الدرس
4
4
4
4
4
4

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية و نصفها

DOUBLE-ANGLE AND HALF-ANGLE IDENTITIES


Welcome

لماذا ؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا، ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته، فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta , H = \frac{v^2}{2g}\sin^2 \theta$$

حيث تمثل gتسارع الجاذبية الأرضية. إذا علمت أن نسبة H إلى Dتساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها،

فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية :

من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم اساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال 1

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$

الخطوة 1 :

استعمل المتطابقة : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ لإيجاد $\cos\theta$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$$ بالطرح

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

و بما أن θ تقع في الربع الأول ، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

الخطوة 2 :

أوجد : $\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

متطابقة ضعف الزاوية

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= 2\frac{\sqrt{5}}{9}$$

بالضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

مثال 2

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـكل مما يأتي علماً بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\sin\theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

و بما أن قيمة كل من $\sin\theta , \cos\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية، وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$ متطابقة ضعف الزاوية

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$ $\sin\theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1 :

أوجد $\tan\theta$ كي نستعمل متطابقة ظل ضعف الزاوية $\tan 2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

تعريف دالة الظل

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

بالقسمة و إنطاق المقام

الخطوة 1 : $\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

متطابقة ضعف الزاوية

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}}$$

بتربيع المقام

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لـكل مما يأتي علماً بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ؛ $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

2A) $\cos 2\theta$

$$-\frac{7}{9}$$

2B) $\tan 2\theta$

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية :

من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية .

مفهوم اساسي

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها :

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\cos\theta\neq-1$$

مثال ٣

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ علماً بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

باستعمال متطابقة فيثاغورس

$$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

بالطرح

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

و بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

متطابقة نصف الزاوية

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$

بالتبسيط

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

بإنطاق المقام

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\bullet\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

بما أن   تقع بين 180° و 270° ، فإن   تقع بين 90° و 135. إذن $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5^\circ$

$$\cos 67.5^\circ = \frac{135^\circ}{2}$$

$$67.5^\circ = -\frac{135^\circ}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 135^\circ}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

67.5 في الربع الأول ، فالقيمة موجبة

$$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

بالطرح

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

بالضرب

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta=\frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني

$$=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$$

مثال 4 من واقع الحياة

التبسيط باستعمال المتطابقات لضعف الزاوية

توفير : ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وأوجد $\frac{H}{D}$

$$\frac{H}{D}=\frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$

المعادلة الأصلية

$$=\frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$

بتبسيط كل من البسط و المقام

$$=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\bullet\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\bullet\frac{d}{c}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$

بالتبسيط

$$=\frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4}\bullet\frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$

بالتبسيط

$$=\frac{1}{4}\tan\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات.
كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5

إثبات صحة المتطابقات

أثبت أن المعادلة $\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}=\dfrac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ تمثل متطابقة

$$\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$$

الطرف الأيمن

$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+1}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

بضرب كل من البسط و المقام في $\sin\theta$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\bullet\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

بالضرب في $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=1$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$$

بالضرب

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}$$

بالتبسيط

$$=\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\quad\checkmark$$

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ ؛ $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

وهو الطرف الأيسر ؛ أي أن المعادلة تمثّل متطابقة .

تحقق من فهمك

$4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$ (5

$$4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$$

$$4\cos^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 4\cos^4 x$$

$$4\cos^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) = 4\cos^4 x$$

$$4\cos^2 x \cos^2 x = 4\cos^4 x$$

$$4\cos^4 x = 4\cos^4 x \quad \checkmark$$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\cos \frac{\theta}{2}$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ ، إذا كان: (الأمثلة 3-1)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

$\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

$\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

$\frac{-240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

$\frac{-4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{6}$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{240}{289}, -\frac{161}{189}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(8 $\sin\frac{\pi}{8}$ $\qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(9 $\cos 15^\circ$ $\qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(10 $\sin 75^\circ$ $\qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(11 $\tan 165^\circ$ $\qquad \sqrt{3}-2$

(12 $\tan\frac{5\pi}{12}$ $\qquad 2+\sqrt{3}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة إبتدائية متجهة مقدارها $52\,ft/s$. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$، وَ v تُمثّل السرعة الإبتدائية المتجهة . (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية .

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة.

$81ft$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(14 $\tan\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta \checkmark$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \textbf{(15}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin 2(\frac{\theta}{2})}{1+\cos 2\,(\frac{\theta}{2})}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \quad \textbf{(16}$$

$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$

$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \frac{\tan\theta}{\tan\theta}$$

$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$$

$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \tan 2\theta \checkmark$$

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2} \quad \textbf{(17}$$

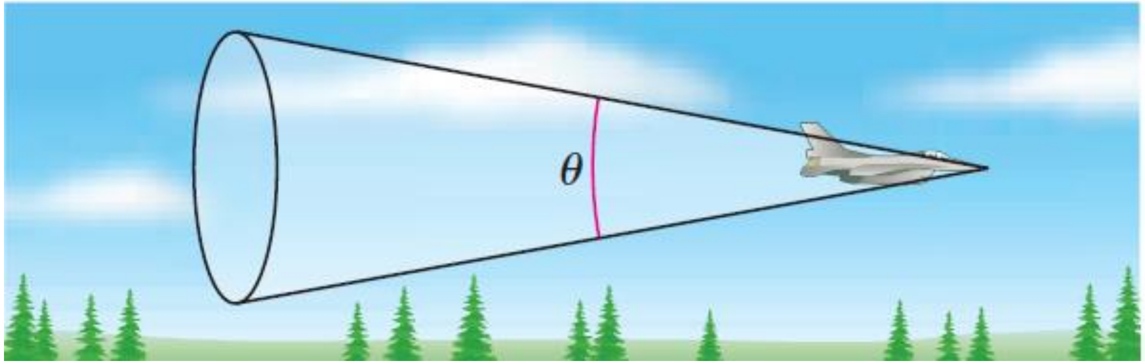
$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$

$$\frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$

$$\frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2} \checkmark$$

18) عدد ماخ: ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) بحسب العلاقة $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{M}$$

b) إذا كان $\cos\theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل التعبير الذي وجدته في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

6

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

$$P = \frac{1}{2} I_0{}^2 R - \frac{1}{2} I_0{}^2 R \cos 2t\theta$$

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة إبتدائية مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45^\circ - A$, $\theta = 45^\circ + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

إذا كانت $\theta = 45^\circ + A$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45^\circ + A)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin(90^\circ + 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90^\circ \cos 2A + \cos 90^\circ \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A + 0 \cdot \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2A}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45^\circ - A$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45^\circ - A)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin(90^\circ - 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90^\circ \cos 2A - \cos 90^\circ \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A - 0 \cdot \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2A}{g}$$

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

22) $\sin\theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

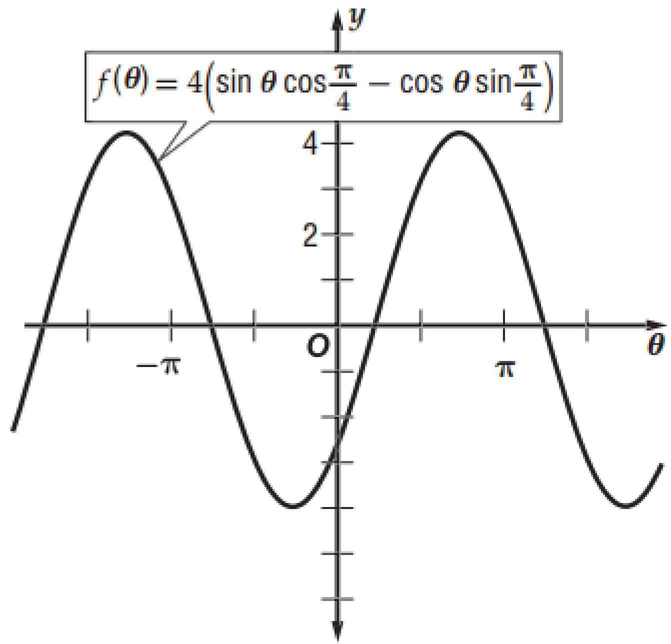
23) $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$ $\quad -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

24) $\sec\theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$ $\quad \frac{-3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

25) $\cot\theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$ $\quad \frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

26) **تمثيلات متعددة :** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا :** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = 4\left(\sin\theta \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\theta \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$.

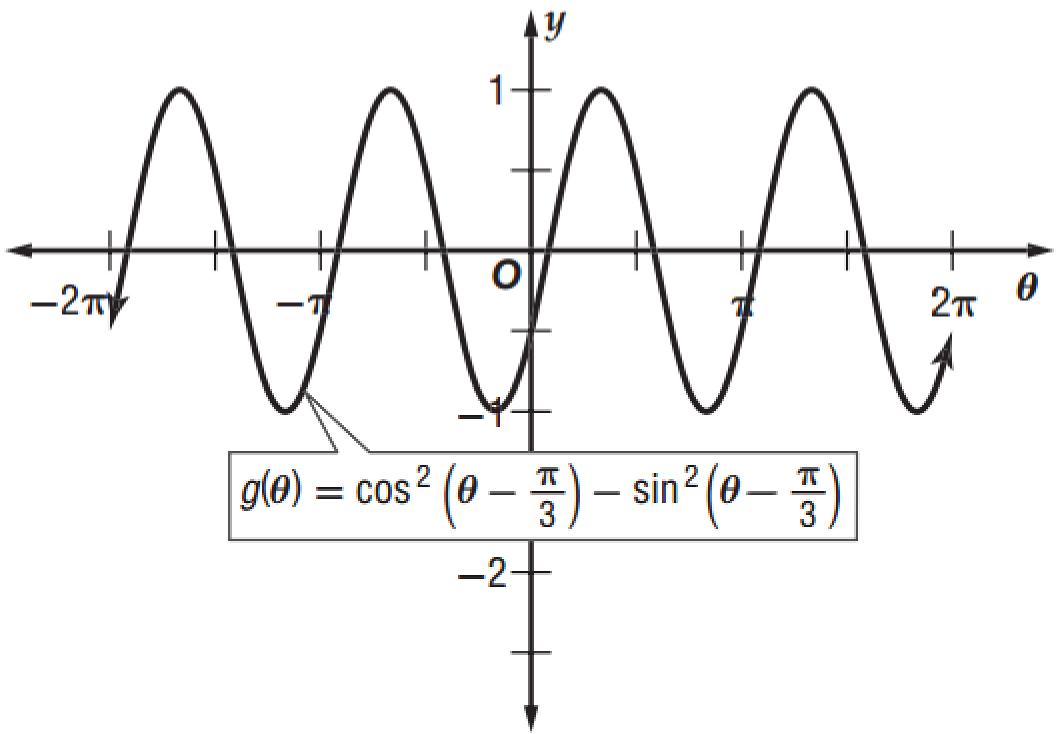


b) تحليليًّا: اعتمد على التمثيل البياني في **(a)** لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

$$4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

c) **بيانيًا :** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta)=\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.



d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في **(c)** لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

$$\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$