أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية:

السؤال الأول:

أثبت أن G, F تابعان أصليان للتابع نفسه

$$I = R \quad ; \quad F(x) = \sin^2 x \qquad G(x) = 2 - \cos^2 x$$

السؤال الثاني:

أوجد التابع الأصلي لـ f:

$$f(x) = x^2 \ln x \quad ; I =]0, +\infty[$$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$، والمطلوب:

1- أثبت أن المستقيم $d: y = x$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي بين d, C.
2- جد مساحة السطح المحصور بين الخط C والمقارب d والمستقيمين $x = e, x = 1$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا $F(x) = -\frac{\sin x}{x}$ المعرف على $]0, \pi[$ جد تابعاً أصلياً للتابع $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

ثم احسب $J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

السؤال الخامس:

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

1- $I = \int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x-1} dx$
2- $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - \sin^2 x}\, dx$
3- $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$
4- $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$

السؤال السادس:

1- في حالة $0 < x < a$ تيقن أن $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{1+x} \le 1$
2- استنتج أن $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a \quad ; a > 0$

ثانياً: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول:

ليكن التكاملان:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\,dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(x)}{1+\tan(x)}\,dx$$

والمطلوب:

1- أثبت أن $I + J = \ln 2$

2- تحقق أن $I - J = \frac{\pi - 2\ln 2}{4}$

3- استنتج قيمة كل من J, I.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$$

والمطلوب:

1- جد الثوابت a, b, c, d لكي يُكتب $f(x)$ بالشكل: $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$

2- احسب $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

3- احسب باستخدام التكامل بالتجزئة العدد: $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1)\ln(1-x)\,dx$

التمرين الثالث:

أثبت صحة المساواة: $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$ ثم احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x\,dx$

ثالثاً: حل المسألة الآتية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = x^3 e^x$ والمطلوب:

1- جد تابعاً أصلياً F لـ f على R بالصيغة $F(x) = P(x)e^x$ حيث P كثير حدود.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- ارسم C للتابع f.

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و$x = 1$.

--- انتهت الأسئلة ---

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954