الوحدة الرابعة
مجسمات ومقاطع

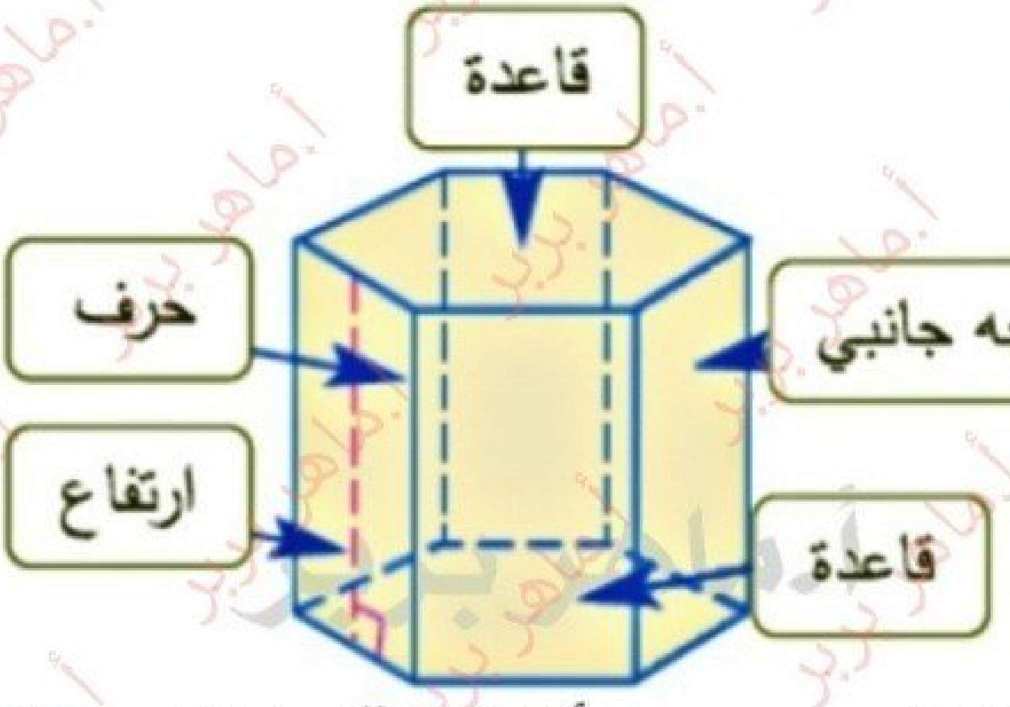
1 تذكرة بالمجسمات

القسم الأول:

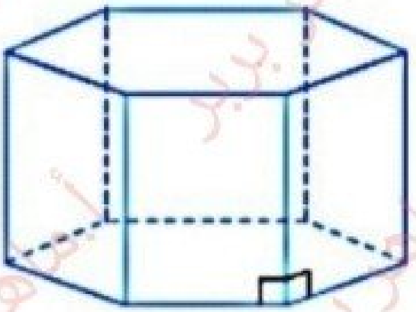
- الموشور القائم - الأسطوانة الدورانية

تذكر :

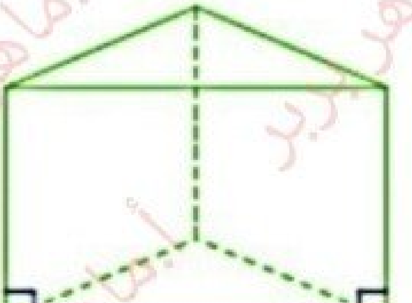
الموشور القائم هو المجسم الذي يميزه وجهان متوازيان نسميهما القاعدتين وهما طبوقتان ، وتكون الأوجه الجانبية له مستطيلات أو مربعات .



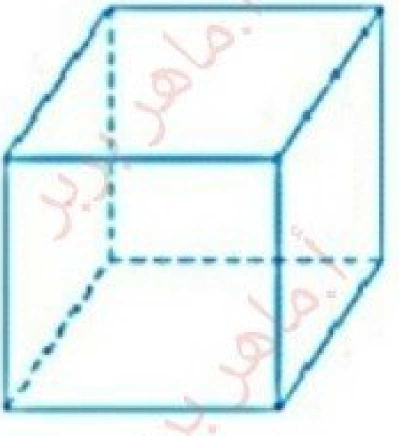
يسمى الموشور بحسب أضلاع قاعدته: موشور ثلاثي - رباعي - خماسي -......



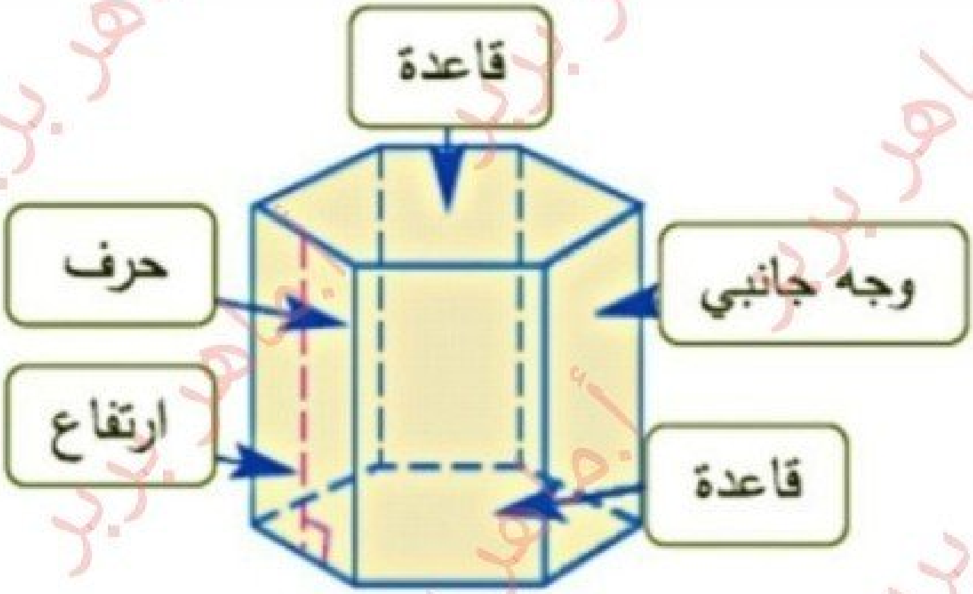
موشور سداسي



موشور ثلاثي



موشور رباعي



1) **الارتفاع** هو العمود النازل من الرأس إلى الضلع المقابلة لهذا الرأس، فالارتفاع هو المسافة بين القاعدتين.

2) المساحة الجانبية للموشور القائم تساوي محيط القاعدة مضروباً بالارتفاع.

أي : $S_L = P \times h$

3) المساحة الكلية للموشور القائم تساوي مجموع المساحة الجانبية + ضعفي قاعدتيه.

أي : $S_T = S_L + 2S_b$

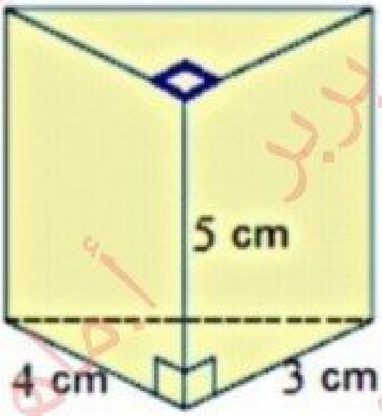
4) حجم الموشور القائم يساوي جداء مساحة القاعدة بالارتفاع .

$V = S_b \times h$

مثـال

احسب حجم موشور ثلاثي قائم قاعدته مثلَّث قائم

طول ضلعيه القائمين 3 cm , 4 cm وارتفاع الموشور 5 cm



$$\boxed{V = S_b \times h}$$

القاعدة مثلَّث قائم فمساحته

أي $S_b = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\ cm^2$

$$\Rightarrow V = \underbrace{S_b} \times \underbrace{h}$$
$$= 6 \times 5 = 30\ cm^3$$

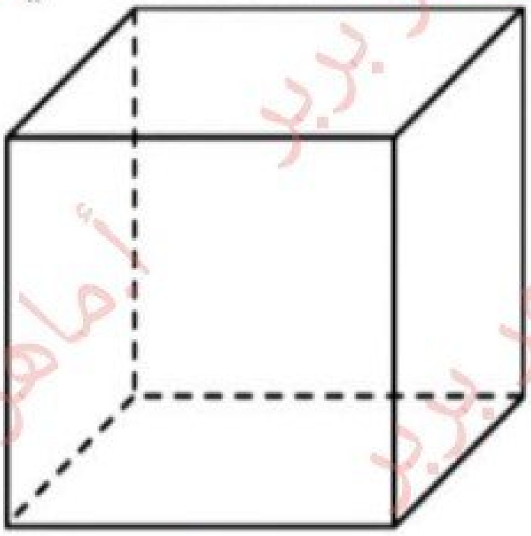
- احسب مساحته الجانبية ثم مساحته الكليه.

$$S_l = \underbrace{P} \times \underbrace{h} = (3 + 4 + 5) \times 5$$
$$= 12 \times 5 = 60\ cm^2$$

$$S_T = S_l + 2S_b = 60 + 2(6) = 72\ cm^2$$

حالات خاصة:

1) المكعب: هو موشور رباعي قائم جميع أوجهه مربعات طبوقة.



مكعب

مربع

ويكون:

جميع الأحرف متساوية الطول وكل منها يساوي a طول ضلع المربع.

المساحة الجانبية للمكعب:

$$S_l = P \times h = 4a \times a = 4a^2$$

المساحة الكلية للمكعب:

$$S_T = S_l + 2S_p = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

حجم المكعب:

$$V = S_b \times h = a^2 \times a = a^3$$

مثال

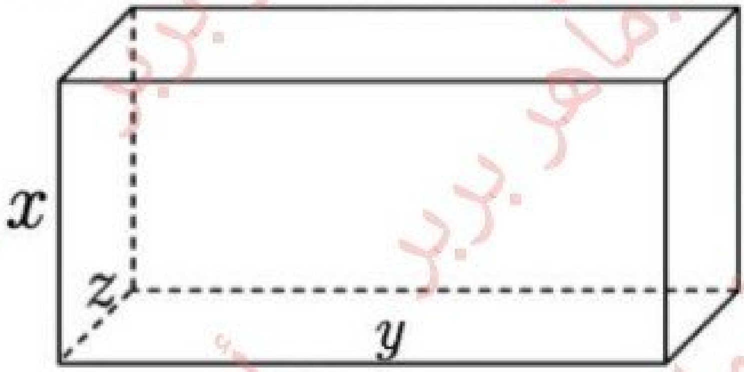
أوجد حجم مكعب طول حرفه 0.1 cm ثم أوجد مساحته الجانبيه ومساحة سطحه الكلي

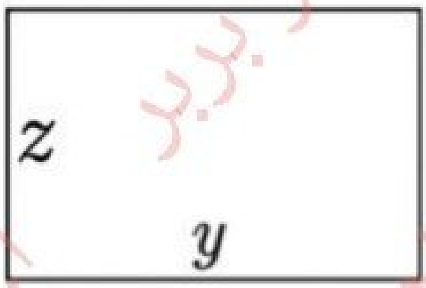
$$V = a^3 = (0.1)^3 = 10^{-3}$$

$$S_l = 4a^2 = 4(0.1)^2 = 4 \times 10^{-2}$$

$$S_T = 6a^2 = 6(0.1)^2 = 6 \times 10^{-2}$$

2) متوازي المستطيلات: هو موشور رباعي قائم قاعدتاه مستطيل.

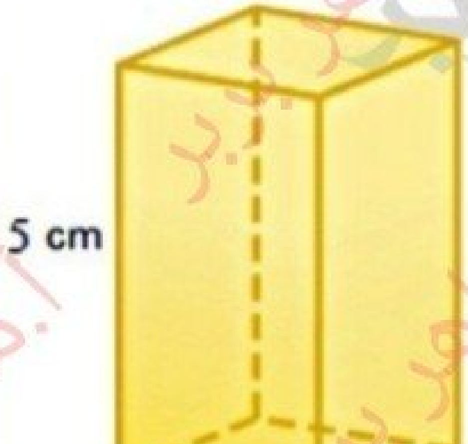




ويكون : حجم متوازي المستطيلات يساوي جداء أبعاده الثلاثه x.y.z لماذا؟ ... لاحظ مايلي

$$V = S_b \times h = z.y \times x = x.y.z$$

مثال



أوجدْ حجم متوازي مستطيلات أبعاده 2 cm , 3 cm , 5 cm

الحلّ:

إن حجم متوازي المستطيلات = جداء أبعاده الثلاثة ومنه

حجم متوازي المستطيلات المعطى $2\times 3\times 5 = 30\ cm^3$

أوجد مساحته الجانبيه ثم مساحته الكليه

$$S_l = P \times h = 2(2+3)\times 5 = 50\ cm^2$$

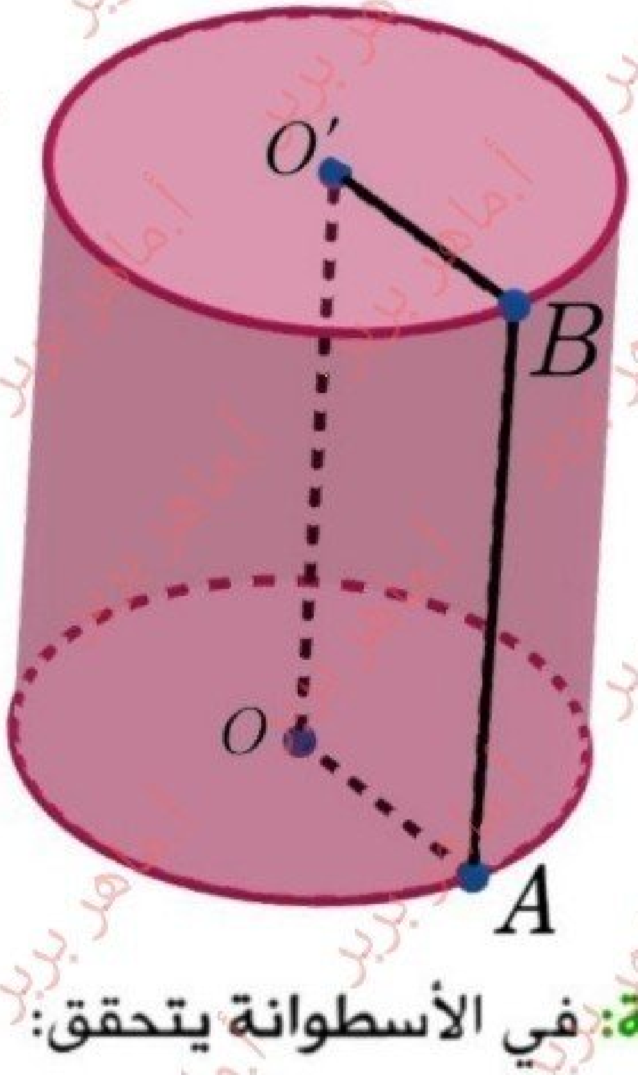
$$S_T = S_l + 2S_b = 50 + 2(2\times 3) = 62\ cm^2$$

2- الأسطوانة الدورانية:

هي مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد بعديه.

ندعو الضلع الذي دار حوله المستطيل **محور الأسطوانة** $[OO']$.

ندعو الضلع الآخر للمستطيل $[OA]$ **نصف قطر القاعدة** (R).



ملاحظة: في الأسطوانة يتحقق:

طول المحور = طول ارتفاع الأسطوانة.

$$h = OO'$$

ان القوانين المتعلقه بحساب المساحة الجانبيه والكلية وحجم الأسطوانة هي ذاتها التي تحدثنا عنها بالموشور مع الانتباه الى أن القاعده هي دائرة

مثال

أسطوانة دورانية ارتفاعها 40 طول نصف قطر قاعدتها 7.5 أوجد مساحتها الجانبية ثم مساحتها الكلية ثم حجمها.

$h = 40cm$ و $r = 7.5cm$

بداية احسب محيط ومساحة القاعدة (الدائرة)

$$P = 2\pi R = 2\pi(7.5) = 15\pi\ cm$$

$$S_b = \pi R^2 = \pi(7.5)^2 = 56.25\pi\ cm^2$$

$$S_l = P \times h = 2\pi R \times h$$

$$= 15\pi \times 40 = 600\pi\ cm^2$$

$$S_T = S_l + 2S_b$$

$$= 600\pi + 2(56.25\pi)$$

$$= 600\pi + 112.5\pi = 712.5\pi\ cm^2$$

$$V = S_b \times h = (56.25\ \pi) \times 40$$

$$= 2250\pi\ cm^3$$

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

1 تذكرة بالمجسمات

القسم الثاني

- المخروط والهرم

3- المخروط الدوراني:

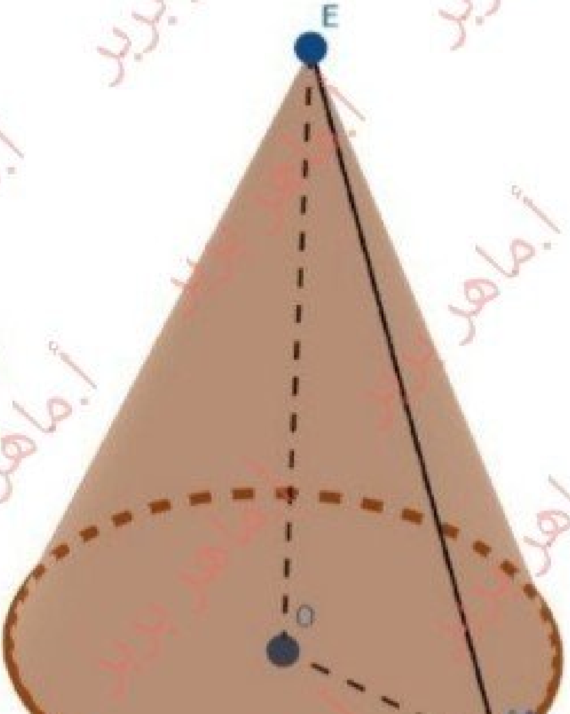
هو مجسّم ناتج عن دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه القائمتين.

ندعو الضلع القائمة التي دار حولها المخروط **ارتفاع المخروط (h)**.

وندعو الضلع القائمة الأخرى **نصف قطر قاعدة المخروط (R)**.

أما وتر المثلث القائم يُسمّى **مولّد المخروط**.

القرص المتولد عن دوران OM هو **قاعدة المخروط**



سنهتم فقط بحجم المخروط أما المساحتين الجانبية والكليه لستم مطالبين بها.

حجم المخروط يساوي ثلث مساحة القاعدة بالارتفاع:

$$V = \frac{1}{3} S_b . h$$

$$= \frac{\pi}{3} R^2 . h$$

- المستقيم (EO) عمودي على مستوي القاعدة.

مثال الحسكة ٢٠١٨ في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$

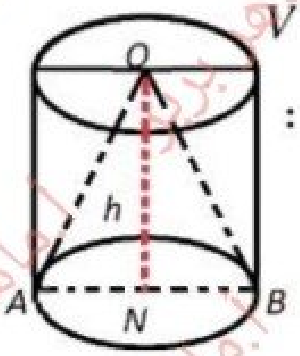
ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$

ومخروط دوراني رأسه O يشترك معها في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$

فإذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ **المطلوب :**

1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها V' .

2) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط .



1): $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ارتفاع المخروط هو ذاته ارتفاع الأسطوانة المشترك معها بالقاعدة والارتفاع

$$40\pi = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times h$$

$$40\pi = \frac{\pi}{\cancel{3}} \times \cancel{12} \times h$$

$$40\pi = 4\pi \times h$$

ومنه $h = \frac{\overset{10}{\cancel{40}}\,\cancel{\pi}}{\cancel{4}\,\cancel{\pi}} = 10$

حجم الاسطوانة $V' = S_b.h \Rightarrow V' = \pi r^2 \times h$

$$V' = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 10$$

ومنه $V' = 120\pi$

2)حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط V''

= حجم الاسطوانة - حجم المخروط

$$V'' = V' - V = 120\pi - 40\pi = 80\pi$$

طلب إضافي - أثبت أن النسبة:

حجم المخروط إلى حجم الأسطوانة هي $\frac{1}{3}$ ماذا تستنتج ؟

$$\frac{\text{حجم المخروط}}{\text{حجم الأسطوانة}} = \frac{V}{V'} = \frac{40\pi}{120\pi} = \frac{1}{3}$$

نستنتج أن حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانه **المشتركه** معه بالقاعدة.... لاحظ مايلي:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3}\,\underbrace{\underline{S_b}.h}$$

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3} V_{\text{Cylinder}} \Rightarrow V_{\text{Cylinder}} = 3V_{\text{Cone}}$$

صح أو خطأ + اختيار من متعدد

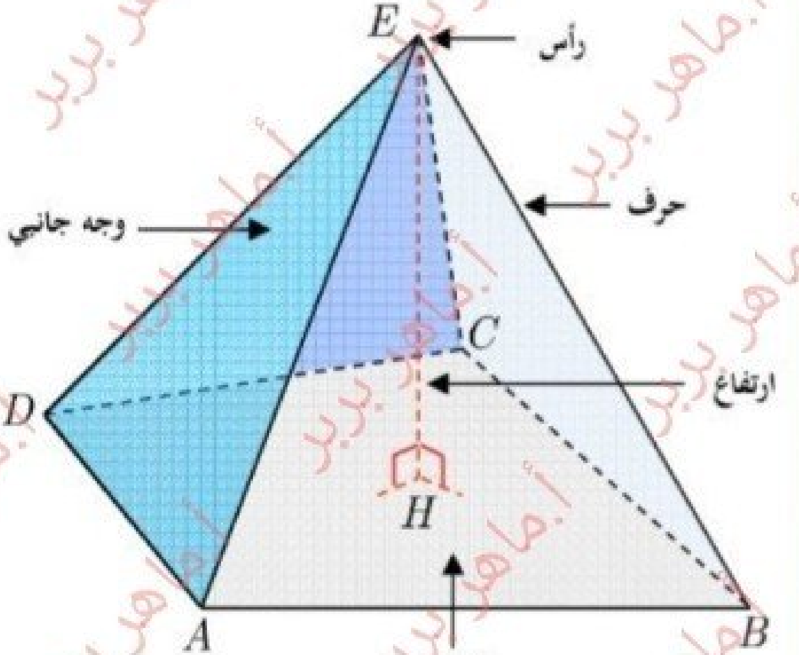
4- الهرم:

الهرم مجسم يميزه:

- مضلع يسمى قاعدة الهرم.
- نقطة E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى رأس الهرم.
- مثلثات مشتركة بالرأس E وقواعدها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها وجهاً جانبياً.
- السطح الجانبي، وهو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية.
- **ارتفاع** الهرم من رأسه E، هو العمود $[EH]$ على مستوي قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة.

كما هو الحال في المخروط سنهتم بحجم الهرم فقط ويعطى بنفس المساواة مع اختلاف طبيعة القاعدة:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b . h}$$



تحقق من فهمك

- احسب حجم هرم ارتفاعه $15\ cm$ و قاعدته مربع طول ضلعه $12\ cm$.

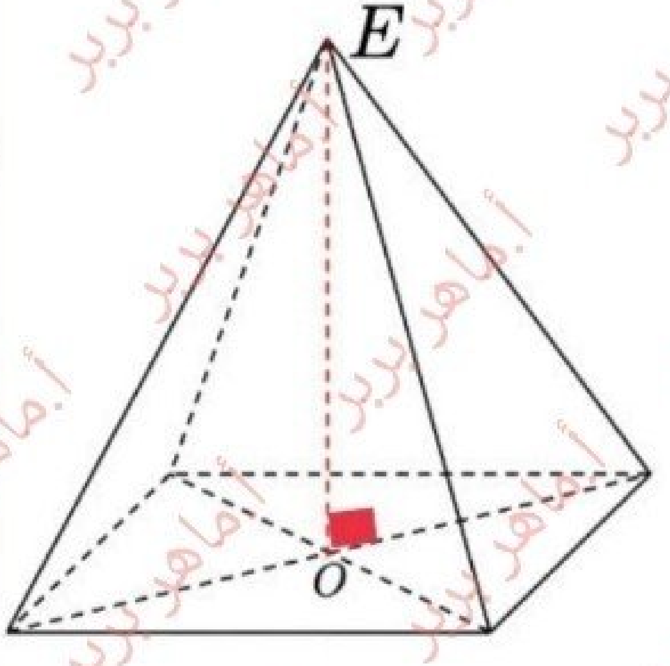
$$v = \frac{1}{3}S_b h = \frac{1}{3}(12)^2 \times 15 = 5 \times 144 = 720\ cm^3$$

الهرم المنتظم:

نقول إنَّ هرماً رأسه E هو **هرم منتظم** إذا استوفى الشرطين:

1– قاعدته **مضلع منتظم** مركزه O (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو.......)

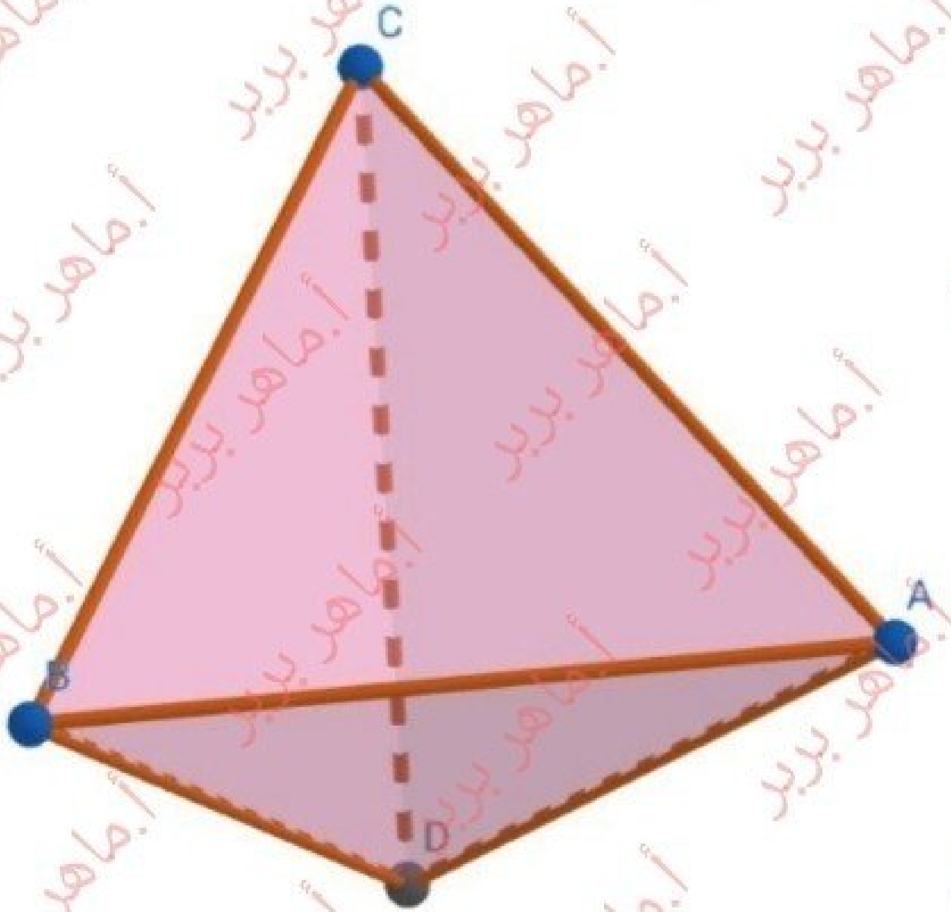
2– ارتفاعه هو القطعة المستقيمة [EO] (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)



هرم منتظم رباعي

حالة خاصة:

في الحالة التي تكون فيها قاعدة الهرم المنتظم هي مثلث متساوي الأضلاع عندئذ فإن الهرم الناتج ندعوه **برباعي الوجوه المنتظم** ، أوجهه عبارة عن مثلثات متساوية الأضلاع طبوقه وكلا من هذه الأوجه يصلح لأن يكون قاعده له.



- علاقة الحجم نفسها .
- قد يطلب حساب مساحة السطح الكلي في هذه الحاله وهي عباره عن مساحة أحد الأوجه مضروبا في

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

الكرة

السطح الكروي

المجسم الكروي

مساحة السطح الكروي

حجم المجسم الكروي

خطوط مميزه في الكره

(الدائرة الكبرى - الدائرة الصغرى)

5- الكرة:

السطح الكروي: ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $\mathrm{OM} = R$

كرة القدم: شكل كروي مجوَّف، له في الرياضيات شكل سطح كروي.

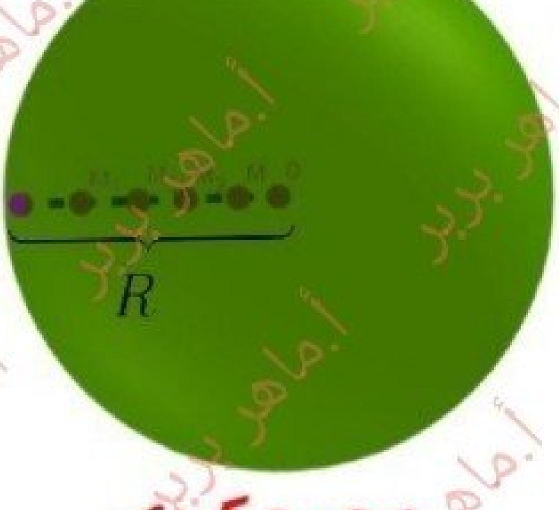
كرة قدم

المجسم الكروي ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $\mathrm{OM} \leq R$

كرة البلياردو: شكل كروي مليئ، له في الرياضيات شكل مجسم كروي.

كرة بيليارد

سطح كروي



مجسم كروي

حجم الكرة:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

مساحة سطح الكرة:

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

مثال

① احسب مساحة سطح كروي نصف قطره 7.5 cm .

دستور مساحة سطح كروي هو $S = 4\pi \times R^2$، بالتعويض نجد:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(7.5)^2$$
$$= 4\pi(56.25) = 225\pi\ cm^2$$

② احسب حجم كرة نصف قطرها 24 m .

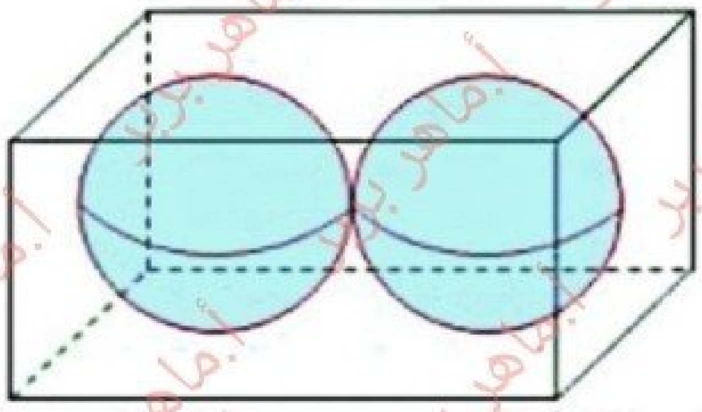
دستور حجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi \times R^3$، يكون:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(24)^3 = \frac{4}{3}\pi(24)^2(24)$$
$$= \frac{4}{\cancel{3}}\pi(576)(\overset{8}{\cancel{24}}) = (32)(576)$$
$$= 18432 cm^3$$

مثـال

علبة بشكل متوازي مستطيلات أبعادها

$8cm\ ,4cm\ ,4cm$



تحتوي هذه العلبة كرتين متساويتين نصف قطر كلٍّ منهما $2cm$ تمسان أوجه العلبة (كماترى في الشكل المرافق) احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

نرمز إلى حجم العلبة بالرمز V_1 فيكون:

$$V_1 = 4 \times 4 \times 8 = 128cm^3$$

نرمز إلى حجم إحدى الكرتين بالرمز V_2 فيكون:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (2)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8$$

$$= \frac{32}{3}\pi cm^3$$

نرمز حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة بالرمز V فيكون:

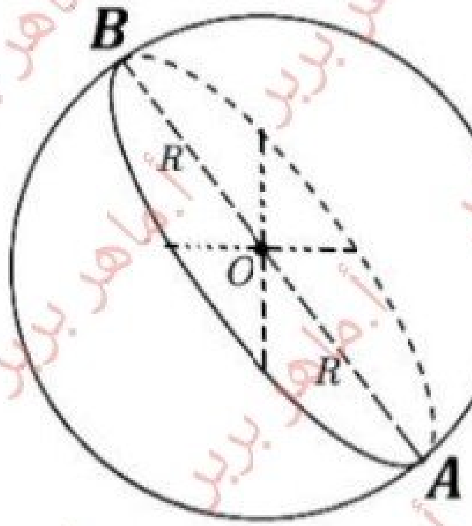
$$V = V_1 - 2V_2 = 128 - 2(\frac{32}{3}\pi)$$

$$= (128 - \frac{64}{3}\pi)cm^3$$

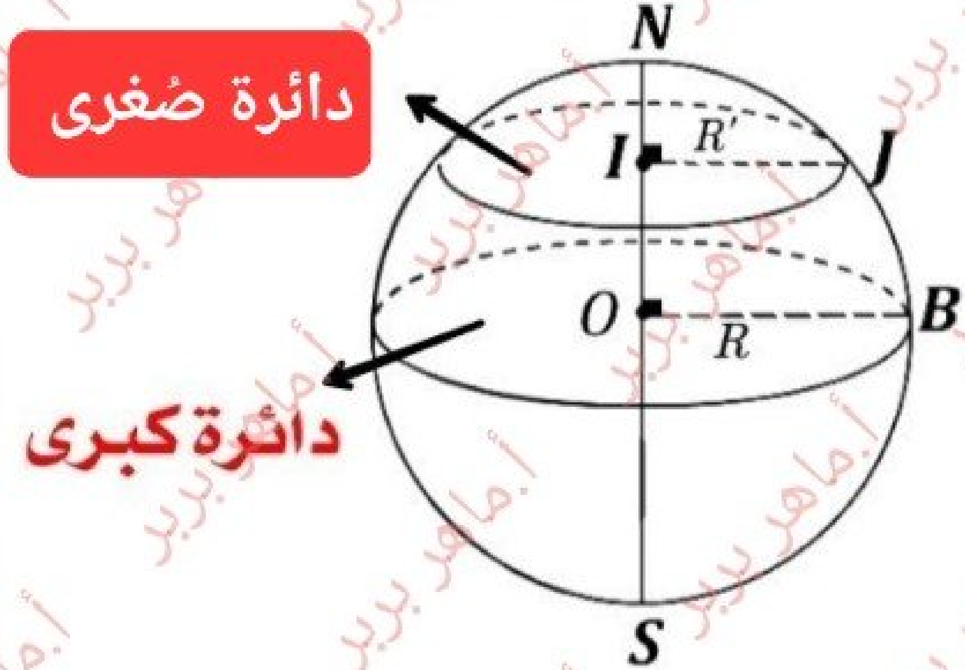
♦ خطوط مميّزة في الكرة:

1- قطر الكرة: هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان مختلفتان من الكرة.

➢ أقطار الكرة متساوية الطول وطول كل منها $2R$.



2- الدائرة الكبرى: هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يســاوي قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = OB$.



(للكرة عدد غير منتهي من الدوائر الكبرى).

3- دائرة صُغرى: وهي دائرة واقعة على الكرة ونصف قطرها أصغر تماماً من نصف قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها I ونصف قطرها: $R' = IJ$، كما أنه للكرة عدد غير منتهي من الدوائر الصغرى.

2019 (محافظة حلب)

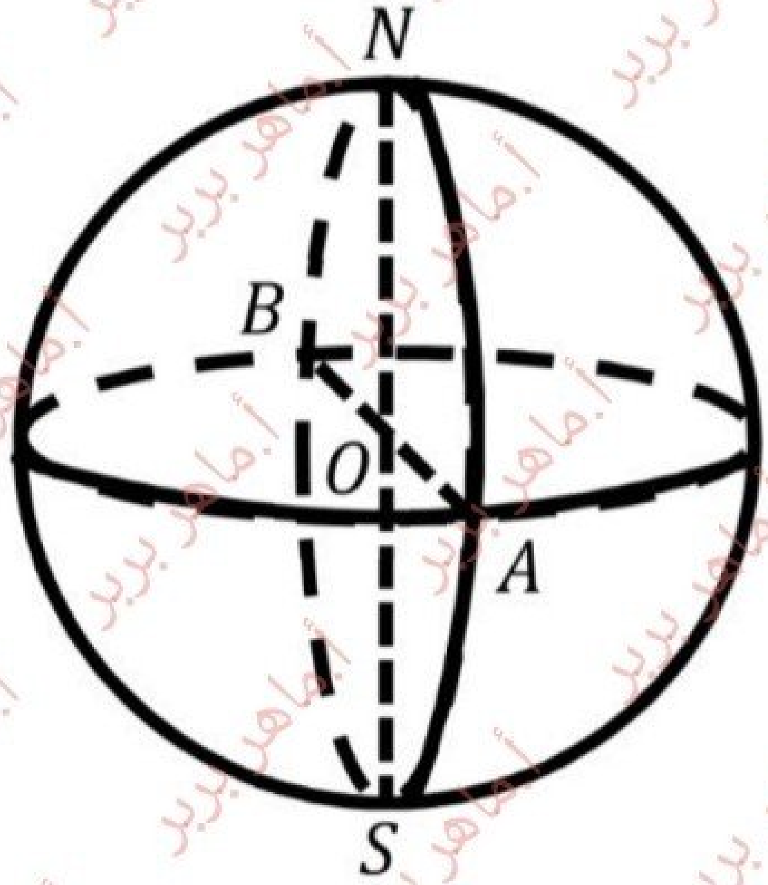
تأمل المجسم المرسوم جانباً ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وغلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

1) المجسم الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق R >OM.

2) مساحة السطح الكروي يعطى بالعلاقة : $S = 4\pi R^2$

3) الرباعي ANBS متوازي أضلاع

4) السطح الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق OM=R



الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

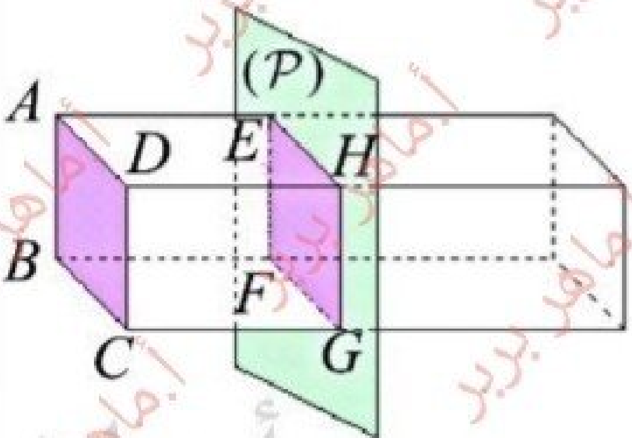
3 مقاطع مجسمات

القسم الأول:

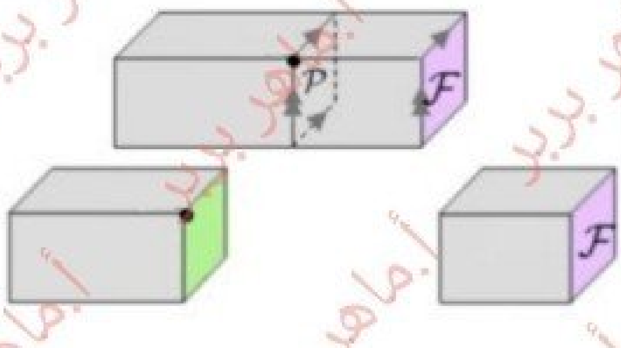
- مقطع (موشور قائم ، أسطوانة) بمستوٍ.
- مقطع كرة بمستوٍ.

مقطع متوازي مستطيلات

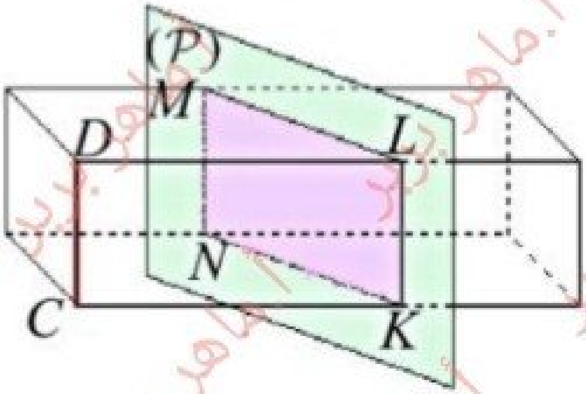
بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه



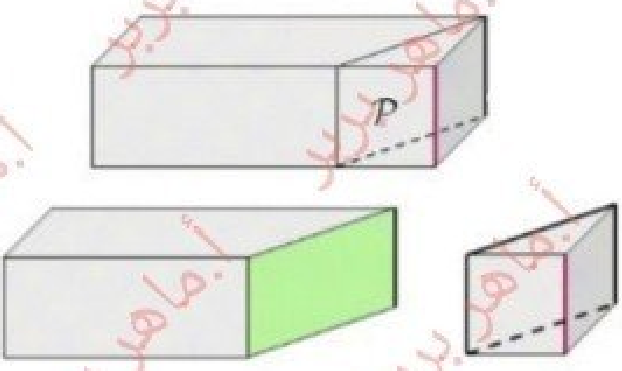
إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه ABCD هو مستطيل EFGH طبوق على المستطيل ABCD



بمستوي يوازي أحد الأحرف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف



إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الحرف CD هو مستطيل MNKL فيه $KL = NM = CD$



قاعدة عامة:

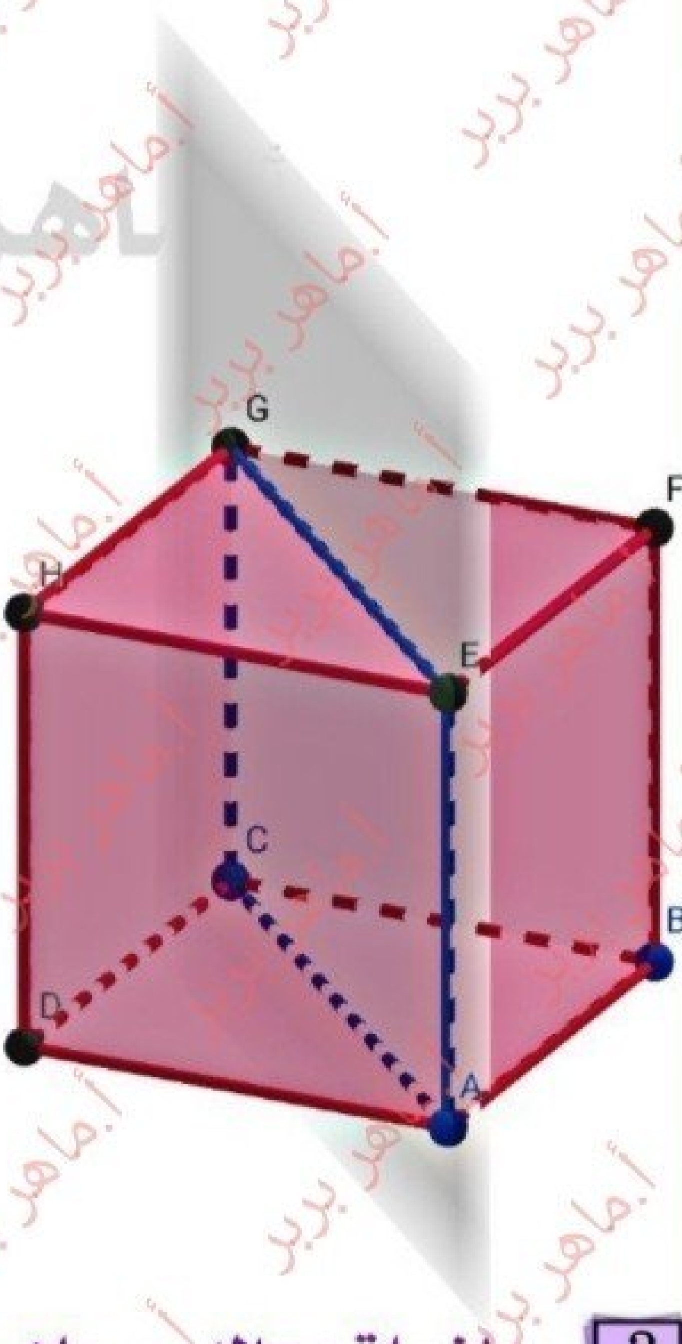
١. **مقطع** موشور قائم بمستوٍ يوازي قاعدته **هو** شكل هندسي **مطابق** لشكل قاعدة الموشور.

٢. **مقطع** موشور قائم بمستوٍ يوازي أحد أحرفه **مستطيل** دوما ، أحد بعديه يساوي ذلك الحرف .

- مقطع مكعب بمستوٍ يوازي أحد أوجهه هو مربع دوما .
- مقطع مكعب بمستوٍ يوازي أحد أحرفه دون أن يوازي أحد أوجهه هو مستطيل دوما أحد بعديه يساوي ذلك الحرف

مقطع المكعب
ABCDEFGH
بمستوٍ (p)
يوازي الحرف FB

هو المستطيل
AEGC ويكون :
AE=GC=FB



مثـال

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

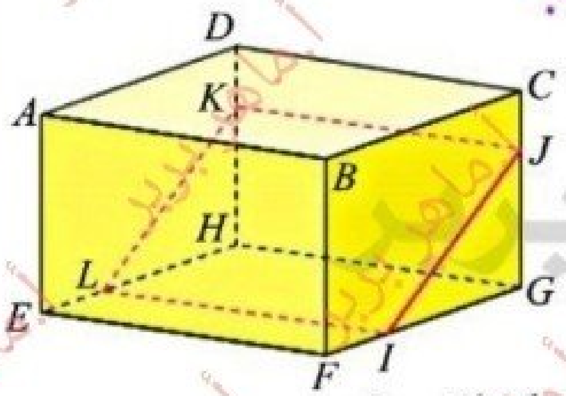
$AE = 5\ cm$ و $EF = 7\ cm$ و $FG = 6\ cm$

I نقطة من الحرف $[FG]$ تحقق $IG = 4\ cm$

J نقطة من الحرف $[CG]$ تحقق $JG = 3.5\ cm$

$IJKL$ مقطع لهذا المجسم بمستو يوازي الحرف $[AB]$

ما طبيعة المقطع $IJKL$؟ جد بعديه.

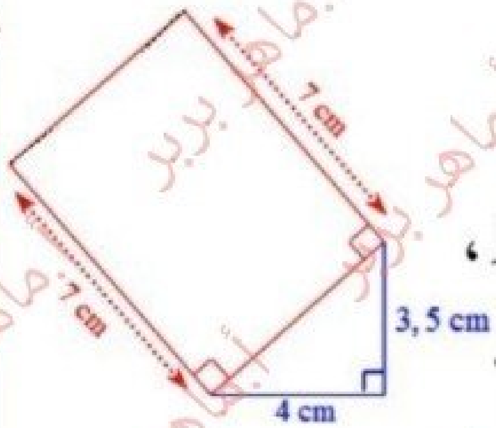


هو مستطيل طوله يساوي EF أي $7\ cm$

بينما عرضه يساوي IJ و الذي يحسب حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$IJ = \sqrt{GI^2+GJ^2} = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{28.25}$$

ارسم المقطع $IJKL$ بأبعاده التامة.



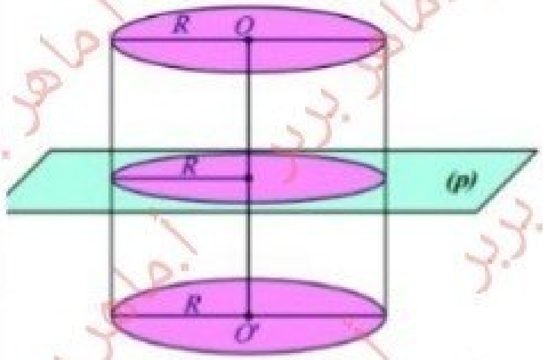
نرسم المثلث IGJ القائم في G ،

ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$ ،

بحيث يكون طول $[IL]$ مساوياً $7\ cm$.

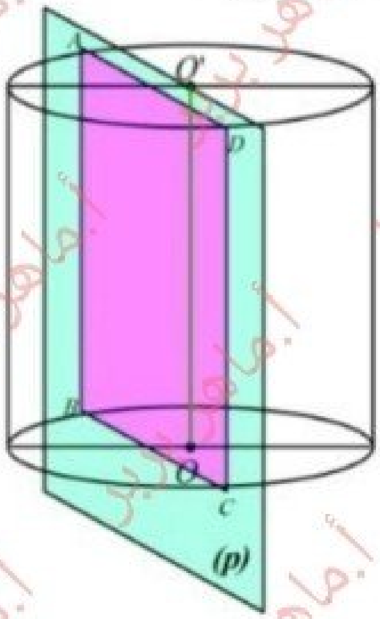
مقطع اسطوانة

بمستوي يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة



إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على القاعدة

بمستوي يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع **الأسطوانة**



إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي المحور هو مستطيل ABCD فيه

$$AB = CD = OO'$$

ملاحظة مهمة.

اذا كان طول ارتفاع الأسطوانة يساوي طول قطرها فإن مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي محورها هو مربع

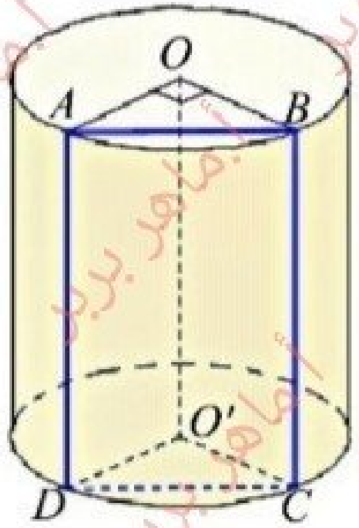
/ مهم جدا صح أو خطأ + اختيار من متعدد /

مثـال

الشكل المرافق يمثل أسطوانة ارتفاعها $7\ cm$ و نصف قطر قاعدتها $3\ cm$ و مركزا قاعدتيها O و O'.

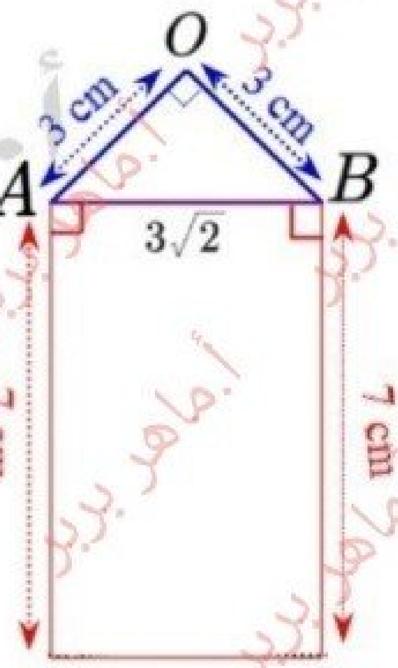
$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستو يوازي محورها (OO')

ما طبيعة هذا المقطع؟



المقطع هو مستطيل.

نعلم أن $\hat{AOB} = 90^0$ ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة.



لدينا $\widehat{AOB} = 90^\circ$ و $OA = OB = r = 3$،

فالمثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين.

نرسم المثلث AOB القائم في O،

ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $ABCD$،

بحيث يكون طول $[AD]$ مساوياً $7\ cm$.

احسب الطول AB

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم AOB نكتب:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 9 + 9$$

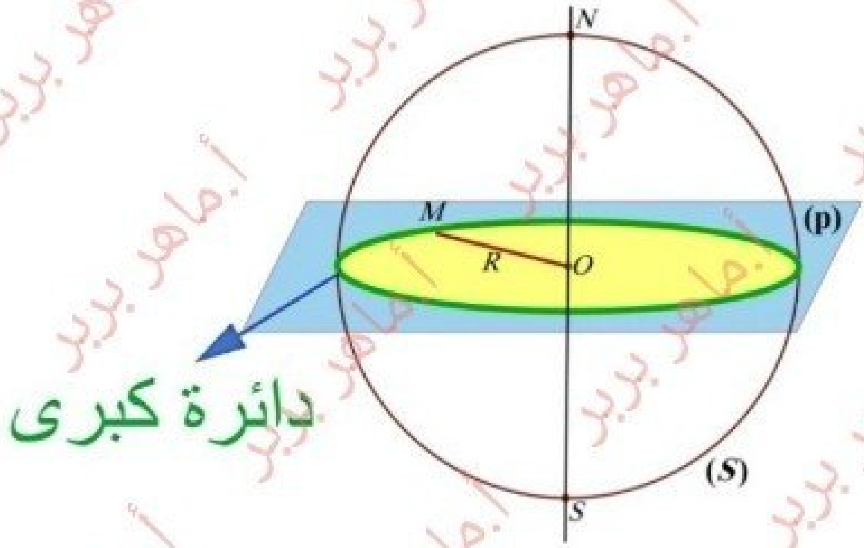
$$AB = 3\sqrt{2}\ cm$$

مقطع كرة بمستوٍ

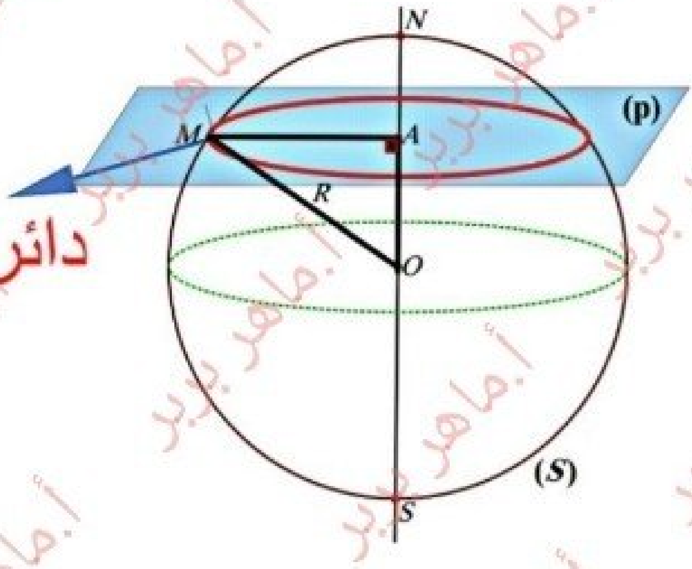
مقطع كره بمستوٍ هو دائرة تختلف طبيعتها حسب الحالات الآتية

١. إذا مر المستوي القاطع بمركز الكره فإن المقطع هو **دائرة كبرى**

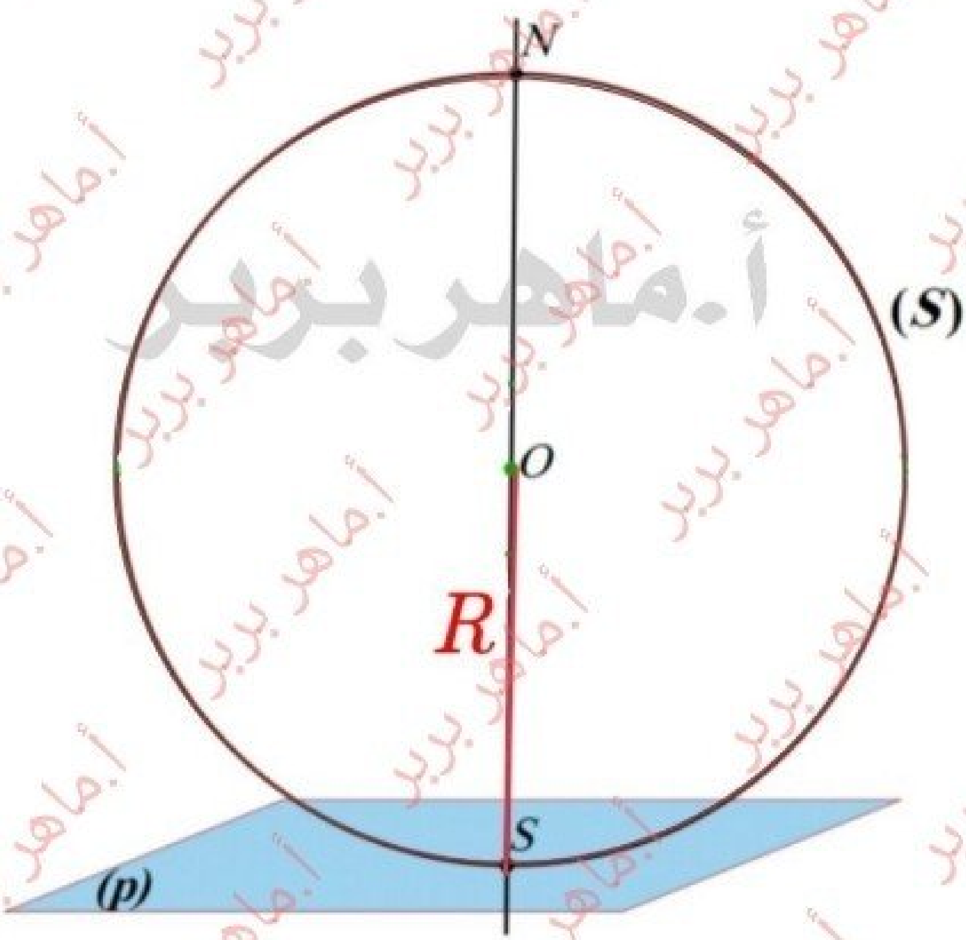
(البعد بين المستوي القاطع ومركز الكره يساوي صفر)



٢. اذا لم يمر المستوي القاطع من مركز الكره وكان البعد بينه وبين مركزها أصغر من نصف قطرها فإن المقطع هو **دائرة صغرى**



٣. اذا كان بعد المستوي القاطع عن مركز الكرة يساوي نصف قطرها فإن المقطع في هذه الحالة هو نقطه نسميها نقطة التماس اي المستوي يشترك مع الكره بنقطه وحيده هي نقطة التماس

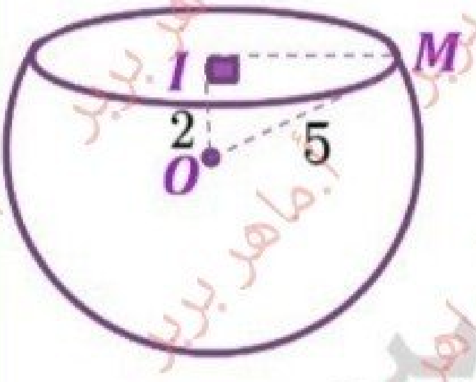


مثال

- w سطح كروي مركزه O و نصف قطره $5\ cm$
قُطِع هذا السطح بمستو على بعد $2\ cm$ من O

مقطع w بهذا المستوي هو دائرة $\mathscr{C}$ مركزها I

M نقطة مشتركة بين السطح w و الدائرة $\mathscr{C}$

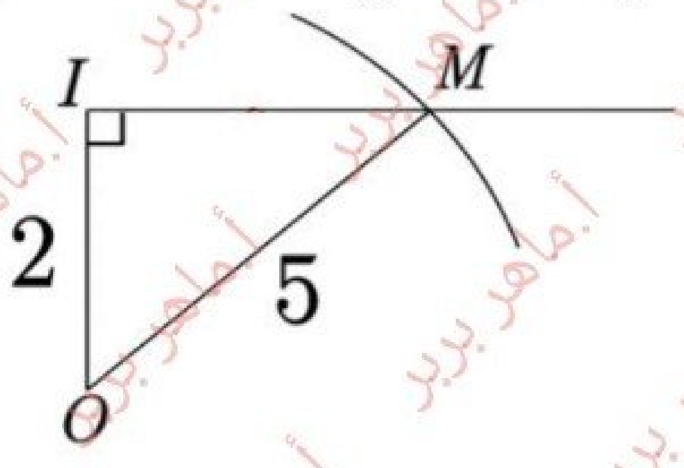


ارسم المثلث MOI بأبعاده التامة

$$IM = \sqrt{21}$$

الحل: نرسم:

- القطعة $[OI]$ بطول 2 cm.
- نصف المستقيم $[Ix)$ عمودياً على $[OI]$.
- قوساً دائرية مركزها O ونصف قطرها 5 cm فيقطع $[Ix)$ في M.
- نرسم القطعة $[OM]$، فنحصل على المثلث MOI القائم في I



ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ بأبعادها التامة

نفتح الفرجار بطول $[IM]$ و نرسم الدائرة.

ملاحظة خطيرة

- مقطع مجسم كروي بمستوٍ هو قرص دائري (مليء بالنقاط) وليس دائرة ..... انتبه لذلك

صح أو خطأ + اختيار من متعدد

المجسم الناتج عن دوران نصف دائرة حول قطرها هو الكرة

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

3 مقاطع مجسمات

القسم الثاني:

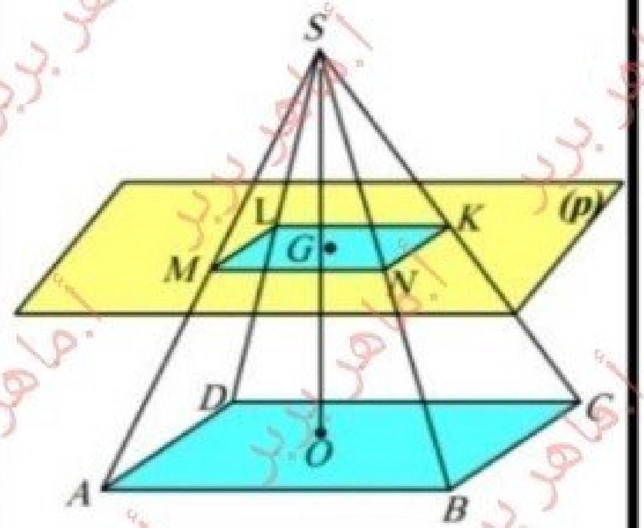
- مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته .
- مقطع مخروط بمستوٍ يوازي قاعدته.

ضمن منهاجكم سنكتفي بالحالة التي يكون فيها

المستوي القاطع موازيا لقاعدة (الهرم – المخروط)

مقطع هرم

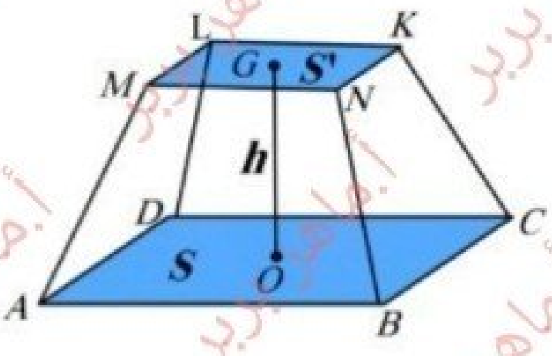
إن مقطع هرم بمستوي يوازي القاعدة هو مضلع مصغر عن القاعدة



المقطع $KLMN$ مصغر عن القاعدة ABCD ونسبة التصغير $k = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$

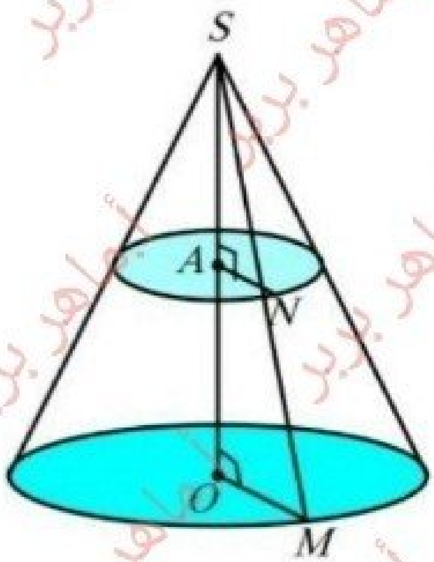
نسمي الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة بجذع الهرم وحجمه يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right) \times h}$$



مقطع مخروط دوراني

إن مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة



الدائرة التي نصف قطرها هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير

$$K = \frac{\text{ارتفاع المخروط الصغير}}{\text{ارتفاع المخروط الكبير}}$$

نسمي الجزء المحصور بين المقطع وقاعدة المخروط بجذع المخروط وحجمه يعطي بالعلاقة :

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 + r'^2 + r.r'\right) \times h}$$