$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

① f معرفة على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي.

نستنتج:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad \frac{1}{x} \to 0, \quad \frac{\ln x}{x} \to 0$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي.

② f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(1+\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

لما $f'(x)=0$

$\ln x = 0$

ومنه $\boxed{x=1}$

$f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

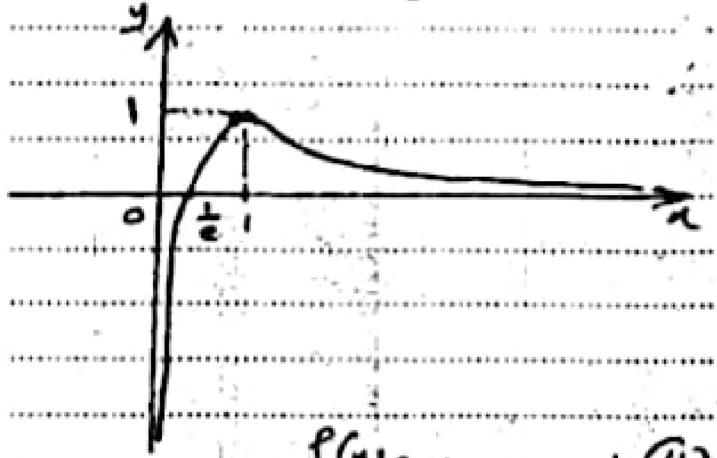
③ نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

$f(x)=0$

معناه $1+\ln x = 0$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$(\frac{1}{e}, 0)$



④ $f(x)=m$:

المناقشة:

■ عندما $m \in]-\infty,0]$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد

■ عندما $m \in]0,1[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان

■ عندما $m=1$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد

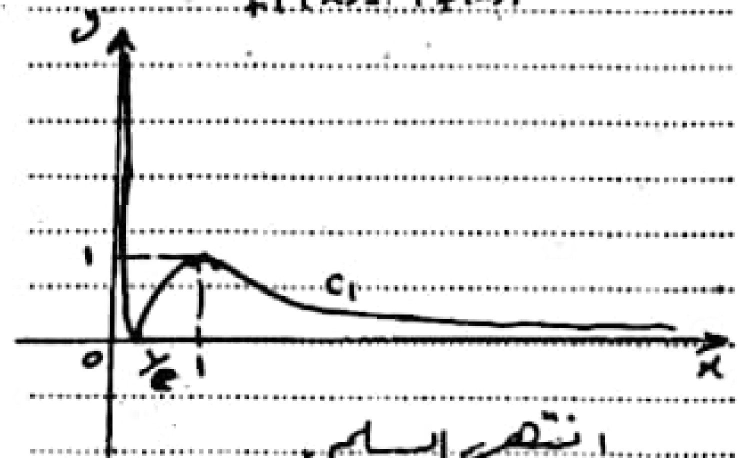
● عندما $m \in]1,+\infty[$ ليس للمعادلة $f(x)=m$ أي حلول.

⑤ $$f_1(x) = \frac{|1+\ln x|}{x}$$

لما $x>0$ فإن $x=|x|$

$$f_1(x) = \frac{|1+\ln x|}{|x|} = \left|\frac{1+\ln x}{x}\right|$$

$f_1(x) = |f(x)|$



انتهى السلام.

٣٤ ٣٥

المسألة الثانية :

أولاً : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$

3 $A(1,0) \in C$: أولاً

3 $\boxed{f(1)=0}$ (I)

3 $\boxed{f'(1)=3}$ (II)

لأن المماس للخط C في A يوازي $y=3x+2$
(فله نفس الميل)

من (I) نجد :

3 $\boxed{a+b=0}$ ①

نجد المشتق على $]0,+\infty[$

1 $f'(x) = a + \frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

من (II) لدينا $f'(1)=3$

$a+1=3$

3 $\boxed{a=2}$ ②

نعوض ② في ① نجد

$2+b=0 \Rightarrow b=-2$

3 فالتابع يكتب بالصورة :

$f(x) = 2x-2+\frac{\ln x}{x}$

ثانياً :

① إثبات أن : $d: y=2x-2$
مقارب مائل لـ C

3 $f(x)-y_d = \frac{\ln x}{x}$

3 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0$

ومنه فالمستقيم $d: y=2x-2$

3 مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لوضعية منحنى c بالنسبة إلى d

ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y = \frac{\ln x}{x}$

حيث $f(x)-y=0$ يعني $\ln x=0$

ومنه $\boxed{x=1}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	c تحت d	نقطة تقاطع بين c و d	c فوق d	

(2) $g(x)=2x^2+1-\ln x$

g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$g'(x)=4x-\frac{1}{x}$

$g'(x)=\frac{4x^2-1}{x}$

$g'(x)=0$ يعني $4x^2-1=0$

$4x^2=1$

$x^2=\frac{1}{4}$

ومنه $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{2}$ مقبول

$g(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}+\ln 2$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	

نلاحظ أن

$g(x) \geq \frac{3}{2}+\ln 2>0$ من أجل كل $x\in]0,+\infty[$

ومنه g موجبة تماما.

(3) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$f'(x)=2+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\ln x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{2x^2+1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}>0$

ومنه f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

(4) f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

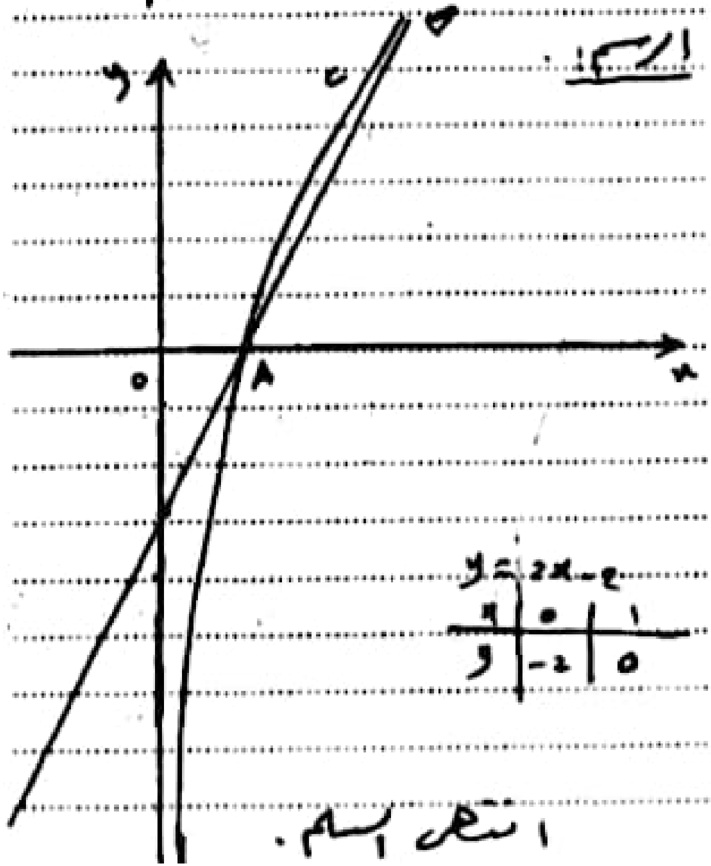
ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب عمودي.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الرسم:



$y=2x-2$

x	0	1
y	-2	0

انتهى السلم.

2

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - y_\Delta\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - y_\Delta\right) = \ln(1) = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب مائل للمنحنى C في جوار

$+\infty$ و $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي نقارن ما داخل اللوغاريتم

مع الواحد:

$$1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1-x+1}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

على المجال $]-\infty;-1[$ يكون $\frac{2}{x+1} < 0$

أي $1 < \frac{x-1}{x+1}$

$$\ln(1) < \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$0 < f(x) - y_\Delta$ C فوق Δ.

على المجال $]1,+\infty[$ يكون $\frac{2}{x+1} > 0$

أي $1 > \frac{x-1}{x+1}$

$$0 > \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$0 > f(x) - y_\Delta$ C تحت Δ

x	$-\infty$ $\quad\quad$ -1	1 $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	C تحت Δ

3) f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 + \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

ليكن $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$u'(x) = \frac{(1)(x+1)-(1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 + \frac{2}{x^2-1} > 0$$

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

④ f معرف ومستمر ومطرد تماما على المجال

$]1,+\infty[$

كما أن $\quad f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

$0 \in f(]1,+\infty[)$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في

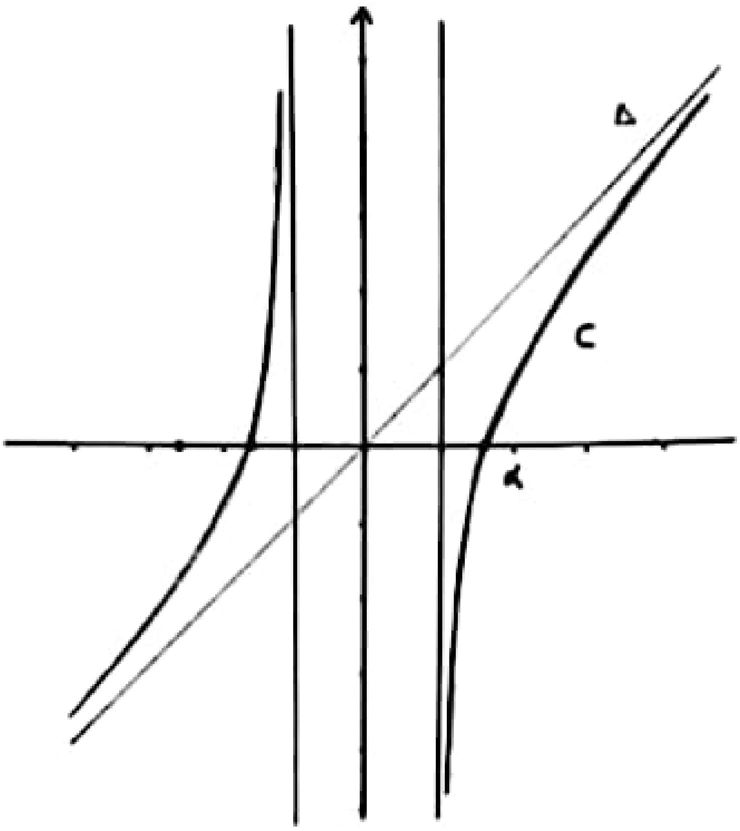
المجال $]1,+\infty[$.

$f(2) = 2 + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - \ln 3 > 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty < 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\cdot f(2) < 0$

وبالتالي $\alpha \in]1,2[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى.



طلب إضافي: احسب مساحة السطح المحصور بين

C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2$ و $x=3$.

$$S = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 x\,dx + \int_2^3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx$$

$$I = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$J = \int_2^3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx$$

بتجزئة:

$u = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	$u' = \frac{2}{x^2-1}$
$v' = 1$	$v = x$

$$J = \left[x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln|x^2-1|\right]_2^3 = 3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$S = I + J = \frac{5}{2} + 3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

عبد الملك خير الله

2021 / 6 / 3