ســـلسلة الـــبكلوريا

((التحليل الرياضي))

14

مسألة+الحل

شاملة لمنهاج التحليل الرياضي

الثالث الثانوي العلمي

إعداد : أيهم الشاعر

Facebook: Aiyham Alshaer
aiyham1989@Gmail.com

المسألة الأولى

ليكن C الخط البياني للدالة f المعّرفة على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$ والمطلوب:

1) ادرس قابلية الدالة f للإشتقاق عندما $x=2$.

2) اوجد النهايات على أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف ثم دل على المقاربات التي توازي المحور xx' أو توازي المحور yy'، وادرس الوضع النسبي لـ C بالنسبة للمقاربات.

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيم الكبرى أو الصغرى محلياً إن وجدت.

4) أثبت أن f يكتب بالشكل: $f(x)=ax+b+\frac{g(x)}{x-1}$ ، ثم أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f المار بالنقطة $(2,1)$.

5) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta:\ y=x-2$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C بالنسبة للمقارب Δ.

6) اكتب معادلتي المماسين للخط C الموازيين للمستقيم الذي معادلته: $y=-3x$.

7) ليكن C' الخط البياني للدالة: $h(x)=x^2-7x+14$ ، برهن أن C, C' متماسان في النقطة $(2,4)$ واكتب معادلة المماس المشترك لهما في نقطة تماسهما.

8) احسب قيمة تقريبية لميل المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $0,2$.

9) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C.

10) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة: $x^2-(\lambda+3)x+6+\lambda=0$.

11) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المنحني C احسب معدّل تغيّر y في النقطة التي فاصلتها 4 حيث: $\frac{dx}{dt}=0.1\ cm.s^{-1}$

12) استنتج رسم الخط C_1 للدالة f_1 : $f_1(x)=\frac{x^2-3x+6}{1-x}$ وارسمها على شبكة إحداثيات جديدة.

13) استنتج رسم الخط C_2 للدالة f_2 : $f_2(x)=\frac{x^2+3x+6}{-1-x}$ وارسمها على شبكة إحداثيات جديدة.

14) استنتج رسم الخط C_3 للدالة f_3 : $f_3(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$ وارسمها على شبكة إحداثيات جديدة.

15) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y=5$.

16) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين: $x=-4\ ,\ x=-2$.

المسألة الثانية

ليكن C الخط البياني للدالة f المعّرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}-3x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للدالة f من مقاربات توازي المحاور الإحداثية.

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y=-3x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C بالنسبة للمقارب.

3) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

4) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=3x+\frac{e^x}{1-e^{2x}}$.

المسألة الثالثة

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرّفة على $]-\infty, 1[$ وفق العلاقة: $f(x)=\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}$ والمطلوب:

1) أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف واستنتج ما للدالة f من مقاربات توازي المحاور الإحداثية.

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، ثم استنتج ان للدالة قيمة صغرى شاملة.

3) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

4) ليكن C' الخط البياني للدالة: $g(x)=e^x-x$ ، أثبت أن C , C' متماسان في النقطة $(0,1)$ واكتب معادلة المماس المشترك.

5) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=\ln(1-x)-\frac{x}{x-1}$.

6) استنتج رسم الخط C_2 للدالة: $f_2(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{1+x}$.

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحاور الإحداثية والمستقيم $x=-2$.

المسألة الرابعة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ خطه البياني C_1، ولتكن الدّالة g المعرّفة وفق: $g(x)=ae^{-x}+b$ خطها البياني C_2، حيث a, b أعداد حقيقية ، والمطلوب:

1) برهن أن الدّالة f اشتقاقية عند (0).

2) عيّن a, b ليكون الخطين البيانيين C_1 , C_2 متماسين في النقطة $(0,0)$، ثم اكتب معادلة المماس المشترك لهما في نقطة التماس.

3) ادرس تغيرات الدّالتين f, g ونظّم جدولاً بهما.

4) ارسم C_1 , C_2 على نفس الجملة.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C_1 والمحور xx' والمستقيمين: $x=0 , x=1$.

6) احسب مساحة السطح المحصور بين المنحنيين C_1 , C_2 والمستقيمين: $x=0 , x=2$.

7) احسب القيمة التقريبية لميل المماس للخط C_2 في نقطة منه فاصلتها 0.2.

8) لتكن $M(x,y)$ نقطة تتحرك على طول الخط C_1، احسب معدّل تغيّر y في اللحظة التي يكون فيها: $x=0$ و $\frac{dx}{dt}=0.5\ cm.s^{-1}$

.

9) أثبت أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $g^{(n)}(x)=2.(-1)^{n+1}.e^{-x}$.

المسألة الخامسة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{-2x-4}{x+1}$ خطها البياني C والمطلوب:

1) أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة تعريف الدالة f واستنتج المستقيمات المقاربة للخط C .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ثم ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C وارسم C.

3) ليكن C_1 الخط البياني للدالة $g(x)=2e^x-6$، برهن أن C , C_1 متماسان في النقطة $A(0,-4)$ ، واكتب معادلة المماس المشترك لهما في نقطة تماسهما.

4) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور xx' والمستقيمين: $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$

المسألة السادسة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ خطها البياني C والمطلوب:

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ، ودل على القيمة الصغرى محلياً والقيمة الكبرى الشاملة.

2) ارسم الخط C.

3) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط α حلول المعادلة: $x^{\frac{3}{2}}+3\alpha-3x^{\frac{1}{2}}=0$.

4) برهن أنه ومهما تكن $x\in[0,+\infty[$ فإن: $\sqrt{x^3}\geq 3\sqrt{x}-2$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx'.

6) احسب طول قوس المنحني C والمحصور بين المستقيمين $x=1$, $x=16$.

7) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=\frac{3\sqrt{x}-6-\sqrt{x^3}}{3}$

المسألة السابعة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}\backslash\{0,3\}$ وفق: $f(x)=\frac{9}{x^3-6x^2+9x}$ خطها البياني C والمطلوب:

1) أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف واستنتج ما للدالة f من مقاربات توازي xx' أو توازي yy'.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الصغرى محلياً.

3) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

4) فرّق الدالة $f(x)$ إلى مجموع دوال كسرية ثم أوجد $\int f(x).dx$ على المجال $]0,3[$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=-\frac{9}{x^3+6x^2+9}$ (دون رسم).

المسألة الثامنة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=\frac{xe^x}{1-e^x}$ خطها البياني C والمطلوب:

1) برهن أن للدالة f نهاية عندما x تسعى إلى الصفر ثم اوجد نهاية الدالة عند $-\infty,+\infty$ واستنتج المقاربات.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta: y=-x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

4) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

5) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}$.

6) استنتج رسم الخط C_2 للدالة: $f_2(x)=\frac{x}{e^x-1}$.

7) استنتج رسم الخط C_3 للدالة: $f_3(x)=\frac{x}{1-e^x}$.

8) برهن أنه ومهما تكن $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $e^x(x+1)<1$.

9) بإستخدام التكامل بالتجزئة أوجد ناتج التكامل: $\int x(1-e^x)f(x).dx$.

المسألة التاسعة

لتكن الدّالة f المعرّفة وفق العلاقة: $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}$ خطها البياني C والمطلوب:

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f.

2) أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف واستنتج المقاربات الموازي للمحور xx' والمحور yy'.

3) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيم الكبرى والصغرى محلياً.

4) أوجد كلاً من التكاملين: $\int 2\sqrt{1-x}\, f'(x).dx$, $\int \frac{x.f(x)}{\sqrt{1-x}}dx$ على المجال $]-1,1[$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$.

المسألة العاشرة

لتكن الدّالة f المعرّفة على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=x\ln(x)$ خطها البياني C والمطلوب:

1) ادرس تغيرات الدالة f ودل على القيمة الصغرى الشاملة ثم ارسم C.

2) اكتب معادلة المماس للمنحني الموازي للمستقيم $y=x$.

3) لتكن الدالة: $g(x)=ae^x+b$ خطها البياني C ، عيّن a,b ليكون المماس السابق مماس مشترك للمنحنيين.

4) احسب قيمة تقريبية لميل مماس الخط C في نقطة منه فاصلتها $1,2$.

5) برهن أنه مهما تكن $x\in]0,+\infty[$ فإن: $\ln x+\frac{1}{xe}\geq 0$.

6) استنتج بيانياً وتبعاً لقيم الوسيط λ حلول المعادلة: $e^{\frac{\lambda}{x}}=x$.

7) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=x\ln(-x)$.

8) استنتج رسم الخط C_2 للدالة: $f_2(x)=\frac{x^2\ln x-x}{x}$.

9) لتكن $M(x,y)$ نقطة تتحرك على طول الخط C و N نقطة تقاطع المنحني C مع المحور xx' و O مبدأ الإحداثيات ،والمطلوب:

احسب معدّل تغيّر مساحة المثلث OMN في اللحظة التي تكون فيها $y=e$ ومعدّل تغيّر x في تلك اللحظة: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\ cm.s^{-1}$

.

10) عيّن موضع النقطة M لتكون مساحة المثلث OMN حيث: $x\in]0,1[$ أكبر مايمكن ، ثم احسب تلك المساحة.

11) برهن بإستخدام الإستقراء الرياضي أنه ومهما تكن $n\geq 2$ فإن: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.

المسألة الحادية عشر

لتكن الدالة f المعرّفة وفق العلاقة: $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ **خطها البياني C والمطلوب:**

1) أوجد مجموعة التعريف D_f ثم أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف واستنتج المقاربات.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

4) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ حلول المعادلة التالية: $x(1-e^{\lambda})+1+e^{\lambda}=0$.

5) برهن أن الدالة f تقابل ثم عيّن f^{-1} واستنتج رسم الخط البياني للدالة f^{-1}.

6) استنتج رسم الخط C_1 للدالة: $f_1(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

7) برهن أن: $F(x)=\ln(x^2-1)+x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ **دالة أصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$ ،**
ثم احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور xx' والمستقيمين $x=4$, $x=2$.

8) لتكن $A(x,y)$ نقطة من الخط C حيث $x\in\left[\frac{7}{5},4\right]$ **، A' نظيرة A بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ، عيّن موضع النقطة A ليكون محيط المستطيل الذي قطره AA' أصغر مايمكن ، ثم احسب محيطه ومساحته.**

باعتبار: $\sqrt{3}=\frac{17}{10}$, $\ln\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $\ln(6)=\frac{9}{5}$, $\ln\left(\frac{27}{7}\right)=\frac{13}{10}$

المسألة الثانية عشر

لتكن الدالة المعرفة بالشكل $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ **خطها البياني C والمطلوب:**

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الكبرى الشاملة والقيم الصغرى محلياً.

3) استنتج رسم الخط البياني للدالة $f_1(x)=-2\sqrt{1-x^2}$.

4) استنتج أن الدالة $g(x)=\begin{cases} f(x) \\ f_1(x)\end{cases}$ **تمثل معادلة قطع ناقص ، عين مركزه وذراه ومحرقيه ومحوره المحرقي.**

5) برهن أن: $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-f_1(x)\right)dx=2\pi$.

المسألة الثالثة عشر

ليكن C الخط البياني للدالة $f(x) = e^x - 2x$ والمطلوب:

1) اكتب معادلة المماس d للخط C في النقطة $A(0,1)$.

2) استنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة: $f_1(x) = 2x - e^x$ واستنتج معادلة المماس d_1 للخط C_1 في النقطة $B(0,-1)$.

3) ارسم C ثم ارسم C_1 على نفس الجملة.

4) إذا كانت D نقطة تقاطع المماسين السابقين d_1, d ، برهن أن المثلث ABD متساوي الساقين وقائم.

5) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته D و A, B نقطتين منه.

6) اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل المماسين d_1, d مقاربين له وإحدى ذراه مبدأ الإحداثيات.

7) اكتب معادلة القطع الناقص الذي قطره الصغير AB ومحرقه D.

8) إذا كانت $M(x,y)$ نقطة تتحرك على الخط البياني للقطع الناقص السابق و D' محرقه الآخر:

عيّن موضع النقطة M لتكون مساحة المثلث MDD' أكبر مايمكن ، حيث $y > 0$.

المسألة الرابعة عشر

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = (1-x)e^x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وحدد ما للدالة من مقاربات ودل على القيمة الكبرى الشاملة.

2) ارسم ماوجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C.

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين.

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بالخط C والمحورين الإحداثيين.

5) استنتج رسم الخطين البيانيين للدالتين: $f_1(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$ خطها البياني C_1 ، $f_2(x) = \dfrac{2-x}{e^{1-x}}$ خطها البياني C_2 .

6) استنتج بيانياً وتبعاً لقيم الوسيط λ حلول المعادلة: $x = \ln\left|\dfrac{\lambda}{1-x}\right|$.

7) برهن أنه ومهما تكن قيمة x فإن المتراجحة التالية صحيحة: $e^{-x} + x \geq 1$.

انتهت المسائل

بالتوفيق للجميع