الدرس 5

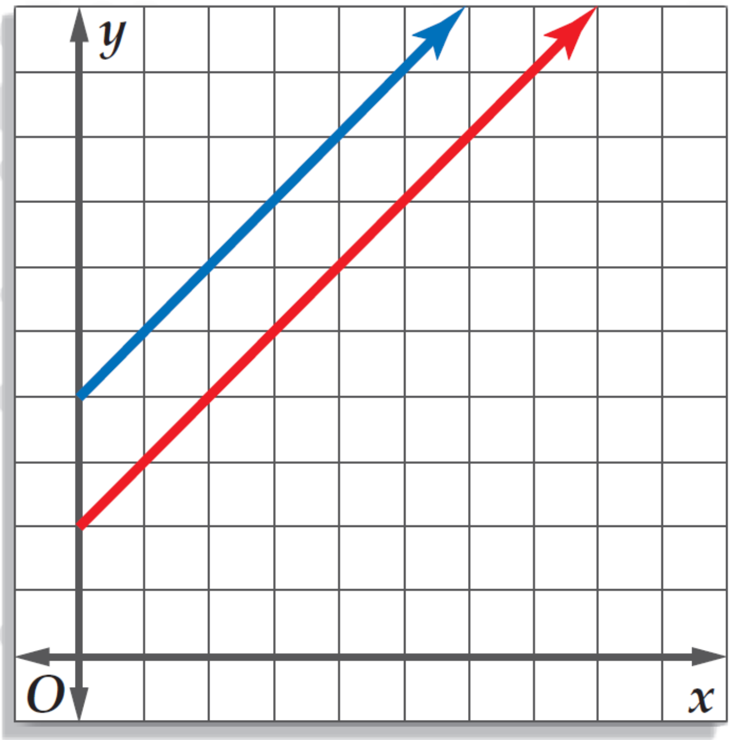
الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

PARENT FUNCTIONS AND TRANSFORMATIONS


Welcome

لماذا ؟

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج xقطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.



الدوال الرئيسية (الأم) :

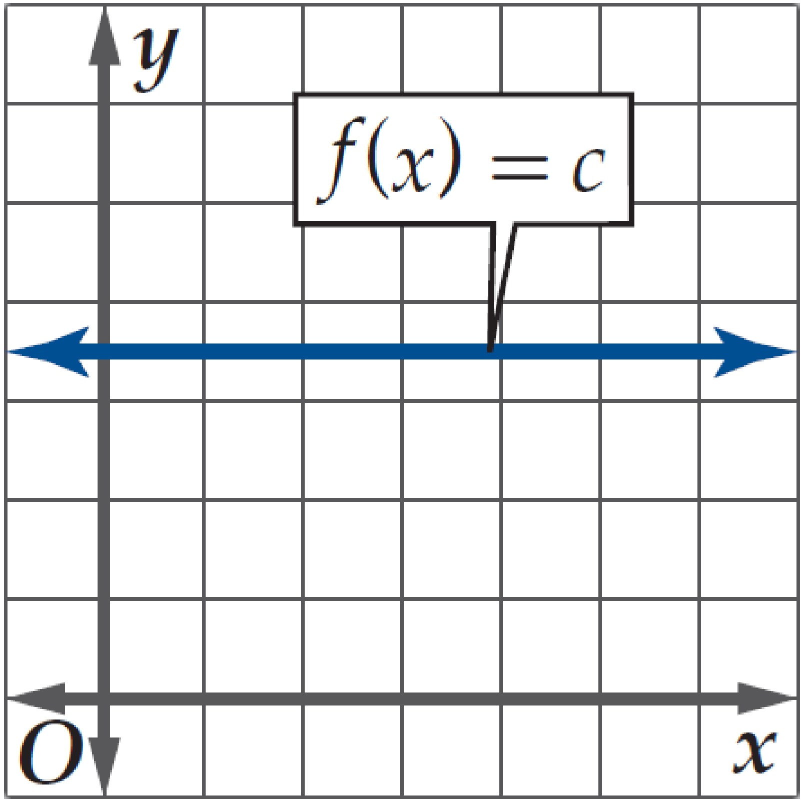
عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر، وتُعرَّف الدالة الرئيسة (الأم) على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

ستدرس في هذا الدرس ثمانية أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

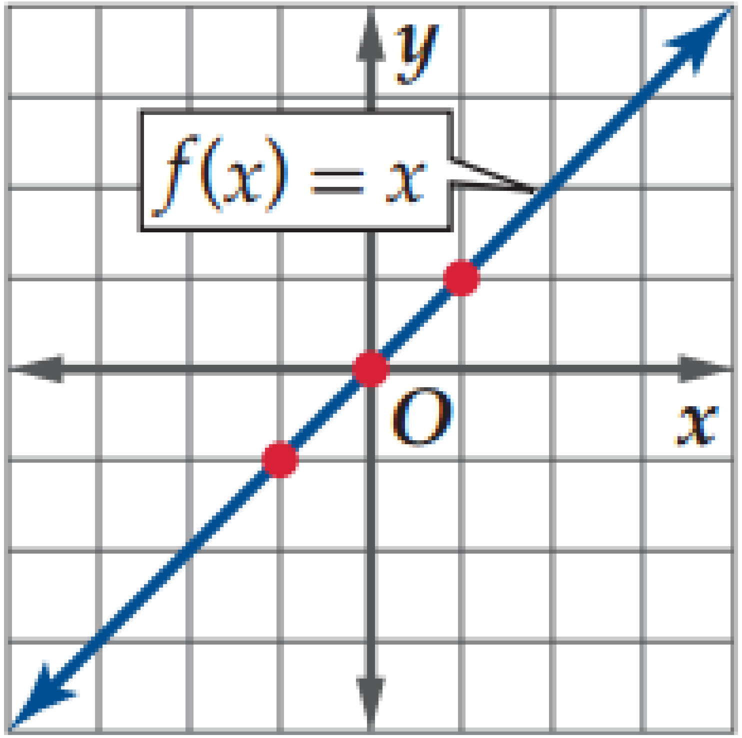
مفهوم اساسي

الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

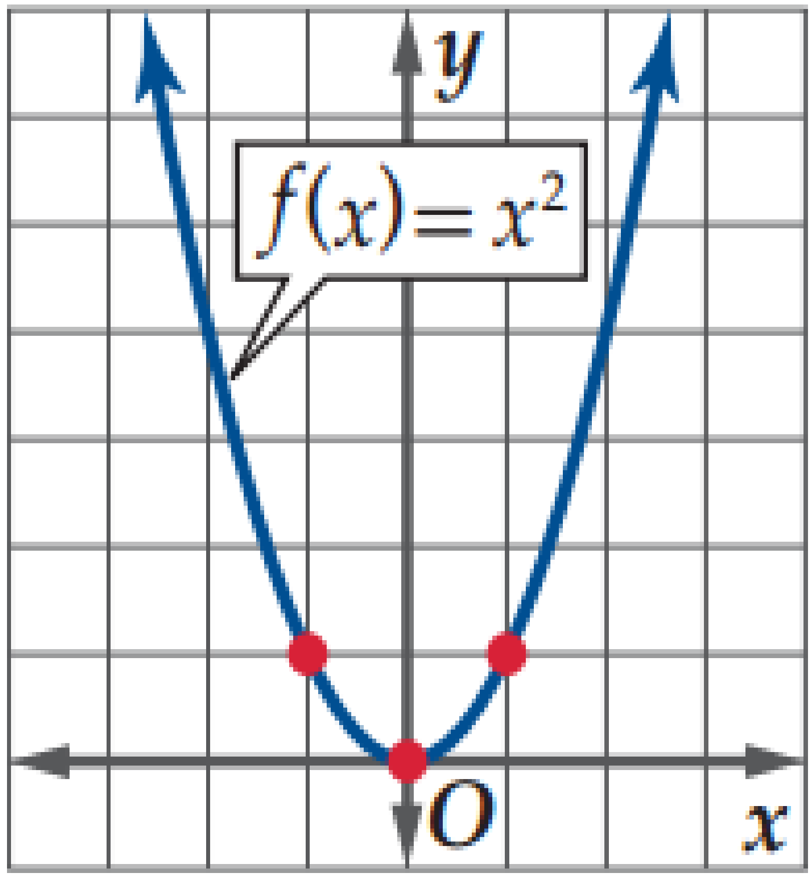
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x)=c$ حيث c عدد حقيقي ، و تمثل بمستقيم أفقي .



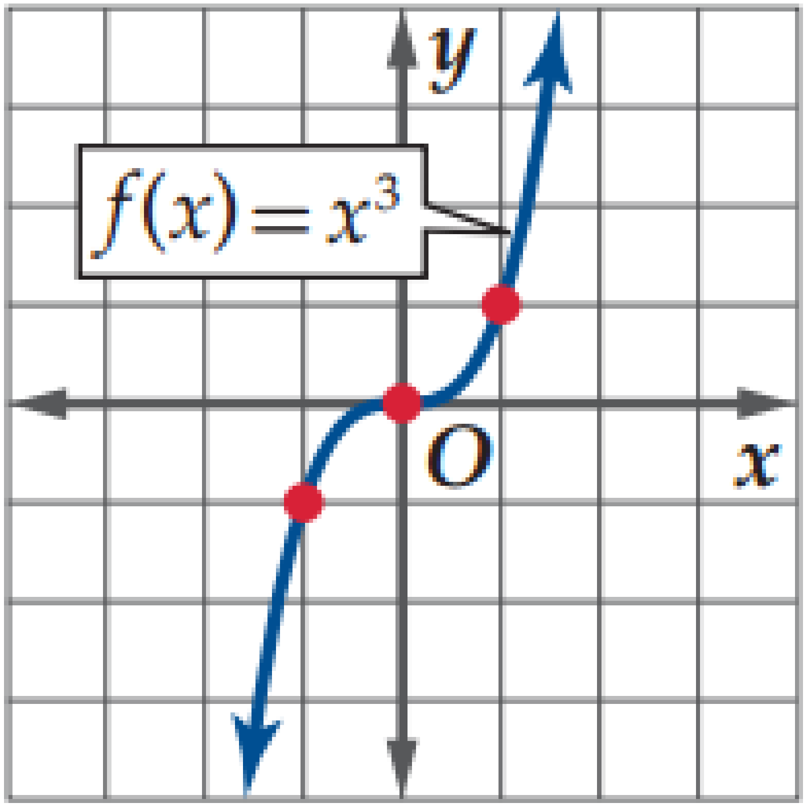
تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a)



يأخذ منحني **الدالة التربيعية** $f(x)=x^2$ شكل الحرف U



الدالة التكيعبية $f\left(x\right)=x^{3}$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل .

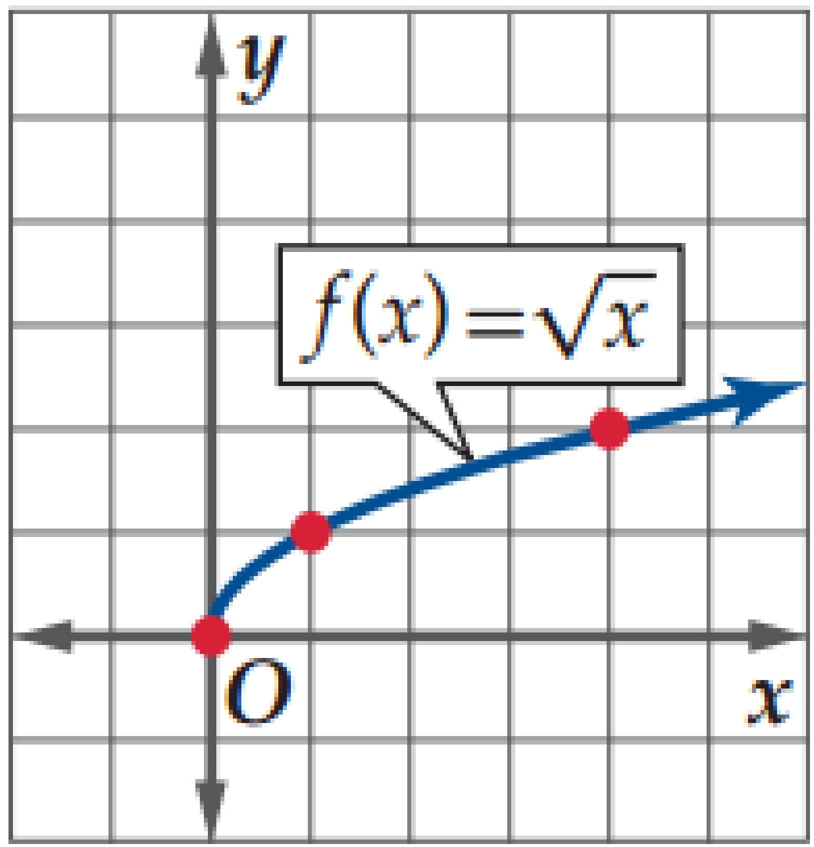


كما ستدرس أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب .

مفهوم اساسي

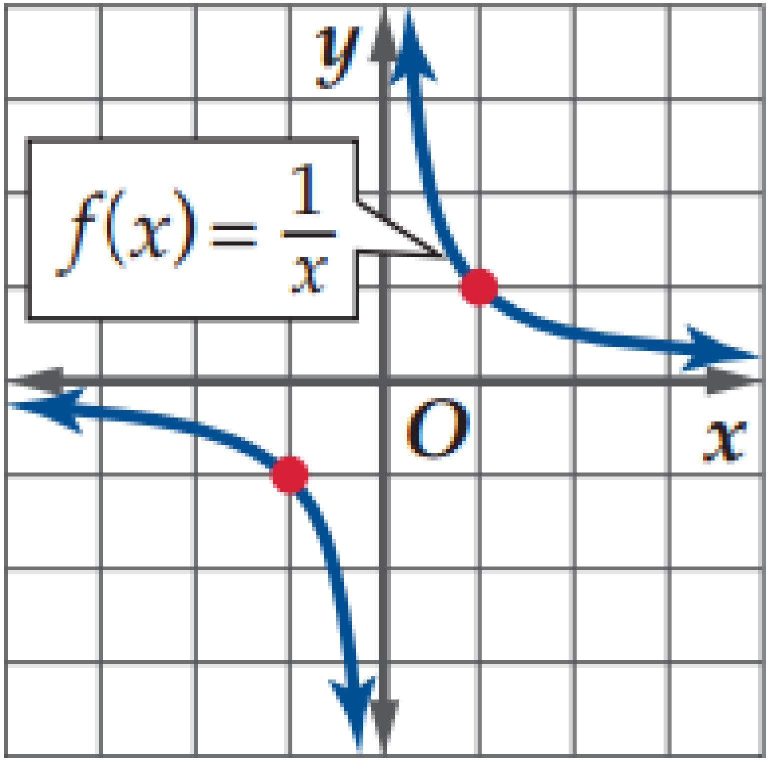
الدوال الرئيسة (الأم) لكل من : دالتي الجذر التربيعي و المقلوب

تكتب الدالة التربيعية علي الصورة $f(x) = \sqrt{x}$



تكتب الدالة المقلوب علي الصورة $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$

و تكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل .



كما تُعدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم)

.

مفهوم اساسي

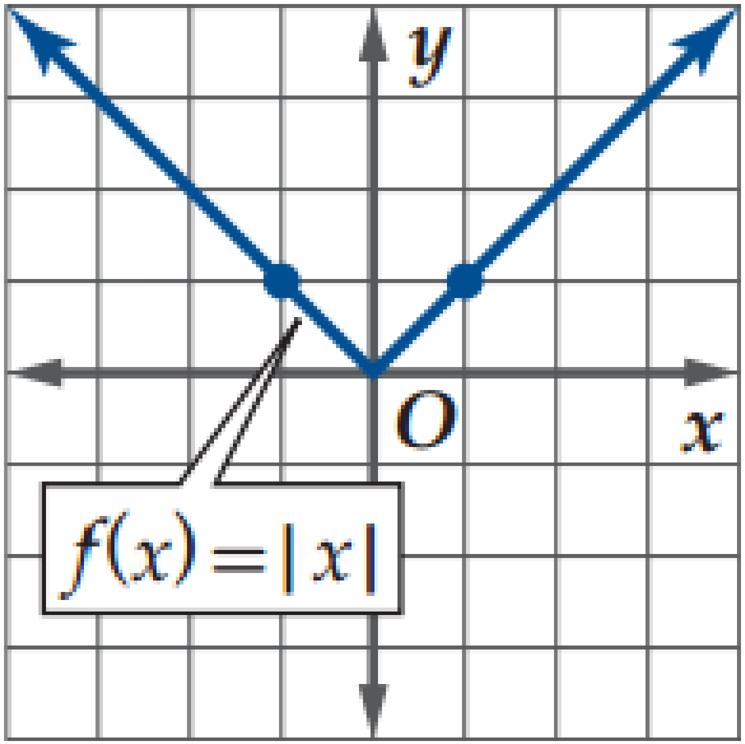
دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي :

تكتب الدالة القيمة المطلقة ، بالرمز $f(x) = |x|$

ويأخذ منحنها على شكل الحرف V، وتعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$$



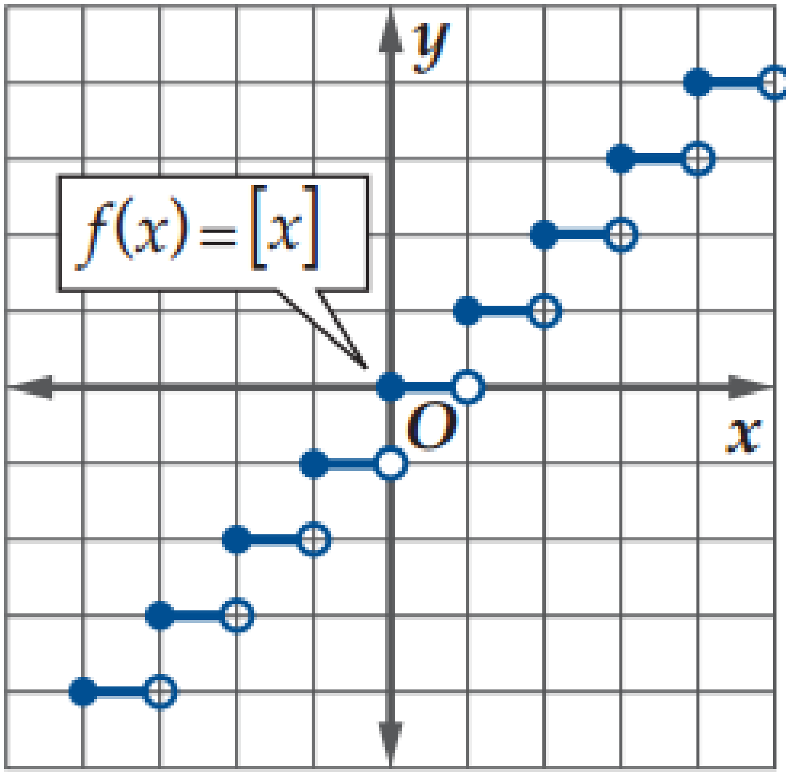
أمثلة :

$$|-5| = 5 \ , |0| = 0 , |4| = 4$$

أما الدالة الدرجية ، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم اساسي

دالة أكبر عدد صحيح



يرمز لدالة أكبر عدد صحيح ، بالرمز $f\,(x\,) = \;x$

وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي **x**.

أمثلة :

$$-4 \;\; = -4\;,\;\; -1.5 \;\; = -2\,,\left[\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\right] = 0$$

باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1

وصف خصائص الدالة الرئيسية (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\sqrt{x}$ **(في الشكل 1.5.1):**
المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي :

- **مجال الدالة** $[0,\infty)$ **، و مداها** $[0,\infty)$
- **للمنحنى مقطع واحد عند (0, 0) .**
- **المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.**
- **المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.**
- **يبدأ المنحنى عند** $x=0$ **، وتكون** $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
- **المنحنى متزايد في الفترة** $(0,\infty)$

تحقق من فهمك

(1A $f(x) = |x|$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- و مداها $\{y \mid 0 \le y < \infty, y \in R\}$

- للمنحني مقطع واحد عند **(0 , 0)**
- المنحني متماثل حول المحور y ؛ لذا فالدالة زوجية .
- المنحني متصل عند جميع قيم المجال .
- المنحني متناقض في الفترة $(-\infty, 0)$ و متزايد في الفترة $(0, \infty)$
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ ، و ينتهي بـ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f(x)=x^3$ **(1B**

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- و مداها $\{y \mid y \in R\}$

للمنحني مقطع واحد عند **(0 , 0)** المنحني متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذا فالدالة فردية .
المنحني متصل عند جميع قيم المجال .
المنحني متزايد علي جميع قيم المجال .

التحويلات الهندسية :

تؤثر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) فبعض التحويلات تغير موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية، وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية.

الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة، فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

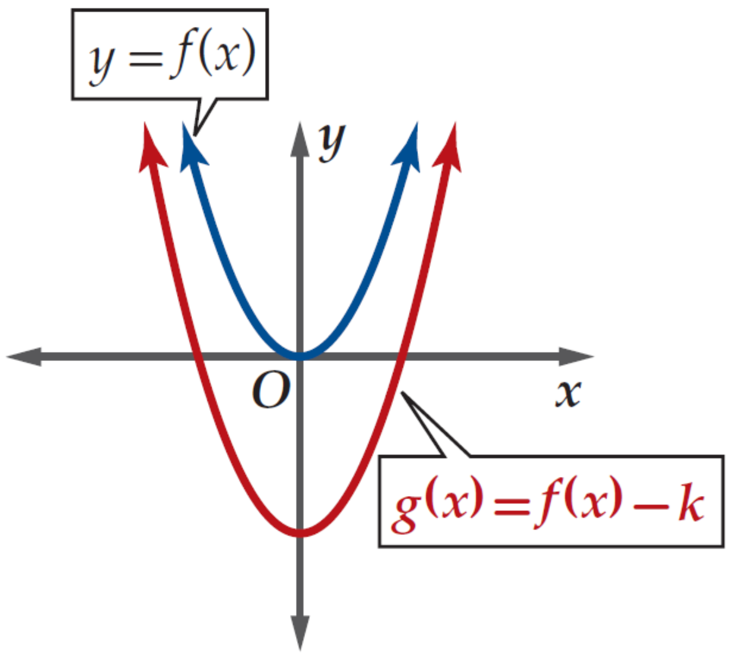
مفهوم اساسي

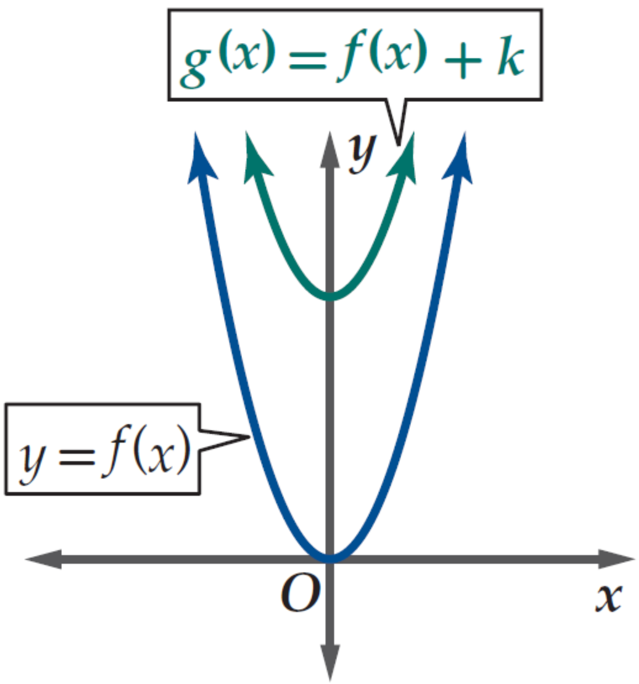
الانسحاب الرأسي و الانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحني $g(x) = f(x) + k$ هو منحني $f(x)$ مزاحاً .

- K وحدة إلي أعلي عندما $k > 0$
- |K| من الوحدات إلي أسفل عندما $k < 0$

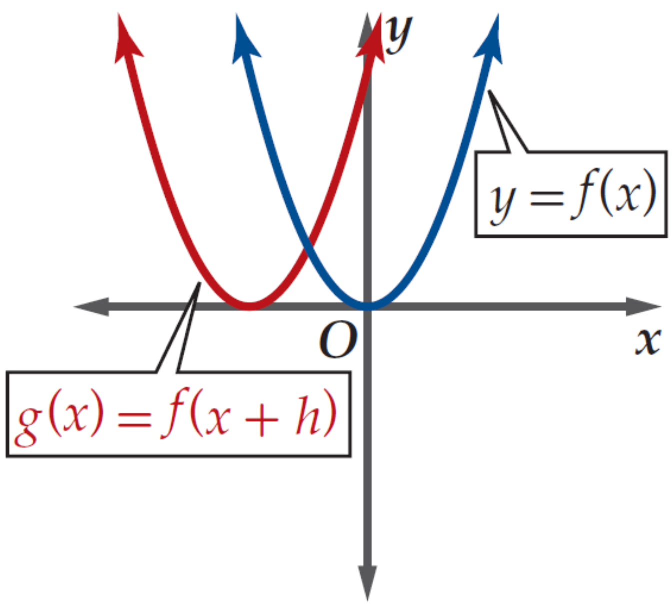


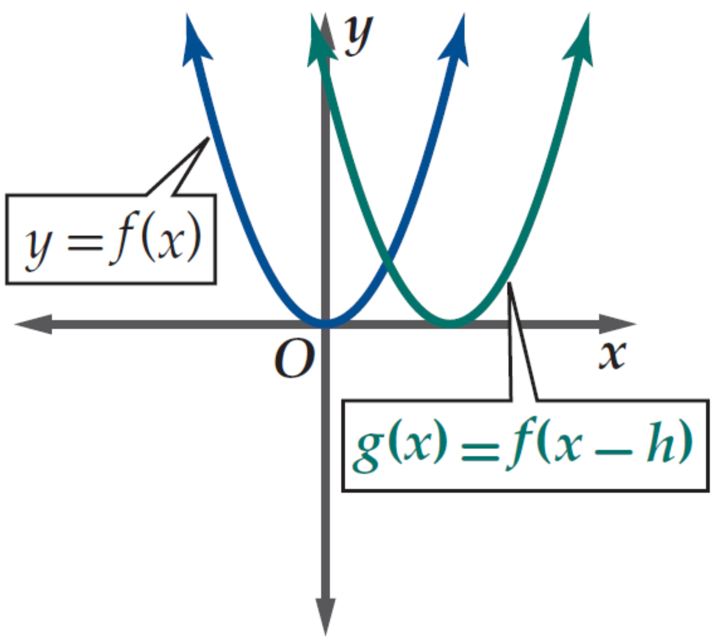


الانسحاب الأفقي

منحني $g(x) = f(x - h)$ هو منحني $f(x)$ مزاحاً .

- **h** من الواحدات إلي اليمين عندما $h > 0$
- **|h|** من الوحدات إلي اليسار عندما $h < 0$





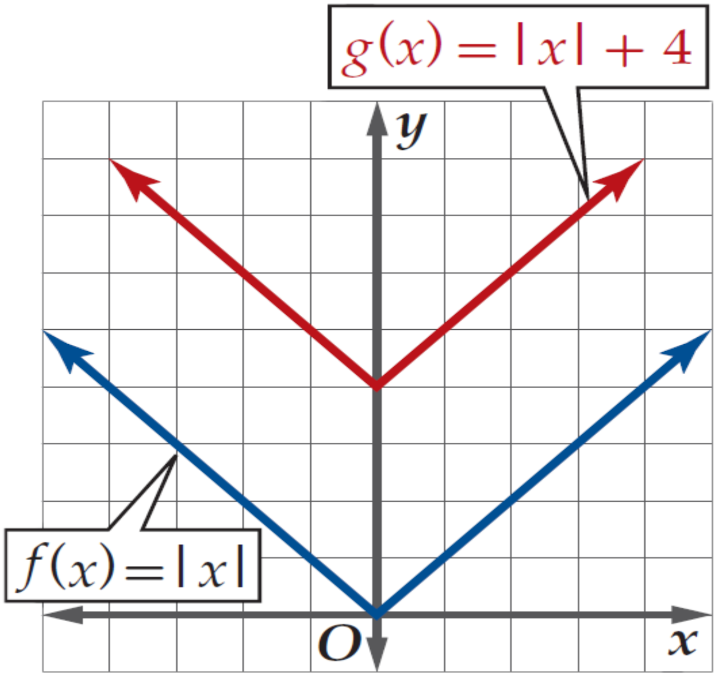
مثال 2

انسحاب منحني الدالة

استعمل منحني الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)=|x|$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانياً :

(a $g(x)=|x|+4$

هذه الدالة علي الصورة $g(x)=f(x)+4$ و عليه فإن منحني $g(x)$ هو منحني $f(x)=|x|$ هو منحنى مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

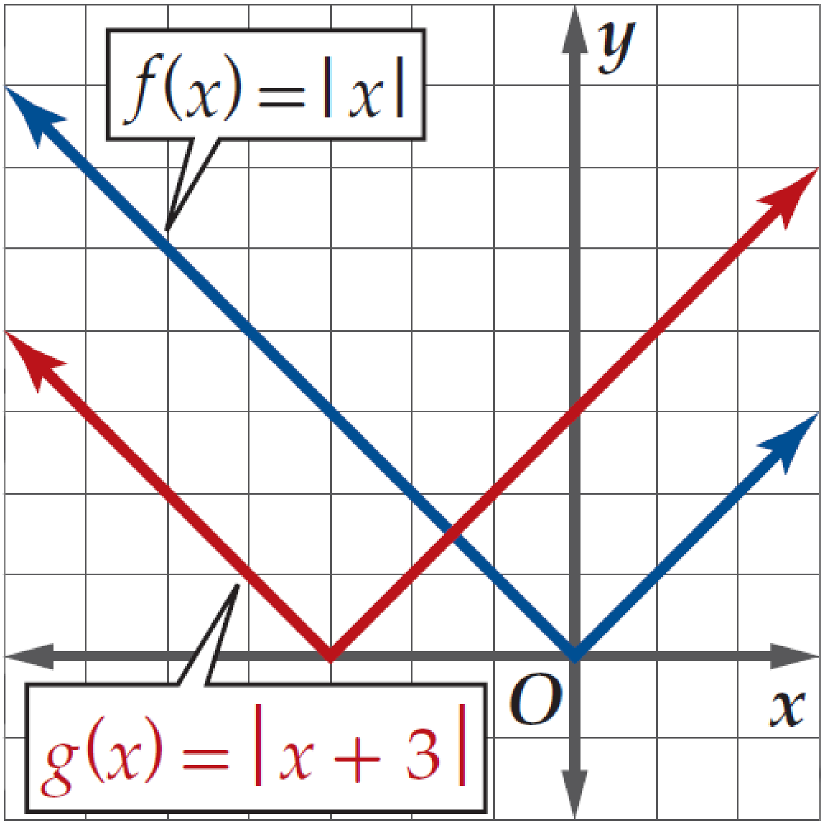


(b $g(x)=|x+3|$

هذه الدالة علي الصورة $g(x)=f(x+3)$ أو $g(x)=f(x-(-3))$

و عليه فإن منحني $g(x)$ هو منحني $f(x)=|x|$

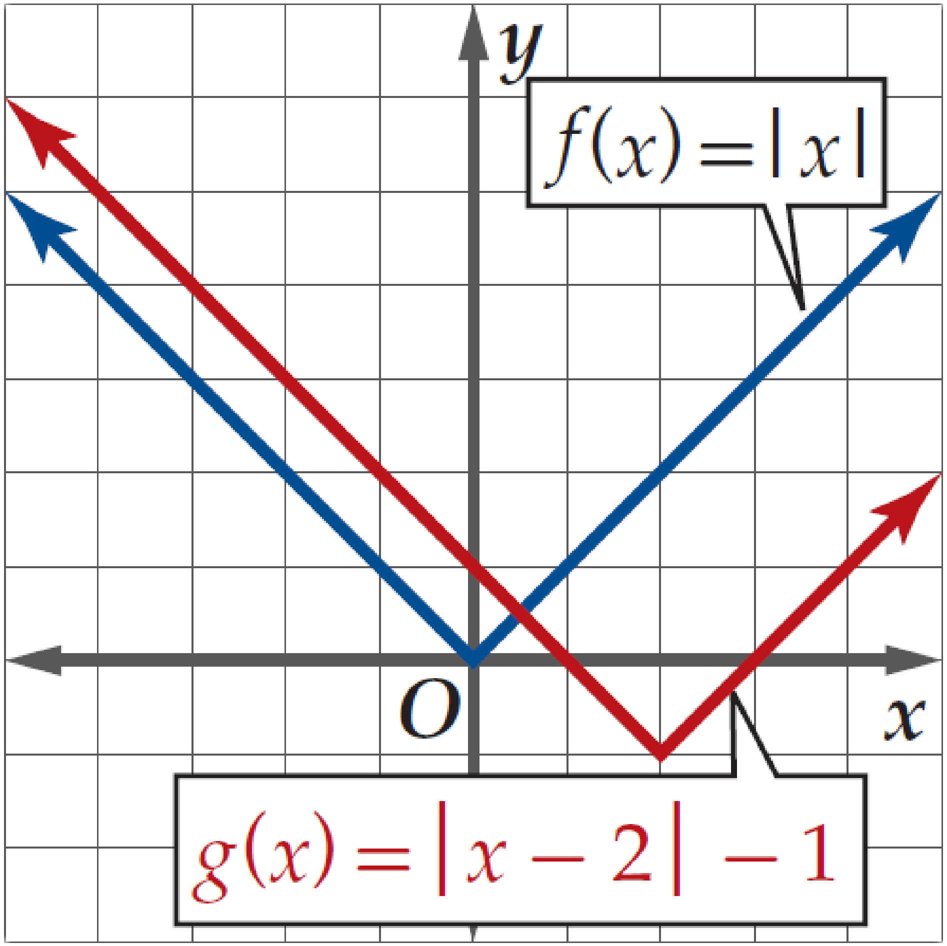
هو منحنى مزاحًا 3 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.3.



c) $g(x) = |x-2| - 1$

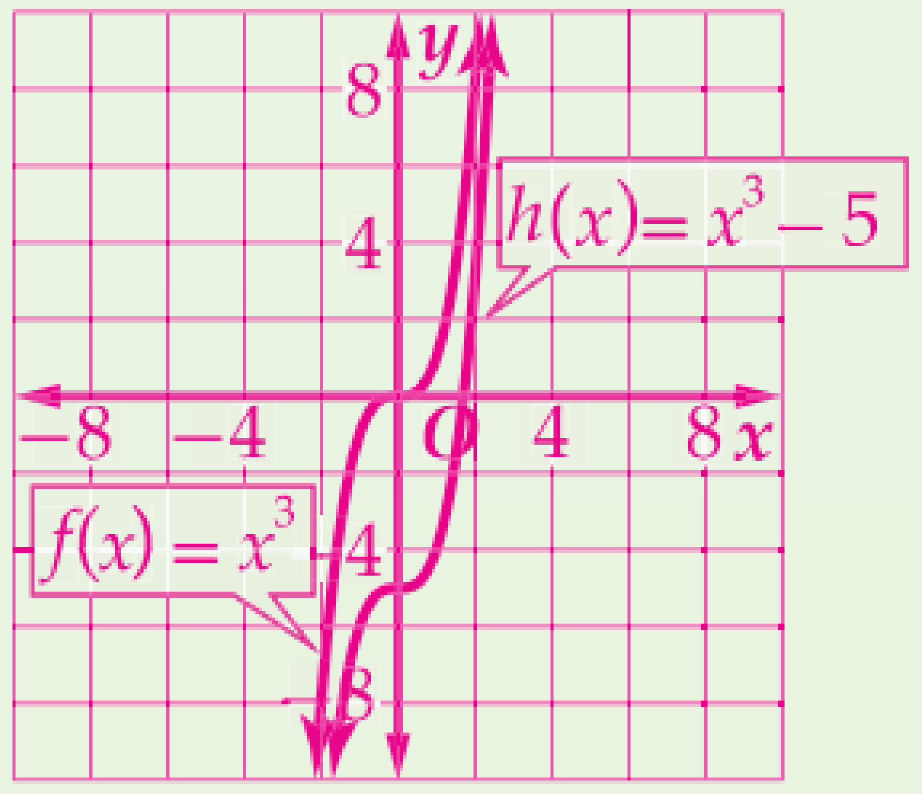
هذه الدالة علي الصورة $g(x) = f(x-2) - 1$ أي أن منحني $g(x)$

هو منحني الدلة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلي اليمين ووحدة إلي أسفل كما في الشكل **1.5.4.**

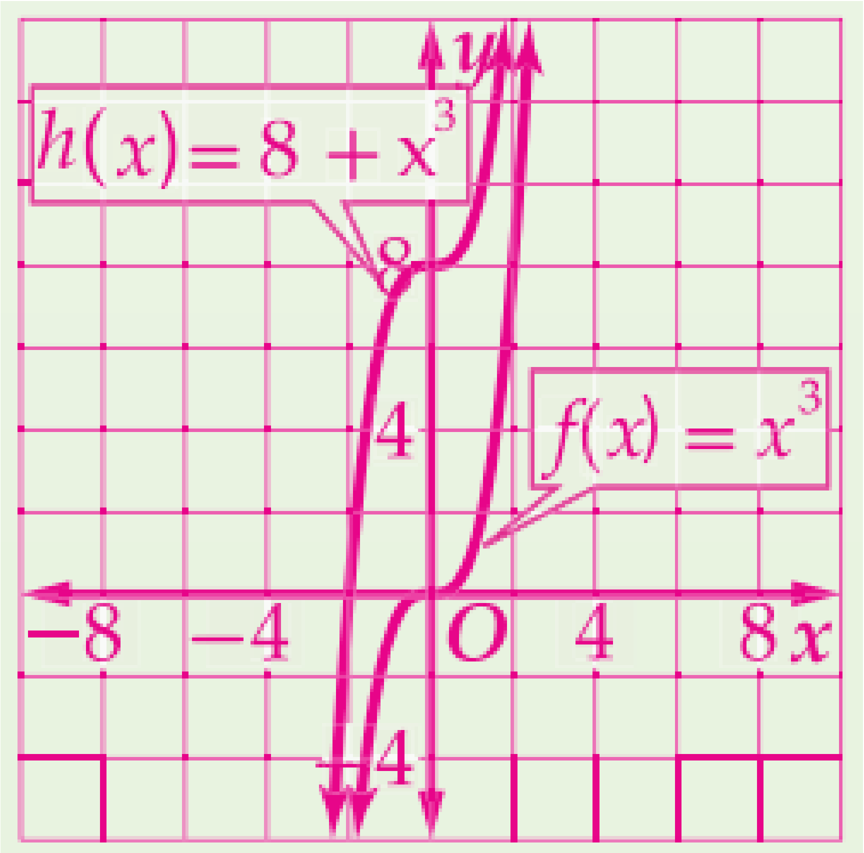


تحقق من فهمك

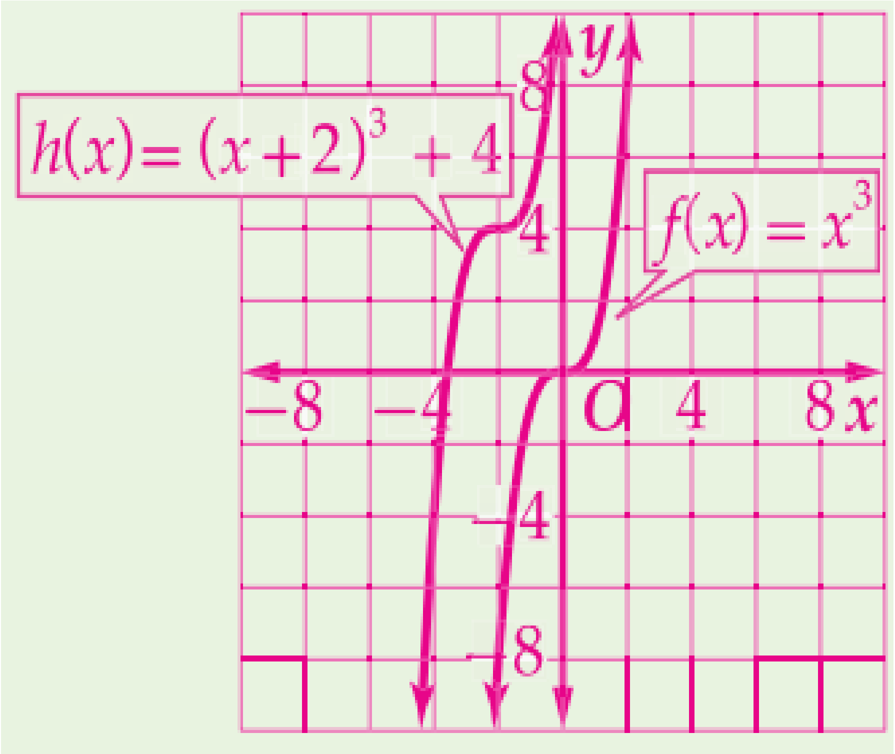
(2A $h(x) = x^3 - 5$



$$h(x) = 8 + x^3$$ **(2B**



(2C $h(x)=(x+2)^3+4$



من التحويلات القياسية الأخرى الانعكاس، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

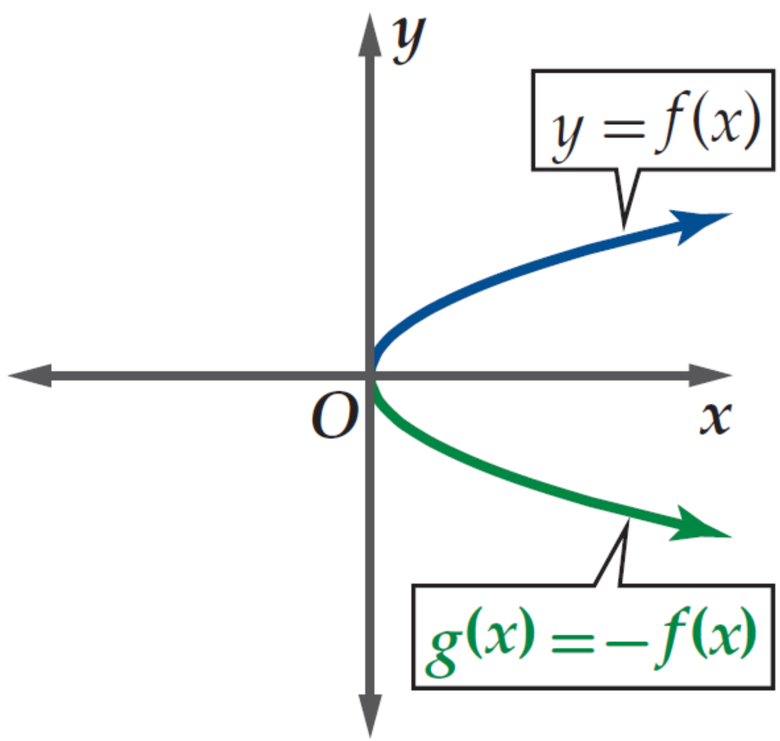
مفهوم اساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

الانعكاس حول المحور x

منحني الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحني الدالة

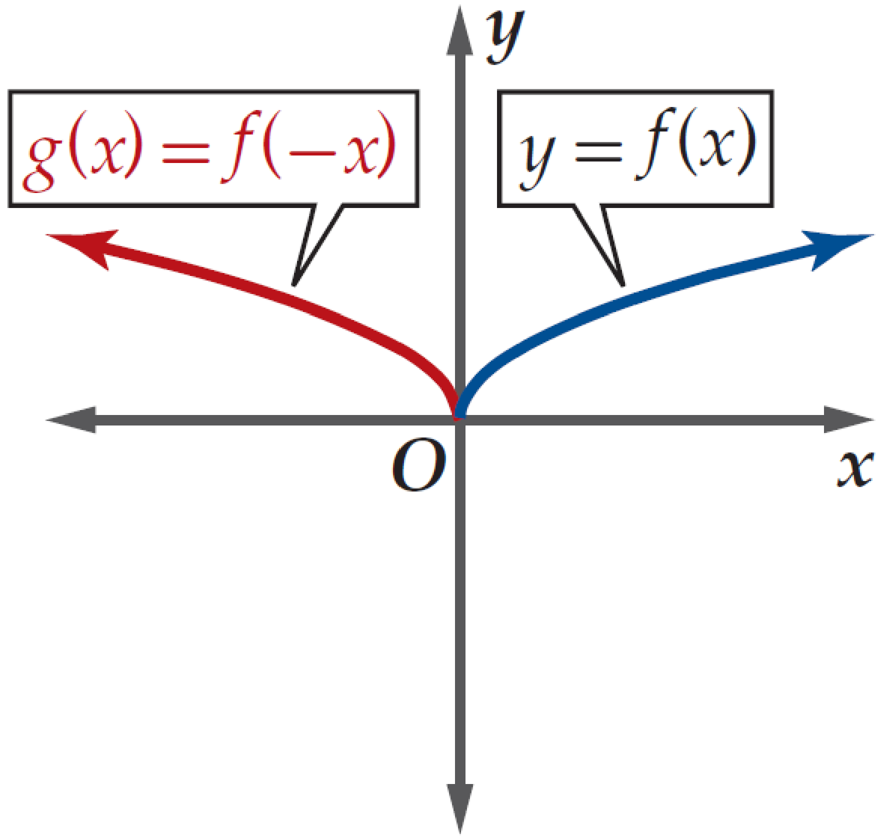
الدالة $f(x)$ حول المحور x .



الانعكاس حول المحور :y

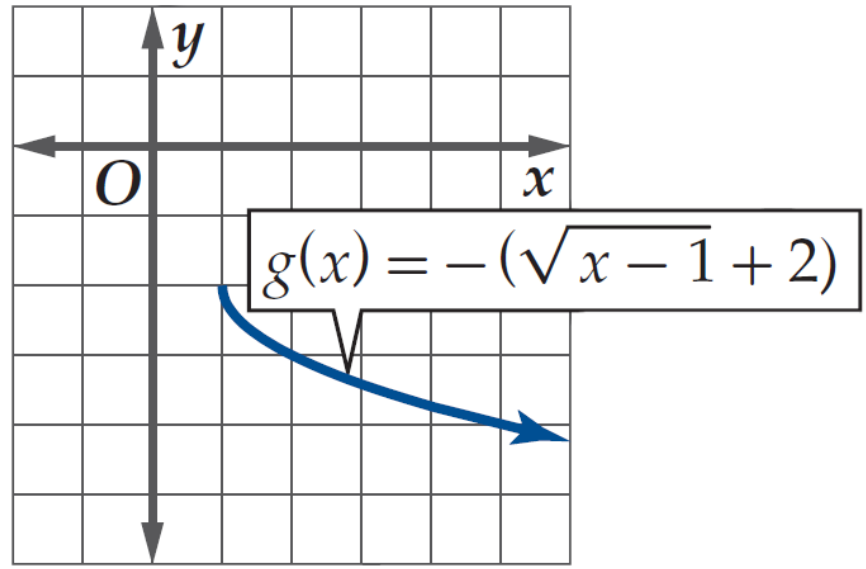
منحني الدالة $g(x)=f(-x)$ هو انعكاس لمنحني الدالة

الدالة $f(x)$ حول المحور y .

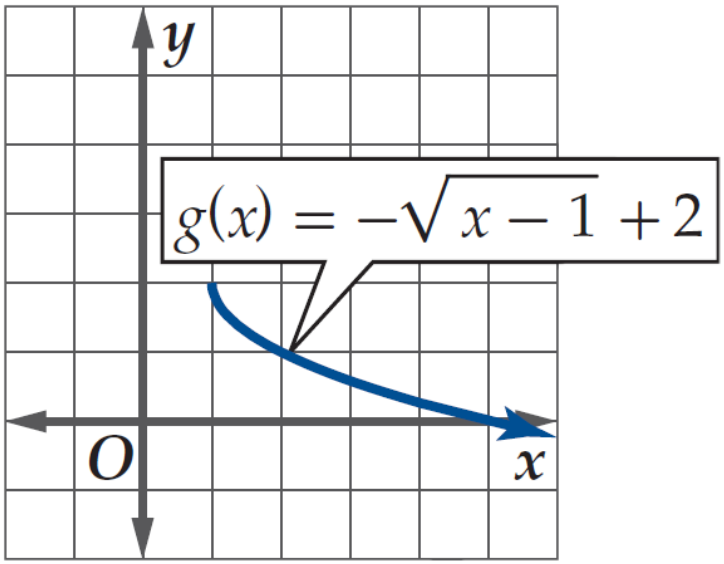


كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلاً منحنى الدالة $g(x)=\sqrt{x-1}+2$

يختلف عن منحنى الدالة $g(x)=-\left(\sqrt{x-1}+2\right)$



انسحاب لمنحنى الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ وحدة إلي اليمين ووحدتين إلي الأعلي ، ثم انعكاس حول المحور x .



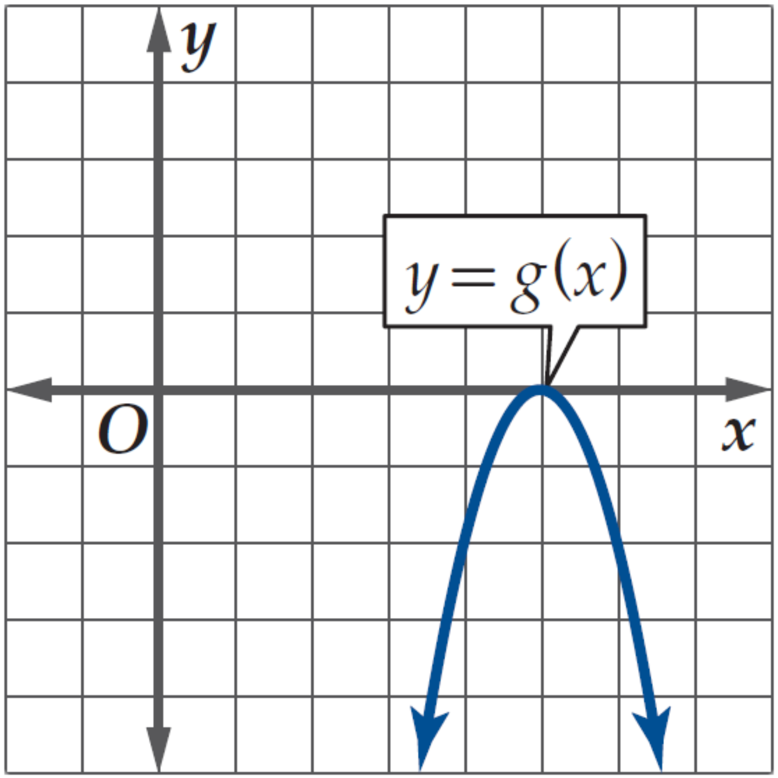
انسحاب وحدة إلي اليمين ، ثم انعكاس لمنحني الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلي الأعلي .

مثال 3

كتابة معادلات التحويل

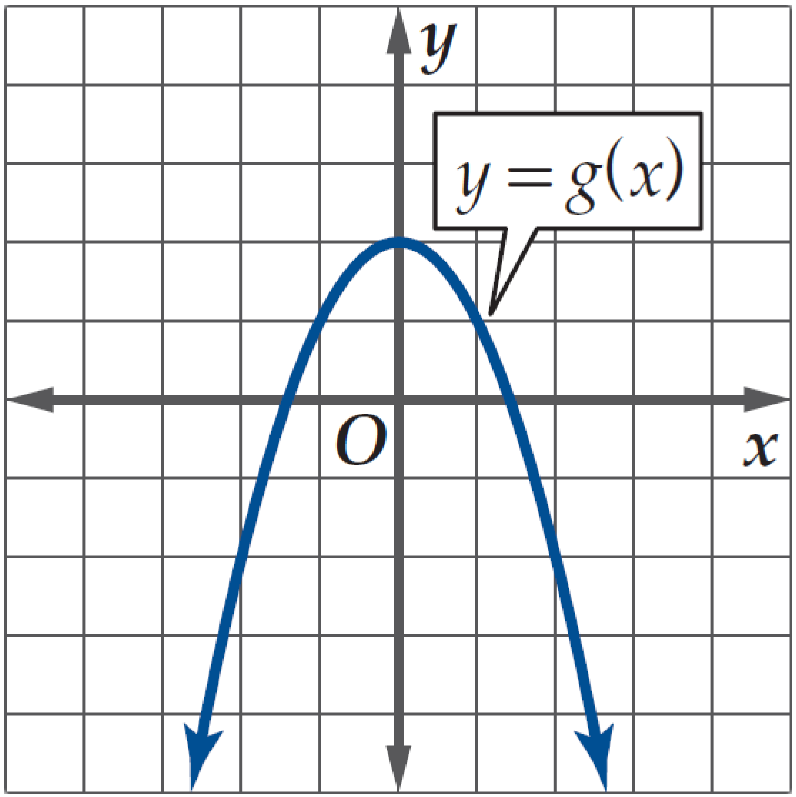
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى g(x) في كل مما يأتي ، اكتب معادلة g(x) :

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = (x-5)^2$

(b



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$

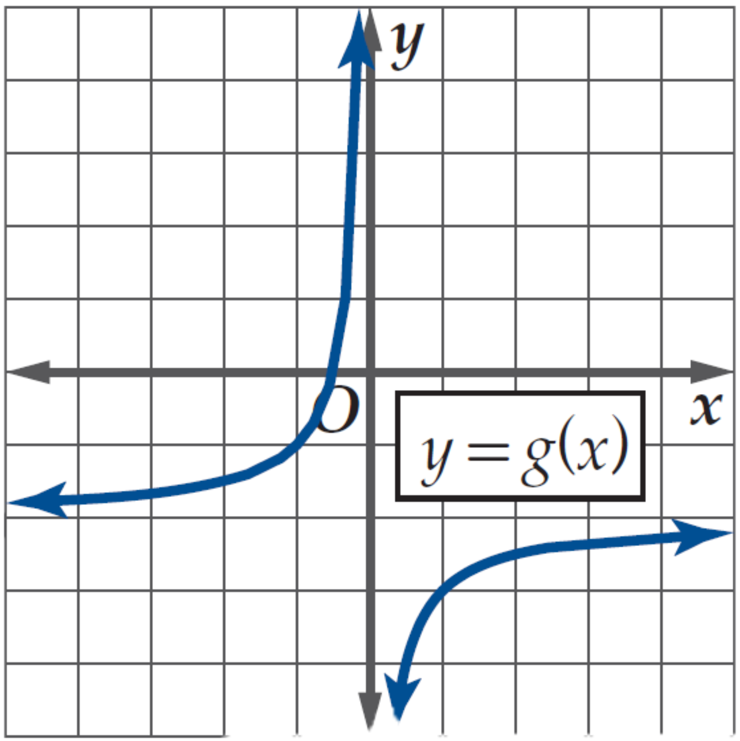
حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى ،

أي أن $g(x) = x^2 + 2$

تحقق من نفسك

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ ثم اكتب معادلة **g(x)** في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

3A)

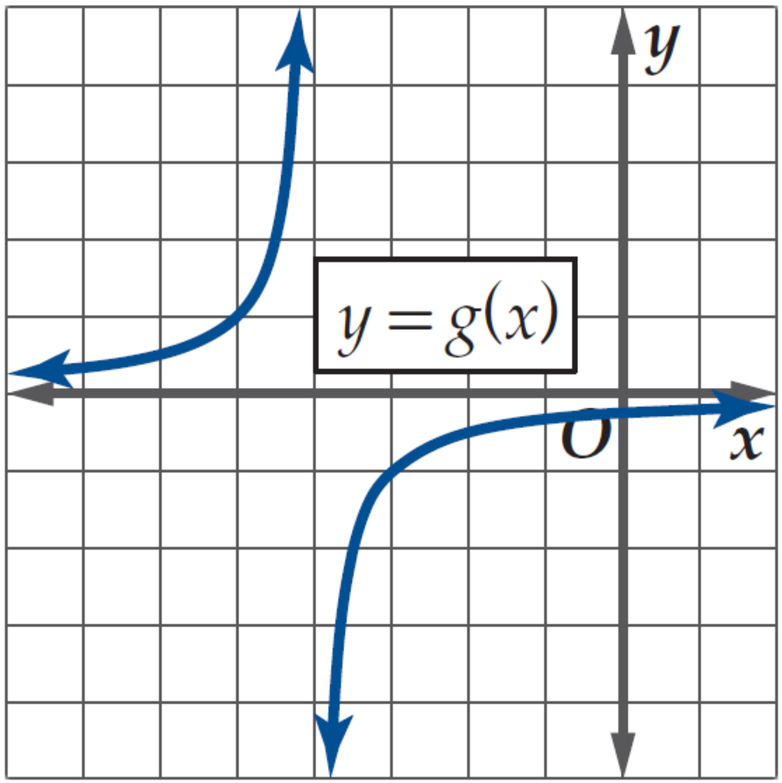


منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x)=\frac{1}{x}$

حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أسفل ،

$$g(x)=-\frac{1}{2}-2$$

(3B



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$

حول المحور x ثم انسحاب مقدار 4 وحدات إلي اليسار ،

$$g(x) = \frac{-1}{x+4}$$

التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضييق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

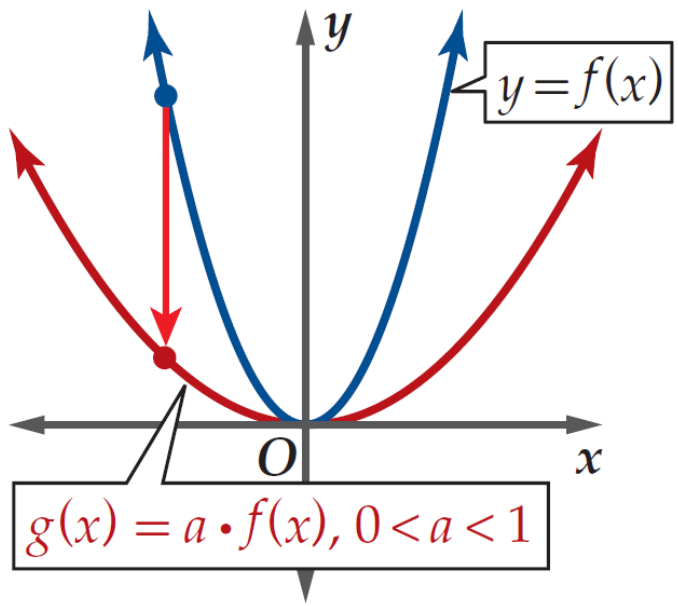
مفهوم اساسي

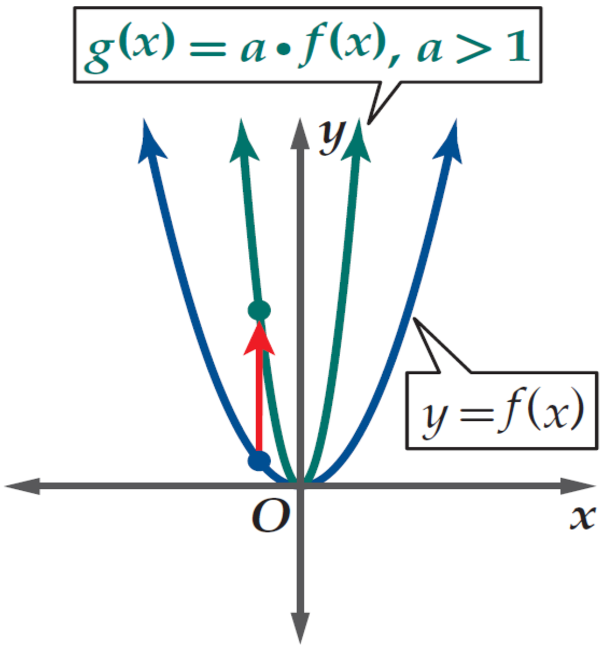
التمدد الرأسي و التمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة g(x) = a f(x) هو:

- توسع رأسي لمنحنى f(x) ، إذا كانت $a > 1$
- تضيق رأسي لمنحنى f(x) ، إذا كانت $0 < a < 1$

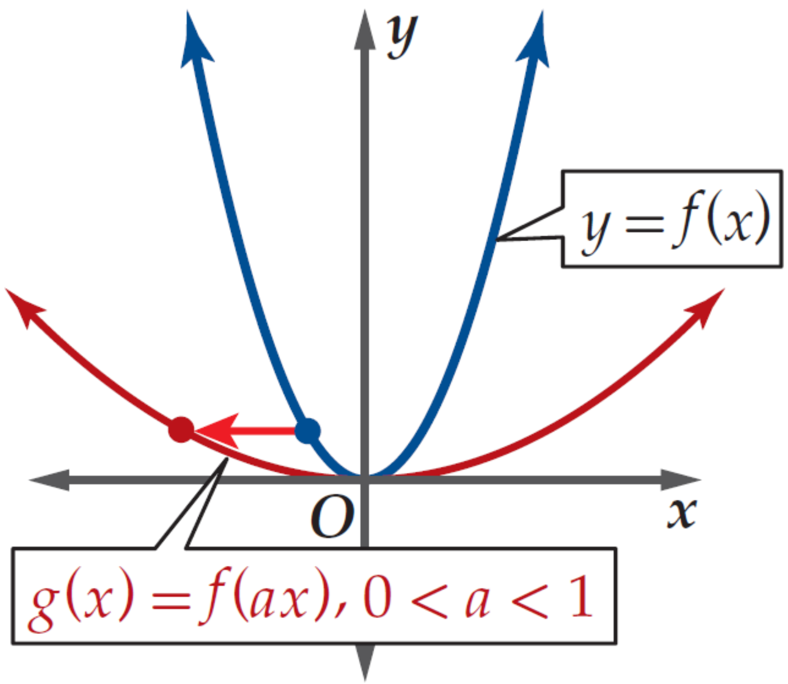


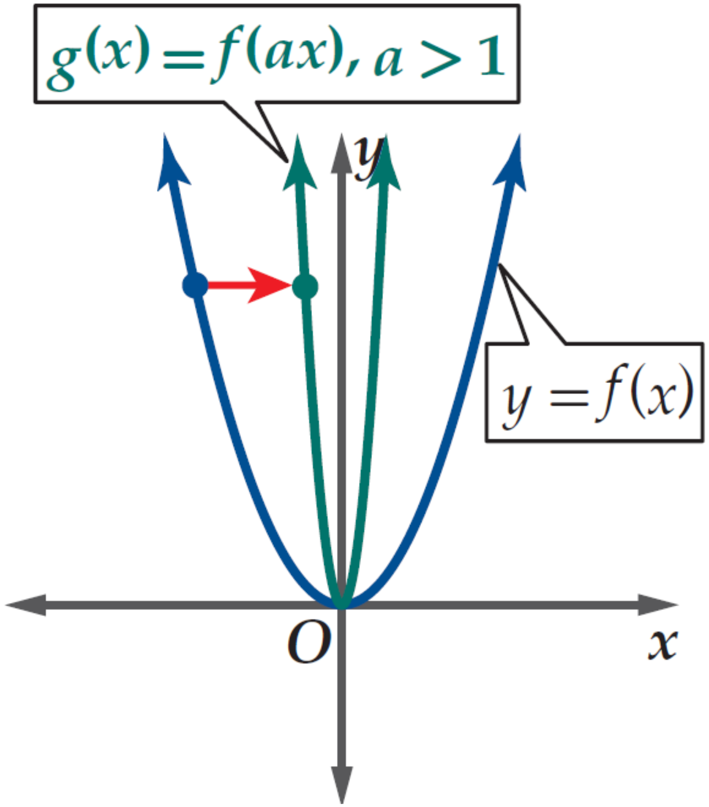


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة g(x) = f(ax) هو:

- تضيق أفقي لمنحني f(x) ، إذا كانت $a > 1$
- توسع أفقي لمنحني f(x) ، إذا كانت $0 < a < 1$





مثال 4

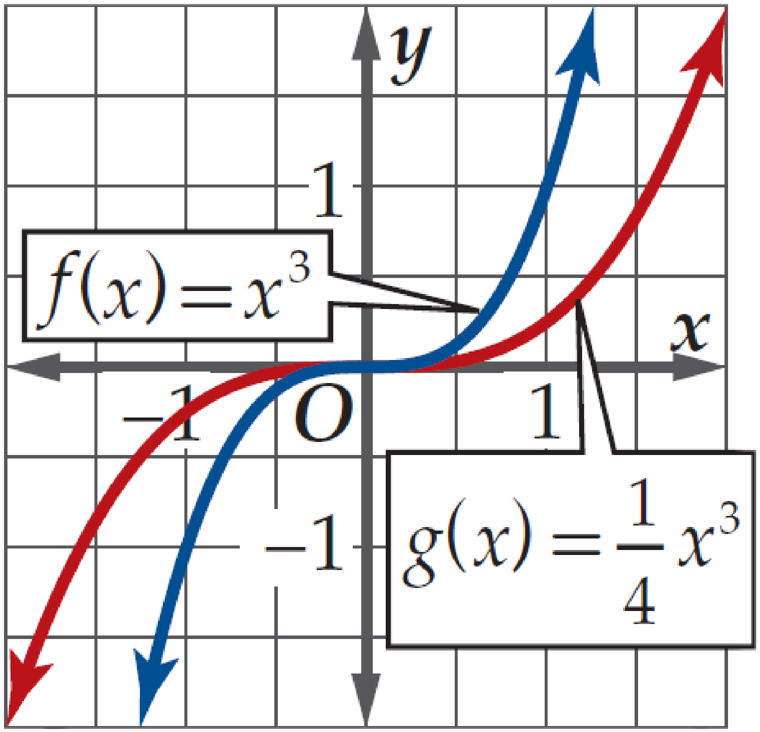
وصف التحويلات الهندسية و تمثيلها

عيّن الدالة الرئيسة (الأم) f(x) للدالة g(x) في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة **g(x)** هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$

$$0 < \frac{1}{4} < 1, g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$$

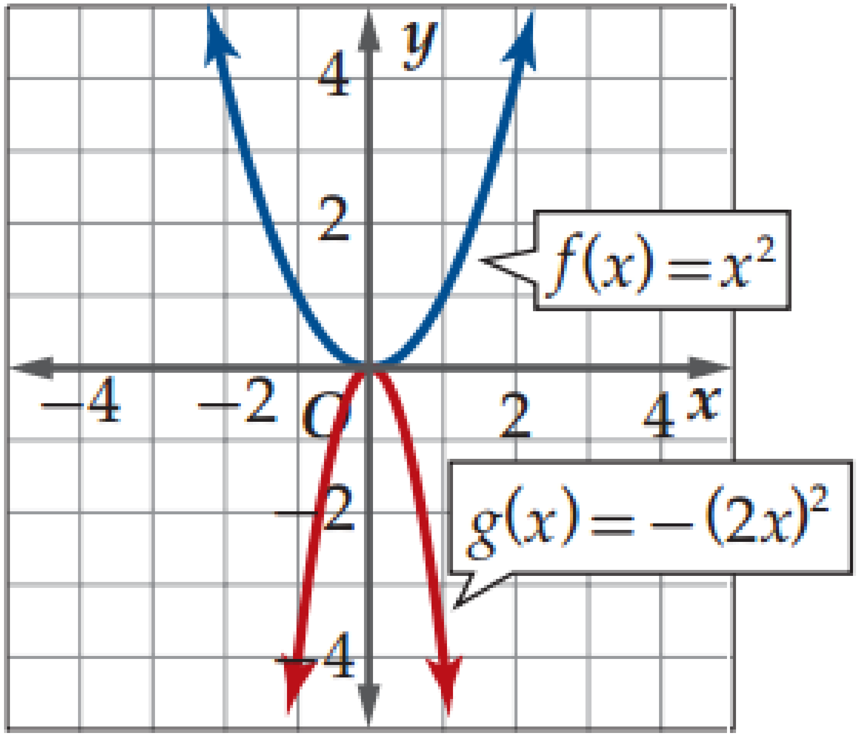


$g(x) = -(2x)^2$ **(b**

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي، ثم انعكاس حول المحور x لمنحنى

$f(x) = x^2$؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$

وَ $1 < 2$.

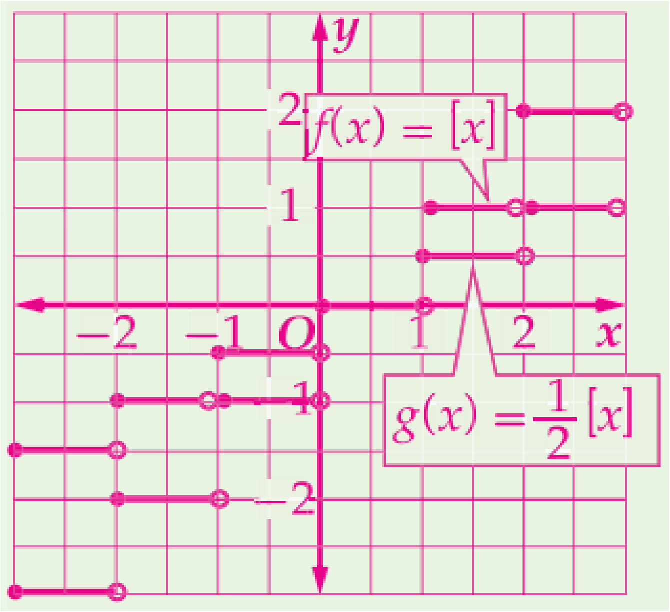


تحقق من فهمك

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

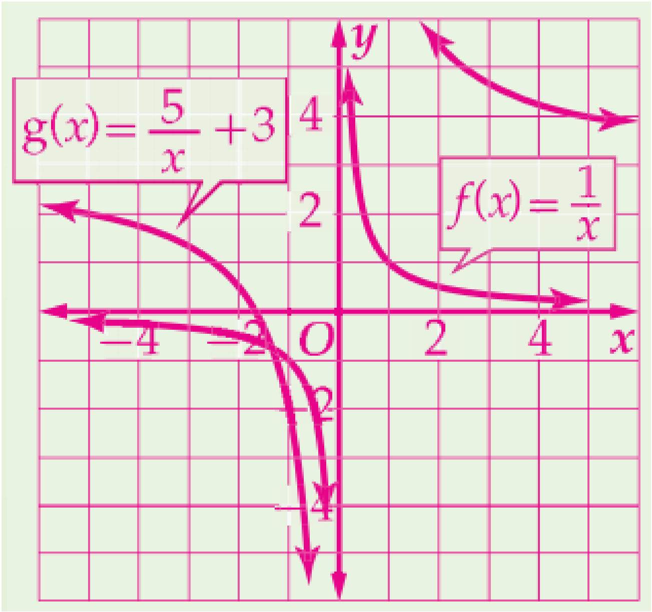
$f(x) = [x]; g(x) = \frac{1}{2}[x]$

$g(x)$ تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$.



4B) $g(x)=\frac{15}{x}+3$

$f(x)=\frac{1}{x}$؛ منحنى $g(x)$ توسع رأسي بمقدار 5 وحدات، ثمَّ انسحاب إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات لمنحنى $f(x)$.



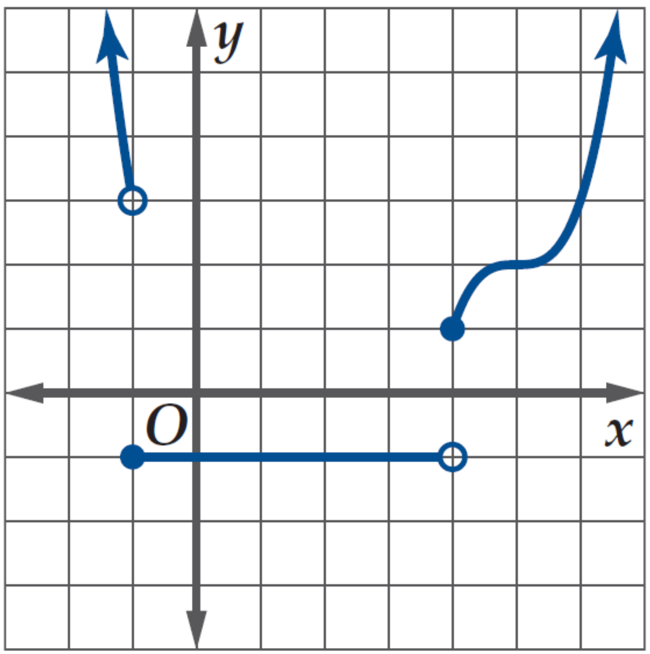
يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها.

مثال 5

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & , x<1 \\ -1 & , -1\le x<4 \\ (x-5)+2 & , x\ge 4 \end{cases}$$

منحنى الدالة g(x) هو تضيق رأسي لمنحنى



في الفترة $(-\infty,-1)$ ، أمثل الدالة $y=3x^2$

في الفترة $(-1,4)$ ، أمثل الدالة الثابتة $y=-1$

في الفترة $[4,\infty)$ ، أمثل الدالة $y=(x-5)^3+2$

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(4,-1),(-1,3)$

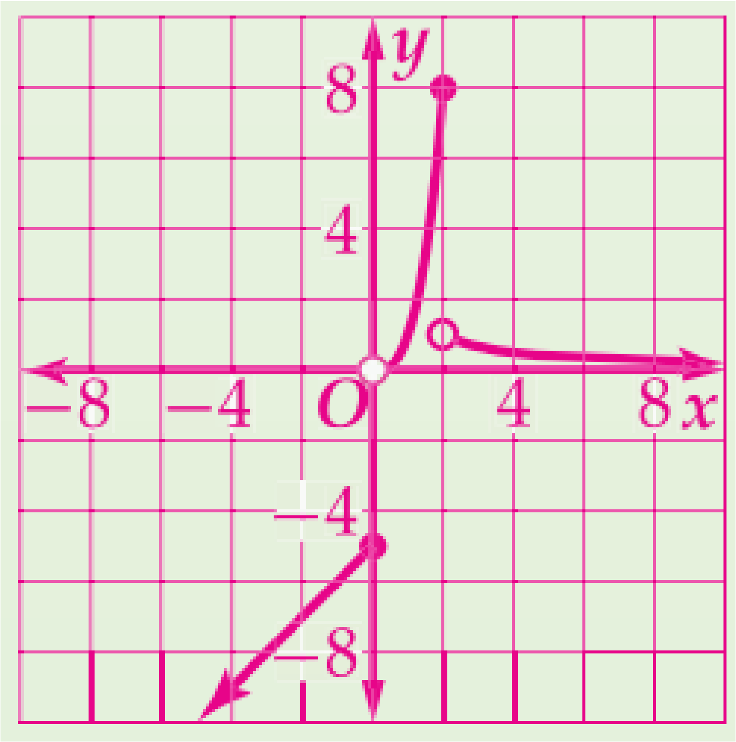
ونقطة عند كل من $(4,1),(-1,-1)$

لأن $f(4)=1, f(-1)=-1$

تحقق من فهمك

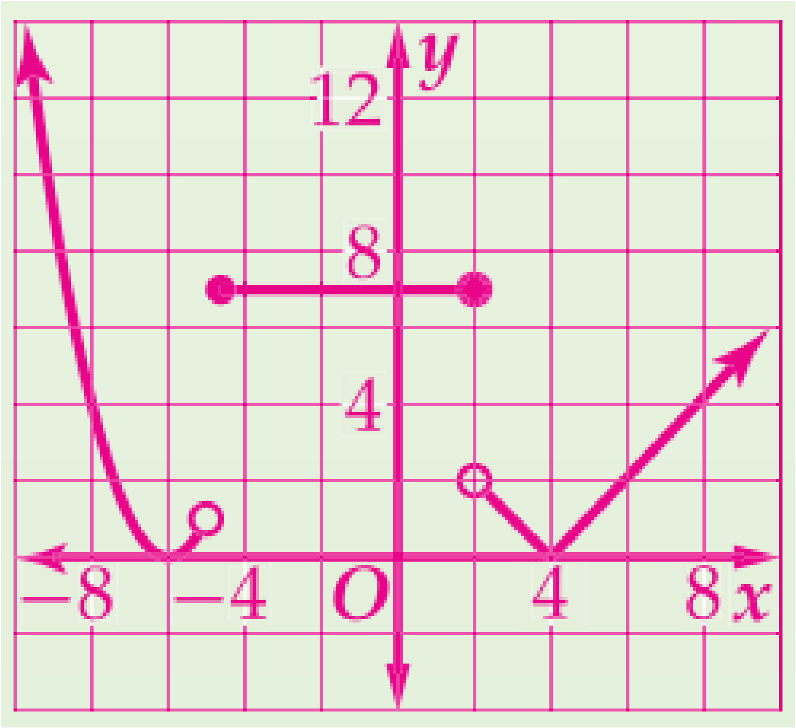
(5A

$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$



(5B

$$g(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , \quad x<-5\\ 7 & ,-5\le x\le 2\\ |4-x| & , \quad x>2\end{cases}$$



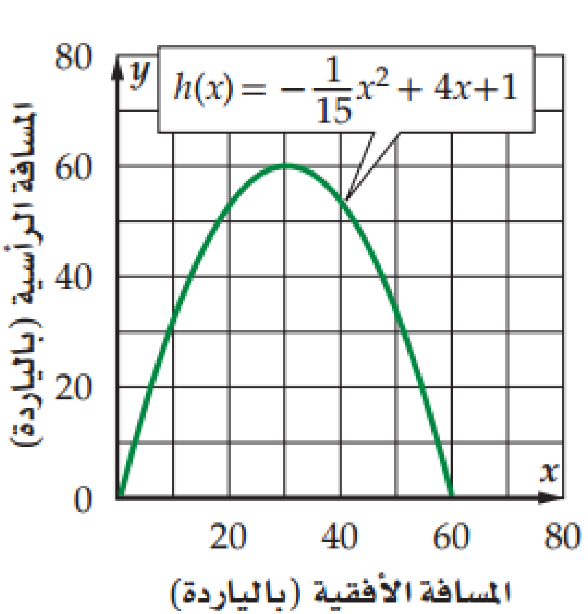
يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة .

التحويلات الهندسية علي الدوال

مثال 6 من واقع الحياة

كرة القدم : ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث h(x) يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث x=0 ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) f(x) = x2 للحصول على h(x).

مسار الكرة



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع .

$$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$$ الدالة الأصلية

بتحليل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$

$$= -\frac{1}{15}\left(x^2 - 60x\right) + 1$$

بإكمال المربع

$$= -\frac{1}{15}\left(x^2 - 60x + 900\right) + 1 + (900)$$

بكتابة $x^2 - 60x + 900$
علي صورة مربع كامل

$$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$$

أي أن منحنى h(x) ينتج من منحى f(x) من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تحقق من فهمك

كهرباء : إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$

، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

a) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ للحصول علي $I(x)$

توسع أفقي

b) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم .

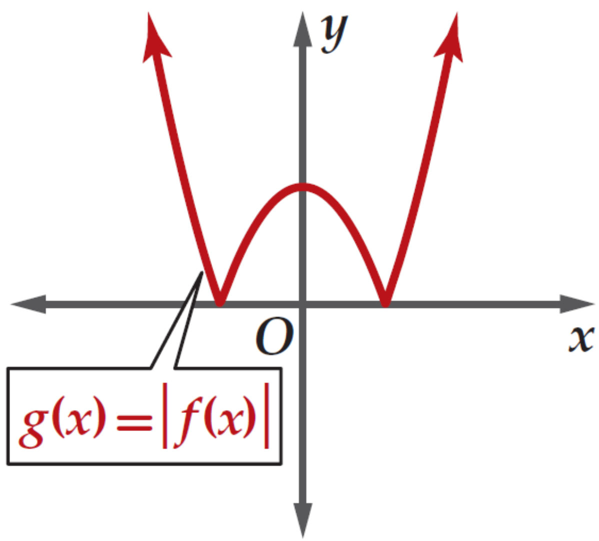
$$I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$$

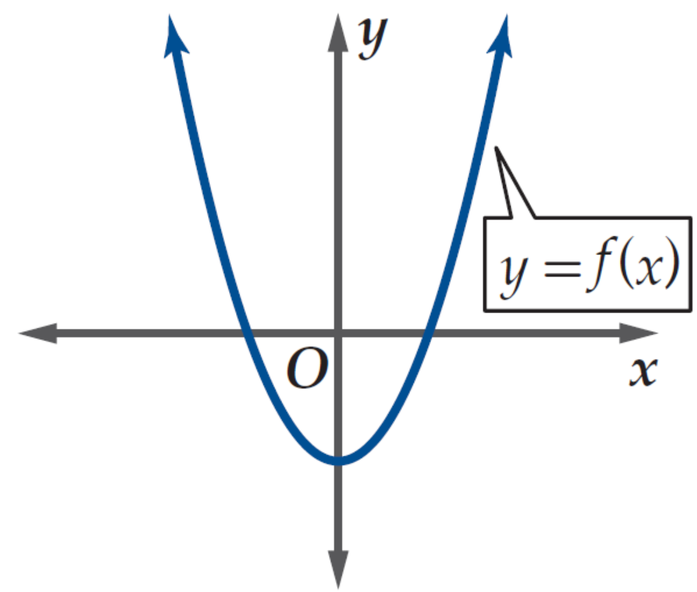
مفهوم اساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$$g(x) = |f(x)|$$

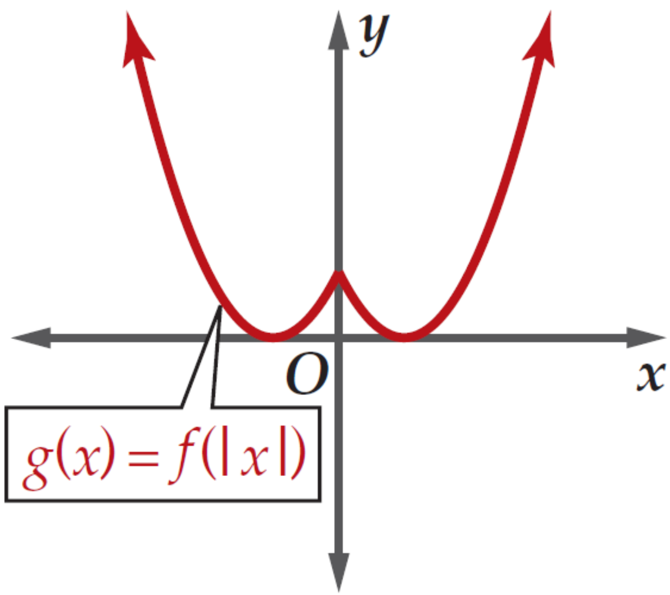
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

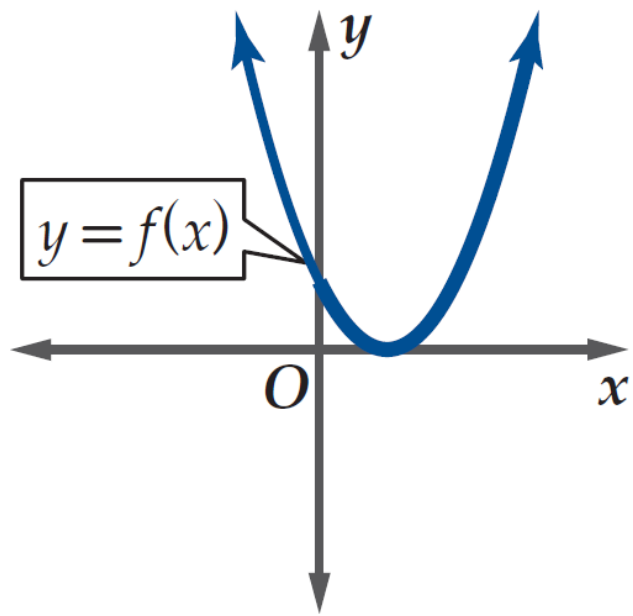




$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .



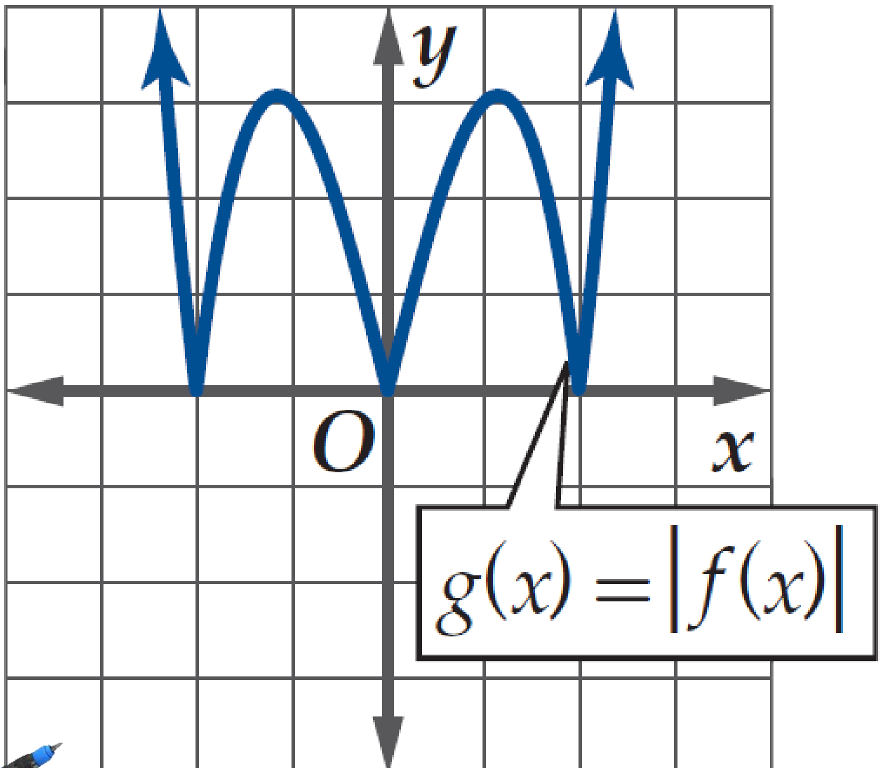


مثال 7

وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $g(x) = |f(x)|$



يقع الجزء السالب من منحنى f(x) في الفترتين

$$(0,2),(-\infty,-2)$$

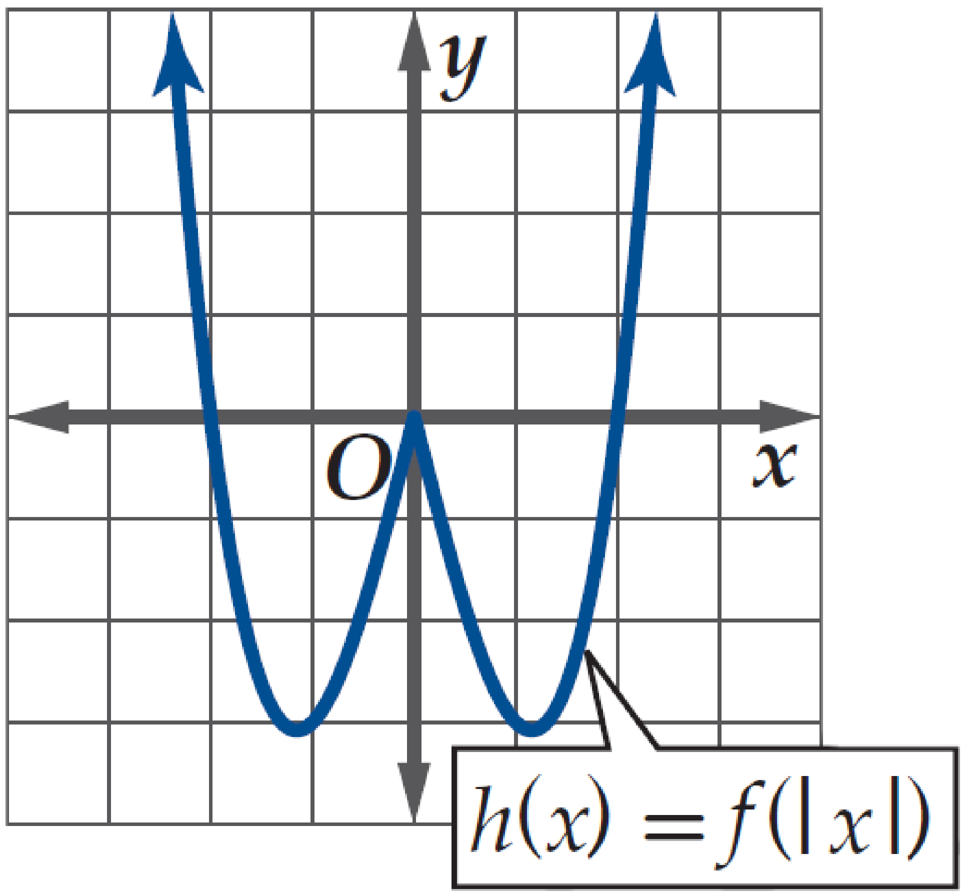
؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x

ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.

$h(x) = f(|x|)$ (b

ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y

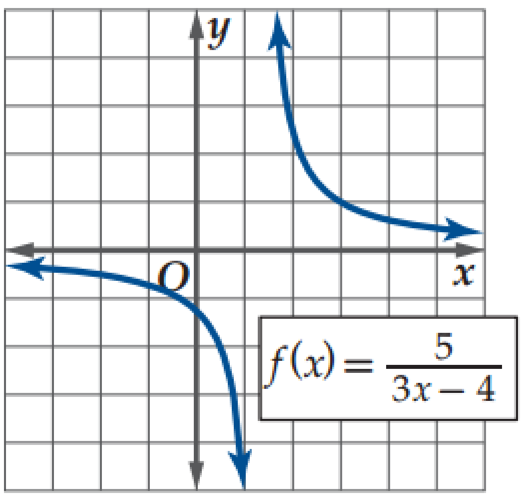
انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.

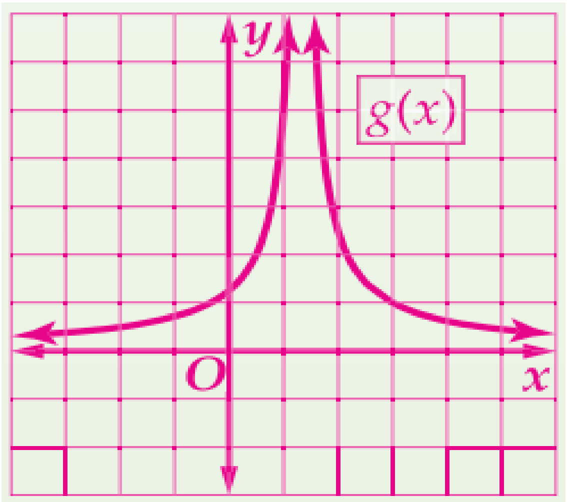


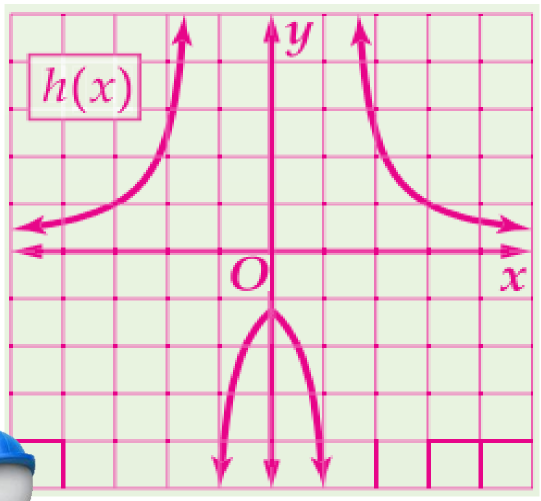
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

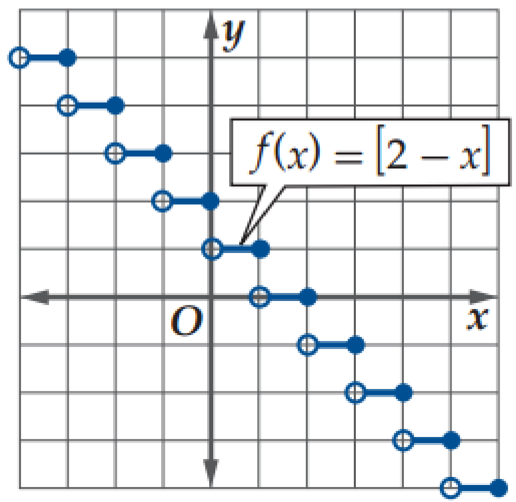
(7A

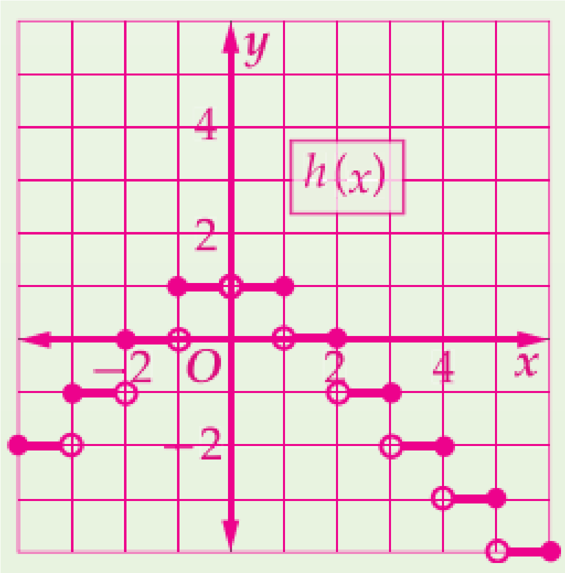


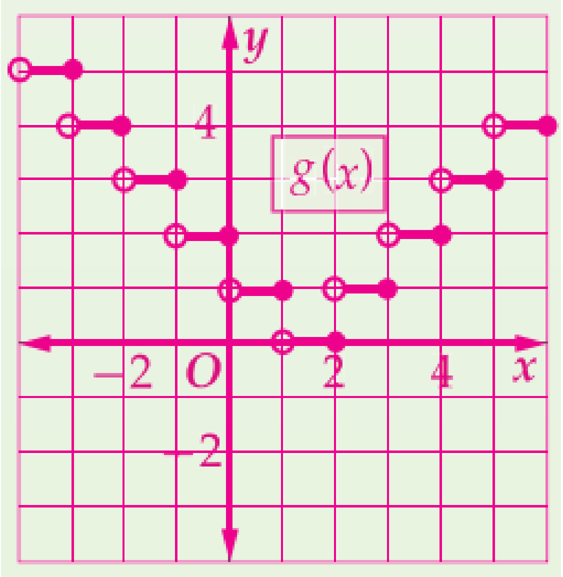




(7B







صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x ، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1)

1) $f(x) = [\![x]\!]$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى: $\{y \mid y \in z\}$. يقطع المنحنى المحور y عند (0.0) ويقطع المحور x عند $\{x \mid 0 \le x < 1, x \in R\}$. لا يوجد لمنحنى الدالة تماثلات، أي أنها ليست فردية وليست زوجية. للدالة عدم اتصال قفزي عند $\{x \mid x \in z\}$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin z\}$. متزايدة عند $\{x \mid x \in z\}$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ (2

المجال $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

المدى $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$.

المنحنى لا يقطع أيًّا من المحورين،

منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛

لذا فالدالة فردية ، للدالة عدم اتصال لا

نهائي عند $x = 0$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. الدالة متناقصة في

$(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$.

3) $f(x) = x^3$

المجال $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى $\{y \mid y \in R\}$. المنحنى يقطع المحورين عند $(0, 0)$ ، المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

4) $f(x) = x^2$

المجال $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0) المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فالدالة زوجية، ومتصلة.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ،

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

5) $f(x) = c$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$، المدى: $\{y \mid y = c, c \in R\}$. إذا كان $c = 0$ ، يقطع المنحنى المحور x عند عدد لانهائي من النقاط. وعدا ذلك فالمنحنى لا يقطع المحور x، يقطع المنحنى المحور y عند النقطة $(0, c)$، والدالة متماثلة حول المحور y؛ لذا فهي زوجية ومتصلة.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$، وثابتة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

6) $f(x) = x$

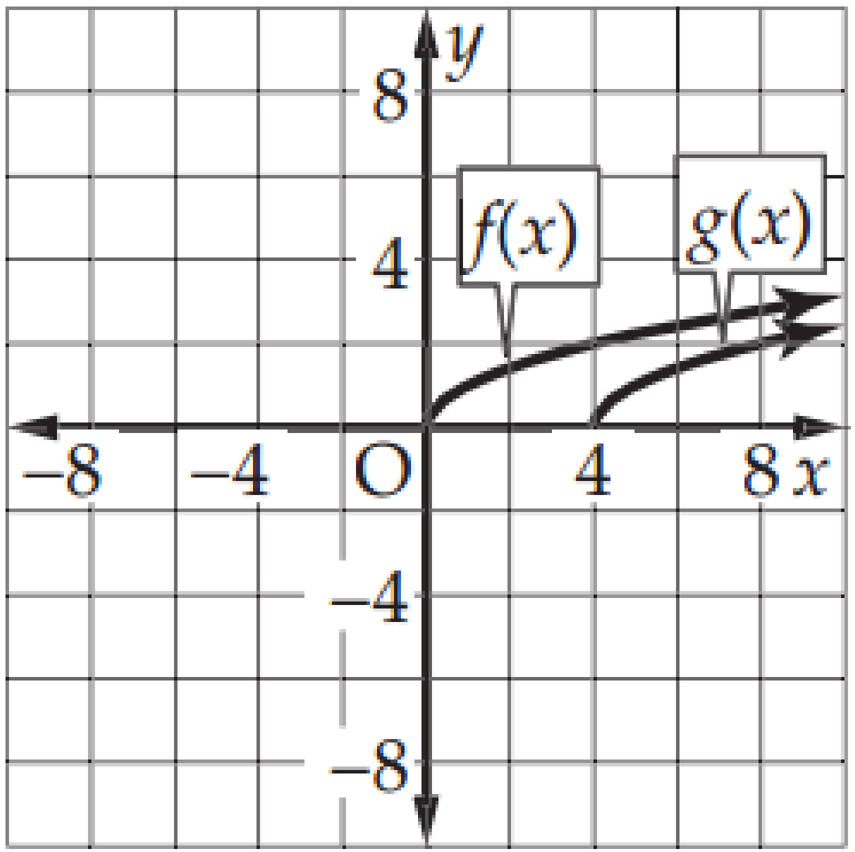
المجال: $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى: $\{y \mid y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0).

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.

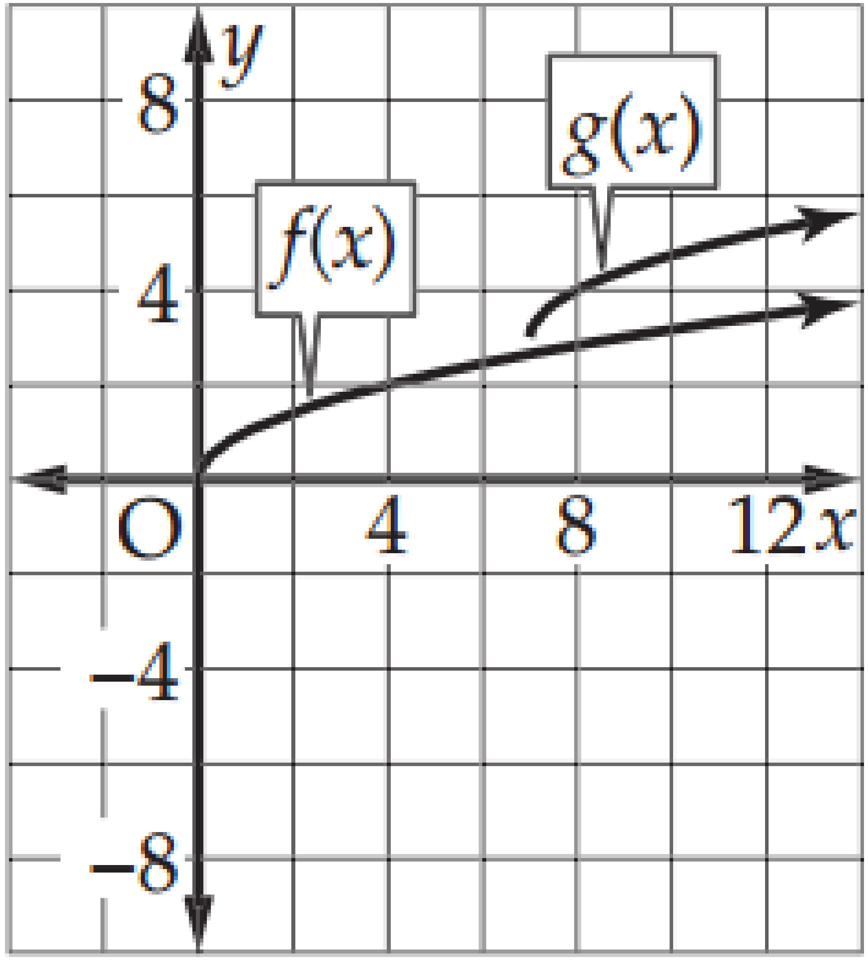
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. ومتزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

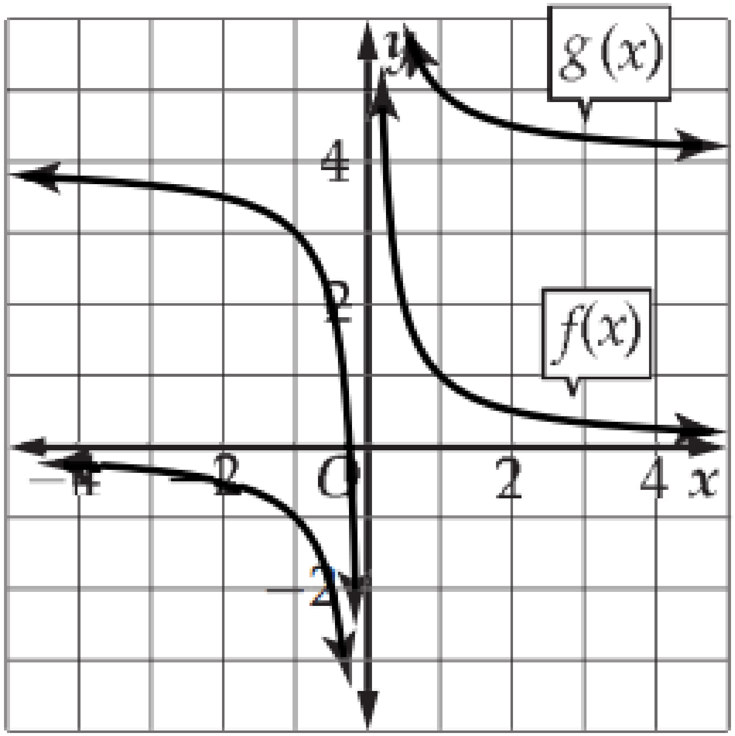


$g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$ **(8**

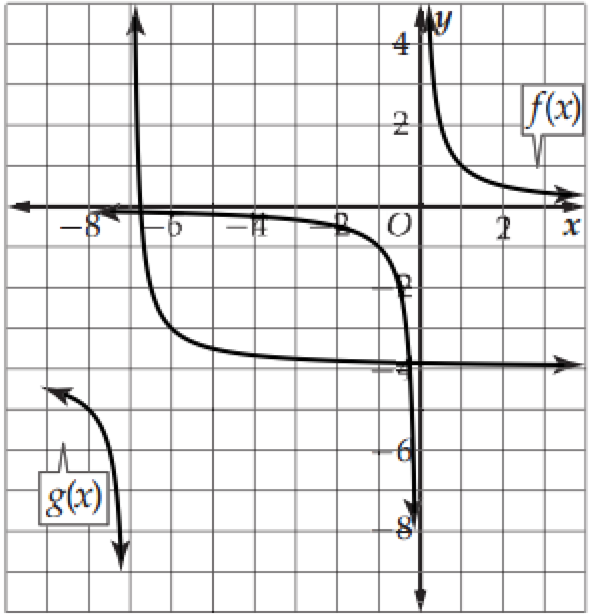


استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين:

9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$

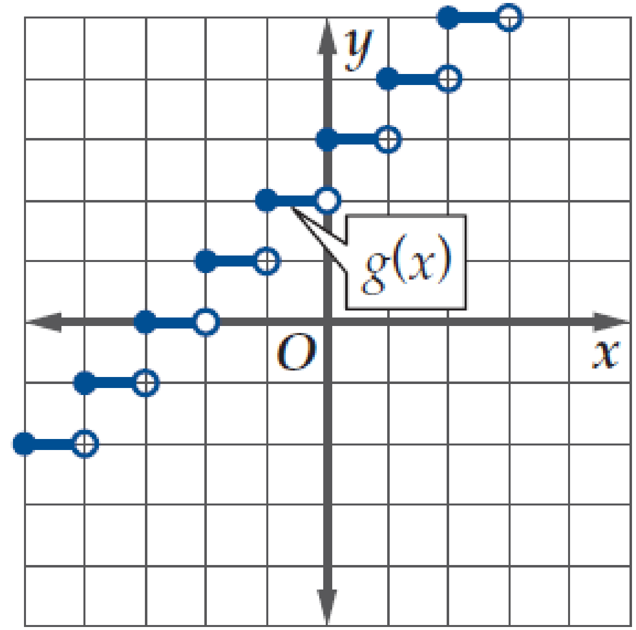


$$g(x) = \frac{1}{x+7} - 4 \quad \textbf{(10}$$



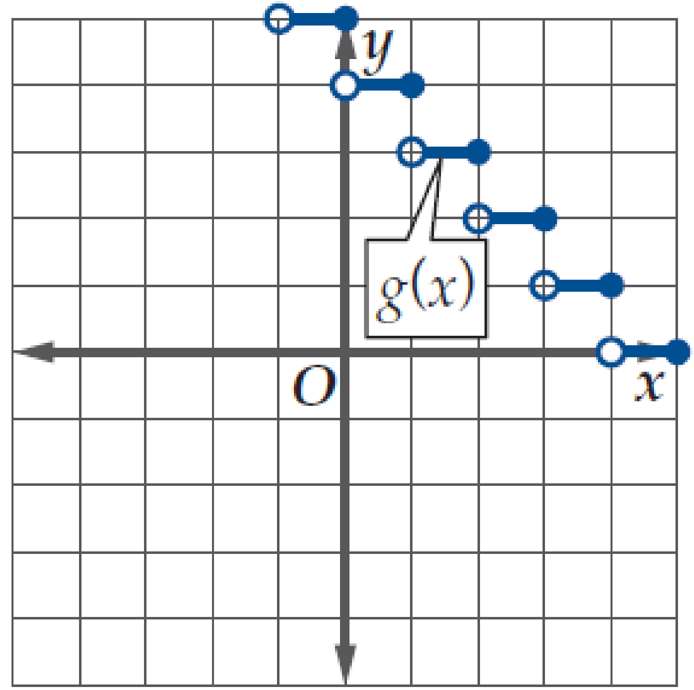
صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

(11



إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار، $g(x) = [x+3]$.

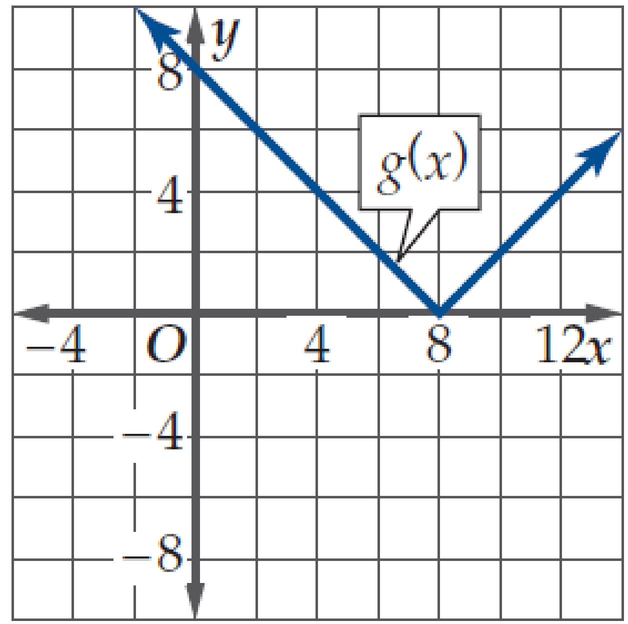
(12



إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بانعكاس حول المحور y ،
يتبعه انسحاب مقداره 5 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = [-x+5]$.

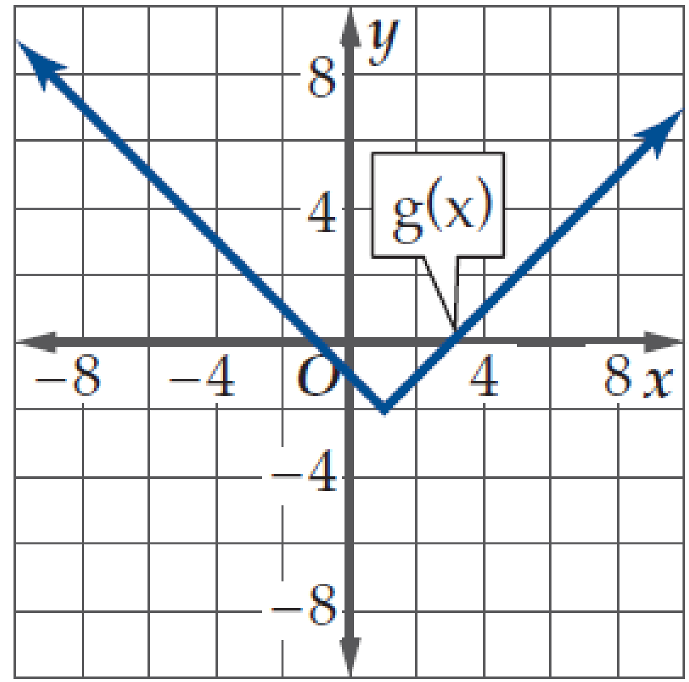
صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3)

13)



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = |x - 8|$.

(14

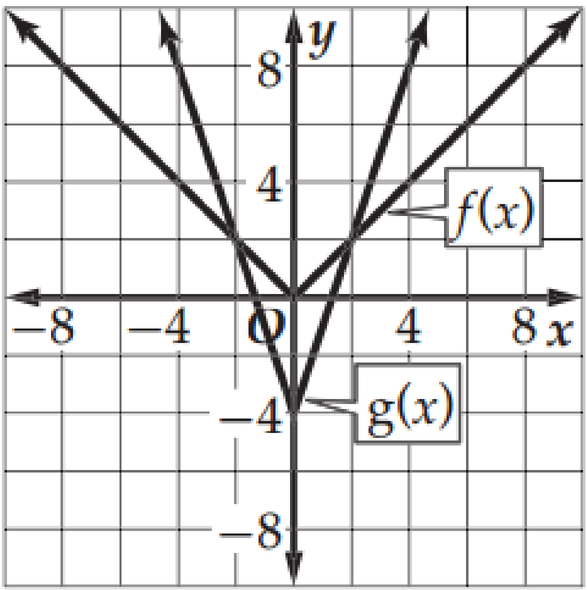


منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أسفل ؛ $g(x) = |x - 1| - 2$.

اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد . (مثال 4)

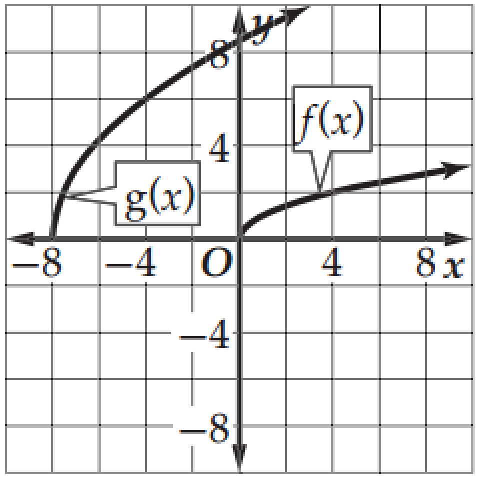
15) $g(x) = 3|x| - 4$

$f(x) = |x|$؛ منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى أسفل للدالة $f(x)$.



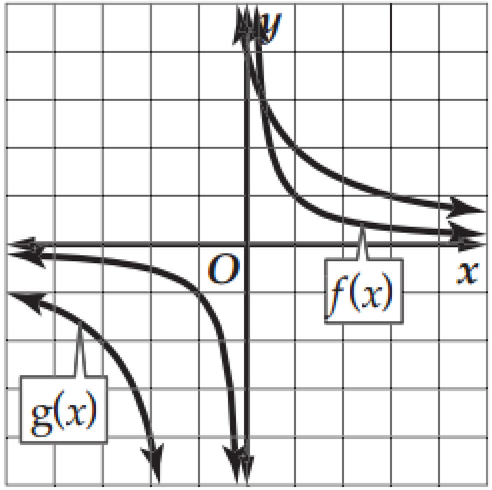
$g(x) = 3\sqrt{x+8}$ (16

$f(x) = \sqrt{x}$؛ منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



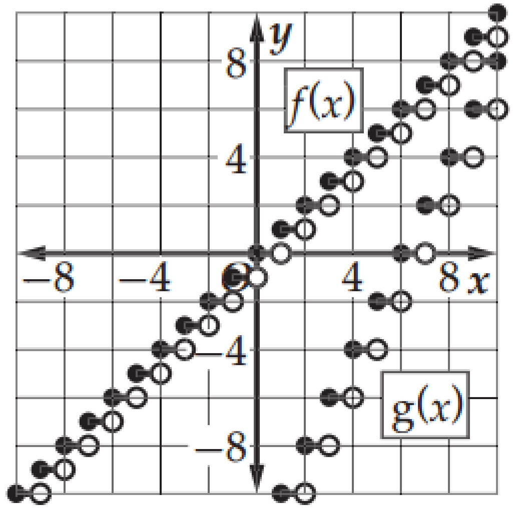
$g(x) = \dfrac{4}{x+1}$ (17

$f(x) = \dfrac{1}{x}$؛ منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



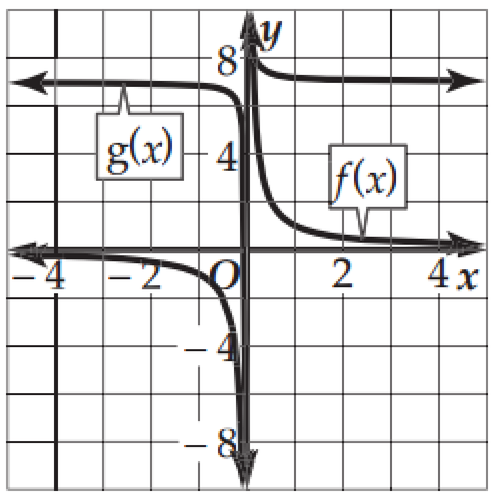
$g(x) = 2[\![x - 6]\!]$ (18

الدالة الرئيسية هي $f(x) = [\![x]\!]$،
ومنحنى الدالة $g(x)$ هو انسحاب
لمنحنى الدالة $f(x) = [\![x]\!]$ بمقدار
6 وحدات إلى اليمين، ثم توسع
رأسي.

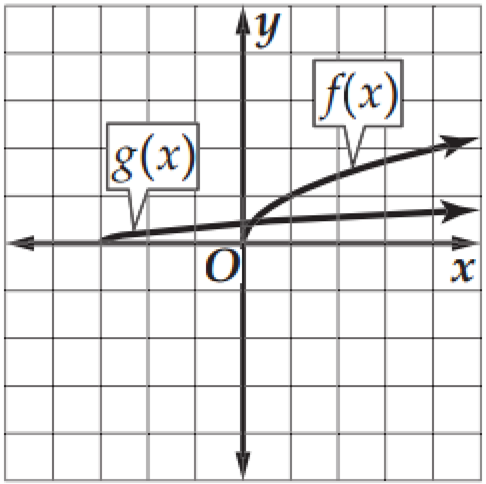


$g(x) = \frac{1}{6x} + 7$ (19

$f(x) = \frac{1}{x}$؛ منحنى $g(x)$ هو تضيق
رأسي يتبعه انسحاب مقداره 7 وحدات
إلى أعلى لمنحى $f(x)$.



20) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{4}$

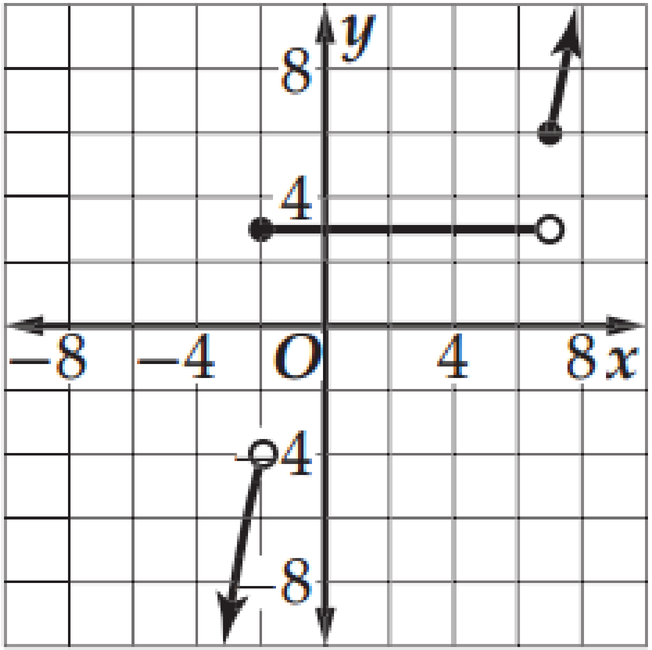


$f(x) = \sqrt{x}$ ؛ منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا:

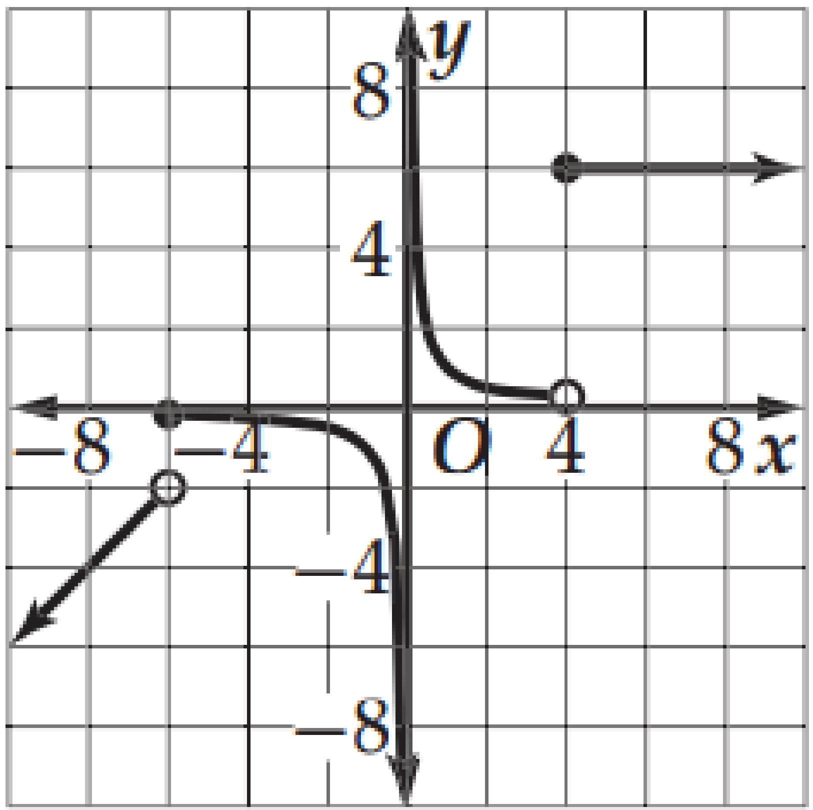
(21

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$$



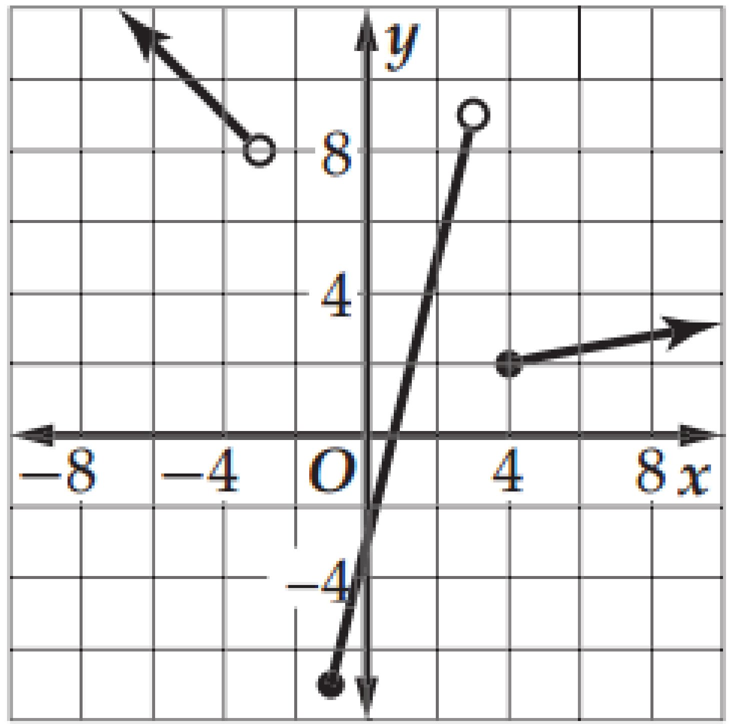
$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

(22



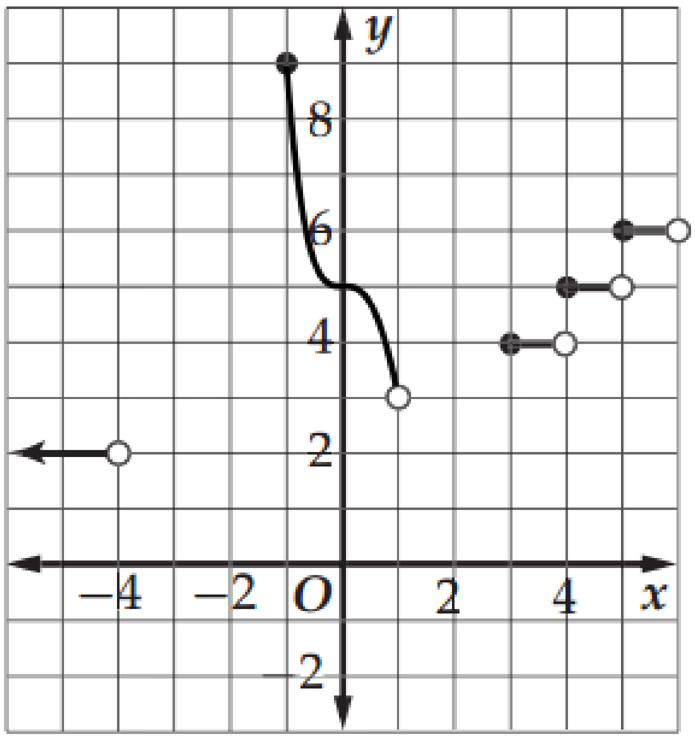
$$h(x) = \begin{cases} |x-5| & , \quad x < -3 \\ 4x-3 & , \quad -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x} & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

(23



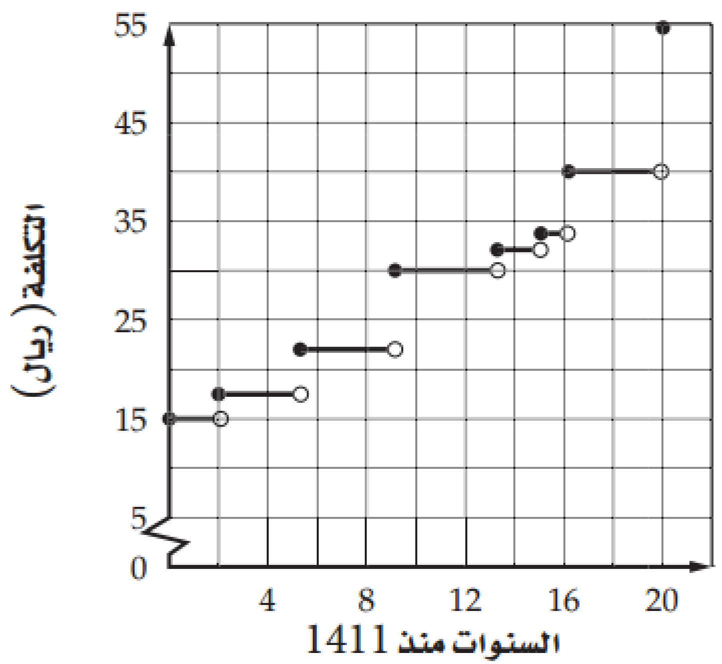
$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & , \quad -1 \leq x < 1 \\ [\![x]\!] + 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

(24



25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55



26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2 [\![x]\!]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [\![x]\!]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

منحنى $c(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، يتبعه انسحاب مقداره 20 وحدة إلى أعلى.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

$$c(x) = 30 + 0.1[x]$$

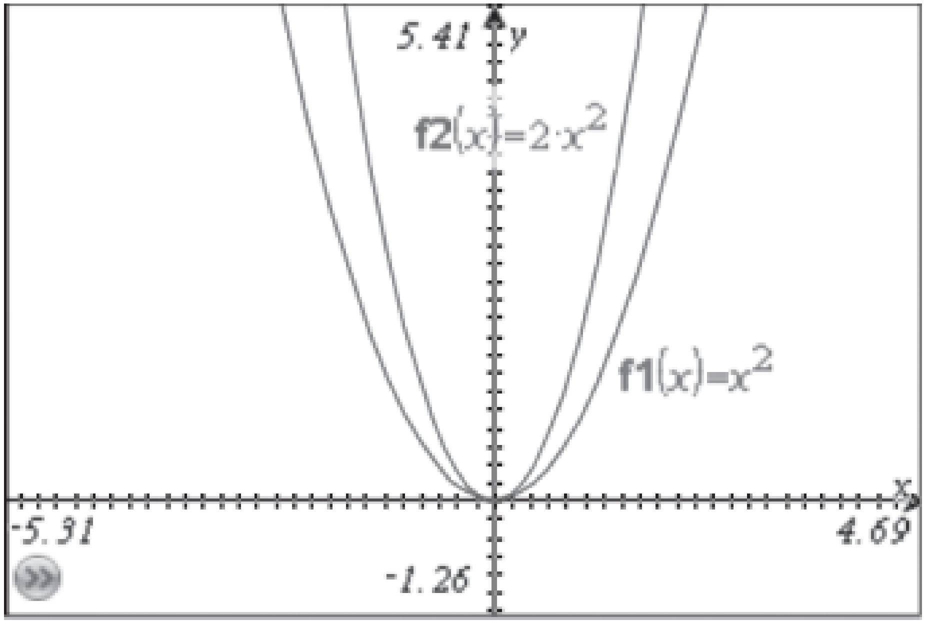
c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟ نعم ؛ بعد 100 دقيقة

27) **فيزياء :** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر . (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

توسع رأسي

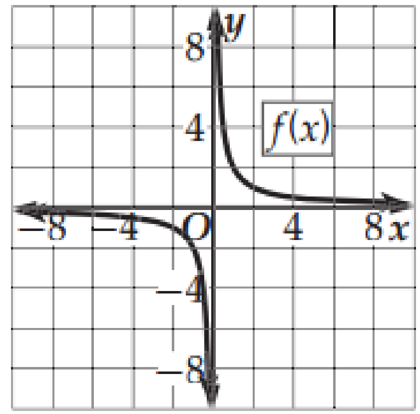
b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$ ، فمثّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

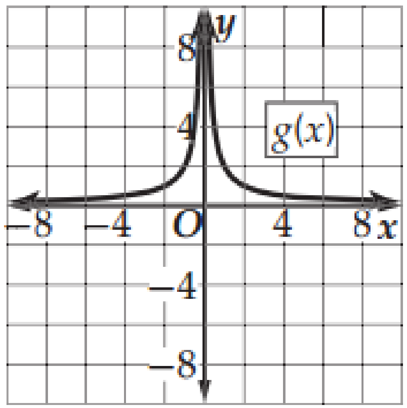


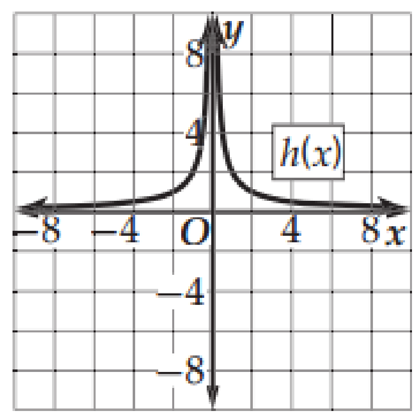
استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين

$g(x) = |f(x)|\ ,\ h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7)

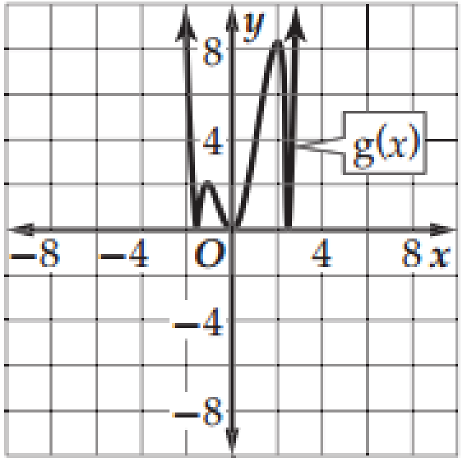
28) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

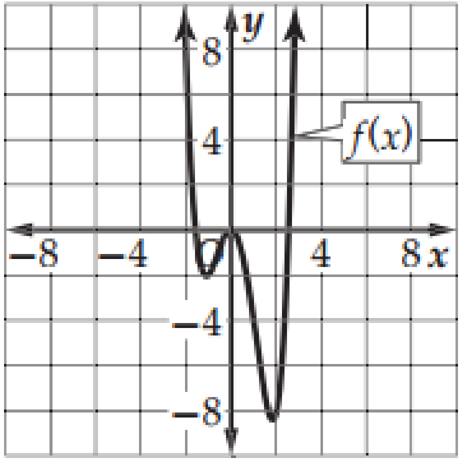


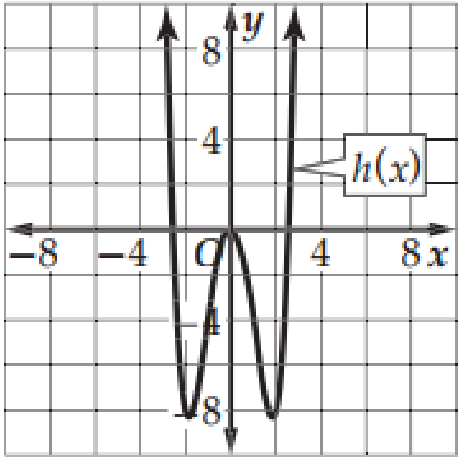




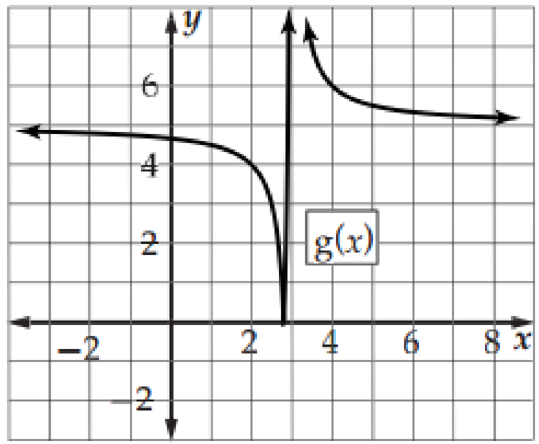
$$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$$ **(29**

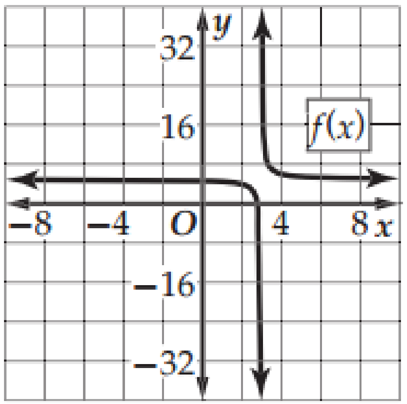


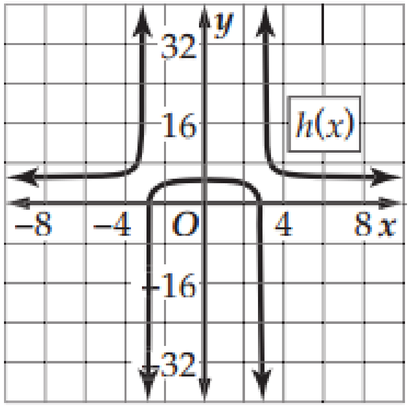




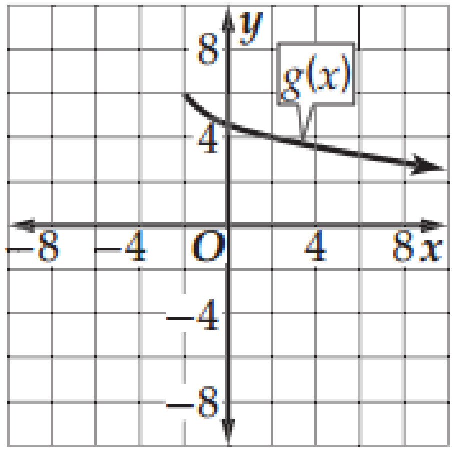
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 5 \quad \textbf{(30}$$

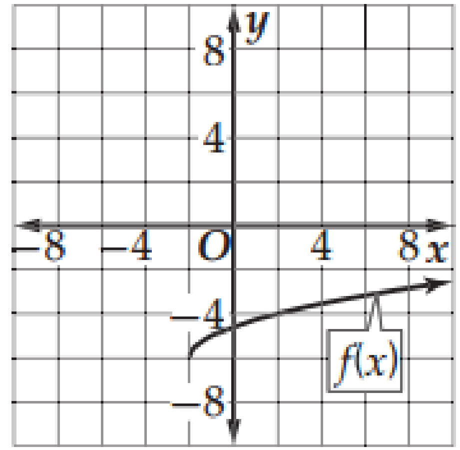


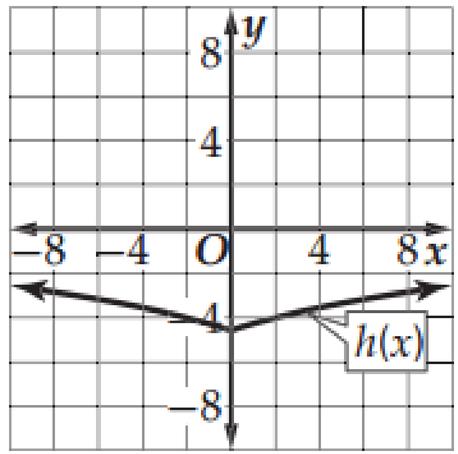




$$f(x) = \sqrt{x+2} - 6$$ **(31**







اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

(32 $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2 .

$$g(x) = \frac{2}{x+7} + 5$$

(33 $f(x) = [\![x]\!]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل، وتوسع رأسي معامله 3.

$$g(x) = -3\,[x] - 4$$

فيزياء : إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$ انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل.

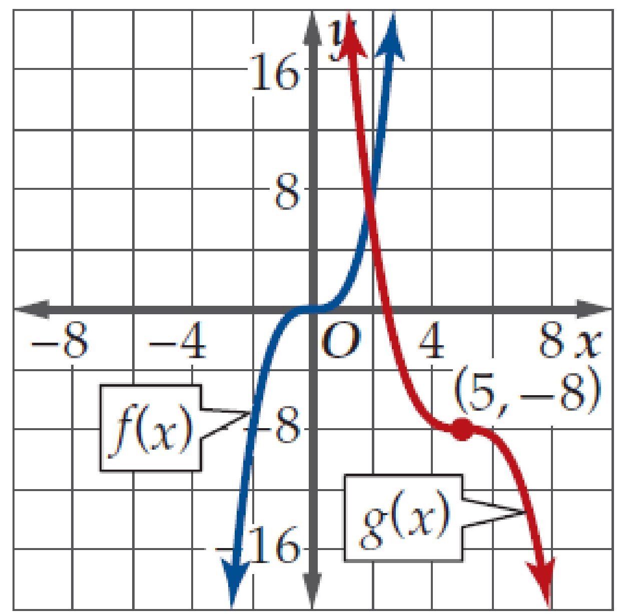
35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$ انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى أعلى.

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$ توسُّع رأسي، يتبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أسفل.

37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$ توسُّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره $\frac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره $\frac{7}{6}$ وحدة إلى أسفل.

اكتب معادلة الدالة $g(x)$ إذا علمت أن منحناها ناتج عن عدة تحويلات هندسية لمنحنى الدالة $f(x)$، وأحد هذه التحويلات هو تضييق رأسي معامله 0.5.

(38



إن منحنى $g(x)$ ناتج عن التحويلات الهندسية الآتية لمنحنى $f(x) = x^3$.

- ❋ انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.
- ❋ تضييق رأسي معامله 0.5.
- ❋ انعكاس حول المحور x.
- ❋ انسحاب 8 وحدات إلى الأسفل.

لذا فمعادلة $g(x)$ هي:

$$g(x) = -0.5(x-5)^2 - 8$$

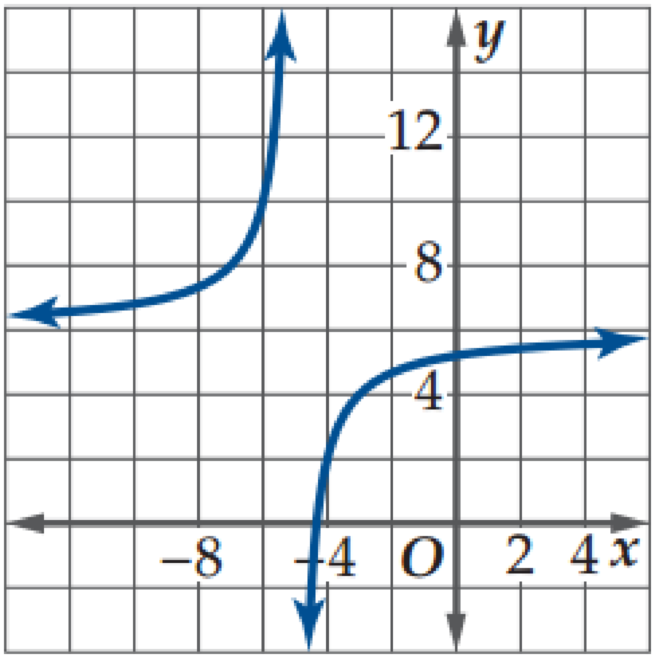
39) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع. $g(x) = 1.12f(x)$

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء. $g(x) = f(x - 30)$

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع. $g(x) = f(x) - 0.45$

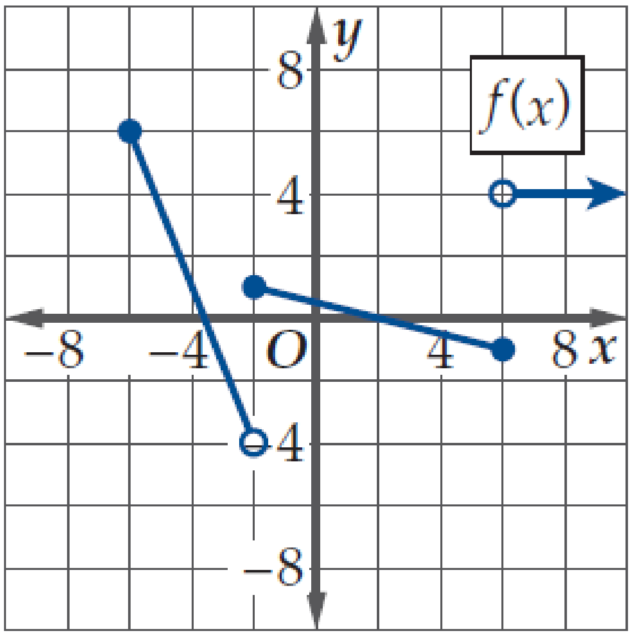
40) اكتب دالة تمثّل المنحنى المرسوم:

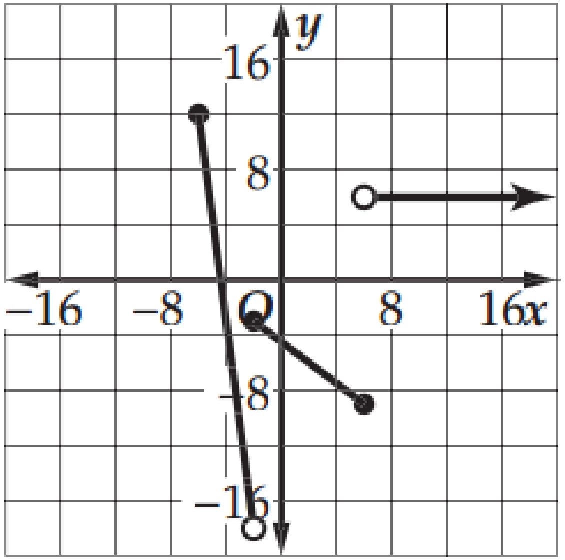


$$f(x) = -\frac{4}{x+5} + 6$$

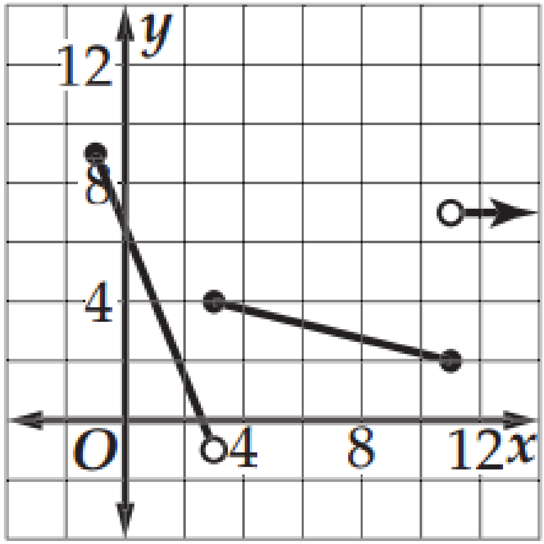
استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:

41) $g(x) = 0.25f(x) + 4$



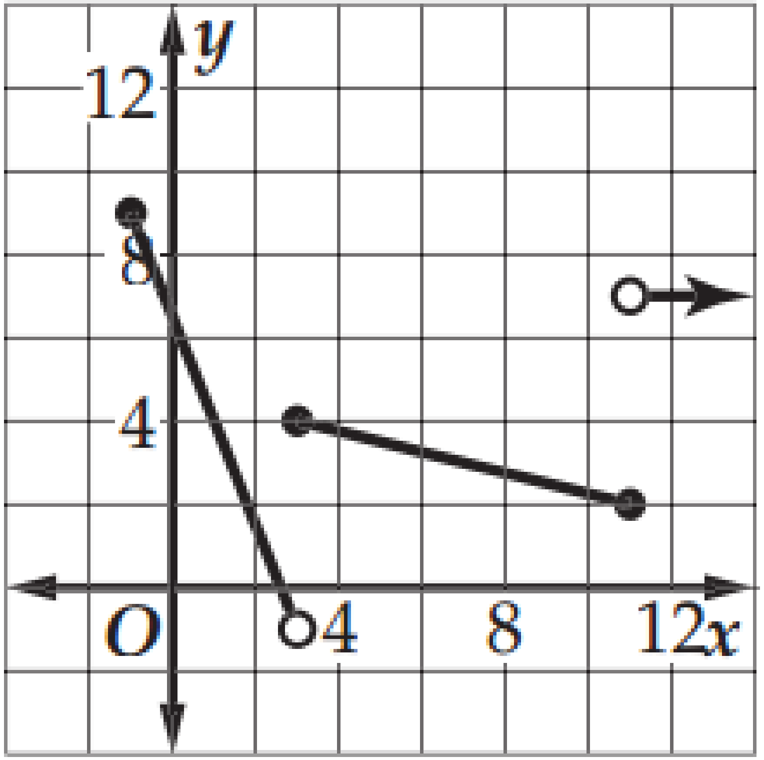


$g(x) = 3f(x) - 6$ **(42**



$g(x) = f(x - 5) + 3$ **(43**

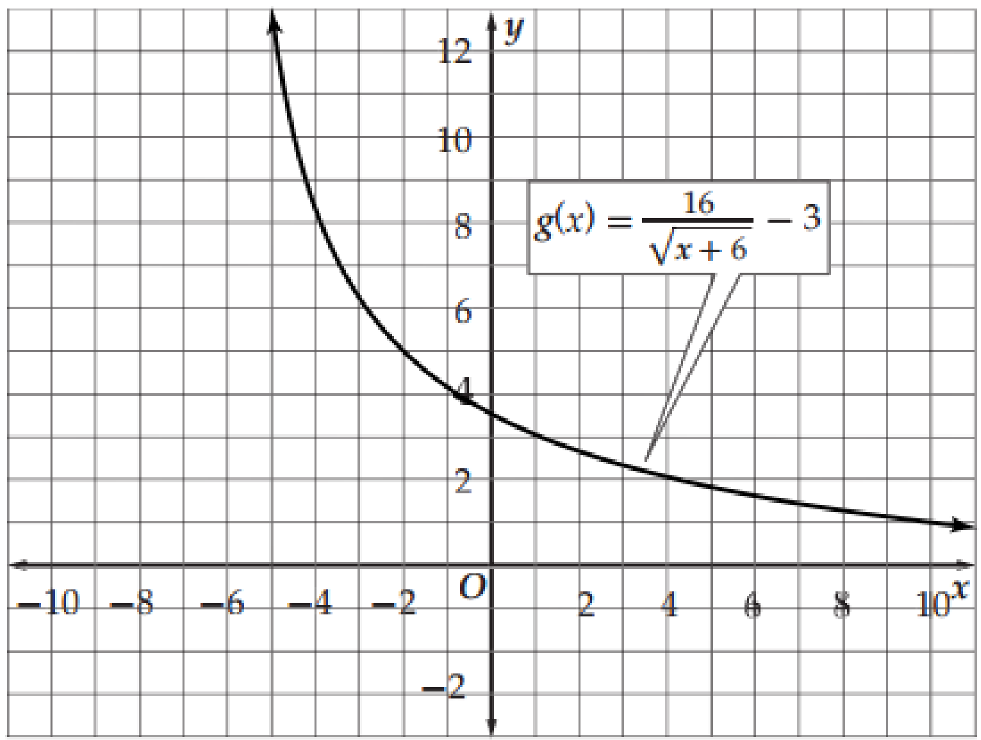
$g(x) = -2f(x) + 1$ **(44**



استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

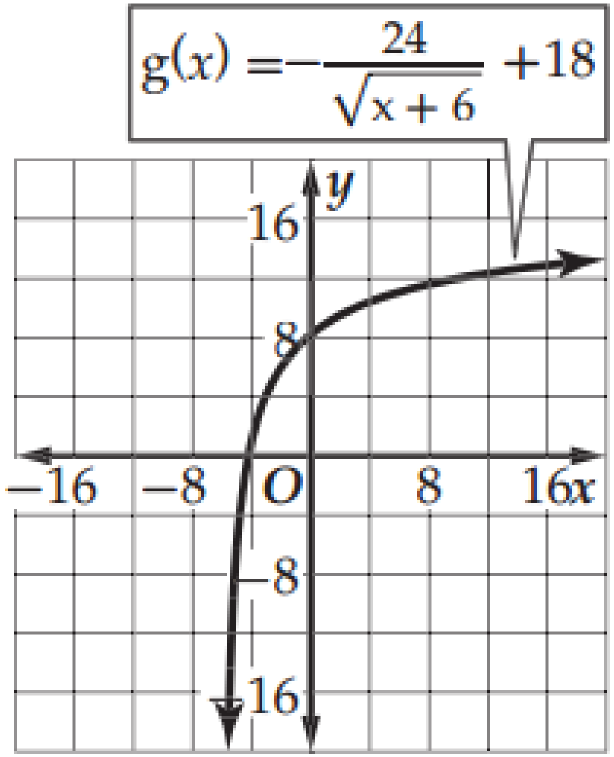
(45 $g(x) = 2f(x) + 5$

$$g(x) = \frac{16}{\sqrt{x+6}} - 3$$



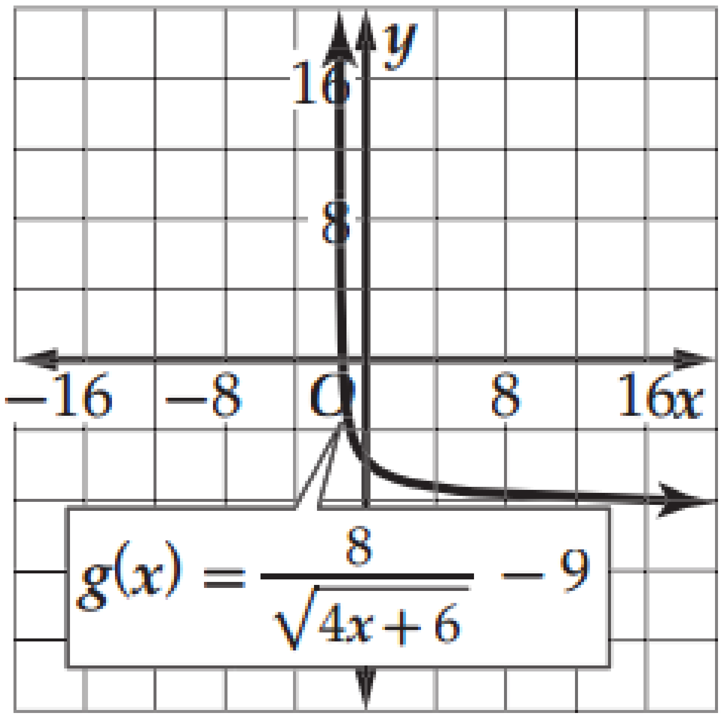
$g(x) = -3f(x) + 6$ **(46**

$$g(x) = -\frac{24}{\sqrt{x+6}} + 18$$



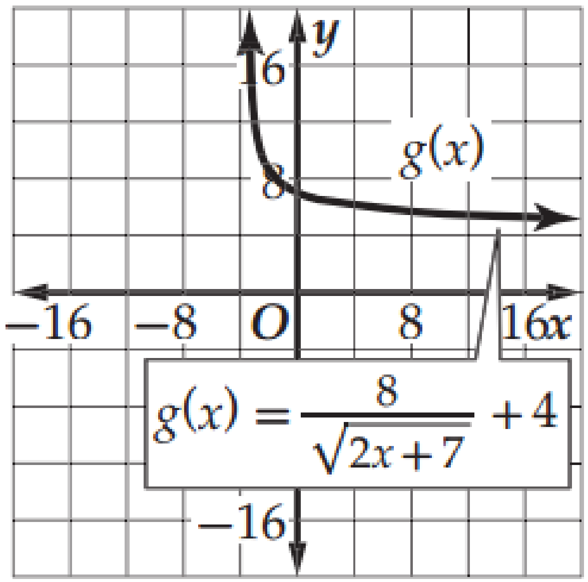
$g(x) = f(4x) - 5$ **(47**

$$g(x) = \frac{8}{\sqrt{4x+6}} - 9$$



$$g(x) = f(2x + 1) + 8$$ **(48**

$$g(x) = \frac{8}{\sqrt{2x+7}} + 4$$



49) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًّا:** اختر ثلاث قيم لـِ a وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
−4	15	−13	2	2
15	262	63	325	325

b) **لفظيًّا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

إجابة ممكنة: $h(x)$ تساوي ناتج جمع $f(x)$ و $g(x)$.

c) **جبريًّا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع **b** جبريًّا.

$$h(x) \stackrel{?}{=} f(x) + g(x)$$

$$x^2 + 6x + 10 \stackrel{?}{=} x^2 + 2x + 7 + 4x + 3$$

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 10$$