

السؤال الأول :

احسب كلاً مما يأتي :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{1 - x^6}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x}$$

السؤال الثاني :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2 + \cos x}{x + 2}$

(١) تحقق أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

(٢) ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه على المجال $[\pi, 2\pi]$.

السؤال الثالث :

تأمل في الشكل المجاور الخط البياني لتابع f معرف على \mathbb{R} :

(١) احسب $f(0), f(3)$.

(٢) ما حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

(٣) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(٤) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

(٥) أوجد العددين الحقيقيين a, b إذا علمت أن :

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x + b$$

(٦) عين إحداثيات نقطة تناظر المنحني C_f .

السؤال الرابع :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

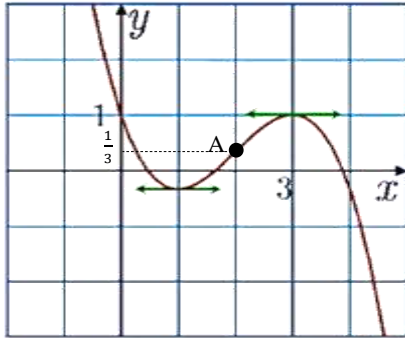
(١) احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة كل مقارب وجدته .

(٢) أوجد A التي تحقق : إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]1.95, 2.05[$.

السؤال الخامس :

عين قيمة m التي تجعل التابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & x \neq 3 \\ m & x = 3 \end{cases}$ مستمراً عند 3 .

-انتهت الأسئلة-



السؤال الأول :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(2 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(2 + \frac{3}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x} \right) \end{aligned}$$

بما أن $x \rightarrow +\infty$ أي $x > 0$ ومنه $|x| = +x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} = 1$$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين نزيلها

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

حسب القاعدة : $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = 2(1) = 2$$

لأن :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

حيث $t = x - \frac{\pi}{4}$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{1 - x^6} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين . لدينا $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ يمثل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q = x$

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{1 - x^6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^6}{(1 - x)(1 - x^6)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(1 - x)} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

السؤال الثاني : (١)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2 + \cos x - (x+1)(x+2)}{x+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2 + \cos x - x^2 - 3x - 2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x+2} \right)$$

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$

$$\frac{-1}{x+2} \leq \frac{\cos x}{x+2} \leq \frac{1}{x+2}$$

نقسم على $(x+2) > 0$

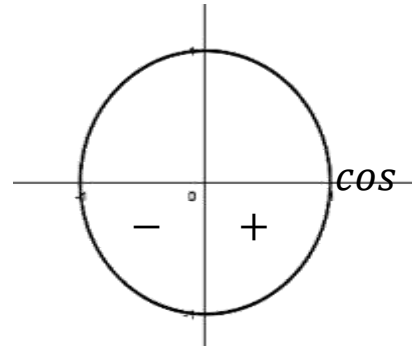
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x+2} \right) = 0 \end{cases} \gg \gg \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x+2} \right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة . أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos x}{x+2}$$

(٢)

x	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	---	0	++++
$x+2$	++++		++++
$f(x) - y_\Delta$	---	0	++++
الوضع النسبي	Δ تحت C_f		Δ فوق C_f



وينقطع C_f مع مقاربه Δ عند $x = \frac{3\pi}{2}$ أي في النقطة $A(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 1)$

السؤال الثالث :

$$f(0) = 1, f(3) = 1 \quad (١)$$

$$(٢) \text{ حلول المعادلة } f(x) = 1 \text{ هي } x_1 = 0 \text{ و } x_2 = 3$$

(٣)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

(٤)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

$$f(0) = 1 \gg \gg b = 1 \quad (٥)$$

$$f(3) = 1 \gg \gg 27a + 18 - 9 + 1 = 1 \gg \gg a = \frac{-1}{3}$$

$A(2, \frac{1}{3})$: إحداثيات نقطة تناظر المنحني C_f (٦)

السؤال الرابع : (١)

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, \quad D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad (٢)$$

$f(x)$ في المجال $]1.95, 2.05[$ أي :

$$1.95 < f(x) < 2.05$$

$$\gg \gg 1.95 < \frac{2x - 2 + 3}{x - 1} < 2.05$$

$$1.95 < \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} < 2.05$$

$$1.95 < 2 + \frac{3}{x - 1} < 2.05 \gg \gg -0.05 < \frac{3}{x - 1} < 0.05$$

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{5}{100}$$

$$\frac{x - 1}{3} > \frac{100}{5}$$

نقلب :

$$x - 1 > 3(20) \gg \gg x > 61$$

$$A = 61 \quad (\text{أو أي عدد أكبر من } 61)$$

السؤال الخامس :

يجب تحقق الشرط :

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4} \right.$$

$$f(3) = m$$

$$m = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

-انتهى الحل-