2}$. هذا التعريف للعدد العقدي يبين لنا بأن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة جزئية من C.



إن كل ما تقدم مقرون ينسب المستوي العقدي إلى محورين متعامدين، أفقي هو المحور x'ox ويدعى بالمحور الحقيقي وشاقولي هو المحور y'oy. ويدعى بالمحور التخيلي، كما هو واضح بالشكل المجاور، مما يسمح لنا بتمثيل جميع الأعداد العقدية ديكارتياً.

وهكذا فإن العلاقة $|a| = 4$ تمثل معادلة دائرة في المستوي العقدي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها هو « 4 » .

أما العلاقة $|a - a_0| = r$ فتمثل معادلة دائرة مركزها النقطة a_0 ونصف قطرها r (أي أن a واقعة على محيط هذه الدائرة).

يمكن استخدام الإحداثيات القطبية في تمثيل الأعداد العقدية، حيث واضح من الشكل أن

$$p = r\,\mathrm{Cos}\,\theta \quad \text{و} \quad q = r\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

وهكذا فإن

$$a = p + iq = r(\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta)$$

وهو الشكل القطبي للعدد العقدي.

تسمى الزاوية θ بمضمون أو سعة العدد العقدي، أما r فيدعى طويلة أو قياس العدد العقدي، واضح أن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

انطلاقاً من هذه المفاهيم الأولية يمكن أن نعمم ما درسناه في حالة المتتاليات والسلاسل العددية الحقيقية على المتتاليات والسلاسل العددية العقدية وسنبين ذلك من خلال عرض بعض التعاريف والنظريات الأساسية على سبيل الإيضاح لا الحصر.

المتتاليات العددية العقدية (6-1):

تعريف (6-1-1):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية عقدية (جميع حدودها أعداد عقدية). نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متقاربة من العدد العقدي a ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists\; N \in \mathbb{N}^* \;;\; n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

نظرية (6-1-2):

تكون المتتالية العقدية $\{a_n\}$ متقاربة من العدد العقدي a إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = q$$

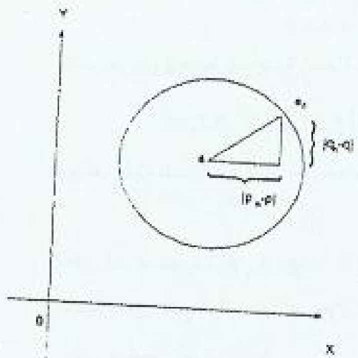
حيث

$$a_n = p_n + iq_n \quad \text{و} \quad a = p + iq$$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. هذا يعني بحسب التعريف (6-1-1) أنه

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists N \in \mathbb{N}^* \;;\; n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$



لكن من الشكل المقابل الذي يمثل البعد بين النقطتين a_n و a في المستوي العقدي وفي جوار ما (قرص دائري مفتوح) للنقطة a نجد أن

$$|p_n - p| \le |a_n - a| < \varepsilon$$
$$|q_n - q| \le |a_n - a| < \varepsilon$$

وذلك لجميع قيم n>N وهذا بدوره يعني أن $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ و $\lim_{n\to\infty} q_n = q$.

كفاية الشرط: لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ و $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$، هذا يعني، بحسب (8-1) من الفصل الأول، أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عددان N_1 , N_2 من N^* بحيث يكون

$$n > N_1 \Rightarrow |p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n > N_2 \Rightarrow |q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا فرضنا أن $N = \max(N_1 , N_2)$ فإنه، من أجل جميع قيم $N<n$، لدينا

$$|a_n - a| = |(p_n - p) + i(q_n - q)| \le |p_n - p| + |q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذاً $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

ملاحظة (6-1-3):

كما في المتتاليات العددية الحقيقية يبرهن في المتتاليات العقدية على وحدانيــة نهايــة متتالية في حال وجودها.

تعريف (6-1-4):

نقول عن المتتالية العقدية $\{a_n\}$ إنها تسعى إلى اللانهاية عندما $n \to \infty$، ونكتـــب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$، إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. إذاً فالمتتالية العقدية تكون متباعدة إذا حققت هـذا التعريف أو إذا امتلك حدها العام أكثر من نهاية عندما $n \to \infty$ بحسب الملاحظة السابقة.

نظرية (6-1-5):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية عقدية، و a عدداً عقدياً.

(i) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$، أما العكس فيكون صحيحاً فقط في حالة $a=0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

البرهان:

(i) لنفــرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ هـــذا يعـــني بحســـب النظريـــة (6-1-2) أن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ و $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$، وهكذا فإن

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{p_n^2 + q_n^2} = \sqrt{p^2 + q^2} = |a|$$

لنفرض الآن أن $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. فإذا كان $a=0$ أي أن $p=q=0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$، وهذا بدوره يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد N من N^* بحيث يتحقق الشرط $\big||a_n| - 0\big| = |a_n| < \varepsilon$ لجميع قيم $N<n$.

ولكن لجميع قيم $N<n$ لدينا $|a_n - a| = |a_n| < \varepsilon$ أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 0$، وهـذا غير محقق إذا كان $a \ne 0$ فمثـــلاً في حالـــة المتتاليـــة العقديـــة $\{a_n = (-1)^n\}$ لدينـــا $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$ أي أن متتالية القيم المطلقة متقاربة من العدد « 1 »، على حين أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -1 & ; \quad n \text{ فردي} \\ 1 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

أي أن المتتالية المفروضة غير متقاربة.

(ii) (بحسب التعريف (6-1-4))

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

(إن الاقتضاء المعاكس هنا محقق بحسب (i))

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

تعريف (6-1-6):

تكون المتتالية العقدية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد حقيقــي $k>0$ بحيــث يكــون $|a_n| \le k$ وذلك لجميع قيم n.

تعريف (6-1-7):

نقول عن المتتالية العقدية $\{a_n\}$ إنها متتالية كوشي إذا أمكن من أجـــل أي عـــدد $0 < \varepsilon$ إيجاد عدد N من N^* بحيث يتحقق الشرط

$$n > N \;\; \& \;\; m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

إن النظريات التالية تبرهن على غرار النظريات المماثلة من أجل المتتاليات العددية الحقيقية.

نظرية (6-1-8):

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين عقديتين متقاربتين من a و b على الترتيب فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad ; \quad b_n \neq 0 \ , \ b \neq 0$$

نظرية (6-1-9):

كل متتالية عقدية متقاربة $\{a_n\}$ هي متتالية كوشي.

أمثلة (6-1-10):

1- برهن أن المتتالية العقدية التي حدها العام $a_n = \frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n}$ متقاربة من a=2+i وذلك بتطبيق تعريف نهاية متتالية.

الحل: لنبرهن أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد N و N^* بحيث يتحقق الشرط

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

في الواقع إن

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$$

وباختيار N بحيث يكون $N > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ نجد أنه

$$n > N \Rightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - (2+i)| < \varepsilon$$

والنهاية صحيحة. لاحظ في هذا المثال أنه إذا فرضنا أن $\varepsilon = \frac{1}{100}$ فإن $N > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} = \frac{2\cdot 236}{\frac{1}{100}} = 223\cdot 6$ وبأخذ $N = 224$ و N^* فإن شرط التقارب المبرهن أعلاه محقق اعتباراً من حدود المتتالية $a_{225}, a_{226}, a_{227}, \cdots$.

2- اختبر تقارب المتتالية العقدية التالية $\left\{\frac{n^2 + in^3}{n^3 - 1}\right\}$.

الحل: نلاحظ أن

$$a_n = \frac{n^2 + in^3}{n^3 - 1} = \frac{n^2}{n^3 - 1} + i\frac{n^3}{n^3 - 1} = p_n + iq_n$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ فإنه بحسب النظرية (6-1-2) يكون $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

إذاً فالمتتالية المعطاة متقاربة من العدد العقدي a=1.

3- ادرس تقارب المتتالية العقدية التالية $\left\{\frac{(1-2i)^n}{n}\right\}$.

الحل: لدينا هنا

$$|a_n| = \left|\frac{(1-2i)^n}{n}\right| = \frac{|1-2i|^n}{|n|} = \frac{(\sqrt{5})^n}{n}$$

ولكن:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{5})^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{5})^n \ln(\sqrt{5})}{1} = \infty$$

(طبقنا هنا قاعدة لوبيتال لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ حيث تعاملنا مع n كمتحول حقيقي)

إذاً وبحسب النظرية (6-1-5) فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ أي أن المتتالية المدروسة متباعدة.

السلاسل العددية العقدية (6-2):

تعريف (6-2-1):

نقول عن السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (سلسلة جميع حدودها أعداد عقدية) أنها متقاربة إذا تقاربت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$، أي إذا وجد عدد عقدي S بحيث يكون $\lim_{n\to\infty} S_n = S$، وعندئذٍ نقول عن S بأنه مجموع السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ونكتب $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

أما إذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متباعدة قلنا عن السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها متباعدة.

نظرية (6-2-2):

تكون السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت سلسلتا القيم الحقيقية والقيم التخيلية لجميع حدودها متقاربتين.

البرهان: لتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة العقدية المعطاة. إن الحد العام لهذه المتتالية يكتب بالشكل $S_n = \sum_{n=1}^{n} p_n + i\sum_{n=1}^{n} q_n$

فإذا كانت $\{S_n\}$ متقاربة من S وكان $S=p+iq$ فهذا يكافئ أن $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ و $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ (بحسب النظرية (6-1-2)) وهذا بدوره يكافئ أن كلاً من سلسلتي القيم الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ والقيم التخيلية $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ متقاربة (بحسب (1-5) من الفصل الثاني).

نظرية (6-2-3):

(i) إذا كانت السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، ولكن العكس غير صحيح.

(ii) إذا كان a_n الحد العام لسلسلة عقدية، وكان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، فإن هذه السلسلة متباعدة.

نظرية (6-2-4):

(i) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين عقديتين متقاربتين مجموعهما على الترتيب a و b. إن السلسلتين العقديتين $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ متقاربتان ومجموعهما a+b و a-b على الترتيب.

(ii) إذا كان $c \neq 0$ ثابتاً ما، فإن السلسلتين العقديتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً، وإذا كان a مجموع السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فإن ca هو مجموع السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$.

تعريف (6-2-5):

نقول عن السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة مطلقاً إذا كانت سلسلة القيم المطلقة لحدودها، أي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، متقاربة.

نظرية (6-2-6):

إذا كانت السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً فهي متقاربة.

تبرهن النظريات الثلاث الأخيرة كما في حالة السلاسل العددية الحقيقية.

أخيراً فإن جميع اختبارات التقارب المطبقة في دراسة تقارب السلاسل العددية الحقيقية مختلفة الإشارة، والتي مرت معنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب، يمكن استخدامها في دراسة تقارب السلاسل العددية العقدية.

أمثلة (6-2-7):

1- ادرس تقارب السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$:

الحل: إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة هي السلسلة الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وبما أن هذه السلسلة متقاربة فإن السلسلة المدروسة متقاربة بحسب النظرية (6-2-6).

2- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

الحل: إن سلسلة القيم المطلقة للسلسلة المعطاة هي السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي، كما نعلم، سلسلة متباعدة، على حين أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$
$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \cdots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n} + i\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

وبما أن سلسلتي القيم الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n}$ والقيم التخيلية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ متقاربتان بحسب اختبار ليبنتز للسلاسل المتناوبة فإن السلسلة المدروسة متقاربة بحسب النظرية (2-2-6).

3- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^n}$.

الحل: لدينا

$$2^2 = 2^2$$
$$3^3 = 3\times3\times3 > 2\times2\times2 = 2^3$$
$$4^4 = 4\times4\times4\times4 > 2\times2\times2\times2 = 2^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^n > 2^n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وذلك من أجل $n>1$. وهكذا فإن

$$\left|\frac{i^n}{n^n}\right| \le \left|\frac{i^n}{2^n}\right| \quad ; \quad n>1$$

وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ متقاربة مطلقاً (تحقق بتطبيق اختبار دالامبير)، إذاً فالسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً بحسب اختبار المقارنة، وبالتالي فهي متقاربة.

4- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+1)^n}{3^n(n+1)^3}$.

الحل: بتطبيق دالامبير نجد أن

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(i+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)^3}\cdot\frac{3^n(n+1)^3}{(i+1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{i+1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3\right| = \frac{|i+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

والسلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة.

5- اختبر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{5^n}$.

الحل: بحسب اختبار كوشي (الجذر النوني) نجد أن

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{5}\right| = \frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{5} = \frac{2}{5} < 1$$

والسلسلة المدروسة متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة.

6- ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)i^n}{n^3}$.

الحل: إن اختبار دالامبير غير مجد هنا لأن

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)i^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(2n+1)i^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\cdot|i|\right] = 1$$

لذا نلجأ إلى اختبار راب فنجد أن

$$\lim_{n\to\infty}P_n = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\left|\frac{(2n+1)i^n}{n^3}\cdot\frac{(n+1)^3}{(2n+3)i^{n+1}}\right|-1\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{(2n+1)(n+1)^3}{n^3(2n+3)}-1\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)(n+1)^3}{n^2(2n+3)}-n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)(n+1)^3-n^3(2n+3)}{n^2(2n+3)}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+9n^2+5n}{2n^3+3n^2} = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

والسلسلة المدروسة متقاربة مطلقاً بحسب اختبار راب وبالتالي متقاربة.

٧- المتتاليات والسلاسل التابعية العقدية

إن كل ما درسناه عن المتتاليات والسلاسل التابعية الحقيقية يمكن تعميمه على المتتاليات والسلاسل التابعية العقدية بعد الأخذ بعين الاعتبار المفاهيم الأساسية التي تختص بها الساحة العقدية. وسنقتصر هنا على ذكر بعض التعاريف والنظريات الأساسية.

تعريف (٧-١):

لتكن $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع العقدية (كل عنصر من عناصرها عبارة عن تابع للمتحول العقدي $z = x + iy$) المعرفة على المنطقة D من المستوي العقدي.

(i) نقول أن المتتالية $\{f_n(z)\}$ متقاربة إلى التابع العقدي $f(z)$ في D ونكتب $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \forall z\in D \ , \ \exists N\in\mathbb{N}^* \ ; \ n>N \Rightarrow |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

واضح من هذا التعريف أن $N = N(\varepsilon, z)$.

(ii) نقول أن المتتالية $\{f_n(z)\}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $f(z)$ في D إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists N\in\mathbb{N}^* \ ; \ n>N \Rightarrow |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

وذلك لجميع قيم z من D. أي أنه في هذه الحالة يكون $N=N(\varepsilon)$ تابعاً لـ ε فقط ولا يتعلق بـ z.

تعريف (٧-٢):

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ سلسلة تابعية عقدية معرفة على المنطقة D من المستوي العقدي.

(i) نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ أنها متقاربة إلى التابع العقدي $S(z)$ في D، ونكتب $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$، إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(z)\}$ متقاربة إلى $S(z)$ في D.

(ii) نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ أنها متقاربة بانتظام إلى التابع $S(z)$ في D إذا كانت المتتالية $\{S_n(z)\}$ متقاربة بانتظام إلى $S(z)$ في D.

في هذه الحالة فإن باقي السلسلة، والذي نرمز له بـ $R_n(z)$، يعطى بالعلاقة

$$R_n(z) = S(z) - S_n(z)$$

ويبرهن على أن $\lim_{n\to\infty} R_n(z)=0$.

وهكذا فإن التقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ في المنطقة D يعرف بالشكل التالي

$$\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists N\in\mathbb{N}^* \ ; \ n>N \Rightarrow |R_n(z)|<\varepsilon$$

وذلك من أجل أي قيمة للمتحول العقدي z من المنطقة D.

إن هذا التعريف ينطبق أيضاً على منطقة جزئية واقعة داخل D.

نظرية (٧-٣):

إذا كانت جميع حدود المتتالية التابعية العقدية $\{f_n(z)\}$ المعرفة في المنطقة D مستمرة على D وكانت $\{f_n(z)\}$ متقاربة بانتظام في D إلى التابع $f(z)$ فإن $f(z)$ مستمر أيضاً على D.

نظرية (٧-٤):

إذا كانت جميع حدود السلسلة التابعية العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ المعرفة في المنطقة D مستمرة على D وكانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة بانتظام في D إلى التابع $S(z)$ كان $S(z)$ مستمراً أيضاً على D.

إن جميع النظريات المتعلقة بمكاملة واشتقاق المتتاليات والسلاسل التابعية الحقيقية تبقى صحيحة في حالة المتتاليات والسلاسل التابعية العقدية وضمن شروط الساحة العقدية، كذلك فإن كافة الاختبارات المتبعة في دراسة تقارب السلاسل التابعية الحقيقية تبقى قائمة في دراسة تقارب السلاسل التابعية العقدية.

أمثلة (٧-٥):

١- عين منطقة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

الحل: حسب اختبار الجذر النوني لكوشي لدينا

$$L(z)=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^2}{2} = \frac{|z|^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$$

فإذا كان $x^2+y^2<2$ كانت السلسلة المدروسة متقاربة مطلقاً وبالتالي متقاربة ضمن قرص دائري مفتوح مركزه مبدأ الإحداثيات ونصف قطره يساوي $\sqrt{2}$.

أما على محيط هذا القرص، أي من أجل $|z|=\sqrt{2}$، يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^{2n}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots$$

وهي سلسلة عددية متباعدة لأن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n=n\}$ متباعدة، إذاً فالسلسلة التابعية العقدية المعطاة متباعدة أيضاً.

2- عين منطقة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{3^n(n+1)^3}$.

الحل: لدينا

$$|f_n(z)|=\left|\frac{(z+1)^{n-1}}{3^n(n+1)^3}\right|=\frac{1}{3(n+1)^3}\cdot\frac{|z+1|^{n-1}}{3^{n-1}}$$

وهكذا فإنه من أجل قيم z المحققة للمتراجحة $\frac{|z+1|}{3}\le 1$ نجد أن

$$|f_n(z)|\le\frac{1}{3(n+1)^3}\quad ;n=1,2,3,\cdots$$

وبما أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(n+1)^3}$ متقاربة (بحسب الاختبار التكاملي) فإنه بحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة التابعية العقدية المعطاة متقاربة طبعياً وبالتالي بانتظام وذلك من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $|z+1|\le 3$، أي من أجل جميع نقاط المستوي العقدي الواقعة داخل وعلى محيط قرص دائري مركزه النقطة « 1- » ونصف قطره يساوي « 3 ».

3- سلاسل القوى العقدية

تعريف (8-1):

إن سلسلة القوى العقدية (أو السلسلة العقدية الصحيحة) هي سلسلة تابعية عقدية شكلها العام يعطى بالعبارة التالية

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+\cdots+a_n(z-c)^n+\cdots \qquad (I)$$

وتدعى أيضاً سلسلة بقوى $(z-c)$، حيث $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ أعداداً عقدية لا تتعلق بـ z تدعى أمثال أو عوامل سلسلة القوى العقدية و c عدد عقدي يدعى مركز السلسلة.

في الحالة الخاصة عندما c=0 تأخذ السلسلة (I) الشكل المبسط التالي

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \qquad (II)$$

والذي يدعى سلسلة بقوى z.

نظرية (8-2):

عند دراسة تقارب سلسلة القوى العقدية (II) تصادفنا إحدى الحالات الثلاث التالية:

(i) إما أن يوجد عدد عقدي R، يعطى بالعلاقة $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ أو بالعلاقة $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$، يدعى نصف قطر تقارب سلسلة القوى العقدية، بحيث تتقارب السلسلة (II) مطلقاً من أجل جميع نقاط القرص الدائري المفتوح $|z|<R$، والذي نسميه دائرة تقارب سلسلة القوى العقدية، وتتباعد خارجه، أي من أجل جميع نقاط المستوي العقدي المحققة للمتراجحة $|z|>R$. أما بالنسبة لمحيط دائرة التقارب أي من أجل قيم z المحققة للمعادلة $|z|=R$، فقد تكون سلسلة القوى العقدية متقاربة وقد تكون متباعدة وقد تكون متقاربة في بعض النقاط ومتباعدة في النقاط الأخرى.

(ii) وإما أن تتقارب سلسلة القوى العقدية من أجل جميع نقاط المستوي العقدي، وعندئذ يكون نصف قطر تقاربها غير محدود وسنصطلح على كتابة $R=\infty$.

(iii) وإما أن تتقارب سلسلة القوى العقدية من أجل قيمة وحيدة لـ z هي z=0 وعندئذ يكون نصف قطر تقاربها R=0.

إن هذه النظرية تبقى صحيحة في حالة سلسلة القوى العقدية (I) والتي تكون دائرة تقاربها معينة بالعلاقة $|z-c|=R$، وهي معادلة دائرة مركزها النقطة c ونصف قطرها R. وتكون السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z الواقعة داخل دائرة تقاربها ومتباعدة من أجل جميع قيم z الواقعة خارجها، أما على محيط دائرة التقارب فقد تكون سلسلة القوى العقدية

(أ) متقاربة وقد تكون متباعدة وقد تكون متقاربة في بعض النقاط ومتباعدة في النقاط الأخرى.

ملاحظة (8-3):

في حالة خاصة إذا كان $z=x$ فإن دائرة تقارب سلسلة القوى العقدية تنقلب إلى مجال تقارب لسلسلة قوى حقيقية.

نظرية (8-4):

إذا تقاربت سلسلة القوى العقدية من أجل $z = z_0 \neq 0$ فإنها تكون متقاربة مطلقاً من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $|z| < |z_0|$ ومتقاربة بانتظام من أجل جميع قيم z_1 المحققة للمتراجحة $|z| \leq |z_1| < |z_0|$

أي تكون سلسلة القوى العقدية متقاربة بانتظام في أي دائرة تقع ضمن دائرة تقاربها.

هنا أيضاً ينطبق على سلاسل القوى العقدية ما كنا قد درسناه في حالة سلاسل القوى الحقيقية، إذ يمكن البرهان على صحة النظريات التالية

نظرية (8-5):

إذا كانت سلسلة القوى العقدية متقاربة فإن مجموعها تابع مستمر من أجل جميع النقاط الواقعة داخل دائرة التقارب.

نظرية (8-6):

يمكن مكاملة سلسلة القوى العقدية حداً حداً، والسلسلة الجديدة متقاربة بانتظام إلى تكامل مجموع السلسلة الأصلية، بين أي نقطتين تقعان ضمن دائرة التقارب.

نظرية (8-7):

يمكن اشتقاق سلسلة القوى العقدية حداً حداً، والسلسلة الجديدة متقاربة بانتظام إلى مشتق مجموع السلسلة الأصلية، داخل أي دائرة تقع ضمن دائرة التقارب.

نظرية (8-8):

لتكن السلسلتان الصحيحتان $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

واللتان نصفا قطري دائرتي تقاربهما R و r على الترتيب فإذا كان $r \leq R$ فإن

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n \quad ; \quad |z| < r \qquad \text{(i)}$$

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad |z| < r \qquad \text{(ii)}$$

حيث أن الأمثال c_n تعطى بالعلاقة $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

(iii) إذا كان $g(z) \neq 0$، ومهما كانت قيم R و r، فإنه يمكن إيجاد السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ والعدد $0<s$ بحيث يكون

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad ; \quad |z| < s$$

حيث أن الأمثال d_n تحقق العلاقة

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} d_i b_{n-i} = d_0 b_n + d_1 b_{n-1} + d_2 b_{n-2} + \cdots + d_n b_0$$

وبما أن $g(z) \neq 0$ نستنتج أن $b_0 \neq 0$ وبالتالي

$$d_n = \frac{a_n - d_0 b_n - d_1 b_{n-1} - d_2 b_{n-2} - \cdots - d_{n-1} b_1}{b_0}$$

وهي العلاقة التي تمكننا من حساب كافة أمثال سلسلة القسمة.

نظرية (8-9):

إذا كان التابع العقدي $f(z)$ قابلاً للاشتقاق عدداً لا نهائياً من المرات في منطقة D تحوي الدائرة C التي مركزها c، فإنه من أجل جميع قيم z من الدائرة C يكون

$$f(z) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(z-c) + \frac{f''(c)}{2!}(z-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(z-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n + \cdots$$

أي أن مجموع سلسلة تايلور للتابع العقدي $f(z)$ يتطابق مع التابع $f(z)$ داخل الدائرة C والتي يبرهن على أنها مجال التقارب المنتظم لسلسلة تايلور للتابع $f(z)$، أي أن الباقي $R_n(z)$ لسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ يحقق ضمن الدائرة C العلاقة $\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0$.

في الحالة الخاصة إذا كان مبدأ الإحداثيات هو مركز الدائرة C حصلنا من النظرية السابقة على نشر التابع العقدي $f(z)$ وفق سلسلة ماك لوران، وهو معطى بالعبارة التالية

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots$$

أمثلة (10-8):

1- ادرس تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

الحل: لدينا بحسب الجذر النوني لكوشي

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = \lim_{n\to\infty} |z| = |z|$$

وهكذا فإن السلسلة المعطاة متقاربة من أجل جميع قيم z المحققة للمتراجحة $|z| < 1$ ،ومتباعدة من أجل قيم z المحققة للمتراجحة $|z| > 1$. أما من أجل $|z| = 1$ فإن السلسلة العقدية تتحول في كل نقطة من نقاط محيط منطقة تقاربها إلى سلسلة عددية متباعدة.

إذاً فالسلسلة العقدية المدروسة متقاربة فقط داخل دائرة التقارب $|z| = 1$.

2- ادرس تقارب السلسلة العقدية الصحيحة التالية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

الحل: بحسب دالامبير لدينا

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |z| = |z|$$

والسلسلة متقاربة داخل دائرة التقارب $|z| = 1$ ومتباعدة خارجها، أما بالنسبة لنقاط محيطها فإن السلسلة المعطاة تتحول في كل نقطة من نقاطه إلى سلسلة عددية متقاربة.

إذاً فالسلسلة العقدية الصحيحة المدروسة متقاربة داخل وعلى محيط دائرة التقارب $|z| = 1$.

3- ادرس تقارب سلسلة القوى العقدية

$$1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

الحل: لندرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ فنحصل على الدراسة المطلوبة للسلسلة المعطاة لأن حذف عدد منتهٍ من الحدود الأولى لسلسلة لا يغير من سلوكها.

في الواقع من اختبار دالامبير نجد أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ متقاربة داخل دائرة التقارب $|z| < 1$ ومتباعدة خارجها، أما على محيط دائرة التقارب فقد تكون السلسلة متباعدة كما هو الحال عند $z=-1$ لأنها تتحول إلى السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ المتباعدة، وقد تكون السلسلة متقاربة كما هو الحال عند $z=1$ لأنها تتحول إلى السلسلة التوافقية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ المتقاربة.

وهكذا فإن السلسلة $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ متقاربة داخل دائرة التقارب $|z| = 1$ وعلى بعض نقاط محيطها كالنقطة $z=1$ ومتباعدة خارج دائرة التقارب وعلى بعض نقاط محيطها كالنقطة $z=-1$.

4- ادرس تقارب سلسلة القوى

$$1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$$

الحل: من اختبار دالامبير نجد أن

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(iz)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(iz)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot |iz| = 0$$

أي أن السلسلة المعطاة متقاربة من أجل جميع قيم z من المستوي العقدي، ونصف قطر دائرة تقاربها هو $R = \infty$.

5- أوجد منشور التابع $f(z) = \text{Cosec}\, z$ من أجل $0 < |z| < \pi$.

الحل: نعلم أن

$$\text{Sin}\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad ; \quad 0 < |z| < \pi$$

(أنظر المثال (3-10-4-5)). وهكذا فإن

$$\operatorname{Cosec} z = \frac{1}{\operatorname{Sin} z} = \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots} \quad ; \quad 0 < |z| < \pi$$

وبالتالي فإن

$$\frac{z}{\operatorname{Sin} z} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots} \quad ; \quad 0 < |z| < \pi$$

أصبح لدينا حالة قسمة سلسلتي قوى عقديتين، أمثال السلسلة في البسط هي

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

وأمثال السلسلة في المقام هي

$$b_0 = 1, \; ; b_1 = 0 \quad , b_2 = -\frac{1}{3!} \quad , \; b_3 = 0 \quad ,$$

$$b_4 = \frac{1}{5!} \quad , \quad b_5 = 0 \quad , \quad b_6 = -\frac{1}{7!} \quad , \cdots$$

وبتطبيق النظرية ((iii)-8-8) نحسب كافة أمثال سلسلة القوى الناتجة عن القسمة كما يلي

$$n = 0 \quad ; \quad d_0 = \frac{a_0}{b_0} = 1$$

$$n = 1 \quad ; \quad d_1 = \frac{a_1 - d_0 b_1}{b_0} = 0$$

$$n = 2 \quad ; \quad d_2 = \frac{a_2 - d_0 b_2 - d_1 b_1}{b_0} = \frac{1}{6}$$

$$n = 3 \quad ; \quad d_3 = \frac{a_3 - d_0 b_3 - d_1 b_2 - d_2 b_1}{b_0} = 0$$

$$n = 4 \quad ; \quad d_4 = \frac{a_4 - d_0 b_4 - d_1 b_3 - d_2 b_2 - d_3 b_1}{b_0} = \frac{7}{360}$$

....

وهكذا نجد أن

$$\frac{z}{\operatorname{Sin} z} = 1 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{7}{360} z^4 + \cdots$$

حيث $0 < |z| < \pi$.

ومنه فإن

$$\operatorname{Cosec} z = \frac{1}{\operatorname{Sin} z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} z + \frac{7}{360} z^3 + \cdots$$

حيث $0 < |z| < \pi$، وهو منشور ماك لوران للتابع العقدي المعطى في المنطقة $0 < |z| < \pi$.

يسمى الجزء ذو الحدود التي يظهر فيها z بقوى موجبة بالقسم التحليلي لسلسلة ماك لوران بينما يسمى الجزء ذو الحدود التي يظهر فيها z بقوى سالبة بالقسم الرئيسي.

٩- السلاسل التابعية غير المنتهية التي تتبع لمتحولين

الشكل العام للسلاسل التابعية غير المنتهية التي تتبع لمتحولين هو

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$$

ويطبق عليها كل ما يطبق على السلاسل التابعية التي تتبع لمتحول واحد، وسنقتصر هنا على دراسة سلاسل القوى التابعة لمتحولين والتي شكلها العام

$$\begin{aligned} a_{00} &+ (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) \\ &+ (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \cdots \qquad (I) \end{aligned}$$

(لاحظ أن الثوابت مرفقة بدليلين الأول من اليسار من نفس أس المتحول x والثاني من نفس أس المتحول y).

فإذا كان التابع $f(x, y)$ ممثلاً لمجموع السلسلة (I)، ويملك مشتقات جزئية من جميع المراتب ومستمرة في منطقة مغلقة D، وكانت المشتقات الجزئية من المرتبة (n+1) موجودة ضمن المنطقة المفتوحة D (أي في المنطقة D بدون حدودها)، فإن نشر هذا التابع في سلسلة ماك لوران، أي بقوى x و y، يأخذ الشكل التالي

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(0,0) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^3 + 3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y \partial x^2}x^2 y + 3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3\right) \\ &+ \cdots + R_n(x, y) \end{aligned} \qquad (II)$$

(إن (II) تنتج عن (I) وذلك بحساب قيمة التابع $f(x,y)$ عند النقطة (0,0) ثم حساب مشتقاته الجزئية من جميع المراتب عند النقطة (0,0) أيضاً فتتعين بذلك جميع الأمثال

$$a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, \cdots$$

وبتعويض جميع هذه القيم في (I) نحصل على (II)).

أما $R_n(x,y)$ فهو باقي السلسلة ويشمل جميع الحدود التي تأتي بعد الحد النوني من السلسلة وهو يعطى بالعلاقة

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial x}x + \frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial y}y\right)^{n+1} \quad \text{(III)}$$

حيث η عدد حقيقي محصور بين x والصفر، و ζ عدد حقيقي محصور بين y والصفر، أما التركيب $\left(\frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial x}x + \frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial y}y\right)^{n+1}$ فينشر حسب نشر ذي الحدين لنيوتن-الكرخي.

يبرهن على أن $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0$ عندما تكون سلسلة ماك لوران متقاربة من التابع $f(x,y)$ ضمن منطقة مستطيلة من الشكل $|x| < A$ و $|y| < B$، أي عندما تكون المشتقات الجزئية من جميع المراتب محدودة من الأعلى ولا تزيد عن مقدار محدد M.

وبالعكس فإنه إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0$ من أجل جميع قيم x و y من المنطقة $|x| < A$ و $|y| < B$ فإن مجموع سلسلة ماك لوران للتابع $f(x,y)$ يتطابق مع هذا التابع في جميع نقاط المنطقة المذكورة.

أما بالنسبة لحدود منطقة التقارب فقد تكون السلسلة (II) متقاربة وقد تكون متباعدة وقد تكون متقاربة في بعض النقاط ومتباعدة في النقاط الأخرى.

نسمي (II) بدستور ماك لوران في النشر المنته للتابع $f(x,y)$ في جوار النقطة (0,0)، أو اختصاراً بنشر ماك لوران المنته ذي المتحولين.

أما نشر التابع $f(x,y)$ المحقق لنفس الشروط السابقة في سلسلة بقوى $x-x_0$ و $y-y_0$ أي في جوار النقطة (x_0,y_0) فيأخذ الشكل التالي

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right] + \\ & + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x^2}(x-x_0)^2(y-y_0) \right. \\ & \left. + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y^2}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3\right] \\ & + \cdots + R_n(x,y) \end{aligned} \quad \text{(IV)}$$

حيث

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(\eta,\zeta)}{\partial y}(y-y_0)\right]^{n+1} \quad \text{(V)}$$

وحيث η عدد حقيقي محصور بين x و x_0، و ζ عدد حقيقي محصور بين y و y_0.

يبرهن أيضاً على أن $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان مجموع السلسلة في الطرف الأيمن من (IV) يتطابق مع التابع $f(x,y)$ ضمن منطقة مستطيلة من الشكل $|x-x_0| < A$ و $|y-y_0| < B$.

نسمي (IV) بدستور تايلور في النشر المنته للتابع $f(x,y)$ في جوار النقطة (x_0,y_0)، أو اختصاراً بنشر تايلور المنته ذي المتحولين في جوار النقطة (x_0,y_0).

هنا أيضا قد تكون السلسلة (IV) متقاربة على حدود منطقة التقارب وقد تكون متباعدة وقد تكون متقاربة في بعض النقاط ومتباعدة في النقاط الأخرى.

مثال(1): أنشر التابع $f(x,y) = xy^2 + 2x + 2$، وفق سلسلة تايلور وبقوى x+1 و y-2.

الحل: إن التابع $f(x,y)$ يملك مشتقات جزئية من جميع المراتب ومستمرة في كل R^2 لذا يمكن نشره في سلسلة تايلور. لدينا هنا $x_0 = -1$ و $y_0 = 2$ وهكذا فإن

$f(-1,2) = -4$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y^2 + 2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(-1,2) = 6$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(-1,2) = -4$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(-1,2) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(-1,2) = 4$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(-1,2) = -2$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(-1,2) = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(-1,2) = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(-1,2) = 2$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(-1,2) = 0$$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية من المراتب الأعلى معدومة، فإنه بالتعويض في (IV) نجد أن

$$f(x,y) = -4 + \frac{1}{1!}\left[6(x+1) - 4(y-2)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(0)(x+1)^2 + (2)(4)(x+1)(y-2) - 2(y-2)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(0)(x+1)^3 + 3(0)(x+1)^2(y-2) + 3(2)(x+1)(y-2)^2 + (0)(y-2)^3\right]$$
$$= -4 + 6(x+1) - 4(y-2) + 4(x+1)(y-2) - (y-2)^2 + (x+1)(y-2)^2$$

مثال(2): انشر التابع $f(x,y) = x^2 - 4x + y + 1$ وفق سلسلة تايلور وبقوى $x-2$ و $y-3$.

الحل: إن المشتقات الجزئية من جميع المراتب للتابع $f(x,y)$ مستمرة على كل R^2، ولدينا هنا $x_0 = 2$ و $y_0 = 3$ وهكذا فإن

$f(2,3) = 0$

$$f_x(x,y) = 2x - 4 \Rightarrow f_x(2,3) = 0$$

$$f_y(x,y) = 1 \Rightarrow f_y(2,3) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(2,3) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(2,3) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = 0 \Rightarrow f_{yy}(2,3) = 0$$

واضح أن جميع المشتقات الجزئية من مراتب أعلى معدومة، وهكذا فإنه بالتعويض في (IV) نجد أن

$$f(x,y) = 0 + \frac{1}{1!}\left[(0)(x-2) + (y-3)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[2(x-2)^2 + (0)(x-2)(y-3) + (0)(y-3)^2\right]$$
$$= (y-3) + (x-2)^2$$

10ـ السلاسل المضاعفة

لتكن لدينا المصفوفة العددية (أو التابعية) التالية

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

ولنشكل من جميع عناصرها المجموع التالي $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$. نسمي هذا المجموع سلسلة عددية مضاعفة لا نهائية (أو سلسلة تابعية مضاعفة لا نهائية).

فإذا رمزنا بـ S_{mn} لمجموع عناصر هذه المصفوفة المتوضعة على تقاطع الأسطر الـ m الأولى والأعمدة الـ n الأولى منها، أي

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

ووجد عدد (تابع) S بحيث يكون $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} S_{mn} = S$

قلنا عن السلسلة المضاعفة اللانهائية بأنها متقاربة وأن مجموعها يساوي S، أي أن

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

وإلا قلنا بأنها متباعدة.

ينطبق على السلاسل العددية المضاعفة اللانهائية (السلاسل التابعية المضاعفة اللانهائية) كل ما درسناه سابقاً عن السلاسل العددية اللانهائية (السلاسل التابعية اللانهائية).

تمارين

1- ادرس التقارب المنتظم لكل من متتاليات التوابع التالية:

(i) $\left\{\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ في المجال $(1,\infty)$.

(ii) $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right\}$ في المجال $[0,\infty)$.

(iii) $\left\{\dfrac{1}{n}e^{-n^2x^2}\right\}$ في المجال $[0,\infty)$.

(iv) $\left\{n\,x\,e^{-nx^2}\right\}$ في المجال $[0,1]$.

(v) $\left\{n\,x\,e^{-nx^2}\right\}$ في المجال $[1,\infty)$.

(vi) $\left\{\dfrac{nx}{1+nx}\right\}$ في المجال $[0,\infty)$.

2- أثبت أن المتتالية التابعية $\left\{\operatorname{Sin}\dfrac{x}{n}\right\}$ متقاربة ولكن ليس بانتظام على المجال $(-\infty,+\infty)$.

3- عين مجال تقارب السلاسل التابعية التالية وادرس طبيعتها عند طرفي المجال:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^2}$. (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3n^2x^{n^2}$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$. (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$.

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$. (vi) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\operatorname{Sin}\dfrac{x}{3^n}$.

(vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$. (viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$.

4- ادرس التقارب المنتظم للسلاسل التابعية التالية:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$ في المجال $(0,1)$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$ في المجال $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ في المجال $[0,1]$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ في المجال $(-\infty, +\infty)$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ في المجال $(0, \infty)$.

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} n x}{n^2}$ في المجال $(-\infty, +\infty)$.

5- عين قيم x التي تتقارب من أجلها السلاسل التابعية التالية:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1-x)^{n-1}$. (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+3+\cdots+n}$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$. (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) x^n$.

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}$. (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n-1} x^{2n}$.

6- أوجد مجموع السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ من أجل $|x| < 1$.

إرشاد للحل: إذا فرضنا أن هذا المجموع هو $S(x)$ فإن

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \qquad \text{(علل ذلك)}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

7- أوجد مجموع كل من السلاسل التالية من أجل $|x| < 1$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^n$. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-2}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x^{n+1}$. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x^{n-2}$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1}$. (viii) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}$.

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$.

8- أوجد نصف قطر تقارب كل من السلاسل التابعية التالية:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ حيث $\alpha > 0$. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!(n+s)!} x^n$ حيث r و s أعداد صحيحة موجبة.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)(n+2)}$. (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n} x^n$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+0 \cdot 2)^n}{n}$. (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$. (x) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$.

9- إذا كان $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Cos} n x}{n^2}$ فبرهن أن

$$\int_0^{\pi/2} S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

10- في كل متتالية $\{f_n(x)\}$ من المتتاليات التابعية التالية احسب

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

في المجال المشار إليه $[a, b]$ في جانب كل متتالية، ثم تحقق فيما إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x).$$

(i) $f_n(x) = \frac{n x}{1 + n^2 x^4}$ في المجال $[0, b]$.

(ii) $f_n(x) = \frac{2x + n}{x + n}$ في المجال $[0, b]$.

(iii) $f_n(x)=\frac{nx^2+1}{nx+1}$ في المجال $[0,1]$.

11- برهن على أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(x+n)}$ تتقارب بانتظام في المجال $[0,b]$، حيث $0<b$، من تابع $S(x)$، ثم برهن أن $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$ في المجال $[0,b]$.

12- أثبت أن $\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ وذلك في المجال $0<x<2\pi$. هل تبقى هذه المساواة صحيحة في النقطة $x=0$ ؟

13- أثبت أن $\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{1+x}$ وذلك في المجال $-1<x<1$. هل تبقى هذه المساواة صحيحة في النقطة $x=1$ وفي النقطة $x=-1$ ؟

14- احسب عوامل سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ المتقاربة في المجال $|x|<1$ إذا علمت أن:

(i) مجموعها هو $S(x)=\frac{1}{1-x}$. (ii) مجموعها هو $S(x)=\frac{2}{1-x^2}$.

(iii) مجموعها هو $S(x)=\frac{2x}{1-x^2}$. (iv) مجموعها هو $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

(v) مجموعها هو $S(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$.

15- تحقق من صحة نشر التوابع الآتية بطريقة ماك لوران:

(i) $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{x^7}{7}+\cdots$

(ii) $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots$

(iii) $e^x\sin x = x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}-\frac{8x^6}{6!}+\cdots$

(iv) $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$

16- انشر التابع $f(x)=e^x$ حسب قوى $(x-2)$، ثم حسب قوى $(x+1)$ المتزايدة.

17- انشر التابع $f(x)=\ln(x+h)$ بحسب قوى x المتزايدة.

18- انشر التابع $f(x)=3x^2-14x+7$ بقوى $(x-3)$.

19- انشر التابع $f(x)=\cos x$ بقوى $(x-a)$.

20- انشر التابع $f(x)=\sqrt{x}$ بقوى $(x-4)$.

21- احسب قيمة $\sin 1$ مقدرة بالراديان ومكتفياً بأربعة حدود فقط من منشور التابع $f(x)=\sin x$ بقوى x.

22- انشر التابع $f(x)=\sin x$ بقوى $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

23- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{10+x}$ بقوى x وعين مجال تقارب النشر.

24- انشر التابع $f(x)=x^4+2x^3-8x^2+4x+4$ بقوى $(x+1)$.

25- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ بقوى $(x+1)$.

26- انشر التابع $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ بقوى x.

27- أوجد الحدود الثلاثة الأولى غير المعدومة من منشور التوابع الآتية في جوار الصفر:

(i) $f(x)=\ln\cos x$. (ii) $f(x)=\operatorname{th} x$.

(iii) $f(x)=x\cos x$. (iv) $f(x)=e^{e^x}$.

(v) $f(x)=e^x\sin 2x$. (vi) $f(x)=\ln(2+x)$.

28- احسب باستخدام سلسلة ماك لوران قيم ما يلي:

(i) $\sqrt{26}$. (ii) $\int_0^x e^{-x^2}x\,dx$ حيث $x\in\mathbf{R}$.

(iii) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ مكتفياً بخمسة حدود (استفد من التمرين (ii)).

29- انشر التابعين $f(x)=e^x$ و $f(x)=e^{-x}$ في سلسلتي ماك لوران، ثم اكتب السلسلة الناتجة عن جمعهما وطرحهما وضربهما وقسمتهما وعين في كل مرة مجموع السلسلة الناتجة ونصف قطر تقاربها.

30- اكتب ناتج جمع وطرح وضرب وقسمة سلسلتي القوى ذواتي الحدين $1+x$ و $1-x$.

وعين في كل مرة مجموع السلسلة الناتجة ونصف قطر تقاربها.

31- انشر وفق سلسلة ذي الحدين كلاً من التوابع التالية:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$. (ii) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

32- حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام سلاسل القوى:

(i) $y'-x^2-e^y=0$ من أجل شرط البدء $y=y_0$ عندما $x_0=0$.

(ii) $(1-x)y'=x^2-y$ من أجل شرط البدء $y=y_0$ عندما $x_0=0$.

(iii) $y'-x^2-y^2=-1$ من أجل شرط البدء $y_0=2$ عندما $x_0=1$.

33- اختبر تقارب المتاليات العقدية العددية التالية، وفي حالة التقارب تحقق من صحة الناتج بتطبيق تعريف نهاية متتالية عقدية عددية:

(i) $\left\{\dfrac{n^2+1+3in^2}{n^2+2}\right\}$. (ii) $\left\{\dfrac{ni^{2n}}{n^2+1}\right\}$.

(iii) $\left\{\dfrac{(3i)^{n+1}}{n^2+3}\right\}$. (iv) $\left\{\dfrac{(2+i)^n}{2n+1}\right\}$.

(v) $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\}$. (vi) $\left\{\dfrac{(1-i)^{2n}}{(3i)^n}\right\}$.

34- اختبر تقارب السلاسل العقدية العددية التالية :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{2^n\cdot n}$. (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3-4i}{4}\right)^n$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+2i)^n}{n+2}$. (iv) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{3ni^n}{(n+2i)^3}$.

(v) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{ni^n}{\ln n}$. (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^3+3^n)i^n}{3^n\cdot n^3}$.

35- أوجد منطقة تقارب كل من السلاسل التابعية العقدية التالية:

(i) $1+(z-i)+(z-i)^2+(z-i)^3+\cdots$

(ii) $\dfrac{1}{2(z+i)}+\dfrac{1}{2^2(z+i)^2}+\dfrac{1}{2^3(z+i)^3}+\cdots$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n(z-3)^n$. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,(z+4)^n$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{n-1}}{n^3\cdot 3^{n-1}}$. (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}e^n z^n$.

36- برهن أن السلسلة التابعية العقدية $\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{2^2}+\dfrac{z^2}{2^3}+\cdots$ متقاربة من أجل $|z|<2$ ، ثم احسب مجموعها.

37- عين قيم z التي تتقارب من أجلها السلسلة التابعية العقدية $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(z^n+z^{n+1}\right)$ ، ثم احسب مجموعها.

38- من أجل أي قيمة لـ z تتقارب السلسلة التابعية العقدية التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z^2+1)^n}$ ؟ وما هو مجموعها في مجال تقاربها ؟

39- انشر التابع $f(x,y)=x^2y+3y-2$ في سلسلة بقوى $(x-1)$ و $(y+2)$.

40- انشر التابع $f(x,y)=x^2-e^x-y+1$ في جوار $x=1$ و $y=2$.

الفصل الرابع

سلاسل فوريه

1-التوابع الدورية

تعريف (1-1) :

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$. نقول عن $f(x)$ أنه تابع دوري إذا وجد عدد حقيقي $t \neq 0$ يحقق الشرط التالي $f(x+t)=f(x)$ ، وذلك من أجل جميع قيم x من $\mathbb{R}$. نسمي أصغر الأعداد التي تحقق الشرط السابق بدور التابع $f(x)$ ونرمز له بـ T.

وهكذا نجد أن كلاً من التابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ هو تابع دوري دوره $T = 2\pi$ ، وكذلك فإن التابع $f(x)=tg\, x$ دوري دوره $T=\pi$ ، والتابع $f(x)=c$ يمكن أن يكون أي عدد موجب دوراً له ...

بعض خواص التوابع الدورية (1-2):

نذكر هنا بعض الخواص الهامة للتوابع الدورية والتي سنفيدها في دراستنا اللاحقة.

الخاصة الأولى (1-2-1):

إذا كان $f(x)$ تابعاً دورياً دوره T، معرفاً على المجال I، وكان n عدداً صحيحاً ما فإن $f(x+nT)=f(x)$ ، وذلك مهما يكن x من I.

الخاصة الثانية (1-2-2):

إذا كان $f(x)$ تابعاً دورياً دوره T، وكان a ثابتاً ما، فإن التابع $f(ax)$ هو تابع دوري أيضاً دوره $\frac{T}{a}$ ، وذلك من أجل أي قيمة لـ x، لأن

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)$$

فالتابع $f(x)=\sin 5x$ تابع دوري دوره $T=\frac{2\pi}{5}$.

نظرية (1-2-3):

ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً دوره $2T$ وقابلاً للمكاملة على المجال $[-T;T]$، عندئذٍ يكون هذا التابع قابلاً للمكاملة على أي مجال آخر له نفس الطول، ويكون

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+2T} f(x)\,dx$$

وذلك مهما يكن العدد a.

البرهان: لدينا
$$\int_{a}^{a+2T} f(x)\,dx = \int_{a}^{-T} f(x)\,dx + \int_{-T}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+2T} f(x)\,dx$$

فإذا فرضنا في التكامل $\int_{T}^{a+2T} f(x)\,dx$ أن $x=u+2T$ نجد أن

$$\int_{T}^{a+2T} f(x)\,dx = \int_{-T}^{a} f(u+2T)\,du = \int_{-T}^{a} f(u)\,du$$

لأن $f(x)$ دوري. وبما أن التكامل المحدد لا يتعلق برمز المتحول الموجود في العبارة المستكملة فإننا نجد أن

$$\int_{T}^{a+2T} f(x)\,dx = \int_{-T}^{a} f(u)\,du = \int_{-T}^{a} f(x)\,dx$$

وهكذا فإن

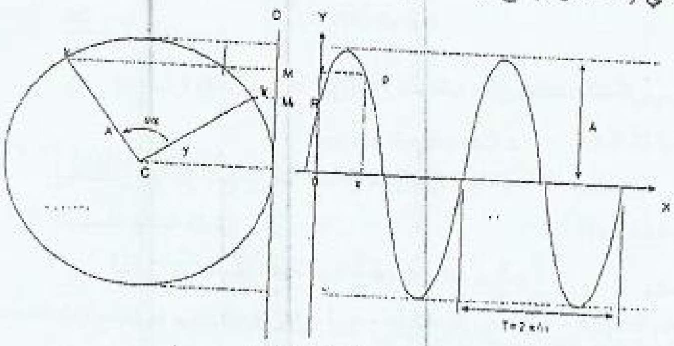
$$\int_{a}^{a+2T} f(x)\,dx = \int_{a}^{-T} f(x)\,dx + \int_{-T}^{T} f(x)\,dx + \int_{-T}^{a} f(x)\,dx = \int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

2- الاهتزاز التوافقي والسلسلة المثلثية

الاهتزاز التوافقي (2-1):

لتكن لدينا، في مستوٍ منسوب إلى جملة محاور إحداثية متعامدة oxy، دائرة مركزها c ونصف قطرها A (انظر الشكل (4-1))، ولتكن k نقطة متحركة على محيط هذه الدائرة بسرعة منتظمة قدرها ωx، وليكن D مستقيماً شاقولياً في هذا المستوي، ولنفرض أنه في لحظة البدء كانت النقطة k في الموضع k_0 بحيث يصنع نصف القطر ck_0 مع نصف قطر الدائرة المتعامد مع D زاوية قدرها γ. فإذا رمزنا بـ M لمسقط k على D في كل لحظة،

فإن حركة M على D نسميها حركة اهتزازية توافقية، وهي تمثل على جملة المحاور oxy بالمنحني γ كما هو موضح في الشكل (4-1).



الشكل (4-1)

إن النقطة p هي التي نرسم في المستوي الحركة الاهتزازية التوافقية لـ M على المستقيم D.

إن معادلة المنحني γ، بناءً على ما تقدم، تعطى بالعلاقة

$$y = A\,\mathrm{Sin}(\omega x + \gamma) \qquad (1-4)$$

حيث $-\pi \le \gamma \le \pi$ و $A \ge 0$ و $\omega > 0$.

إن هذا التابع هو في الواقع حل للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة التالية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (2-4)$$

والتي تمثل معادلة حركة النقطة M على المستقيم D.

إن العلاقة (1-4) تكتب أيضاً بالشكل

$$y = A\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\omega x + A\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,\omega x$$

فإذا فرضنا أن $a = A\,\mathrm{Sin}\,\gamma$ و $b = A\,\mathrm{Cos}\,\gamma$ نجد أن

$$y = a\,\mathrm{Cos}\,\omega x + b\,\mathrm{Sin}\,\omega x \qquad (3-4)$$

نسمي y بتابع الحركة الاهتزازية التوافقية للنقطة M، كما نسمي ω النبضة.

γ الطور البدائي ، حيث $tg\,\gamma = \frac{a}{b}$.

$\omega x + \gamma$ الطور.

A سعة الموجة، حيث $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

الدور، $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

إن العبارة (3-4) تعني أن كل إهتزازة توافقية يمكن كتابتها بالشكل

$$a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

وبالعكس فإن كل تابع من هذا الشكل يمثل إهتزازة توافقية.

السلسلة المثلثية (2-2):

نسمي كل سلسلة تابعية من الشكل

$$A_0 + A_1\sin(\omega x + \gamma_1) + A_2\sin(2\omega x + \gamma_2) + A_3\sin(3\omega x + \gamma_3) + \cdots$$

سلسلة مثلثية. فإذا كتبنا كل حد من حدودها على شكل العبارة (3-4) مع الفرض بأن الدور يساوي 2T، أي أن $\omega = \frac{\pi}{T}$ ، حصلنا على السلسلة المثلثية

$$\frac{a_0}{2} + \left(a_1\cos\frac{\pi}{T}x + b_1\sin\frac{\pi}{T}x\right) + \left(a_2\cos 2\frac{\pi}{T}x + b_2\sin 2\frac{\pi}{T}x\right) + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{T}x + b_n\sin n\frac{\pi}{T}x\right) \qquad (4\text{-}4)$$

نسمي الثوابت a_0 ، a_n ، b_n ، حيث n=1,2,3,... ، معاملات السلسلة المثلثية ، وقد وضعنا الحد الثابت في هذه السلسلة على الشكل $\frac{a_0}{2}$ لأن ذلك سيفيدنا لاحقاً عند حساب معاملاتها.

3- سلسلة فوريه

تعريف (3-1):

ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً دوره 2T. إذا أمكن إيجاد سلسلة مثلثية متقاربة بانتظام على المجال $[-T, T]$ ومجموعها يساوي هذا التابع، أي أن

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{T}x + b_n\sin n\frac{\pi}{T}x\right)$$

فإننا نطلق على هذه السلسلة اسم سلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

حساب معاملات سلسلة فوريه (3-2):

قبل عرض النظرية التي تحدد قيم معاملات سلسلة فوريه لتابع دوري سنذكر العلاقات المساعدة التالية.

ملاحظات (3-2-1):

1- من أجل أي عدد صحيح $n \neq 0$ لدينا

$$\int_{-T}^{T}\sin n\frac{\pi}{T}x\,dx = 0 \qquad \int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx = 0$$

$$\int_{-T}^{T}\sin^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx = T \qquad \int_{-T}^{T}\cos^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx = T$$

البرهان: لدينا

$$\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx = \frac{T}{n\pi}\left[\sin n\frac{\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} = 0$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\int_{-T}^{T}\sin n\frac{\pi}{T}x\,dx = 0$$

بالنسبة للتكامل $\int_{-T}^{T}\cos^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx$ نجد ، بتطبيق دستور التراجع التالي

$$\int\cos^m x\,dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1}x\sin x + \frac{m-1}{m}\int\cos^{m-2}x\,dx$$

أن

$$\int_{-T}^{T}\cos^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx = \frac{1}{2}\left[\cos n\frac{\pi}{T}x\sin n\frac{\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} + \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}dx = \frac{1}{2}[x]_{-T}^{T} = T$$

كذلك فإنه من دستور التراجع التالي

$$\int\sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}x\,dx$$

نجد أن $\int_{-T}^{T}\sin^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx = T$

2- من أجل أي عددين صحيحين n و m ، حيث $n \neq m$ ، نجد ، بالاستفادة من العلاقتين المثلثيتين

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

أن

$$\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\cos m\frac{\pi}{T}x\,dx = 0$$

$$\int_{-T}^{T}\sin n\frac{\pi}{T}x\sin m\frac{\pi}{T}x\,dx = 0$$

البرهان: في الواقع إن

$$\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\cos m\frac{\pi}{T}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\left[\cos(n+m)\frac{\pi}{T}x+\cos(n-m)\frac{\pi}{T}x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\frac{\pi}{T}x+\frac{T}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\frac{\pi}{T}x\right]_{-T}^{T}=0$$

وبطريقة مماثلة نبرهن صحة التكامل الثاني.

3- من أجل أي عددين n و m واستناداً إلى العلاقة المثلثية

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

نجد أن

$$\int_{-T}^{T}\sin n\frac{\pi}{T}x\cos m\frac{\pi}{T}x\,dx = 0$$

تبين العلاقات المساعدة السابقة أن تكامل جداء أي تابعين مختلفين في المجال $[-T,T]$ يساوي الصفر وهذا يذكرنا بالتعريف التالي

تعريف (3-2-2):

نقول عن تابعين $f(x)$ و $g(x)$ أنهما متعامدان في المجال $[a,b]$ إذا كان

$$\int_{a}^{b}f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$$

وسنعود لاحقا لهذا المفهوم.

نظرية (3-2-3):

إذا كانت السلسلة المثلثية (4-4) متقاربة بانتظام على المجال المغلق والمحدود $[-T,T]$ من التابع $f(x)$ أي أن

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{T}x+b_n\sin n\frac{\pi}{T}x\right) \tag{5-4}$$

فإن معاملات هذه السلسلة (والتي تدعى، كما رأينا، سلسلة فوريه للتابع $f(x)$) تعطى بالعلاقات التالية

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx \\ b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin n\frac{\pi}{T}x\,dx \end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

حيث $n=1,2,3,\dots$ ، والتي تسمى صيغ أولر – فوريه.

البرهان: لنكتب العلاقة (5-4) باستخدام m بدلا من n فنحصل على العلاقة

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos m\frac{\pi}{T}x+b_m\sin m\frac{\pi}{T}x\right) \tag{7-4}$$

وبما أن السلسلة المثلثية متقاربة بانتظام على المجال $[-T,T]$ فإنه بمكاملتها حدا حدا نحصل من العلاقة (7-4) على المساواة التالية

$$\int_{-T}^{T}f(x)dx=\int_{-T}^{T}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_{-T}^{T}\cos m\frac{\pi}{T}x\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\int_{-T}^{T}\sin m\frac{\pi}{T}x\,dx$$

إن جميع التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة، عدا التكامل الأول، معلومة بحسب العلاقات المساعدة في الملاحظات (3-2-1)، وبما أن

$$\int_{-T}^{T}\frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}[x]_{-T}^{T} = a_0 T$$

فإن

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

وهذا يؤكد صحة العلاقة الأولى من صيغ أولر – فوريه من أجل n=0. وللتحقق من صحتها من أجل أي قيمة لـ n مختلفة عن الصفر نضرب طرفي (4-7) بـ $\cos n\frac{\pi}{T}x$ ، وبما أن السلسلة الناتجة بعد الضرب متقاربة بانتظام أيضاً على المجال $[-T,T]$ (*)، فإنه بمكاملتها حداً حداً نجد أن

$$\int_{-T}^{T} f(x)\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\cos m\frac{\pi}{T}x\,dx$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} b_m\int_{-T}^{T}\cos n\frac{\pi}{T}x\,\sin m\frac{\pi}{T}x\,dx$$

وبحسب العلاقات المساعدة نجد أن جميع التكاملات الواردة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة معدومة باستثناء التكامل ذو المعامل a_n وهو من الشكل $\int_{-T}^{T}\cos^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx$ وقيمته تساوي T ، وهكذا نجد أن $a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos n\frac{\pi}{T}x\,dx$.

أخيراً، للبرهان على صحة العلاقة الثانية من (4-6) نضرب طرفي العلاقة (4-7) بالتابع $\sin n\frac{\pi}{T}x$ ثم نكامل طرفي المساواة الناتجة على المجال $[-T,T]$ فنجد أن جميع التكاملات في الطرف الأيمن منها معدومة باستثناء الحد

$$b_n\int_{-T}^{T}\sin^2 n\frac{\pi}{T}x\,dx = b_n T$$

وبالتالي نجد أن

(*) نظرية: إذا كانت السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال $[a,b]$ وكان $g(x)$ تابعاً محدوداً على هذا المجال فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال $[a,b]$.

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin n\frac{\pi}{T}x\,dx$$

وبذلك يتم المطلوب.

سلسلة فوريه لتابع معطى f(x) (3-3):

إذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على المجال المغلق والمحدود $[-T,T]$ فإنه بتطبيق النظرية (3-2-3) يمكننا تشكيل سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ دون مناقشة موضوع تقارب هذه السلسلة من التابع $f(x)$ ، لذا نكتب

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{T}x + b_n\sin n\frac{\pi}{T}x\right)$$

فإذا كانت هذه السلسلة متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ فإن مجموعها عندئذ يساوي $f(x)$ في منطقة تقاربها المنتظم، وبالتالي نستطيع أن نكتب

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{T}x + b_n\sin n\frac{\pi}{T}x\right)$$

سنبحث الآن في الشروط التي يجب توفرها لكي يكون مجموع سلسلة فوريه المثلثية لتابع ما يتطابق مع هذا التابع.

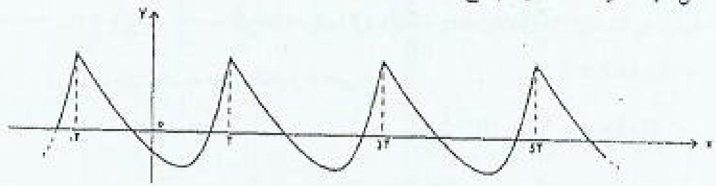
التمديد الدوري لتابع (3-3-1):

في الواقع إن ما سبق يبين أنه حتى يكون ممكناً تمثيل التابع $f(x)$ في سلسلة فوريه على المجال $[-T,T]$ يجب أن يكون $f(x)$ قابلاً للمكاملة على هذا المجال هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى وحتى ينطابق مجموع هذه السلسلة مع التابع $f(x)$ نلاحظ أنه إذا فرضنا أن سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ متقاربة في نقطة ما مثل x_0 ، وبما أن التوابع $\cos n\frac{\pi}{T}x$ و $\sin n\frac{\pi}{T}x$ من أجل $n=1,2,3,...$ تملك دوراً مشتركاً هو 2T فإن مجموع السلسلة في النقطة x_0 والنقطة x_0+2T سيكون واحداً. وهكذا فإنه إذا أردنا لسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ أن تتقارب من هذا التابع من أجل جميع قيم x من المجال $[-T,T]$ فإنه من الضروري أن يكون $f(x+2T)=f(x)$ أي أن يكون التابع $f(x)$ دورياً ودوره يساوي 2T.

فإذا كان $f(x)$ معرفاً فقط على المجال $[a,b]$ المحتوى في المجال $(-T,T)$ وغير معرف خارجه فإنه يمكن الاستعانة بتابع مساعد $f_1(x)$ يتطابق مع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ومعرف بشكل اختياري خارج $[a,b]$ على المجال $(-T,T)$ على أن يكون قابلاً للمكاملة على هذا المجال، وعلى أن يكون $f_1(x+2T)=f_1(x)$ ، أي أن $f_1(x)$ تابع دوري ودوره يساوي $2T$. عندئذٍ نشكل سلسلة فوريه للتابع $f_1(x)$ والتي تستخدم للتعبير عن التابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ حيث $f_1(x)=f(x)$ ، وذلك إذا كانت هذه السلسلة تتقارب من $f_1(x)$ على المجال $[a,b]$.

أما إذا كان $f(x)$ غير دوري ومعرفاً على المجال $[a,b]$ الذي يحوي المجال $[-T,T]$ ، فإنه يمكن إنشاء تابع $\varphi(x)$ يطابق $f(x)$ على المجال $[-T,T]$ ويمتلك دوراً يساوي $2T$. فإذا كانت سلسلة فوريه للتابع $\varphi(x)$ متقاربة من $\varphi(x)$ على المجال $[-T,T]$ فإنها تسمح بالتعبير عن $f(x)$ على هذا المجال . إن عملية إنشاء التابع $\varphi(x)$ تسمى بالتمديد الدوري للتابع $f(x)$.

نلاحظ هنا أنه إذا كان $f(-T)=f(T)$ فإن التمديد الدوري للتابع $f(x)$ لا يشكل أي صعوبة كما هو موضح في الشكل (2-4).



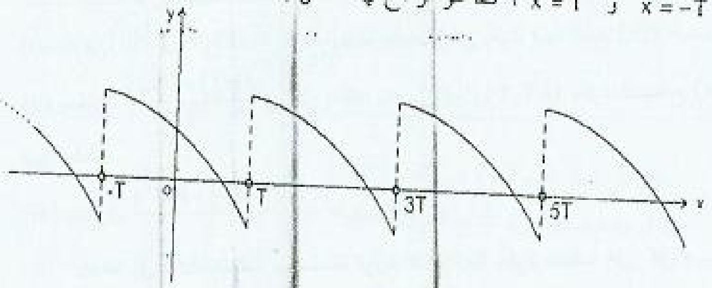
الشكل (2-4)

أما إذا كان $f(-T)\neq f(T)$ فإن التمديد المطلوب لا يتم إذا لم تتغير قيمتا f عند النقطتين $x=-T$ و $x=T$ ، وذلك بحذف هاتين القيمتين وإعطاء التابع $f(x)$ قيمتان منسوبتان عند النقطتين $x=-T$ و $x=T$ ، وهذا ممكن لأن قيمة معاملات فوريه لا تتغير عند تغير قيم التابع عند عدد منته من النقاط.

بقي أن نشير أنه في حالة $f(T)\neq f(-T)$ ، إذا كان $f(x)$ مستمراً على المجال $[-T,T]$ فإن التمديد الدوري للتابع $f(x)$ على المحور الحقيقي سوف يعاني من انقطاعات في جميع النقاط

$$x=(2k+1)T \quad ; \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

وذلك بغض النظر عن الشكل الذي نستبدل فيه قيمتي التابع $f(x)$ في النقطتين $x=-T$ و $x=T$ ، كما هو موضح في الشكل (3-4)



الشكل (3-4)

تعريف (2-3-3):

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال I ولتكن $x_0 \in I$ نقطة انقطاع للتابع

(i) إذا كانت النهايتان $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ و $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ موجودتين ومحدودتين قلنا عن x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $f(x)$ ، وعندئذٍ نقول أيضاً أن للتابع $f(x)$ نقزة عند النقطة x_0 مقدارها δ تعطى بالعلاقة

$$\delta=f(x_0^+)-f(x_0^-)$$

(ii) إذا كانت إحدى النهايتين $f(x_0^+)$ أو $f(x_0^-)$ غير موجودة قلنا عن x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الثاني للتابع $f(x)$.

شروط ديرخليه (3-3-3):

تكون سلسلة فوريه المقابلة للتابع $f(x)$ متقاربة ومجموعها مساوٍ لـ $f(x)$ على المجال $(-T,T)$ إذا تحققت الشروط التالية:

(i) التابع $f(x)$ مستمر على المجال $(-T,T)$ ، أو ذو عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول داخل المجال المذكور، وفي هذه الحالة يكون التابع $f(x)$ ومشتقه مستمرين على المجالات الجزئية من المجال $(-T,T)$ المحددة بنقاط الانقطاع هذه.

(ii) التابع $f(x)$ دوري خارج المجال $(-T,T)$ ودوره يساوي $2T$.

نظرية ديرخليه (3-3-4):

إذا حقق التابع $f(x)$ المعطى في المجال $(-T,T)$ شروط ديرخليه في هذا المجال كانت سلسلة فوريه الممثلة لهذا التابع متقاربة في كل المجال $(-T,T)$ ومجموعها

(i) يساوي $f(x)$ في جميع النقاط الواقعة داخل المجال والتي يكون فيها التابع $f(x)$ مستمراً.

(ii) يساوي $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ في كل نقطة x_0 من المجال $(-T,T)$ يكون التابع $f(x)$ فيها منقطعاً.

(iii) يساوي $\dfrac{f(-T^+)+f(T^-)}{2}$ عند طرفي المجال.

إضافة إلى ذلك فإن تقارب سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ يكون منتظماً على كل مجال جزئي من $(-T,T)$ واقع مع طرفيه في مجال استمرار التابع $f(x)$.

ملاحظة (3-3-5):

إذا كان التابع $f(x)$ يتألف ضمن المجال $(-T,T)$ من عدة منحنيات كل منها معطى بتابع خاص مستمر ومطرد على مجال جزئي من هذا المجال، كأن يكون $f(x)$ مثلاً معرفاً بالشكل

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ; -T<x<r \\ f_2(x) & ; \quad r<x<s \\ f_3(x) & ; \quad s<x<T \end{cases}$$

فإن معاملات فوريه للتابع $f(x)$ تعطى عندئذ بالعلاقات التالية

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{Cos} n\frac{\pi}{T}x\,dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T}^{r} f_1(x)\operatorname{Cos} n\frac{\pi}{T}x\,dx+\frac{1}{T}\int_{r}^{s} f_2(x)\operatorname{Cos} n\frac{\pi}{T}x\,dx+\frac{1}{T}\int_{s}^{T} f_3(x)\operatorname{Cos} n\frac{\pi}{T}x\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{Sin} n\frac{\pi}{T}x\,dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T}^{r} f_1(x)\operatorname{Sin} n\frac{\pi}{T}x\,dx+\frac{1}{T}\int_{r}^{s} f_2(x)\operatorname{Sin} n\frac{\pi}{T}x\,dx+\frac{1}{T}\int_{s}^{T} f_3(x)\operatorname{Sin} n\frac{\pi}{T}x\,dx$$

سنرمز لهذه العلاقات بالثنائية (4-8).

أمثلة (3-4):

1- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x$ حيث $-\pi<x<\pi$.

الحل: إن التابع يحقق شروط ديرخليه على المجال $|x|<\pi$.ومن صيغ أولر - فوريه نجد أن

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{Cos} nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{Cos} nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x\operatorname{Sin} nx\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}\left[\operatorname{Cos} nx\right]_{-\pi}^{\pi}=0 \qquad \text{(مكاملة بالتجزئة)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{Sin} nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{Sin} nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[x\operatorname{Cos} nx\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}\left[\operatorname{Sin} nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\operatorname{Cos} n\pi=-\frac{2}{n}(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n} \qquad ; \quad n\geq 1$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع المعطى هي

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{Sin} nx$$

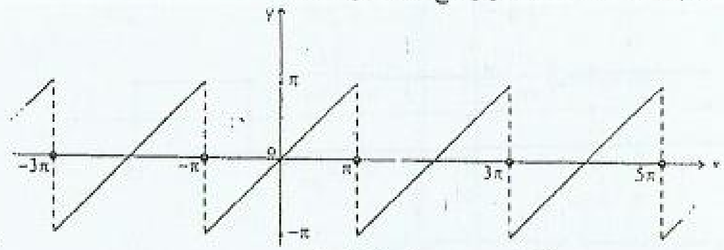
$$=2\left(\operatorname{Sin} x-\frac{\operatorname{Sin} 2x}{2}+\frac{\operatorname{Sin} 3x}{3}-\cdots\right) \qquad ; \quad -\pi<x<\pi$$

ندعى هذه السلسلة بسلسلة الجيوب وهي تتقارب من x ضمن المجال $(-\pi,\pi)$. إن المنحني البياني لهذا التابع بعد تمديده دورياً على طول المحور ox ممثل بالشكل (4-4). وبما أن

$$f(-\pi)=-\pi\neq\pi=f(\pi)$$

فإن هذا التمديد الدوري يعاني من انقطاعات في جميع النقاط $x=(2k+1)\pi$ حيث

، $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ ، كما هو واضح في الشكل (4-4) .



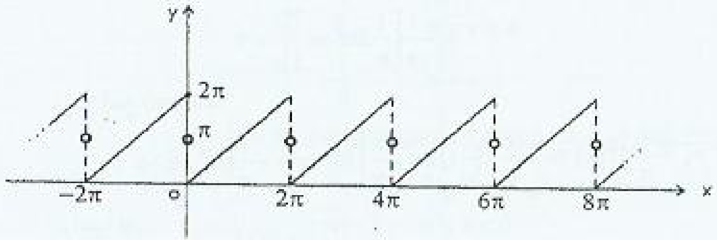
الشكل (4-4)

إن سلسلة فوريه للتمديد الدوري هي نفس سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ على المجال $(-\pi,\pi)$ ومجموعها يساوي x داخل هذا المجال ، أما على طرفي هذا المجال ، كما في جميع نقاط الانقطاع المذكورة ، فمجموعها يعطى ، بحسب نظرية ديرخليه ، بالعلاقة

$$\frac{f(-\pi^{+})+f(\pi^{-})}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

2- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x$ على المجال $0 < x < 2\pi$.

الحل: لنمدد التابع $f(x)$ دورياً على طول المحور ox فنحصل على تابع دوري يمثله الخط البياني في الشكل (5-4) وهو يعاني انقطاعات في جميع النقاط $x = 2k\pi$ حيث $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$.



الشكل (5-4)

ولدينا

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=-\frac{2}{n}$$

وبما أن التابع $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه فإن

$$f(x)=x=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx$$

$$=\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right)$$

وذلك من أجل جميع قيم x من المجال $(0,2\pi)$.

3- أوجد سلسلة فوريه للتابع الدوري التالي

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \ -5<x<0\\ 3 & ; \ 0<x<5\end{cases}$$

ثم عين قيم التابع في النقاط $x=\pm5$ و $x=0$ كي يصبح مجموع سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ مساوياً لـ $f(x)$ على المجال $[-5,5]$.

الحل: نلاحظ أولاً أن النهايتين $f(0^{+})=\lim_{x\to0^{+}}f(x)=3$ و $f(0^{-})=\lim_{x\to0^{-}}f(x)=0$ موجودتان ومحدودتان أي أن النقطة $x=0 \in (-5,5)$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $f(x)$ ، كما أن التابع $f(x)$ ومشتقه مستمران على المجالين الجزئيين (-5,0) و (0,5) من المجال (-5,5) المعطى عليه التابع . إذاً فالتابع $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه ، ولحساب معاملات فوريه له نطبق العلاقات (8-4) . لدينا

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos n\frac{\pi}{5}x\,dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\cos n\frac{\pi}{5}x\,dx+\frac{1}{5}\int_{0}^{5}3\cos n\frac{\pi}{5}x\,dx$$

$$=\frac{3}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{5}x\right]_0^5=0$$

ومن أجل n=0 لدينا

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\,dx + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\,dx = \frac{3}{5}[x]_0^5 = 3$$

أخيراً فإن

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,\sin n\frac{\pi}{5}x\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\,\sin n\frac{\pi}{5}x\,dx + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\,\sin n\frac{\pi}{5}x\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{5}x\right]_0^5 = -\frac{3}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \dfrac{6}{n\pi} & ;\ n \text{ فردي} \\ 0 & ;\ n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع المعطى هي

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{5}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{5}x + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{5}x + \cdots\right)$$

وهي متقاربة ومجموعها يساوي التابع $f(x)$ في جميع نقاط استمرار التابع ضمن المجال $(-5,5)$، أما عند نقطة الانقطاع $x=0$ فمجموعها ، بحسب نظرية ديرخليه ، يعطى بالعلاقة

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

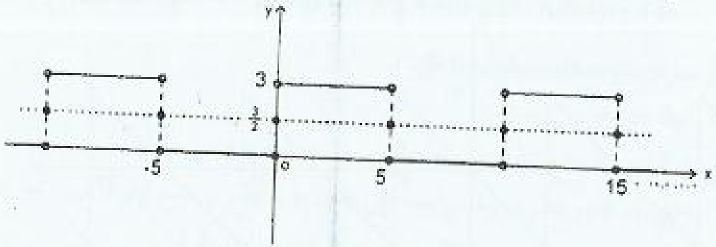
وأما عند طرفي المجال، أي عند النقطتين $x = \pm 5$ فمجموعها ، بحسب نفس النظرية ، يعطى بالعلاقة

$$\frac{f(-5^+)+f(5^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

وهكذا فإنه حتى يتطابق مجموع سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ مع قيمة التابع $f(x)$ على المجال $[-5,5]$ يجب أن نعرف $f(x)$ على هذا المجال بالشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & ;\ x = -5 \\ 0 & ;\ -5 < x < 0 \\ \dfrac{3}{2} & ;\ x = 0 \\ 3 & ;\ 0 < x < 5 \\ \dfrac{3}{2} & ;\ x = 5 \end{cases}$$

وفي هذه الحالة يكون الخط البياني للتابع $f(x)$ بعد تمديده دورياً على طول المحور ox ممثلاً في الشكل (4-6).



الشكل (4-6)

4- أوجد سلسلة فوريه للتابع الدوري التالي

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;\ -\pi < x < 0 \\ 0 & ;\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

ثم عين قيم التابع في النقاط $x = \pm\pi$ و $x = 0$ حتى يتطابق مجموع سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ مع التابع $f(x)$ على طول المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل: إن النقطة $x=0$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $f(x)$ ، كما أن التابع $f(x)$ ومشتقه يحققان شروط ديرخليه على المجالين $(-\pi,0)$ و $(0,\pi)$.

لنحسب الآن معاملات فوريه للتابع $f(x)$ وفق العلاقات (4-8). لدينا

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(0)\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} = 0$$

ومن أجل $n=0$ لدينا

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(0)\,dx = -\frac{1}{\pi}[x]_{-\pi}^{0} = -1$$

وأخيراً فإن

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sin}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,\text{Sin}\,nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(0)\,\text{Sin}\,nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\text{Cos}\,nx\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}(1-\text{Cos}\,n\pi)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع المعطى هي

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{Sin}\,x + \frac{1}{3}\text{Sin}\,3x + \frac{1}{5}\text{Sin}\,5x + \cdots\right)$$

ومجموعها يساوي $f(x)$ في جميع نقاط استمرار التابع داخل المجال $(-\pi,\pi)$، أما عند النقطة $x=0$ فمجموعها هو

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

وعند طرفي المجال فمجموعها هو

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

وهكذا فإنه إذا عرفنا التابع $f(x)$ على النحو التالي

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & ; \quad x = -\pi \\ -1 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} & ; \quad x = 0 \\ 0 & ; \quad 0 < x < \pi \\ -\dfrac{1}{2} & ; \quad x = \pi \end{cases}$$

فإن سلسلة فوريه له ستتطابق مع قيمته على طول المجال $[-\pi,\pi]$.

5- أوجد سلسلة فوريه التي تمثل التابع الدوري

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

ثم أوجد مجموع السلسلة العددية $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$.

الحل: إن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه على المجال $(-\pi,\pi)$ و $x=0$ نقطة انقطاع من النوع الأول له في هذا المجال. ولدينا

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Cos}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,\text{Cos}\,nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\text{Cos}\,nx\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{n}\text{Sin}\,nx\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\left[x\,\text{Sin}\,nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\text{Sin}\,nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[\text{Cos}\,nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\text{Cos}\,n\pi - 1)$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = -[x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sin}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,\text{Sin}\,nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\text{Sin}\,nx\,dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{n}\text{Cos}\,nx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[x\,\text{Cos}\,nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\text{Sin}\,nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}(1-\text{Cos}\,n\pi) - \frac{1}{n}\text{Cos}\,n\pi = \frac{1}{n}(1-2\,\text{Cos}\,n\pi) = \frac{1}{n}\left(1-2(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} 3/n & ; \quad n \text{ فردي} \\ -1/n & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع المعطى هي

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\text{Cos}\,x + \frac{\text{Cos}\,3x}{3^2} + \frac{\text{Cos}\,5x}{5^2} + \cdots\right)$$

$$+ 3\,\text{Sin}\,x - \frac{\text{Sin}\,2x}{2} + \frac{3\,\text{Sin}\,3x}{3} - \frac{\text{Sin}\,4x}{4} + \cdots$$

ومجموعها يساوي $f(x)$ في جميع نقاط المجال $(-\pi,\pi)$ التي يكون فيها التابع $f(x)$ مستمراً.

عند النقطة $x=0$ تتقارب السلسلة من $\dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

أما عند طرفي المجال فهي تتقارب من $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$.

لإيجاد مجموع السلسلة العددية $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

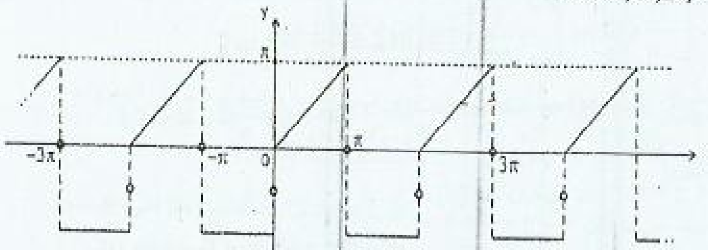
نلاحظ أنه إذا فرضنا أن $f(0)=-\frac{\pi}{2}$ ، أي أن قيمة التابع f(x) عند النقطة x=0 تساوي إلى مجموع سلسلة فوريه له عند تلك النقطة ، فإنه بتعويض x=0 في سلسلة فوريه للتابع f(x) نجد أن

$$-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

وهو المطلوب. أما الخط البياني للتابع f(x) بعد تمديده دورياً على طول المحور ox فهو ممثل في الشكل (7-4) ويعاني من انقطاعات في جميع النقاط $x=k\pi$ حيث $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.



الشكل (7-4)

6- أوجد سلسلة فوريه للتابع الدوري المعرف بالشكل التالي

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi<x<0\\ \sin x & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

ثم احسب مجموع السلسلة $\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}+\cdots$

الحل: إن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه في المجال $(-\pi,\pi)$ ، والنقطة x=0 هي نقطة الانقطاع من النوع الأول للتابع f(x) في هذا المجال. لدينا

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(1+n)x}{1+n}d(1+n)x+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(1-n)x}{1-n}d(1-n)x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(\pi+n\pi)}{1+n}+\frac{\cos(\pi-n\pi)}{1-n}-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right)$$

وهكذا نجد أن $a_n=\frac{1+\cos n\pi}{(1-n^2)\pi}$

من أجل n=0 نجد مباشرة ، من الصيغة الأخيرة لـ a_n ، أن $a_0=\frac{2}{\pi}$ ، على حين أن المعامل a_1 لا يمكن حسابه من a_n مباشرة ، لذا نطبق دستور حساب a_n من جديد من أجل n=1 فنجد أن

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\cos x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,d(\sin x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(1-n)x-\cos(1+n)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(1-n)x}{1-n}d(1-n)x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(1+n)x}{1+n}d(1+n)x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{Sin}(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{Sin}(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi}$$

نلاحظ هنا أنه من أجل $n \neq 1$ فإن $b_n = 0$، أما من أجل $n=1$ فــإن الحد الأول من الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة يصبح من الشكل $\frac{0}{0}$، لذا فإنه من أجل حســاب المعامل b_1 نطبق دستور حساب b_n من جديد من أجل $n=1$ فنجد أن

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Sin}\,x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\,\text{Sin}\,x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\text{Sin}^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{1}{2}\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx\right] \qquad \text{(وذلك بحسب دساتير التراجع)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع المعطى هي

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\text{Sin}\,x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\text{Cos}\,n\pi}{(1-n^2)\pi}\right)\cdot\text{Cos}\,nx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\text{Sin}\,x}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\text{Cos}\,2x}{3} + \frac{\text{Cos}\,4x}{15} + \frac{\text{Cos}\,6x}{35} + \frac{\text{Cos}\,8x}{63} + \cdots\right)$$

ومجموعها يساوي $f(x)$ في جميع نقاط المجال $(-\pi,\pi)$ التي يكون فيها التابع $f(x)$ مستمراً، أما مجموعها عند طرفي المجال وعند نقطة الانقطاع فيساوي الصفر.

لحساب مجموع السلسلة $\frac{1}{1\times3} - \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} - \frac{1}{7\times9} + \cdots$

نلاحظ أن $x = \frac{\pi}{2} \in (-\pi,\pi)$ هي نقطة استمرار للتابع وبالتالي فإن مجموع سلسلة فوريه عندها يساوي إلى قيمة التابع في تلك النقطة وبما أن $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ فإن

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \cdots\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi-2}{2\pi} = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \cdots\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots = \frac{1}{1\times3} - \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} - \frac{1}{7\times9} + \cdots$$

سلاسل الجيوب وسلاسل التجيبات (جيوب التمام) لفوريه ذات النصف مجال (3-5):

تعريف (3-5-1):

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال I. نقول أن $f(x)$ تابع فردي إذا حقق الشرط

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{وذلك لجميع قيم } x \text{ من } I.$$

ونقول أن $f(x)$ تابع زوجي إذا حقق الشرط

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{وذلك لجميع قيم } x \text{ من } I.$$

بعض خواص التوابع الفردية والتوابع الزوجية (3-5-2):

1- جداء تابعين زوجيين أو تابعين فرديين هو تابع زوجي.

2- جداء تابع زوجي بتابع فردي هو تابع فردي.

3- إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[-T,T]$ فإن

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \int_{-T}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

فإذا أجرينا تغيراً في المتحول في التكامل الأول من الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة على النحو التالي $x=-x$، لوجدنا أن

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = -\int_{T}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(-x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx \qquad (9\text{-}4)$$

فإذا كان $f(x)$ فردياً نجد من (9-4) أن

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0 \qquad (10\text{-}4)$$

أما إذا كان $f(x)$ زوجياً فإننا نجد من (9-4) أن

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{T} f(x)\,dx \qquad (11\text{-}4)$$

حساب معاملات سلاسل فوريه للتوابع الفردية وللتوابع الزوجية (3-5-3):

إن سلاسل فوريه للتوابع الفردية والتوابع الزوجية تأخذ أشكالاً أبسط مما هي عليه في الحالة العامة فإذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة ضمن المجال $(-T,T)$، وكان $f(x)$ تابعاً

فردياً ، وبما أن $\text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x$ تابع زوجي ، فإن جدائهما $f(x)\,\text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x$ تابع فردي ، وبالتالي ، وحسب (4-10)، يكون

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x\, dx = 0$$

على حين أن الجداء $f(x)\,\text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x$ تابع زوجي ، لأن $\text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x$ تابع فـــردي ، وهكذا، وبحسب (4-11) ، يكون

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x\, dx = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,\text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x\, dx$$

إذاً ، فإن معاملات سلسلة فوريه للتابع الفردي هي

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,\text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}4)$$

وبالتالي تكون سلسلة فوريه المقابلة للتابع $f(x)$ ضمن المجال $(-T,T)$ هي

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x$$

فإذا كان $f(x)$ محققاً لشروط ديرخليه على المجال المذكور فإن

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \text{Sin}\, n\frac{\pi}{T}x \qquad (13\text{-}4)$$

أي أن سلسلة فوريه للتابع الفردي تحتوي فقط على توابع الجيوب لذا تدعى أيضاً بسلسلة الجيوب للتابع $f(x)$.

بمناقشة مماثلة نجد أنه إذا كان $f(x)$ تابعاً زوجياً فإن معاملات سلسلة فوريه المقابلة له على المجال $(-T,T)$ هي

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,\text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x\, dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}4)$$

وبالتالي فإن

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x$$

فإذا كان $f(x)$ محققاً لشروط ديرخليه على المجال المذكور فإن

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \text{Cos}\, n\frac{\pi}{T}x \qquad (15\text{-}4)$$

أي أن سلسلة فوريه للتابع الزوجي تحوي فقط على توابع التجيبات (توابع جيوب التمام) ، لذا تدعى أيضاً بسلسلة التجيبات (جيوب التمام) للتابع $f(x)$.

ملاحظة (4-5-3):

إن أي تابع $f(x)$ معين على المجال $(0,T)$ ومحقق لشروط ديرخليه يمكن أن ينشر وفق سلسلة جيوب أو سلسلة تجيبات لفوريه متقاربة إلى التابع $f(x)$ في ذلك المجال.

فللحصول على سلسلة الجيوب لفوريه للتابع $f(x)$ نمدده على المجال $(-T,0)$ وبحيث يكون هذا التمديد فردياً ، أي نعين تابعاً جديداً $F(x)$ بحيث يكون

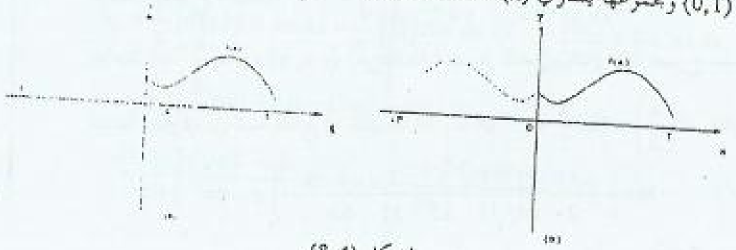
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad 0 < x < T \\ -f(|x|) & ; \quad -T < x < 0 \end{cases} \qquad (16\text{-}4)$$

إن سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ في المجال $(-T,T)$ تعبر عن التابع $f(x)$ في المجال $(0,T)$ ومجموعها يساوي $f(x)$ عندما $0<x<T$.

للحصول على سلسلة التجيبات لفوريه للتابع $f(x)$ نمدده على المجال $(-T,0)$ وبحيث يكون هذا التمديد زوجياً ، أي نعين تابعاً جديداً $F(x)$ بحيث يكون

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad 0 < x < T \\ f(|x|) & ; \quad -T < x < 0 \end{cases} \qquad (17\text{-}4)$$

وهنا أيضاً تكون سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ في المجال $(-T,T)$ ممثلة للتابع $f(x)$ في المجال $(0,T)$ ومجموعها يساوي $f(x)$ عندما $0<x<T$.



الشكل (4-8)

إن الشكلين (a-8-4) و (b-8-4) يعطيان مثالا عن تمديد فردي ومثالا عن تمديد زوجي لتابع f(x) معرف على المجال (0,T)

أشكال أخرى لسلسلة فوريه (3-5-5):

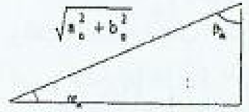
وجدنا أن أي تابع دوري f(x) يحقق لشروط ديرخليه في المجال (-T,T) ينشر وفق سلسلة فوريه من الشكل

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{T}x+b_n \sin n\frac{\pi}{T}x\right)$$

حيث أن المعاملات a_n و b_n تحسب وفق العلاقات (6-4). إن سلسلة فوريه السابقة يمكن كتابتها بالشكل

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\frac{\pi}{T}x+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\frac{\pi}{T}x\right)$$

ولكن من المثلث القائم الممثل في الشكل (4-9) نجد أن



الشكل (4-9)

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\cos\alpha_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\sin\alpha_n$$

وهكذا تأخذ سلسلة فوريه للتابع f(x) الشكل التالي

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\cos\alpha_n \cos n\frac{\pi}{T}x+\sin\alpha_n \sin n\frac{\pi}{T}x\right) \qquad (18\text{-}4)$$

حيث

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{و} \quad A_0=\frac{a_0}{2}$$

وبالتالي فإن

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cos\left(n\frac{\pi}{T}x-\alpha_n\right) \qquad (19\text{-}4)$$

وبما أن $\alpha_n=\frac{\pi}{2}-\beta_n$ فإن (18-4) تكتب بالشكل

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\left(n\frac{\pi}{T}x+\beta_n\right) \qquad (20\text{-}4)$$

مما تقدم نستنتج أن أي تابع دوري f(x) يحقق شروط ديرخليه في المجال (-T,T) يمكن نشره مباشرة بسلسلة فوريه تحوي التجيبات فقط (19-4) أو بسلسلة فوريه تحوي الجيوب فقط (20-4).

أمثلة (3-6):

1- أوجد سلسلة فوريه للتابع المعرف بالشكل التالي

$$f(x)=|x| \quad ; \quad -\pi<x<\pi$$

الحل: نلاحظ هنا أن التابع المعطى زوجي ؛ وبالتالي فإن معاملات فوريه له تعطى ، بحسب العلاقات (14-4) كما يلي

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & ;\ n\ \text{فردي}\\ 0 & ;\ n\ \text{زوجي}\end{cases}$$

إن عبارة a_n الناتجة لا تسمح بحساب المعامل a_0، لذا نطبق دستور حساب a_n من جديد من أجل n=0 فنجد أن

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(0)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

وبما أن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه على المجال $(-\pi,\pi)$ فإنه بالتعويض في السلسلة (15-4) نجد أن

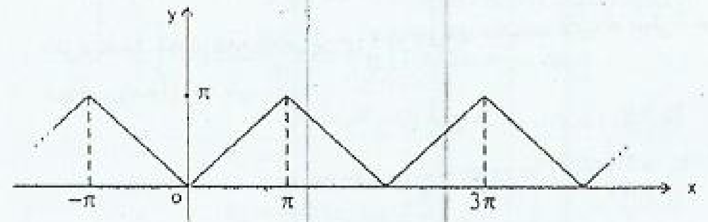
$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right) \quad ; \quad -\pi<x<\pi$$

وهي سلسلة التجيبات لفوريه للتابع المعطى ، وبما أن $|x| = x$ عندما $0 \le x$ ، فإن سلسلة فوريه السابقة للتابع $f(x) = |x|$ تتطابق مع سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x$ التي حصلنا عليها في المثال (3-4-1) ويكون مجموعيهما متساويان من أجل جميع قيم $0 \le x$.

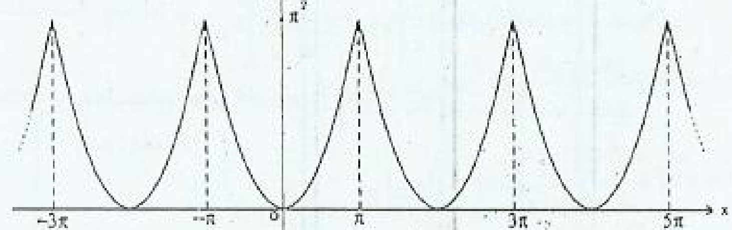
إن الخط البياني للتابع $f(x) = |x|$ بعد تمديده دورياً على طول المحور ox ممثلاً في الشكل (4-10) وسلسلة فوريه لهذا التمديد الدوري تمثل التابع $f(x)$ في المجال $(-\pi, \pi)$ وهي متقاربة ومجموعها يساوي $f(x)$ في هذا المجال.



الشكل (4-10)

2- انشر التابع $f(x) = x^2$ وفق فوريه على المجال $[-\pi, \pi]$.

الحل: إن $f(x)$ تابع زوجي وخطه البياني ، بعد تمديده دورياً على طول المحور الحقيقي ox: ممثلاً في الشكل (4-11).



الشكل (4-11)

أما معاملات فوريه له: فنجد بحسب العلاقات (4-14) أن

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{Cos}\,nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x^2 \mathrm{Sin}\,nx\right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left[x\,\mathrm{Cos}\,nx\right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \mathrm{Cos}\,nx\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2}\mathrm{Cos}\,n\pi - \frac{4}{n^3\pi}\left[\mathrm{Sin}\,nx\right]_0^\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

ولحساب a_0 لدينا

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \mathrm{Cos}(0)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2$$

وهكذا فإنه بالتعويض في السلسلة (4-15) نجد أن

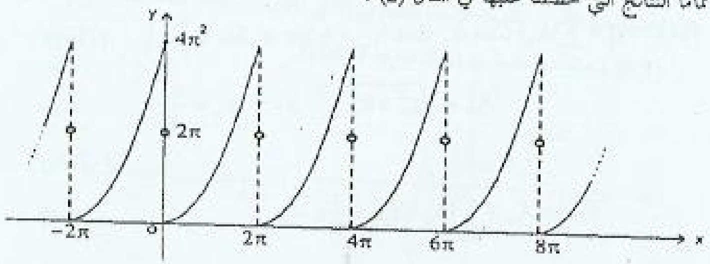
$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\mathrm{Cos}\,nx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\mathrm{Cos}\,x - \frac{\mathrm{Cos}\,2x}{2^2} + \frac{\mathrm{Cos}\,3x}{3^2} - \frac{\mathrm{Cos}\,4x}{4^2} + \cdots\right) \; ; \; -\pi \le x \le \pi$$

وذلك لأن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه على المجال $[-\pi, \pi]$ ، وهي سلسلة التجيبات لفوريه للتابع $f(x) = |x|$ على المجال المذكور.

3- انشر التابع $f(x) = x^2$ وفق فوريه على المجال $[0, 2\pi]$.

الحل: بالرغم من أن التابع المعطى هو نفس تابع المثال السابق غير أن تغير مجال تعريفه يغير تماماً النتائج التي حصلنا عليها في المثال (2) .



الشكل (4-12)

إن التابع $f(x)=x^2$ ضمن المجال المعطى $[0,2\pi[$ لا يكون زوجيا ولا فرديا ، أما خطه البياني بعد تمديده دوريا على كل $\mathbb{R}$ فموضح في الشكل (4-12) وهو يعاني انقطاعات في جميع النقاط $x=2k\pi$ حيث $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

وهكذا فإنه لحساب معاملات فوريه للتابع المعطى نلجأ إلى صيغ أولر - فوريه (4-6) فنجد أن

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{Cos} nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\operatorname{Cos} nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x^2\operatorname{Sin} nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\operatorname{Sin} nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[x\operatorname{Cos} nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Cos} nx\,dx$$

$$=\frac{4}{n^2}\operatorname{Cos} 2\pi n-\frac{2}{n^3\pi}\left[\operatorname{Sin} nx\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$$

وكذلك فإن

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\operatorname{Cos}(0)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2$$

وأخيرا فإن

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{Sin} nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\operatorname{Sin} nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[x^2\operatorname{Cos} nx\right]_0^{2\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\operatorname{Cos} nx\,dx$$

$$=-\frac{4\pi}{n}\operatorname{Cos} 2\pi n+\frac{2}{n^2\pi}\left[x\operatorname{Sin} nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Sin} nx\,dx$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}\left[\operatorname{Cos} nx\right]_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$$

وبما أن التابع المعطى يحقق شروط ديرخليه على المجال $[0,2\pi]$ فإنه بالتعويض في الصيغة العامة (4-5) لسلسلة فوريه نجد أن

$$f(x)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\operatorname{Cos} nx-\frac{4\pi}{n}\operatorname{Sin} nx\right)$$

$$=\frac{4\pi^2}{3}+4\left(\operatorname{Cos} x-\pi\operatorname{Sin} x+\frac{\operatorname{Cos} 2x}{2^2}-\frac{\pi\operatorname{Sin} 2x}{2}+\frac{\operatorname{Cos} 3x}{3^2}-\frac{\pi\operatorname{Sin} 3x}{3}+\cdots\right)$$

حيث $0\le x\le 2\pi$.

4- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x)=Ax^2+Bx+C$ على المجال $-\pi<x<\pi$ ، وحيث A,B,C ثوابت عددية.

الحل: إن المنحني البياني لهذا التابع هو قطع مكافئ ، وتمديده الدوري على طول المحور الحقيقي ox يكون مستمراً أو متقطعاً وذلك وفقاً لاختيار قيم الثوابت A,B,C، وعلى جميع الأحوال فإن التابع $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه على المجال المفروض.

كذلك فقد وجدنا في المثال (3-4-1) أن سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x$ على المجال $(-\pi,\pi)$ هي

$$x=2\left(\operatorname{Sin} x-\frac{\operatorname{Sin} 2x}{2}+\frac{\operatorname{Sin} 3x}{3}-\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{Sin} nx$$

كما وجدنا في المثال (2) من هذه الفقرة أن سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x^2$ على المجال $(-\pi,\pi)$ هي

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\operatorname{Cos} x-\frac{\operatorname{Cos} 2x}{2^2}+\frac{\operatorname{Cos} 3x}{3^2}-\frac{\operatorname{Cos} 4x}{4^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\operatorname{Cos} nx$$

وبالتالي فإن ناتج جمع هاتين السلسلتين على المجال $(-\pi,\pi)$ بعد ضرب الأولى بـ B والثانية بـ A هو سلسلة متقاربة ومجموعها يساوي إلى Ax^2+Bx (انظر التعريف (4-2) من الفصل الثالث)، وبالتالي فإن

$$f(x)=Ax^2+Bx+C$$

$$=\frac{A\pi^2}{3}+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}+2B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{Sin} nx}{n}$$

حيث $-\pi<x<\pi$.

٥- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ على المجال $(0,2\pi)$.

الحل: هنا أيضاً يكون المنحني البياني للتابع $f(x)$ عبارة عن قطع مكافئ، وتمديده الدوري على طول المحور ox يكون مستمراً أو متقطعاً وفقاً لاختيار قيم الثوابت A,B,C. وبحسب المثال (3-4-2) فإن سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ على المجال $(0,2\pi)$ هي

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

وبحسب المثال (3) من هذه الفقرة فإن سلسلة فوريه للتابع $f(x) = x^2$ على المجال $(0,2\pi)$ هي

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

وبالتالي فإن ناتج جمع هاتين السلسلتين على المجال $(0,2\pi)$ بعد ضرب الأولى بـ B والثانية بـ A هي سلسلة متقاربة ومجموعها يساوي $Ax^2 + Bx$، وهكذا فإن

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$= \frac{4A\pi^2}{3} + B\pi + C + 4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - (4A\pi + 2B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

حيث $0 < x < 2\pi$.

٦- انشر التابع $f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x < \pi$ وفق سلسلة التجيبات لفوريه.

الحل: إن التابع المعطى ليس فردياً ولا زوجياً على المجال $(0,\pi)$، ولتنفيذ المطلوب لابد من تمديده تمديداً زوجياً على المجال $(-\pi,0)$، لذا نعرف التابع $F(x)$ على المجال $(-\pi,\pi)$ على النحو التالي (بحسب العلاقة (4-17))

$$F(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < x < \pi \\ \sin|x| & ; \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

إن $F(x)$ تابع زوجي معين ضمن المجال $(-\pi,\pi)$، وهو دوري ودوره $2T = 2\pi$، ويحقق شروط ديرخليه على هذا المجال، وهكذا فإنه بحسب العلاقات (4-14) نجد أن

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \frac{2(1+\cos n\pi)}{(1-n^2)\pi} \quad ; \quad n \neq 1$$

(انظر حل المثال (6) من الفقرة (3-4)).

من أجل حساب المعامل a_1، نعوض من جديد في دستور حساب a_n، من أجل $n=1$، فنجد أن

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,d(\sin x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

أما المعامل a_0 فيحسب مباشرة من عبارة a_n التي حصلنا عليها أعلاه لنجد أن $a_0 = \frac{4}{\pi}$، وبتعويض ما سبق في السلسلة (4-15) نجد، من أجل $0 < x < \pi$، أن

$$F(x) = f(x) = \sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(1+\cos n\pi)}{(1-n^2)\pi}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{(1-2^2)\pi}\cos 2x + \frac{4}{(1-4^2)\pi}\cos 4x + \frac{4}{(1-6^2)\pi}\cos 6x + \cdots$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots\right) \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

إن سلسلة فوريه هذه للتابع $F(x)$ تمثل التابع $f(x)$ في المجال $(0,\pi)$ ومجموعها يساوي $f(x)$ عندما $0 < x < \pi$، لأن $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه على هذا المجال، وهي النشر المطلوب للتابع $f(x)$ في سلسلة تجيبات لفوريه على المجال $(0,\pi)$.

٧- انشر التابع $f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 2$ في نصف مجال وفق سلسلة جيوب ثم سلسلة تجيبات لفوريه.

الحل:

أولاً: لنشر التابع المعطى في سلسلة جيوب لفوريه نمدده تمديداً فردياً على المجال $(-2,0)$، وذلك بتعريف التابع $F(x)$ على المجال $(-2,2)$ على النحو التالي

$$F(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 2 \\ -|x| & ; \quad -2 < x < 0 \end{cases}$$

فيكون $F(x)$ تابعاً فردياً معرفاً ضمن المجال $(-2,2)$، وهو دوري ودوره $2T=4$، ويحقق شروط ديرخليه على هذا المجال، وهكذا، وبحسب العلاقات (4-12) نجد أن

$$a_n = a_0 = 0$$

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = \int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

وبالتعويض في السلسلة (4-13) نجد ، من أجل $0<x<2$، أن

$$F(x) = f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{n\pi}\right)\cos n\pi\,\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{4}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}x - \cdots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}x - \cdots\right) \quad ; \quad 0<x<2$$

وهي سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ والتي تمثل التابع $f(x)$ في المجال $(0,2)$ ، ومتقاربة من التابع $f(x)$ في المجال المذكور ، لأن $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه من أجل $0<x<2$.

ثانياً: لنشر التابع المعطى في سلسلة تجيبات لفوريه نمدده تمديداً زوجياً على المجال $(-2,0)$ وذلك بتعريف التابع $F(x)$ على المجال $(-2,2)$ على النحو التالي

$$F(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0<x<2 \\ |x| & ; \quad -2<x<0 \end{cases}$$

إن $f(x)$ زوجي ودوري دوره $T=4$ ويحقق شروط ديرخليه وبالتالي فإن

$$b_n = 0$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{2}x + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} = \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

كذلك فإن

$$a_0 = \int_0^2 x\cos(0)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

وهكذا نجد أن

$$F(x) = f(x) = x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{2}x$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{8}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{8}{5^2\pi^2}\cos\frac{5\pi}{2}x - \cdots$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{2}x + \cdots\right)$$

حيث $0<x<2$، وهو النشر المطلوب للتابع $f(x)$ في سلسلة تجيبات لفوريه على المجال $(0,2)$، لأن سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ تمثل $f(x)$ في المجال $(0,2)$، ومجموعها يساوي $f(x)$ عندما $0<x<2$ لأن $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه على هذا المجال.

8- انشر التابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{h}x & ; \quad 0 \le x \le \frac{h}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{h}{2} < x \le h \end{cases}$$

وفق سلسلة التجيبات لفوريه.

الحل: لنمدد التابع $f(x)$ على المجال $[-h,0]$ تمديدا زوجيا ، وذلك بتعريف التابع $F(x)$ على المجال $[-h,h]$ كما يلي

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad 0 \le x \le h \\ 0 & ; \quad -h \le x < -\frac{h}{2} \\ \cos\frac{\pi}{h}x & ; \quad -\frac{h}{2} \le x \le 0 \end{cases}$$

إن $F(x)$ تابع زوجي ودوري دوره $2T=2h$ ويحقق شروط ديرخليه على المجال $[-h,h]$،
وهكذا نجد ، بحسب العلاقات (4-14) ، أن

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{h}x\,dx = \frac{2}{h}\int_0^{h/2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{h}x\,dx + \frac{2}{h}\int_{h/2}^{h}(0)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{h}x\,dx$$

$$= \frac{2}{h}\int_0^{h/2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{h}x\,dx \qquad (*)$$

فإذا فرضنا أن $t = \frac{\pi}{h}x$ نجد أن

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{Cos}\,t\,\mathrm{Cos}\,nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\mathrm{Cos}(n+1)t + \mathrm{Cos}(n-1)t\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,(n+1)\,t}{n+1} + \frac{\mathrm{Sin}\,(n-1)\,t}{n-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\mathrm{Sin}\,(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right)$$

حيث $n>1$. فإذا كان n فردياً فإن $a_n = 0$، أما إذا كان n زوجياً فإن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2}{n^2-1}\right)$$

وبالتالي فإن

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{(n^2-1)\pi}$$

أما من أجل n=1 فإنه من (*) نجد أن

$$a_1 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2}\mathrm{Cos}^2\frac{\pi}{h}x\,dx = \frac{1}{h}\left[\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{h}x\right]_0^{h/2} + \frac{1}{h}\int_0^{h/2}dx = \frac{1}{h}[x]_0^{h/2} = \frac{1}{2}$$

أخيراً ، ومن (*) أيضاً ، نجد أن

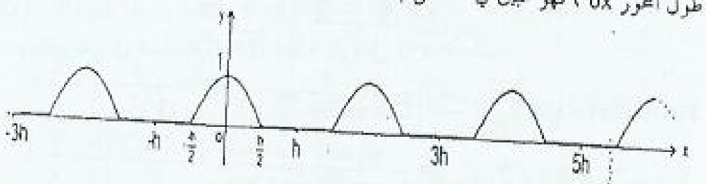
$$a_0 = \frac{2}{h}\int_0^{h/2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{Sin}\frac{\pi}{h}x\right]_0^{h/2} = \frac{2}{\pi}$$

وهكذا تكون سلسلة فوريه للتابع F(x) هي

$$F(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x + \frac{2}{3\pi}\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{h}x - \frac{2}{15\pi}\mathrm{Cos}\frac{4\pi}{h}x + \frac{2}{35\pi}\mathrm{Cos}\frac{6\pi}{h}x - \cdots$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{h}x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{h}x - \frac{1}{15}\mathrm{Cos}\frac{4\pi}{h}x + \frac{1}{35}\mathrm{Cos}\frac{6\pi}{6}x - \cdots\right)$$

وهذه السلسلة تمثل التابع f(x) على المجال [0,h] ، ومجموعها يساوي f(x) عندما $0 \le x \le h$ وذلك لأن f(x) يحقق شروط ديرخليه على هذا المجال ، وبذلك نكون قد حصلنا على النشر المطلوب للتابع f(x) وفق سلسلة جيوب التمام لفوريه. أما الخط البياني لهذا التابع بعد تمديده زوجياً، كما بينا سابقاً ، ومن ثم تمديده دورياً بدور T=2h على طول المحور ox ، فهو مبين في الشكل (13-4).



الشكل (13-4)

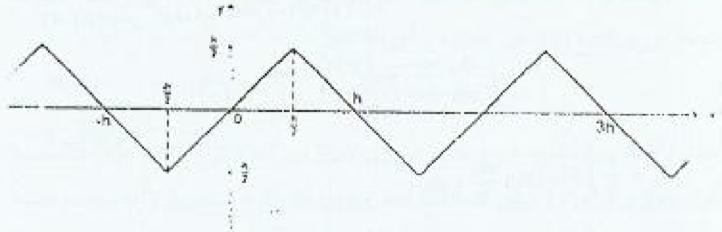
9- أوجد سلسلة فوريه المتعلقة بالجيوب فقط للتابع

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 \le x \le \frac{h}{2} \\ h-x & ; \quad \frac{h}{2} < x \le h \end{cases}$$

الحل: لنمدد التابع f(x) تمديداً فردياً على المجال [−h,0] بتعريف التابع F(x) على المجال [−h,h] بالشكل التالي

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad 0 \le x \le h \\ |x|-h & ; \quad -h \le x < -\frac{h}{2} \\ -|x| & ; \quad -\frac{h}{2} \le x \le 0 \end{cases}$$

وهو تابع دوري دوره 2T=2h ويحقق شروط ديرخليه على المجال $[-h, h]$. إن الخط البياني لـ $F(x)$ بعد تمديده دورياً على طول المحور ox مبين بالشكل (14-4).



الشكل (14-4)

بحسب العلاقات (12-4) لدينا

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} x\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx + \frac{2}{h}\int_{h/2}^{h}(h-x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx$$

وبإجراء تغير في المتحول على النحو التالي $\frac{\pi}{h}x = t$ ، نجد أن

$$b_n = \frac{2h}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,dt + \frac{2h}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\sin nt\,dt \qquad (*)$$

ولكن

$$\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,dt = \left[-\frac{t}{n}\cos nt\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{n^2}[\sin nt]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad (i)$$

كذلك فإن

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\sin nt\,dt = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nt\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} t\sin nt\,dt$$

$$= \frac{\pi}{n}[-\cos nt]_{\pi/2}^{\pi} - \left[-\frac{t}{n}\cos nt\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nt\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}[\sin nt]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad (ii)$$

بتعويض (i) و (ii) في (*) نجد أن

$$b_n = \frac{2h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

وبتعويض المعاملات في السلسلة (13-4) نجد أن

$$F(x) = \frac{4h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{h}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{h}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{h}x - \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi}{h}x + \cdots\right)$$

وهي سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ والتي تمثل التابع $f(x)$ على المجال $[0, h]$ ، ومجموعها يساوي $f(x)$ عندما $0 \le x \le h$ لأن التابع $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه على هذا المجال. إذا

$$f(x) = \frac{4h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{h}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{h}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{h}x - \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi}{h}x + \cdots\right)$$

حيث $0 \le x \le h$ وهو النشر المطلوب للتابع $f(x)$ في سلسلة جيوب لفوريه.

مكاملة وإشتقاق سلاسل فوريه (3-7):

نظرية (3-7-1):

إن سلسلة فوريه لأي تابع دوري $f(x)$ ، سواء كانت متقاربة أم لا من التابع $f(x)$ ، يمكن مكاملتها حداً حداً بين أي حدي تكامل ، والسلسلة الناتجة عن التكامل تتقارب إلى تكامل التابع $f(x)$ بين نفس حدي التكامل.

البرهان: ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً معطى على المجال $(-T,T)$ ويملك نقاط إنقطاع $x_1, x_2, \cdots x_q$ من النوع الأول على هذا المجال: فإذا كان $f(x)$ معرفاً ومستمراً ضمن كل مجال جزئي من المجال $(-T,T)$ معيناً بنقاط الإنقطاع المفروضة ، فإن التابع $F(x)$ المعطى بالعلاقة

$$F(x) = \int_{-T}^{x} f(t)\,dt \quad ; \quad x\in(-T,T) \qquad (21-4)$$

يكون مستمراً وأملساً (أي أن مشتقة الأولى مستمر أيضاً). كذلك فإن $F(x)$ يبقى مستمراً عندما نعرفه كتابع دوري دوره 2T بشرط أن يكون $F(-T)=F(T)$.

فإذا كان $f(x)$ معرفاً في نقاط الانقطاع – بحسب نظرية ديرخليه – بالعلاقة

$$f(x)=\frac{f(x_k^+)+f(x_k^-)}{2} \qquad ; \quad k=1,2,\cdots,q$$

فإن سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ تتقارب من $f(x)$ من أجل جميع قيم x من المجال $(-T,T)$،وبالتالي فإن سلسلة فوريه للتابع الدوري $F(x)$ تتقارب من $F(x)$ من أجل جميع قيم x من المجال $(-T,T)$ ، وهذه النتيجة تكون صحيحة عندما يكون $f(x)$ و $|f(x)|$ قابلين للمكاملة فقط وبدون أن يكونا مستمرين وأملسين وذلك استناداً لنظرية ديرخليه. أي أن

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{T}x+B_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

ومن خلال حساب المعاملات A_0 و A_n و B_n سنبرهن أن تعيين سلسلة فوريه للتابع $F(x)$ يتم بمكاملة سلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

في الواقع بما أن $F(-T)=\int_{-T}^{-T} f(t)\,dt=0$ (بحسب العلاقة (21-4)) فإنه من الفرض بأن $F(-T)=F(T)$ نجد أن

$$0=F(T)=\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = Ta_0$$

إذاً $a_0=0$ أي أن سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ ، ضمن الفرضيات السابقة ، هي من الشكل

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

لدينا

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}F(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx\\&=\frac{1}{n\pi}\left[F(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T}-\frac{1}{n\pi}\int_{-T}^{T}F'(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx\\&=-\frac{1}{n\pi}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx=-\frac{T}{n\pi}b_n\end{aligned}$$

ولحساب A_0 ، نلاحظ من ناحية أن $A_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}F(x)\,dx$

ومن ناحية أخرى فإن

$$\int_{-T}^{T}x f(x)\,dx=\left[xF(x)\right]_{-T}^{T}-\int_{-T}^{T}F(x)\,dx=-TA_0$$

(حيث كاملنا بالتجزئة وفرضنا أن $x=u$ وأن $f(x)\,dx=dv$ ثم استفدنا من العلاقة (21-4) ومن كون أن $F(T)=F(-T)=0$)

إذاً

$$A_0=-\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}x f(x)\,dx$$

أخيراً فإن

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}F(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx\\&=-\frac{1}{n\pi}\left[F(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T}+\frac{1}{n\pi}\int_{-T}^{T}F'(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx\\&=\frac{1}{n\pi}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx=\frac{T}{n\pi}a_n\end{aligned}$$

إذاً

$$\left.\begin{aligned}A_0&=-\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}x f(x)\,dx\\A_n&=-\frac{T}{n\pi}b_n\\B_n&=\frac{T}{n\pi}a_n\end{aligned}\right\}\qquad(22-4)$$

وهكذا نجد أن نشر فوريه للتابع $f(x)$ هو

$$F(x)=\int_{-T}^{x}f(t)\,dt=\frac{A_0}{2}-\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi}{T}x+\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi}{T}x \qquad (23-4)$$

في حالة خاصة، إذا كان $T=\pi$ فإنه من العلاقات (22-4) نجد أن

$$A_0=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x f(x)\,dx \quad \& \quad A_n=-\frac{b_n}{n} \quad \& \quad B_n=\frac{a_n}{n} \qquad (24-4)$$

وبالتالي تأخذ السلسلة (23-4) الشكل

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt=\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\operatorname{Cos} nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{Sin} nx \qquad (25\text{-}4)$$

إن النشر (4-23) يبقى صحيحاً لجميع قيم x من المجال (-T,T) حتى ولـو كـانت سلسلة فوريه للتابع f(x) غير متقاربة ، أي إذا كان

$$f(x)\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x+b_n\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right)$$

وذلك لأن تقارب سلسلة فوريه للتابع الدوري F(x) ، وكما ذكرنا أعلاه، محققاً عندما يكون f(x) و $|f(x)|$ قابلين للمكاملة فقط وبدون أن يكونا مستمرين وأملسين ، وفقاً لنظرية ديرخليه.

ملاحظة (3-7-2):

فرضنا في برهان النظرية السابقة أن F(T)=F(-T) ووجدنا نتيجة لذلك أن $a_0=0$ أما إذا كان $a_0\neq 0$، أي أن سلسلة فوريه للتابع f(x) من الشكل

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x+b_n\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right)$$

فإننا نعيد البرهان بإجراء الحسابات ذاتها على التابع $f(x)-\frac{a_0}{2}$. وبما أنه يمكننا أن نكتب

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{-T} f(x)\,dx+\int_{-T}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{-T}^{\beta} f(x)\,dx-\int_{-T}^{\alpha} f(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha)$$

وذلك مهما كانت قيم α و β ، فإن سلسلة فوريه للتابع F(x) تأخذ الشكل

$$F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left(a_n\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x+b_n\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

مثال (3-7-3):

أوجد تكامل سلسلة فوريه للتابع $\quad -\pi<x<\pi \;;\; f(x)=\frac{x}{2}$.

الحل: إن التابع f(x) دوري ودوره $2T=2\pi$ ويحقق شروط ديرخليه على المجال $(-\pi,\pi)$ ولدينا:

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{Cos} nx\,dx=\frac{1}{2n\pi}\left[x\operatorname{Sin} nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Sin} nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2n^2\pi}\left[\operatorname{Cos} nx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{4\pi}\left[x^2\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{Sin} nx\,dx=-\frac{1}{2n\pi}\left[x\operatorname{Cos} nx\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Cos} nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}(\pi\operatorname{Cos} n\pi+\pi\operatorname{Cos} n\pi)+\frac{1}{2n^2\pi}\left[\operatorname{Sin} nx\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع f(x) هي

$$f(x)=\frac{x}{2}=\operatorname{Sin} x-\frac{\operatorname{Sin} 2x}{2}+\frac{\operatorname{Sin} 3x}{3}-\frac{\operatorname{Sin} 4x}{4}$$
$$+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{Sin} nx}{n}+\cdots \quad ; x\in(-\pi,\pi)$$

أي أن

$$f(x)=\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{Sin} nx}{n}$$

بحسب النظرية (3-7-1) وكون أن $-\pi<x<\pi$ فإن

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{Sin} nx}{n} \quad \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x} x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{x}\frac{\operatorname{Sin} nx}{n}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[-\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{x} \quad \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}-\frac{\operatorname{Cos} n\pi}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

(أنظر مثال (2) من الفقرة (3-5))

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi^2}{6}$$

ومنه

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

أي أن

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

وهو نشر فوريه للتابع $\frac{x^2}{4}$.

يمكن، بعد حساب a_n و b_n، حساب A_0 و A_n و B_n مباشرةً من العلاقات (4-24) وذلك لأن $T=\pi$، فنجد أن

$$A_n = -\frac{b_n}{n} = -\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \& \quad B_n = \frac{a_n}{n} = 0$$

$$A_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, f(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = -\frac{1}{6\pi}\left[x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi^2}{3}$$

وبما أن

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x} x\,dx = \frac{1}{4}\left(x^2-\pi^2\right)$$

فإنه بالتعويض بالعلاقة (4-25) نجد أن

$$F(x)=\frac{1}{4}\left(x^2-\pi^2\right) = -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

إن النظرية (3-7-1) بينت لنا أنه يمكننا دوماً مكاملة سلسلة فوريه، فهل هذا ينطبق على اشتقاق سلاسل فوريه؟

في الواقع إن سلسلة فوريه للتابع $f(x)=\frac{x}{2}$، وحيث $-\pi<x<\pi$، الواردة في حل المثال (3-7-3) متقاربة من التابع $f(x)$ لجميع قيم x على حين أن مشتقها، وهو السلسلة

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \cdots + (-1)^{n-1}\cos nx + \cdots$$

متباعدة من أجل جميع قيم x، ومرد ذلك أنه عند تمديد التابع $f(x)$ تمديداً دورياً على طول المحور ox فإن هذا التمديد غير مستمر عند النقاط $x=\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\cdots$، وهذا يدل على

أن شرط الإستمرار هو شرط لازم للتمكن من إشتقاق سلسلة فوريه للتابع المدروس، وهذا ما تؤكده النظرية التالية.

نظرية (3-7-4):

ليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً ودورياً دوره $2T$، فإذا كان $f(x)$ أملساً قطعة قطعة يمكن الحصول على سلسلة فوريه للتابع $f'(x)$ باشتقاق سلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

البرهان: بما أن $f'(x)$ قابل للمكاملة وينشر على شكل سلسلة فوريه، فالحد الثابت a_0 لهذه السلسلة هو

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f'(x)\,dx = \frac{1}{T}\left(f(T)-f(-T)\right) = 0$$

وبالتالي فإن سلسلة فوريه التي تمثل التابع $f'(x)$ هي من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right) \qquad (i)$$

وهكذا فإنه يمكننا أن نكتب

$$\int_{-T}^{x} f'(t)\,dt = f(x)-f(-T)$$

ولكن نشر فوريه للطرف الأيسر من المساواة الأخيرة هو، بحسب العلاقة (4-23)، من الشكل

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{n\pi}a_n\sin\frac{n\pi}{T}x - \frac{T}{n\pi}b_n\cos\frac{n\pi}{T}x\right)$$

ومن ثم فإن

$$f(x) = f(-T)+\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{n\pi}a_n\sin\frac{n\pi}{T}x - \frac{T}{n\pi}b_n\cos\frac{n\pi}{T}x\right) \qquad (ii)$$

ويمكن التحقق من أن مشتق (ii) يعطي من جديد (i).

ملاحظة (3-7-5):

يمكن استخدام هذه النظرية للحصول على سلاسل فوريه المتتالية لمشتقات ذات مراتب عليا للتابع $f(x)$ المحقق لشروط هذه النظرية. فإذا كان $f'(x)$ مستمراً وأملساً فإن سلسلة فوريه للتابع $f''(x)$ نحصل عليها بإشتقاق سلسلة فوريه للتابع $f'(x)$ حداً حداً، وهكذا...

مثال (3-7-6):

برهن أنه إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود زوجية ضمن المجال $(-T,T)$ فــإن عوامــل سلسلة فوريه لها تعطى بالعلاقات

$$\left.\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{2}{n\pi}\left(\frac{T}{n\pi}p'(T) - \frac{T^3}{n^3\pi^3}p^{(3)}(T) + \frac{T^5}{n^5\pi^5}p^{(5)}(T) - \cdots\right)\\ b_n &= 0\end{aligned}\right\}(26-4)$$

أما إذا كانت $q(x)$ كثيرة حدود فردية ضمن المجال $(-T,T)$ فإن عوامل سلسلة فوريه لها تعطى بالعلاقات

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0\\ b_n &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}\left(q(T) - \frac{T^2}{n^2\pi^2}q^{(2)}(T) + \frac{T^4}{n^4\pi^4}q^{(4)}(T) - \cdots\right)\end{aligned}\right\}(27-4)$$

الحل: لنبرهن على صحة العلاقات (26-4). في الواقع، بما أن $p(x)$ زوجي فإنه بحسب العلاقات (14-4) يكون $b_n = 0$.

لنحسب الآن a_n. لدينا

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} p(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[p(x)\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} - \frac{1}{n\pi}\int_{-T}^{T} p'(x)\,\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{T}{n^2\pi^2}\left[p'(x)\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} - \frac{T}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p''(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{T}{n^2\pi^2}\left(p'(T)\,\mathrm{Cos}\,n\pi + p'(T)\mathrm{Cos}\,n\pi\right) - \frac{T}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p''(x)\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

وذلك لأن $p'(x)$ فردي و $\mathrm{Cos}\ x$ زوجي. إذاً

$$a_n = (-1)^n\frac{2T}{n^2\pi^2}p'(T) - \frac{T}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p''(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx \qquad (*)$$

ولكن بما أن $p''(x)$ زوجي أيضاً فإن

$$\int_{-T}^{T} p''(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx = \frac{T}{n\pi}\left[p''(x)\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} - \frac{T}{n\pi}\int_{-T}^{T} p^{(3)}(x)\,\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{T^2}{n^2\pi^2}\left[p^{(3)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\right]_{-T}^{T} - \frac{T^2}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p^{(4)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$= \frac{T^2}{n^2\pi^2}\left(p^{(3)}(T)\,\mathrm{Cos}\,n\pi + p^{(3)}(T)\,\mathrm{Cos}\,n\pi\right) - \frac{T^2}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p^{(4)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$= (-1)^n\frac{2T^2}{n^2\pi^2}p^{(3)}(T) - \frac{T^2}{n^2\pi^2}\int_{-T}^{T} p^{(4)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

وبالتعويض في (*) نجد أن

$$a_n = (-1)^n\frac{2T}{n^2\pi^2}p'(T) - (-1)^n\frac{2T^3}{n^4\pi^4}p^{(3)}(T) + \frac{T^3}{n^4\pi^4}\int_{-T}^{T} p^{(4)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

أي أن

$$a_n = (-1)^n\frac{2}{n\pi}\left(\frac{T}{n\pi}p'(T) - \frac{T^3}{n^3\pi^3}p^{(3)}(T)\right) + \frac{T^3}{n^4\pi^4}\int_{-T}^{T} p^{(4)}(x)\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

وبالاستمرار على هذا المنوال نحصل على عبارة a_n الواردة في العلاقات (26-4).

للبرهان على صحة العلاقات (27-4) نتبع نفس الطريقة الســابقة، أو نشتق التــابع الفردي $q(x)$ فنحصل على التابع الزوجي $q'(x)$ والذي نطبق عليه العلاقــات (26-4)، ثم بمكاملة سلسلة فوريه للتابع $q'(x)$، وفق النظرية (3-7-1) نحصل على سلسلة فوريه للتابع الفردي $q(x)$.

نتيجة (3-7-7):

يمكن تعميم المثال السابق على النحو التالي:

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود ما، فإنه يمكن كتابتها بالشكل

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

حيث $p(x)$ تحوي جميع الحدود ذات الدرجات الزوجية في $f(x)$، و $q(x)$ تحــوي جميــع الحدود ذات الدرجات الفردية في $f(x)$. عندئذٍ تكون سلسلة فوريه للتابع $f(x)$ من الشكل

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{T}x + b_n\,\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right)$$

حيث تحسب المعاملات a_n بالعلاقات (26-4) ، وتعطى المعاملات b_n بالعلاقات (27-4)

أما المعامل a_0 فيحسب بالعلاقة $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} p(x)\,dx$.

4- سلاسل فوريه العقدية.

نظرية (1-4):

ليكن f(x) تابعاً حقيقياً قابلاً للمكاملة على المجال (-T,T). إن سلسلة فوريه العقدية لهذا التابع (أو النشر العقدي للتابع f(x) في سلسلة فوريه) تعطى بالعلاقة

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x} = \cdots + C_{-2} e^{-i\frac{2\pi}{T}x} + C_{-1} e^{-i\frac{\pi}{T}x} + C_0 + C_1 e^{i\frac{\pi}{T}x} + C_2 e^{i\frac{2\pi}{T}x} + \cdots \qquad (28\text{-}4)$$

حيث

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\,dx \qquad (29\text{-}4)$$

وتدعى أمثال فوريه العقدية للتابع الحقيقي f(x).

إذا كان f(x) محققاً لشروط ديرخليه ضمن المجال (-T,T) فإن النشر (28-4) يأخذ الشكل

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x} \qquad (30\text{-}4)$$

البرهان: قبل البدء في البرهان لابد من ملاحظة أن النشر (28-4) هو عبارة عن مجموع السلسلتين

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

والذي يمكن أن يكتب أيضاً بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{T}x} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

وأن السلسلة (28-4) تكون متقاربة إذا تقاربت هاتان السلسلتان معاً.

نعلم أن سلسلة فوريه المقابلة للتابع f(x) ضمن المجال (-T,T) تعطى بالعلاقة

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx \quad \& \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

ومن علاقتي أولر التاليتين

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \& \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (31\text{-}4)$$

نجد، بالتعويض في سلسلة فوريه للتابع f(x)، أن

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{i\frac{n\pi}{T}x}+e^{-i\frac{n\pi}{T}x}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi}{T}x}-e^{-i\frac{n\pi}{T}x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right) e^{i\frac{n\pi}{T}x} + \left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right) e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i a_n + b_n}{2i} e^{i\frac{n\pi}{T}x} + \frac{i a_n - b_n}{2i} e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$

ولكن

$$\frac{i a_n + b_n}{2i} = \frac{i}{i}\,\frac{i a_n + b_n}{2i} = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

و

$$\frac{i a_n - b_n}{2i} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

إذاً

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\frac{n\pi}{T}x} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$

فإذا رمزنا للعدد العقدي $\frac{a_n - i b_n}{2}$ بـ C_n ولمرافقه $\frac{a_n + i b_n}{2}$ بـ C_{-n} وفرضنا أن $C_0 = \frac{a_0}{2}$، أي أصبح لدينا

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad \& \quad C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \quad \& \quad C_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} \qquad (32\text{-}4)$$

فإن المجموع الجزئي الميمي (مجموع الحدود الـ m الأولى) من السلسلة الأخيرة يأخذ

الشكل التالي

$$S_m(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{m}\left(C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$
$$= \sum_{n=-m}^{m} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

وبالتالي فإنه عندما $m \to \infty$ يكون

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x} \quad \ldots\ldots$$

وهي سلسلة فوريه للتابع الحقيقي $f(x)$ بشكلها العقدي.

أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_m(x)\}$ لسلسلة فوريه العقدية للتابع $f(x)$ متقاربة في المجال $(-T,T)$ إلى $f(x)$، أي أن $\lim_{m\to\infty} S_m(x) = f(x)$ ، فإن سلسلة فوريه العقدية للتابع $f(x)$ تكون متقاربة ومجموعها يساوي $f(x)$ في المجال $(-T,T)$ وعندئذٍ نكتب

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{T}x}$$

لحساب الثوابت C_n في النشر العقدي للتابع $f(x)$ نلاحظ من (32-4) أن

$$C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx - \frac{i}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{T}x - i\sin\frac{n\pi}{T}x\right)dx$$

وبالاستفادة من علاقتي أولر (31-4) نجد أن

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{T}x}dx$$

ومن هذه العلاقة نستنتج مباشرةً أن $C_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$

وبالمثل نجد أن المعاملات C_{-n} تعطى بالعلاقة

$$C_{-n} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{i\frac{n\pi}{T}x}dx$$

وبذلك نكون قد أتممنا برهان النظرية.

ملاحظة (2-4):

ينتج من النظرية السابقة أنه في النشر العقدي للتوابع الحقيقية تكون الأمثال C_n و C_{-n} مترافقة عقدياً.

ملاحظة (3-4):

إن حساب الأمثال العقدية C_n و C_{-n} لنشر التابع الحقيقي $f(x)$ في سلسلة فوريه عقدية يمكن أن يتم بحساب a_n و b_n وفق العلاقات (6-4) ومن ثم تعيين C_n و C_{-n} من العلاقات (32-4). وبالعكس، إذا كانت الأمثال العقدية C_n و C_{-n} لتابع حقيقي $f(x)$ معلومة، فإنه يمكن نشر $f(x)$ في سلسلة فوريه بعد حساب a_n و b_n مباشرة بدلالة C_n و C_{-n} من العلاقات

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad \& \quad b_n = i\left(C_n - C_{-n}\right) \qquad (33\text{-}4)$$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n - i b_n}{2} \\ C_{-n} &= \frac{a_n + i b_n}{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2C_n &= a_n - i b_n \\ 2C_{-n} &= a_n + i b_n \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2a_n &= 2C_n + 2C_{-n} \\ 2ib_n &= 2C_{-n} - 2C_n \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &= C_n + C_{-n} \\ -b_n &= i\left(C_{-n} - C_n\right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_n &= C_n + C_{-n} \\ b_n &= i\left(C_n - C_{-n}\right) \end{aligned}$$

إن العلاقات (33-4) تمكننا من الانتقال من الشكل العقدي إلى الشكل المثلثي لسلسلة فوريه لتابع حقيقي معطى. وبالعكس فإن العلاقات (32-4) تمكننا من الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل العقدي لسلسلة فوريه لتابع حقيقي معطى.

سلاسل الجيوب وسلاسل جيوب التمام العقدية لفوريه (4-4):

اعتماداً على ما سبق وعلى الفقرة (3-5-3) يمكن أن نستنتج النشر العقدي للتابع الحقيقي الفردي $f(x)$ ، المعطى على المجال $(-T,T)$ والقابل للمكاملة على هذا المجال، وفق سلسلة جيوب عقدية لفوريه على النحو التالي:

بما أن $f(x)$ تابع فردي فإنه بحسب الفقرة (3-5-3) يكون

$$a_n = 0 \quad \& \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

و

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x$$

ومن العلاقات (32-4) نجد أن

$$C_0 = 0$$

$$C_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2} = -\frac{i b_n}{2} = -\frac{i}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \frac{i\,b_n}{2} = -C_n$$

وهكذا ، وبحسب العلاقات (31-4)، نجد أن الأمثال العقدية للنشر المطلوب هي

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_n &= -\frac{1}{2T}\int_0^T f(x)\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} - e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right) \\ C_{-n} &= -C_n \end{aligned}\right\} \qquad (34-4)$$

إذاً ، وبحسب العلاقات (33-4) ، يكون

$$b_n = i(C_n - C_{-n}) = 2i\,C_n$$

وبالتالي يأخذ النشر العقدي للتابع الحقيقي الفردي f(x) على المجال (-T,T) الشكل التالي

$$f(x) \approx \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} C_n\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} - e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$

فإذا كان f(x) يحقق شروط ديرخليه على المجال (-T,T) فإن

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} C_n\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} - e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right) \qquad (35-4)$$

وهو النشر العقدي للتابع الحقيقي الفردي f(x) على المجال (-T,T) وفق سلسلة جيوب عقدية لفورية.

أما إذا كان التابع الحقيقي f(x) المعطى على المجال (-T,T) والقابل للمكاملة على هذا المجال زوجياً فإنه بحسب الفقرة (3-5-3) يكون

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx \qquad \& \qquad b_n = 0$$

و

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x$$

وبالتالي فإن

$$C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$C_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2} = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2} = \frac{a_n}{2} = C_n$$

وهكذا تكون الأمثال العقدية للنشر المطلوب هي

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \frac{1}{2T}\int_0^T f(x)\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} + e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)dx \\ C_{-n} &= C_n \end{aligned}\right\} \qquad (36-4)$$

وبالتالي فإن

$$a_n = C_n + C_{-n} = 2\,C_n$$

وهكذا يأخذ النشر العقدي للتابع الحقيقي الزوجي f(x) على المجال (-T,T) الشكل التالي

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} + e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right)$$

فإذا كان f(x) يحقق شروط ديرخليه على المجال (-T,T) فإن

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left(e^{i\frac{n\pi}{T}x} + e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\right) \qquad (37-4)$$

وهو النشر العقدي للتابع الحقيقي الزوجي f(x) على المجال (-T,T) وفق سلسلة جيوب تمام عقدية لفوريه.

أمثلة (5-4):

1- أكتب نشر فوريه العقدي للتابع الدوري

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ |x| < \pi \\ 0 & ; \ |x| = \pi \end{cases}$$

الحل: إن التابع $f(x)$ ذو دور $2T = 2\pi$ وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال $[-\pi, \pi]$، أي أنه يمثل بمجموع سلسلة فوريه العقدية له على هذا المجال. قبل أن نحسب المعاملات العقدية للنشر المطلوب نذكر بعلاقتي أولر التاليتين

$$\text{Cos } x + i \text{ Sin } x = e^{ix} \quad \& \quad \text{Cos } x - i \text{ Sin } x = e^{-ix} \qquad (38\text{-}4)$$

وهما تنتجان عن العلاقتين (4-31).

لدينا بحسب العلاقة (4-29)

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\text{Cos } nx - i \text{ Sin } nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \text{ Cos } nx\, dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \text{ Sin } nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2n\pi}[x \text{ Sin } nx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n^2\pi}[\text{Cos } nx]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+ \frac{i}{2n\pi}[x \text{ Cos } nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2n^2\pi}[\text{Sin } nx]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi}(\text{Cos } n\pi - \text{Cos } n\pi) + \frac{i}{2n\pi}[\pi \text{ Cos } n\pi + \pi \text{ Cos } n\pi]$$

$$= \frac{i}{n} \text{ Cos } n\pi = (-1)^n \frac{i}{n} \qquad ; \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

أما C_0 فيحسب بالعلاقة

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{4\pi}[x^2]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

وهكذا، وبحسب العلاقة (4-30)، يكون النشر العقدي المطلوب

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \qquad ; \quad x \in [-\pi, \pi]$$

لاحظ أنه يمكن الانتقال مباشرةً إلى الشكل المثلثي لسلسلة فوريه للتابع المعطى $f(x)$ بالاستفادة من العلاقات (4-38) فنجد أن

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} i\, e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} i(\text{Cos } nx + i \text{ Sin } nx)$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(i \text{ Cos } nx - \text{Sin } nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \text{ Sin } nx$$

حيث $x \in [-\pi, \pi]$.

أو بأن نعوض في سلسلة فوريه للتابع $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{Cos } nx + b_n \text{Sin } nx) \cdots\cdots$$

كل

$$a_0 = 2C_0 = 0 \quad \& \quad a_n = C_n + C_{-n} = 0 \quad \& \quad b_n = i(C_n - C_{-n}) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

2- أوجد سلسلة فوريه العقدية للتابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

الحل: إن التابع $f(x)$ دوري ودوره $2T = 2\pi$ وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال $(-\pi, \pi)$، ولدينا

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{T}x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (0) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2i\,n\pi}\left[e^{-inx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2i\,n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2i\,n\pi}(\text{Cos } n\pi - i \text{ Sin } n\pi - 1)$$

$$= -\frac{1}{2i\,n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{i\,n\pi} & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وحيث $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. أما من أجل $n=0$ لدينا

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه العقدية للتابع المعطى هي

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{inx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{i\pi}e^{ix} + \frac{1}{3i\pi}e^{3ix} + \frac{1}{5i\pi}e^{5ix} + \cdots\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{i\pi}e^{-ix} - \frac{1}{3i\pi}e^{-3ix} - \frac{1}{5i\pi}e^{-5ix} - \cdots\right)$$

حيث $-\pi < x < \pi$. للانتقال إلى الشكل المثلثي نجد أن

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + \frac{1}{3i\pi}\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + \frac{1}{5i\pi}\left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}2i\,\text{Sin}\,x + \frac{1}{3i\pi}2i\,\text{Sin}\,3x + \frac{1}{5i\pi}2i\,\text{Sin}\,5x + \cdots$$

ومنه

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{Sin}\,x + \frac{\text{Sin}\,3x}{3} + \frac{\text{Sin}\,5x}{5} + \cdots\right) \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

3. اكتب نشر فوريه العقدي للتابع $f(x) = e^{-x} \; ; -1 < x < 1$.

الحل: إن التابع f(x) دوري ودوره 2T=2 ، وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال $(-1,1)$ وبالتالي فهو يمثل بمجموع سلسلة فوريه العقدية له على هذا المجال. لدينا

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{T}x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x}e^{-in\pi x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)x}dx = -\frac{1}{2(1+in\pi)}\left[e^{-(1+in\pi)x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{e^{-(1+in\pi)} - e^{1+in\pi}}{2(1+in\pi)} = \frac{e^{1+in\pi} - e^{-(1+in\pi)}}{2(1+in\pi)} = \frac{e\,e^{in\pi} - e^{-1}e^{-in\pi}}{2(1+in\pi)}$$

ولكن

$$e^{in\pi} = \text{Cos}\,n\pi + i\,\text{Sin}\,n\pi = \text{Cos}\,n\pi = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = \text{Cos}\,n\pi - i\,\text{Sin}\,n\pi = \text{Cos}\,n\pi = (-1)^n$$

$$\text{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

إذاً

$$C_n = \frac{(-1)^n}{1+in\pi}\,\frac{e - e^{-1}}{2} = (-1)^n\frac{\text{Sh}\,1}{1+in\pi}$$

$$= (-1)^n\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\text{Sh}\,1 \quad ; \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

ومنه

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\text{Sh}\,1\; e^{in\pi x} \quad ; \quad -1 < x < 1$$

وهو النشر العقدي المطلوب.

لحساب النشر المثلثي لفوريه للتابع المعطى ، لدينا من العلاقات (33-4)

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{(-1)^n(1-in\pi)\,\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n(1+in\pi)\,\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2} = (-1)^n\frac{2\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n = i\,(C_n - C_{-n}) = i\left(\frac{(-1)^n(1-in\pi)\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n(1+in\pi)\,\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2}\right)$$

$$= (-1)^n i\,\frac{-2in\pi\,\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2} = (-1)^n\frac{2\,n\pi\,\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2}$$

كذلك فإن

$$a_0 = 2\,C_0 = 2\,\text{Sh}\,1$$

وهكذا فإن سلسلة فوريه للتابع f(x) بشكلها المثلثي هي

$$f(x) = e^{-x} = \text{Sh}\,1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2}\text{Cos}\,n\pi x + (-1)^n\frac{2n\pi\text{Sh}\,1}{1+n^2\pi^2}\text{Sin}\,n\pi x\right)$$

$$= \text{Sh}\,1 - 2\,\text{Sh}\,1\left(\frac{\text{Cos}\,\pi x}{1+\pi^2} - \frac{\text{Cos}\,2\pi x}{1+2^2\pi^2} + \frac{\text{Cos}\,3\pi x}{1+3^2\pi^2} - \cdots\right)$$

$$- 2\,\pi\,\text{Sh}\,1\left(\frac{\text{Sin}\,\pi x}{1+\pi^2} - \frac{2\,\text{Sin}\,2\pi x}{1+2^2\pi^2} + \frac{3\,\text{Sin}\,3\pi x}{1+3^2\pi^2} - \cdots\right)$$

وحيث $-1 < x < 1$.

4- أوجد نشر فوريه العقدي للتابع $w > 0$: $f(x)=|\sin wx|$. واستنتج بعد ذلك مجموع السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$.

الحل: إن التابع المعطى دوري ودوره $T=\frac{\pi}{w}$ ، وذلك بحسب الخاصة الثانية (1-2-2) من خواص التوابع الدورية، ولأن التابع معطى بالقيمة المطلقة فهو يكرر نفسه في مجالات طول كل منها يساوي π أي أن $f(x)=f(x+\pi)$ ، كذلك فإن $f(x)$ يحقق شروط ديرخليه على المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ فهو إذاً يمثل بمجموع سلسلة فوريه العقدية له على هذا المجال.

لنحسب أمثال فوريه العقدية للنشر المطلوب. إن

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\sin wx|\,e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\sin wx|\,e^{-i2nwx}\,dx$$

وبحسب النظرية (1-2-3) وبغية تسهيل الحسابات سنكامل على المجال $[0,T]$ ، إذاً

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T\sin wx\,e^{-i2nwx}\,dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\sin wx\cos 2nwx\,dx-\frac{i}{T}\int_0^T\sin wx\sin 2nwx\,dx$$

$$=\frac{1}{2T}\int_0^T\left(\sin(1+2n)wx+\sin(1-2n)wx\right)dx$$

$$-\frac{i}{2T}\int_0^T\left(\cos(1-2n)wx-\cos(1+2n)wx\right)dx$$

ولكن

$$\int_0^T\sin(1+2n)wx\,dx=-\left[\frac{\cos(1+2n)wx}{(1+2n)w}\right]_0^T$$

$$=-\left(\frac{\cos(1+2n)\pi-1}{(1+2n)w}\right)=\frac{2}{(1+2n)w}$$

وكذلك نجد أن

$$\int_0^T\sin(1-2n)wx\,dx=\frac{2}{(1-2n)w}$$

من ناحية أخرى فإن

$$\int_0^T\cos(1-2n)wx\,dx=\left[\frac{\sin(1-2n)wx}{(1-2n)w}\right]_0^T=0$$

و

$$\int_0^T\cos(1+2n)wx\,dx=0$$

وهكذا نجد أن ......

$$C_n=\frac{1}{2T}\left(\frac{2}{(1+2n)w}+\frac{2}{(1-2n)w}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-2n+1+2n}{1-4n^2}\right)$$

ومنه

$$C_n=\frac{2}{\pi(1-4n^2)}\quad ;\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

وبالتالي يكون النشر العقدي لفوريه للتابع المعطى هو

$$f(x)=|\sin wx|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i2nwx}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}e^{i2nwx}$$

حيث $x\in\left[-\frac{\pi}{2w},\frac{\pi}{2w}\right]$ وبما أن $w>0$ فهذا يعني أن مجموع النشر العقدي لفوريه للتابع $f(x)$ يساوي التابع $f(x)$ لجميع قيم x من R.

إن نشر التابع $f(x)=|\sin wx|$ في سلسلة مثلثية لفوريه يمكن الحصول عليه بسهولة بناءً على ما تقدم حيث لدينا بحسب العلاقات (4-33)

$$a_n=C_n+C_{-n}=\frac{2}{\pi(1-4n^2)}+\frac{2}{\pi(1-4n^2)}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$$a_0=\frac{4}{\pi}$$

وبالتالي

$$b_n=i(C_n-C_{-n})=0$$

كذلك فإن

وبالتالي فإن النشر المثلثي لفوريه للتابع $f(x)$ يعطى بالعلاقة

$$f(x)=|\sin wx|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nwx\quad ;\quad -\infty<x<+\infty$$

ومن أجل $x=0$ نجد من النشر المثلثي لـ $f(x)$ أن

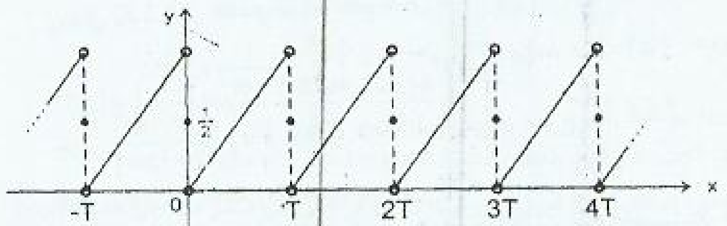
$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}=0$$

ومنه
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}=-\frac{1}{2}$$

5- أكتب سلسلة فوريه العقدية للتابع الدوري

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ;\quad x=0 \quad \text{أو} \quad x=T\\ \frac{x}{T} & ;\quad x\in(0,T)\end{cases}$$

الحل: إن التابع المعطى ذو دور يساوي T وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ فهو إذاً يمثل بمجموع سلسلة فوريه العقدية له على هذا المجال ، والخط البياني للتابع $f(x)$ بعد تمديده دورياً على طول المحور ox ممثلاً في الشكل (15-4).



الشكل (15-4)

فإذا فرضنا أن $h=\frac{T}{2}$ فإن

$$C_n=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi}{h}x}\,dx$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx$$

وبغية تسهيل الحسابات سنكامل على المجال $[0,T]$ ، إذاً

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{x}{T}e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx=\frac{1}{T^2}\int_0^T x\,e^{-inwx}\,dx \quad ; \quad w=\frac{2\pi}{T}$$
$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T x\,\text{Cos}\,nwx\,dx-\frac{i}{T^2}\int_0^T x\,\text{Sin}\,nwx\,dx$$

ومن هنا نجد أن
$$C_0=\frac{1}{T^2}\int_0^T x\,dx=\frac{1}{2T^2}\left[x^2\right]_0^T=\frac{1}{2}$$

لنتابع الآن حساب C_n ، إن

$$C_n=\frac{1}{T^2}\left(\left[x\,\frac{\text{Sin}\,nwx}{nw}\right]_0^T-\int_0^T\frac{\text{Sin}\,nwx}{nw}\,dx\right)$$
$$-\frac{i}{T^2}\left(\left[-x\,\frac{\text{Cos}\,nwx}{nw}\right]_0^T+\int_0^T\frac{\text{Cos}\,nwx}{nw}\,dx\right)$$

ولكن
$$\int_0^T\frac{\text{Sin}\,nwx}{nw}\,dx=-\frac{1}{n^2w^2}\left[\text{Cos}\,nwx\right]_0^T=-\frac{1}{n^2w^2}(\text{Cos}\,2n\pi-1)=0$$
$$\int_0^T\frac{\text{Cos}\,nwx}{nw}\,dx=\frac{1}{n^2w^2}\left[\text{Sin}\,nwx\right]_0^T=\frac{1}{n^2w^2}\,\text{Sin}\,2n\pi=0$$

كذلك فإن
$$\left[x\,\frac{\text{Sin}\,nwx}{nw}\right]_0^T=\frac{2\pi}{nw^2}\,\text{Sin}\,2n\pi=0$$
$$\left[-x\,\frac{\text{Cos}\,nwx}{nw}\right]_0^T=-\frac{2\pi}{nw^2}\,\text{Cos}\,2n\pi=-\frac{2\pi}{nw^2}$$

إذاً
$$C_n=-\frac{i}{T^2}\left(-\frac{2\pi}{nw^2}\right)=\frac{i}{2n\pi} \quad ; \quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

وهكذا فإن النشر العقدي لفوريه للتابع المعطى هو
$$f(x)=C_0+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}C_n\,e^{i\frac{n\pi}{h}x}=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{i}{2n\pi}\,e^{inwx} \quad ; \quad w=\frac{2\pi}{T}$$

وحيث $x\in[0,T]$.

5- نظرية بارسيفال

نظرية (5-1):

ليكن f(x) تابعاً حقيقياً قابلاً للمكاملة على المجال (-T,T). إذا كانت سلسلة فوريه للتابع f(x) تتقارب بانتظام منه ضمن المجال (-T,T) فإن

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \qquad (39\text{-}4)$$

نسمي العلاقة (39-4) مطابقة بارسيفال.

البرهان: بما أن سلسلة فوريه للتابع f(x) متقاربة منه ضمن المجال (-T,T) فإن

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x+b_n\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\right)$$

وبما أن التابع f(x) قابل للمكاملة ، فإنه بضرب طرفي المساواة السابقة بـ f(x) والمكاملة على المجال (-T,T)، وهذا ممكن بحسب النظرية (3-7-1) ، نجد أن

$$\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T}f(x)dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-T}^{T}f(x)\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx+b_n\int_{-T}^{T}f(x)\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\,dx\right)$$

وبما أن

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)dx \quad \& \quad a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$
$$\& \quad b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل

$$\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}T+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2T+b_n^2T\right)$$

ومنه نحصل على المساواة

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

ملاحظة (5-2):

في حالة النشر العقدي للتابع الحقيقي f(x) في سلسلة فوريه تأخذ مطابقة بارسيفال الشكل التالي

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|C_n|^2+|C_{-n}|^2\right)$$

أي

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 \qquad (40\text{-}4)$$

البرهان: نعلم من النظرية (5-1) أن

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

وبتقسيم الطرفين على « 2 » نجد أن

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$
$$=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{4}+\frac{a_n^2+b_n^2}{4}\right)$$
$$=C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|C_n|^2+|C_{-n}|^2\right) \quad \text{(بحسب العلاقات (32-4))}$$
$$=C_0^2+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}|C_n|^2$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

وهو المطلوب.

أمثلة (5-3):

1- وجدنا في المثال (7) من الفقرة (3-6) أن معاملات نشر التابع

$$f(x)=x \quad ; \quad 0<x<2$$

في سلسلة جيوب التمام لفوريه تعطى بالعلاقات التالية

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \qquad \& \qquad a_0 = 2 \qquad \& \qquad b_n = 0$$

وذلك ضمن المجال (2,2-).

أكتب مطابقة بارسيفال لهذا التابع ، ثم استنتج مجموع السلسلتين

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots \quad ; \quad \& \quad \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

الحل: لدينا

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \ \ldots$$

ومنه
$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx = \frac{4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$$

ولكن
$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$$

كذلك فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}\left(2-2(-1)^n\right)$$

$$= \frac{32}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \frac{32}{\pi^4}\left(\frac{2}{1^4}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{5^4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$$

إذاً
$$\frac{8}{3} = 2+\frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$$

ومنه نجد أن
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

لحساب مجموع السلسلة الأخرى نلاحظ أن

$$S = \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right) = \frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{2^4}$$

ومنه
$$S-\frac{S}{2^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \Rightarrow \quad \frac{15\,S}{16} = \frac{\pi^4}{96} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\pi^4}{90}$$

وهو المطلوب.

2- أوجد نشر التابع $-1<x<1$; $f(x)=x$ وفق سلسلة فوريه العقدية ، ثم احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ باستخدام مطابقة بارسيفال.

الحل: إن التابع f(x) دوري ودوره 2T=2 وهو يحقق شروط ديرخليه على المجال (1,1-)، فهو إذا يساوي مجموع سلسلة فوريه العقدية له على ذلك المجال. لدينا

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{T}x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,e^{-in\pi x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2in\pi}\left[x\,e^{-in\pi x}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2in\pi}\int_{-1}^{1}e^{-in\pi x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{in\pi}\left(\frac{e^{in\pi}+e^{-in\pi}}{2}\right)+\frac{1}{2n^2\pi^2}\left[e^{-in\pi x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{in\pi}\cos n\pi-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{e^{in\pi}-e^{-in\pi}}{2}\right)$$

$$= -\frac{(-1)^n}{in\pi}-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi = -\frac{(-1)^n}{in\pi} = (-1)^n\frac{i}{n\pi} \quad ; \quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

ولدينا
$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx = 0$$

إذا سلسلة فوريه العقدية للتابع المعطى هي

$$f(x) = x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq0}}^{\infty}(-1)^n\frac{i}{n\pi}e^{in\pi x} \quad ; \quad -1<x<1$$

لحساب مجموع السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ نلاحظ أولاً أن

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx = \frac{1}{3}$$

وبالتالي ، وحسب مطابقة بارسيفال (40-4)، يكون

$$\frac{1}{3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}|C_n|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|C_{-n}|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{i}{n\pi}\right|^2$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ومنه فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

وهو المطلوب.

6- التوابع المتعامدة

تعريف (6-1):

نقول عن مجموعة التوابع $U_n(x)$ بأنها توابع متعامدة ضمن المجال (a,b) إذا حققت الشرطين التاليين:

(i) $$\int_a^b U_n(x)U_m(x)dx = 0 \quad \text{عندما} \quad n \neq m$$

(ii) $$\int_a^b U_n(x)U_m(x)dx \neq 0 \quad \text{عندما} \quad n = m$$

في حالة خاصة ، نقول عن مجموعة التوابع $U_n(x)$ أنها متعامدة نظامية إذا تحقق الشرط (i) وأخذ الشرط (ii) الشكل التالي

$$\int_a^b U_n(x)U_m(x)dx = 1 \quad \text{عندما} \quad n = m$$

أي إذا كان $\int_a^b U_n^2(x)dx = 1$.

لقد استخدمنا مفهوم التوابع المتعامدة في حساب معاملات سلسلة فورية المثلثية لتابع ما.

مثال (6-2):

إن التوابع

$$1,\ \sin\frac{\pi}{T}x,\ \cos\frac{\pi}{T}x,\ \sin\frac{2\pi}{T}x,\ \cos\frac{2\pi}{T}x,\ \sin\frac{3\pi}{T}x,\ \cos\frac{3\pi}{T}x,\ \cdots$$

تشكل مجموعة توابع متعامدة في المجال (-T,T) (راجع ملاحظات (3-2-1)).

النشر وفق سلسلة توابع متعامدة (6-3):

لتكن $U_n(x)$ مجموعة من التوابع المتعامدة ضمن المجال (a,b). إذا كان f(x) تابعاً ينشر ضمن نفس المجال بالشكل التالي

$$f(x) = h_1U_1(x) + h_2U_2(x) + h_3U_3(x) + \cdots + h_nU_n(x) + \cdots \qquad (41-4)$$

فإنه لحساب المعاملات h_i ، حيث $i=1,2,3,\ldots,n,\ldots$ ، في النشر (41-4) نلاحظ أنه بضرب طرفي العلاقة (41-4) بـ $U_n(x)$ نجد أن

$$f(x)U_n(x) = h_1U_1(x)U_n(x) + h_2U_2(x)U_n(x)$$
$$+ \cdots + h_nU_n(x)U_n(x) + \cdots = h_nU_n^2(x)$$

وبمكاملة طرفي المساواة الأخيرة على المجال (a,b) نحصل على المساواة

$$\int_a^b f(x)U_n(x)dx = \int_a^b h_nU_n^2(x)dx = h_n\int_a^b U_n^2(x)dx$$

فإذا كانت التوابع المتعامدة $U_n(x)$ نظامية نجد أن

$$h_n = \int_a^b f(x)U_n(x)dx \qquad (42-4)$$

أما إذا كانت التوابع المتعامدة $U_n(x)$ غير نظامية فإن

$$h_n = \frac{\int_a^b f(x)U_n(x)dx}{\int_a^b U_n^2(x)dx} \qquad (43-4)$$

إن العلاقات (42-4) و (43-4) تمثل عوامل النشر (41-4) للتابع f(x) وفق سلسلة توابع متعامدة نظامية أو غير نظامية على الترتيب.

تمارين

1- أكتب سلسلة فوريه التي تمثل كل من التوابع التالية:

- $$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi<x<0\\ 1 & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0<x<\pi\\ 0 & ; \quad \pi<x<2\pi\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}-x & ; \quad 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{3}{4} & ; \quad \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}2-x & ; \quad 0<x<4\\ x-6 & ; \quad 4<x<8\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}-x & ; \quad -\pi<x<0\\ 0 & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}2 & ; \quad 0<x<\dfrac{2\pi}{3}\\ 1 & ; \quad \dfrac{2\pi}{3}<x<\dfrac{4\pi}{3}\\ 0 & ; \quad \dfrac{4\pi}{3}<x<2\pi\end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \pi-x & ; \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

2- احسب مجموع السلسلة $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

وذلك بالاستفادة من نشر فوريه للتابع الأخير من التمرين الأول.

3- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x^2 \quad ; \quad -\pi<x<\pi$

ثم احسب مجموع السلسلة $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$.

4- أوجد سلسلة فوريه للتابع

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad 0<x<\pi\\ 2\pi-x & ; \quad \pi<x<2\pi\end{cases}$$

ثم استنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi x}{4} & ; \quad 0\le x\le\pi\\ \dfrac{\pi x}{4}-\dfrac{3\pi^2}{8} & ; \quad \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

5- أوجد سلسلة فوريه للتابع

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad 0<x<\pi\\ x-2\pi & ; \quad \pi<x<2\pi\end{cases}$$

ثم استنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ; \quad 0\le x<\pi\\ 0 & ; \quad x=\pi\\ \dfrac{x}{2}-\pi & ; \quad \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

6- أوجد سلسلة فوريه للتابع $f(x)=e^{ax}$، حيث $a\neq 0$، في المجال $(-\pi,\pi)$، ثم أوجد سلسلة جيوب التمام وسلسلة الجيوب لنفس التابع في المجال $[0,\pi]$.

الأجوبة:

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sh}\,a\pi\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right) \quad ;-\pi<x<\pi$$

$$e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi-1}}{a^2+n^2}\cos nx \quad ; \quad 0\le x\le\pi$$

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^{a\pi}\right)\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx \quad ; \quad 0 \le x \le \pi .$$

7- انشر التابع $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ في سلسلة مثلثية لفوريه في المجال $(0,2\pi)$.

الجواب: $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad ; \quad 0<x<2\pi$.

8- أكتب سلسلة فوريه للتوابع التالية في المجال $[-\pi,\pi]$:

(i) $f(x)=\cos ax$ (ii) $f(x)=\sin ax$

حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر.

الأجوبة: (i) $\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2} \quad ; \quad -\pi\le x\le\pi$

(ii) $\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2} \quad ; \quad -\pi\le x\le\pi$.

9- انشر التوابع التالية في سلسلة فوريه على المجال $[-\pi,\pi]$ مستفيدا من نشر التابع $f(x)=e^{ax}$ الوارد في التمرين السادس:

(i) $f(x)=\mathrm{Ch}\,ax$ (ii) $f(x)=\mathrm{Sh}\,ax$

حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر.

الأجوبة: (i) $\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{Ch}\,ax}{\mathrm{Sh}\,a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2} \quad ; \quad -\pi\le x\le\pi$

(ii) $\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{Sh}\,ax}{\mathrm{Sh}\,a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \quad ; \quad -\pi\le x\le\pi$

10- أوجد سلسلة جيوب التمام للتابع $f(x)=x$ في المجال $(0,\pi)$.

الجواب: $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

حيث أن

$a_0=\pi$

$a_n=2\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi} \quad ; \quad n>0$

$a_{2k}=0 \quad , \quad a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi} \quad ; \quad k=1,2,3,\dots$

11- أوجد سلسلة الجيوب للتابع

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{h} & ; \ 0<x<\frac{h}{2}\\ 0 & ; \ \frac{h}{2}<x<h\end{cases}$$

الجواب: $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{h}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{h}$

ناقش هذه الإجابة من أجل $x=\frac{h}{2}$ ومن أجل $x=0$ أو $x=h$. لاحظ أنه في الحالة الأولى تساوي $\frac{1}{2}$ وفي الحالة الثانية تساوي الصفر.

12- أوجد سلسلة فوريه الحاوية على حيوب التمام للتابع

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le x<h\\ 0 & ; \ h<x\le\pi\end{cases}.$$

الجواب: $f(x)=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right) \quad ; \quad 0\le x\le\pi$

باستثناء النقطة $x=h$ حيث يكون مجموع السلسلة مساوياً $\frac{1}{2}$.

13- اكتب سلسلة حيوب التمام لفوريه للتابع

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2h} & ; \ 0\le x\le 2h\\ 0 & ; \ 2h<x\le\pi\end{cases}$$

الجواب: $f(x)=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right) \quad ; \quad 0\le x\le\pi$.

14- أوجد سلسلة فوريه للتابع الدوري

$$f(x)=x^2 \quad ; \quad 0<x<2$$

وذلك بمكاملة سلسلة فوريه للتابع $f(x)=x$ ضمن نفس المجال.

15- لتكن لدينا السلسلة

$$\frac{1}{4}x^2=C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \qquad (*)$$

حيث C ثابت.

(i) احسب تكامل السلسلة (*) من « 0 » إلى « x » ، ثم استنتج أن

$$x\left(x^2-\pi^2\right)=12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Sin} nx}{n^3}$$

(ii) احسب تكامل السلسلة (*) من « $-\pi$ » إلى « x » ، ثم استنتج أن

$$\frac{1}{48}\left(x^2-\pi^2\right)^2=\frac{\pi^4}{90}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Cos} nx}{n^4}$$

16- أكتب نشر فوريه للتابع $f(x)=2+3x-x^2+x^3+5x^4$

ضمن المجال $(-\pi,\pi)$.

17- اكتب سلسلة فوريه العقدية لكل تابع من توابع التمرين الأول بأكثر من طريقة.

18- من نشر فوريه للتابع $f(x)=\operatorname{Sin} x \quad ; \quad 0<x<\pi$

وباستخدام مطابقة بارسيفال برهن أن

$$\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$$