$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 0 + 2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$ $x = -1$ مقارب شاقولي

$$f'(x) = 1 + 2\left(\frac{x+1-x-2}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 1 + 2\left(\frac{-1}{(x+1)(x+2)}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+3x+2-2}{(x+1)(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$

إما $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1 + 2\ln 2$

أو $x = -3 \quad \Rightarrow \quad f(-3) = -2 + 2\ln\left(\frac{-1}{-2}\right) = -2 - 2\ln 2$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	‖	‖	0	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-2-2\ln 2$	↘ $-\infty$ ‖	‖ $+\infty$ ↘	$1+2\ln 2$	↗ $+\infty$

2) أثبت أن $\Delta: y = x + 1$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي

$$f(x) - y_\Delta = 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0\\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0\end{array}\right\} \Delta:\ y = x+1$$ مقارب مائل لـ C بجوار $\pm\infty$

$$\overbrace{x + 2 > x + 1}$$

$\div\ (x+1) < 0$	$\div\ (x+1) > 0$
$x \in\,]-\infty, -2[$	$x \in\,]-1, +\infty[$
$\frac{x+2}{x+1} < 1$	$\frac{x+2}{x+1} > 1$
$\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < \ln 1$	$\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > \ln 1$
$2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 0$	$2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > 0$
$f(x) - y_\Delta < 0$	$f(x) - y_\Delta > 0$
C تحت Δ بجوار $-\infty$	C تحت Δ بجوار $+\infty$

3) أثبت أن $A\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ C

$$x \in\,]-\infty, -2[\, \cup\,]-1, +\infty[$$
$$-x \in\,]-\infty, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$$
$$-3 - x \in\,]-\infty, -2[\, \cup\,]-1, +\infty[$$ الشرط الأول محقق

$$\frac{2}{4} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين $\vec{n}_P$ ، $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً ، ومنه P و Q متقاطعان

2) أثبت أن النقطة A لا تقع على أياً من المستويين P, Q، ماذا تستنتج؟

نعوض $A(3,-1,2)$ بمعادلة P نجد: $2(3) - 1 + 5 = 10 \neq 0 \Leftarrow A \notin P$

نعوض A بمعادلة Q: $4(3) + 2(-1) + 2 + 5 = 17 \neq 0 \Leftarrow A \notin Q$

ومنه A خارج المستويين P و Q

3) اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

نوجد المعادلة الوسيطية لـ d $\Leftarrow$

$$d: \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 & ① \\ 4x + 2y + z + 5 = 0 & ② \end{cases}$$

من ① نجد $\boxed{y = -2x - 5}$ نعوض في ② فنجد: $\boxed{z = 5}$

وبفرض $x = t \Leftarrow$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 5 \quad ; t \in R \\ z = 5 \end{cases}$$

4) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d الفصل المشترك

بفرض A' المسقط القائم لـ A على $d \Leftarrow A'(t_0, -2t - 5,5)$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0}$ حيث $\vec{u}(1,-2,0)$

$$\overrightarrow{AA'}(t_0 - 3, -2t_0 - 4,3)$$

$$t_0 - 3 + 4t_0 + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t_0 = -1}$$

إذاً $A'(-1,-3,5)$ ولدينا $A(3,-1,2) \Leftarrow \overrightarrow{AA'}(-4,-2,3)$

$\|\overrightarrow{AA'}\| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$ بعد A عن d

5) عيّن إحداثيات N المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d' المار من A وعمودي على P

$$\vec{u}_{d'} = \vec{n}_P(2,1,0) \Leftarrow \quad d': \begin{cases} x = 2h + 3 \\ y = h - 1 \quad ; h \in R \\ z = 2 \end{cases}$$

وبتعويض المعادلات الوسيطية لـ d' في معادلة P نجد:

$$2(2h + 3) + (h - 1) + 5 = 0$$

$$4h + 6 + h - 1 + 5 = 0$$

$$5h = -10 \Rightarrow \boxed{h = -2}$$

وبتعويض في d' فنجد $N(-1,-3,2)$

المسألة الثانية: ليكن التابع $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ المعرف على $D =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C

f معرف واشتقاقي على D:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي $\quad \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -1 - \infty = -\infty$

النموذج الأول

نموذج امتحاني - الثالث الثانوي العلمي

الرياضيات (2020-2019)

الاسم:.............

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$1 \| -2$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \| -\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

1) أوجد D_f , $D_{f'}$, $f(D)$

2) أوجد معادلة نصف المماس للخط C من اليمين

3) دل على القيم الحدية واذكر نوعها

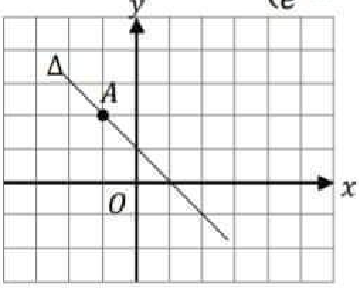
4) ناقش حسب قيم $\lambda \in R$ حلول المعادلة $f(x) = \lambda$

5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$, $f'(x) \geq 0$

السؤال الثاني: ليكن لدينا المجموعة $S = \{3,5,6,7\}$ ولدينا المجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ولا يوجد أي عدد منها يقبل القسمة على 2 وكل عدد منها أكبر تماماً من 4000 أوجد عناصر H

السؤال الثالث: حل في R جملة المعادلتين الآتيتين:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ e^{2x+1} \cdot e^{y-1} = 1 \end{cases}$$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية: (45 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a, b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A

السؤال الثاني : في مجموعة الأعداد العقدية لتكن لدينا $P(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (2-4i)Z - 4i$

1) بيّن أن $Z = 2i$ حل للمعادلة $P(Z) = 0$

2) أوجد b , c إذا علمت أن $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + bZ + c)$

3) حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

السؤال الثالث: لدينا $A(1,1,1)$ $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ وليكن Q مستوي معادلته $Q: x - y + 2z + 4 = 0$ ، S كرة مركزها A ونصف قطرها $[AB]$ ، والمطلوب:

1) جد معادلة الكرة S ثم أثبت أن Q مماس للكرة S

2) أثبت أن $C(0,2,-1)$ هي مسقط A على المستوي Q

ثالثاً: حل التمارين الثلاث الآتية: (80 درجة ، 70 درجة ، 70 درجة)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 9} \end{cases}$$

1) a. أثبت أن $u_n > \sqrt{3}$ أياً يكن $n \in N$

b. أثبت أن (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة.

2) أياً يكن $n \in N$ ليكن: $v_n = u_n^2 - 3$.

a. أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

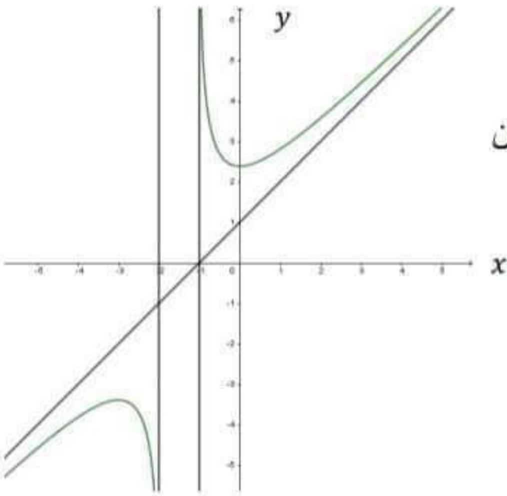
b. احسب v_n ثم u_n بدلالة n

$$2\ln\left(e^{\frac{m}{2}}.\frac{x+1}{x+2}\right)=x+1$$

$$2\ln e^{\frac{m}{2}}+2\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=x+1$$

$$2\frac{m}{2}=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$m=f(x)$$



$m\in\,]-\infty,-2-\ln 4[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان

$m=-2-\ln 4$ للمعادلة حل وحيد

$m\in\,]-2-\ln 4\ ,1+\ln 4[$ المعادلة مستحيلة الحل

$m=1+\ln 4$ للمعادلة حل وحيد

$m\in\ ]1+\ln 4\ ,+\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان

----- انتهت الأسئلة -----

الشرط الثاني : $f(-2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

لنثبت أن: $f(-3 - x) + f(x) = -1$

$$f(-3-x) = -3 - x + 1 + 2\ln\left(\frac{-3-x+2}{-3-x+1}\right)$$

$$= -2 - x + 2\ln\left(\frac{-1-x}{-2-x}\right)$$

$$f(-3-x) + f(x) = -2 - x + 2\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) + x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$= -1 + 2\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{x+2}{x+1}\right) = -1$$ محققة

$\Leftarrow$ $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ C

4) أوجد معادلة كل مماس لـ C يوازي المستقيم $d: 3y - 2x + 7 = 0$

$d:\ 3y - 2x + 7 = 0$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{3}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$3x^2 + 9x = 2x^2 + 6x + 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$x = -4$

$$f(-4) = -3 + 2\ln\frac{2}{3}$$

نقطة التماس $\left(-4, -3 + 2\ln\frac{2}{3}\right)$

الميل $m = \frac{2}{3}$

$$y - \left(-3 + 2\ln\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(x+4)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - 3 + 2\ln\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3} + 2\ln\frac{2}{3}$$

$x = 1$

$$f(1) = 2 + 2\ln\frac{3}{2}$$

نقطة التماس $\left(1, 2 + 2\ln\frac{3}{2}\right)$

الميل $m = \frac{2}{3}$

$$y - \left(2 + 2\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2 + 2\ln\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 2\ln\frac{3}{2}$$

5) ارسم الخط C وبفرض m عدد حقيقي موجب تماماً. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة:

$$2\ln\left(\frac{xe^{\frac{m}{2}} + e^{\frac{m}{2}}}{x+2}\right) = x + 1$$

إذاً C مسقط A على المستوي Q

ثالثاً: حل التمارين الثلاث الآتية: (80 درجة ، 70 درجة ، 70 درجة)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} \end{cases}$

1) a. أثبت أن $u_n > \sqrt{3}$ أياً يكن $n \in N$

① نثبت صحة المتراجحة من أجل $n = 0$

محققة $u_0 = 2 > \sqrt{3}$

② نفرض صحة المتراجحة من أجل n : أي $u_n > \sqrt{3}$ صحيحة

③ نثبت صحة المتراجحة من أجل $n+1$

$$u_{n+1} > \sqrt{3}$$

لدينا من الفرض:

$$u_n > \sqrt{3}$$
$$u_n^2 > 3$$
$$u_n^2 + 9 > 12$$
$$\sqrt{u_n^2+9} > 2\sqrt{3}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} > \sqrt{3}$$
$$u_{n+1} > \sqrt{3}$$

محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل $n \in N$

b. أثبت أن (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2+9} - 2u_n}{2}$$
$$= \frac{u_n^2 + 9 - 4u_n^2}{2(\sqrt{u_n^2+9} + u_n)} = \frac{-3(u_n^2-3)}{2(\sqrt{u_n^2+9}+u_n)} < 0$$

المتتالية متناقصة حيث $u_n > \sqrt{3}$

لدينا المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{3}$ فهي متقاربة

2) أياً يكن $n \in N$ ليكن: $v_n = u_n^2 - 3$.

a. أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}(u_n^2+9) - 3$$
$$= \frac{1}{4}u_n^2 + \frac{9}{4} - 3 = \frac{1}{4}u_n^2 - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(u_n^2 - 3) = \frac{1}{4}v_n$$

$$= \frac{b - bi - b - c}{2} = \frac{-bi - c}{2}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{nQ}}} = \frac{r-n}{q-n} = \frac{\frac{(1-i)b}{2} - \frac{b+c}{2}}{\frac{(1+i)c}{2} - \frac{b+c}{2}}$$

$$= \frac{b - ib - b - c}{c + ic - b - c} = \frac{-ib - c}{-b - ic} = \frac{i(-b + ic)}{-b + ic}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}} = i$$

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}}\right) = \arg(i) \qquad \left|\frac{Z_{\overrightarrow{NR}}}{Z_{\overrightarrow{NQ}}}\right| = |i|$$

$$(\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NR}) = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{NR}{NQ} = 1$$

$$NR \perp NQ \qquad NR = NQ$$

التمرين الثالث: بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) ادرس اطراد المتتالية

لنأخذ التابع $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ المعرف على $[0, +\infty[$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

ملاحظة: كسرين لهما نفس البسط فالمقام الأكبر هو الكسر الأصغر

فالمتتالية متناقصة تماماً

2) أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

3) استنتج قيمة المجموع $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

بالاستفادة من صيغتي u_n:

$$S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots\cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

$$S = -1 + \sqrt{100} = 9$$

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(3, -1, 2)$ والمستويان

$$P: 2x + y + 5 = 0 \qquad Q: 4x + 2y + z + 5 = 0$$

1) أثبت أن P, Q متقاطعين بفصل مشترك d

$$\vec{n}_P(2,1,0) \quad , \quad \vec{n}_Q(4,2,1)$$

$(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

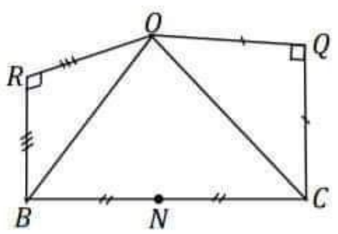
b. احسب v_n ثم u_n بدلالة n

$$v_n = v_0\, q^n$$
$$v_0 = (u_0)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$
$$v_n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \rightarrow \quad \boxed{v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$v_n = u_n^2 - 3 \quad \rightarrow \quad u_n^2 = v_n + 3$$
$$u_n = \sqrt{v_n + 3}$$
$$\boxed{u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3}}$$

التمرين الثاني: نتأمل مثلثاً OBC، ننشئ خارج هذا المثلث المثلثين ORB , OQC القائمين والمتساويي الساقين والنقطة N في منتصف $[BC]$ باختيار معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ نرمز r,b,c,n,q للأعداد العقدية التي تمثلها R,B,C,N,Q على الترتيب والمطلوب:

1) ما هي صورة O وفق الدوران بربع دورة مباشرة حول Q؟ ثم أثبت أن $q = \frac{(1+i)c}{2}$

C صورة O وفق دوران مركزه Q وزوايته $\frac{\pi}{2}$



$$Z_C - Z_Q = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_O - Z_Q)$$
$$c - q = i(0 - q)$$
$$c = -qi + q = q(1 - i)$$
$$q = \frac{c}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$
$$q = \frac{(1+i)c}{2}$$

2) ما هي صورة O وفق الدوران بربع دورة غير مباشرة حول R ؟ أثبت أن $r = \frac{(1-i)b}{2}$

B صورة O وفق دوران مركزه R وزوايته $\frac{-\pi}{2}$

$$Z_B - Z_R = e^{\frac{-\pi}{2}i}(Z_O - Z_R)$$
$$b - r = -i(0 - r)$$
$$b = r\,i + r = (1+i)r$$
$$r = \frac{b}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$
$$r = \frac{(1-i)b}{2}$$

3) اكتب n بدلالة b , c

N منتصف $[BC] \quad \Leftarrow \quad n = \frac{b+c}{2}$

4) أثبت أن $NQ = NR$ وأن $NQ \perp NR$

$$Z_{\overrightarrow{NR}} = Z_R - Z_N = r - n$$
$$= \frac{(1-i)b}{2} - \frac{b+c}{2} = \frac{(1-i)b - (b+c)}{2}$$

النموذج الأول

نموذج امتحاني - الثالث الثانوي العلمي

الرياضيات (2019-2020)

الاسم:.............

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	1 || -2	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

1) أوجد D_f , $D_{f'}$, $f(D)$

$D_f =]-\infty, +\infty[\setminus\{0\}$

$D_{f'} =]-\infty, +\infty[\setminus\{0,3\}$

$f(D) =]-\infty, +\infty[$

2) أوجد معادلة نصف المماس للخط C من اليمين

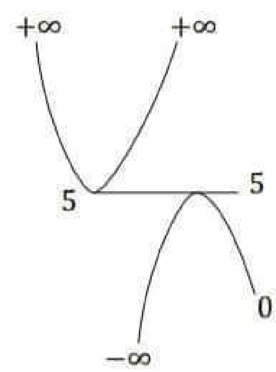
$m = -2$ نقطة التماس $(3,5)$

$T:\quad y - 5 = -2(x-3) \;\rightarrow\; y = -2x + 11$

3) دل على القيم الحدية واذكر نوعها

$f(3) = 5$ محلية كبرى، $f(-2) = 5$ محلية صغرى

4) ناقش حسب قيم $\lambda \in R$ حلول المعادلة $f(x) = \lambda$



$\lambda \in]-\infty, 0[$ حل وحيد

$\lambda = 0$ حل وحيد

$\lambda \in]0,5[$ حلان مختلفان

$\lambda = 5$ حلان مختلفان

$\lambda \in]5, +\infty[$ حلان مختلفان

5) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$, $f'(x) \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{\substack{t\to 0\\ >}} f(t) = -\infty$$

$$f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; x \in [-2,0[\,\cup\,]0,3[$$

السؤال الثاني: ليكن لدينا المجموعة $S = \{3, 5, 6, 7\}$ ولدينا المجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ولا يوجد أي عدد منها يقبل القسمة على 2 وكل عدد منها أكبر تماماً من 4000 أوجد عناصر H

طريقة ①:

آحاد	عشرات	مئات	آحاد الألوف
~~6~~			~~6~~ 5 7
2	1	2	2

أو

آحاد	عشرات	مئات	آحاد الألوف
			6
1	2	3	1

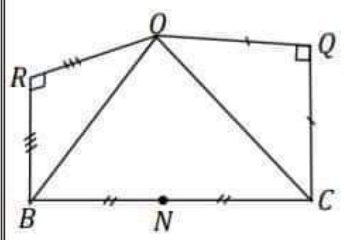
$n = \quad 1\times3\times2\times1 \quad + \quad 2\times2\times1\times2$

$n = 6 + 8 = 14$

حسان البيطار

خلدون سيروان

التمرين الثاني: نتأمل مثلثاً OBC، ننشئ خارج هذا المثلث المثلثين $OQC\ ,\ ORB$ القائمين والمتساويي الساقين والنقطة N في منتصف $[BC]$. لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ نرمز r,b,c,n,q للأعداد العقدية التي تمثلها على الترتيب R,B,C,N,Q



1. ما هي صورة O وفق الدوران بربع دورة مباشرة حول Q ؟ أثبت أن $q=\frac{(1+i)c}{2}$
2. ما هي صورة O وفق الدوران بربع دورة غير مباشرة حول R ؟ أثبت أن $r=\frac{(1-i)b}{2}$
3. اكتب n بدلالة $b\ ,c$
4. أثبت أن $NQ=NR$ وأن $NQ\perp NR$

التمرين الثالث: بفرض لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

1) ادرس اطراد المتتالية
2) أثبت أن $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
3) استنتج قيمة المجموع $S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان

$$Q: 4x+2y+z+5=0 \qquad P: 2x+y+5=0$$

1) أثبت أن $P\ ,Q$ متقاطعين بفصل مشترك d
2) أثبت أن النقطة A لا تقع على أياً من المستويين $P\ ,Q$، ماذا تستنتج؟
3) اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d
4) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d الفصل المشترك
5) عيّن إحداثيات N المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

المسألة الثانية: ليكن التابع $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ المعرف على $D=]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C
2) أثبت أن $\Delta: y=x+1$ مقارب لـ C وادرس الوضع النسبي
3) أثبت أن $A\left(\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ C
4) أوجد معادلة كل مماس لـ C يوازي المستقيم $d: 3y-2x+7=0$
5) ارسم الخط C وبفرض m عدد حقيقي موجب تماماً. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة:

$$2\ln\left(\frac{xe^{\frac{m}{2}}+e^{\frac{m}{2}}}{x+2}\right)=x+1$$

----- انتهت الأسئلة -----

طارق سعد الدين
وائل زعترية

2) أوجد b , c إذا علمت أن $P(Z)=(Z-2i)(Z^2+bZ+c)$

$$P(Z)=(Z-2i)(z^2+bZ+c)$$
$$P(Z)=Z^3+bZ^2+cZ-2iZ^2-2biZ-2ci$$
$$=Z^3+(b-2i)Z^2+(c-2bi)Z-2ci$$

بالمقارنة مع: $P(Z)=Z^3+(2-2i)Z^2+(2-4i)Z-4i$

$b-2i=2-2i$ ①

$c-2bi=2-4i$ ②

$-2c=-4$ ③

من ① : $b=2$ ، من ③ : $c=2$

نعوض في ② فنجدها محققة: $P(Z)=(Z-2i)(Z^2+2Z+2)$

3) حل في C المعادلة $P(Z)=0$

$P(Z)=0$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i$

أو $Z^2+2Z+2=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=4-4(2)(1)=-4<0$, $\sqrt{-\Delta}=2$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$
$$Z_2=\overline{Z_1}=-1-i$$

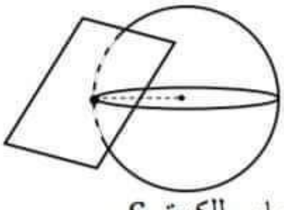
السؤال الثالث: لدينا $A(1,1,1)$ $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ وليكن Q مستوي معادلته $Q: x-y+2z+4=0$ ، S كرة مركزها A ونصف قطرها $[AB]$ ، والمطلوب:

1) جد معادلة الكرة S

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$
$$AB=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}=R$$
$$\boxed{S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6}$$

2) أثبت أن Q مماس للكرة S

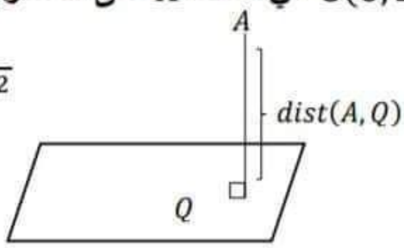
$$dist(A,Q)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+4|}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}$$
$$=\frac{|1(1)+(-1)(1)+2(1)+4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$$



إذاً Q مماس للكرة S

3) أثبت أن $C(0,2,-1)$ هي مسقط A على المستوي Q

$$CA=dist(A,Q)$$
$$CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(-1)^2+(2)^2}$$
$$=\sqrt{6}=dist(A,Q)$$



طريقة ②:

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
3			5,6,7
5			6,7
7			5,6

$n = 3 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1$

$= 6 + 4 + 4 = 14$ طريقة

السؤال الثالث: حل في R جملة المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ e^{2x+1} . e^{y-1} = 1 \end{cases}$$

من ②: $e^{2x+1+y-1} = e^0$

$2x + y = 0$

$x + \underbrace{x + y}_{\text{من ①}} = 0$

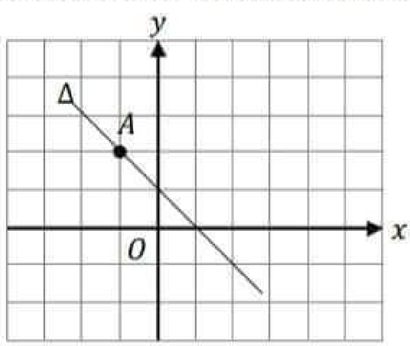
$x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}$

نعوض في ① : $\boxed{y = 2}$

إذاً حل جملة المعادلتين هو: $S = \{(-1,2)\}$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاث الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2, 4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a, b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A



$A, B \in \Delta \Rightarrow \left.\begin{matrix} A(-1,2) \\ B(0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{0+1} = -1$

$A(-1,2)$ نقطة تماس

ميل

$m = f'(-1) = -1$

f اشتقاقي عند $x = -1$

$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$-1 = \frac{2a + 2(-a+b)}{4}$

$-4 = 2a + 2(4)$

$-12 = 2a$

$\boxed{a = -6}$

نقطة

$f(-1) = 2$

$2 = \frac{-a+b}{2}$

$\boxed{4 = -a + b}$ ①

$\xleftarrow{\text{نعوض في ①}}$

$4 = 6 + b$

$\boxed{-2 = b}$

السؤال الثاني : في مجموعة الأعداد العقدية لتكن لدينا $P(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (2-4i)Z - 4i$

1) بيّن أن $Z = 2i$ حل للمعادلة $P(Z) = 0$

$P(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (2-4i)(2i) - 4i$

$= -8i - 8 + 8i + 4i + 8 - 4i = 0$

أي $Z = 2i$ حل للمعادلة