المحاضرة الخامسة

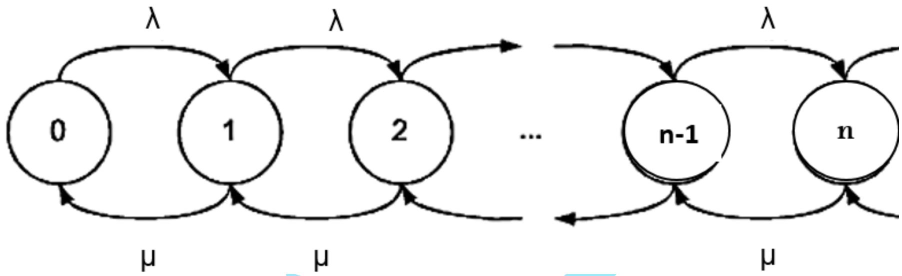
السنة الثالثة -إحصاء رياضي

نظرية الخدمات

ملاحظات:

1- يمكن الحصول على معادلات التوازن السابقة من خلال مبدأ التوازن الآتي:

معدل الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+1$ يساوي معدل الانتقال من الحالة $i+1$ إلى الحالة i :



$$\mu P_1 = \lambda P_0$$

$$\mu P_2 = \lambda P_1$$

$$\vdots$$

$$\mu P_n = \lambda P_{n-1}$$

وباستخدام طريقة التراجع كما فعلنا سابقاً نحصل على التوزيع الهندسي.

2- يمكننا أن نحسب احتمال $P(Y > k)$ كما يلي:

$$P(Y > k) = P(Y = k + 1) + P(Y = k + 2) + \cdots$$

$$= (1 - \rho)\rho^k(\rho + \rho^2 + \cdots)$$

$$= (1 - \rho)\rho^k \left(\frac{\rho}{1 - \rho}\right) = \rho^{k+1}$$

مقاييس أداء النظام M/M /1 :

1- متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$L_s = EY = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n$$

$$= (1 - \rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n$$

نعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^n + \cdots = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = 1 + 2\rho^{1} + 3\rho^{2} + \cdots + n\rho^{n-1} + \cdots$$

$$= \frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$\Longrightarrow L_s = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2- متوسط عدد الزبائن في الطابور:

$$L_q = E(Y-1) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

$$= L_s - (1-P_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - [1-(1-\rho)]$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

3- متوسط زمن الانتظار في الطابور:

$$w_s = \frac{1}{\lambda}L_s = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

4- متوسط زمن الانتظار في الطابور:

$$w_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

تمرين:

يصـل مشـجعون إلى ملعب كرة قدم بمعدل 105 مشـجع في السـاعة، بحيث يوجد صـــراف واحد لقطع التذاكر لخدمة المشـــجعين ويتم خدمتهم بمعدل 30 ثانية، والمطلوب:

1- هل النظام مستقر؟

2- أوجد احتمال وجود n زبون في النظام.

3- أوجد احتمال أن يكون النظام فارغ واحتمال أن يكون هناك ثلاث زبائن في النظام.

4- احسب احتمال أن يكون النظام ممتلئ

5- أوجد مقاييس أداء النظام.

الحل:

1- يمثل λ معدل الوصول في واحدة الزمن و μ معدل الخدمة في واحدة الزمن

أي أن $\lambda = 105\ h$ و $\mu = \frac{3600}{30} = 120\ h$، وبالتالي:

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{8} < 1$ نلاحظ أن النسبة ρ أصغر من واحد وبالتالي

تحقق شرط الاستقرار أي أن النظام مستقر.

2- لنحسب P_n:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n = \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \left(1-\frac{7}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \frac{1}{8}$$

3- احتمال أن يكون النظام فارغ أي نحسب P_0 بالشكل:

$$P_0 = (1-\rho) = \left(1-\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8} = 0.125$$

اما احتمال وجود ثلاث زبائن في النظام أي نحسب P_3:

$$P_3 = (1-\rho)\rho^3 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{7}{8}\right) = \frac{343}{4096}$$

$$= 0.083$$

4- احتمال أن يكون النظام ممتلئ :

$$1 - P_0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.878$$

5- مقاييس أداء النظام:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} = 7$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)} = \frac{49}{8} = 6.125$$

$$w_s = \frac{1}{\lambda} L_s = \frac{1}{105}(7) = 0.067$$

$$w_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{1}{105}\left(\frac{49}{8}\right) = 0.058$$