الوحدة الأولى: الحركة والتحريك

الدرس الأول: النواس المرن

جدول الرموز والواحدات

المقدار	الرمز	الواحدة
مطال الحركة	x	m
سعة الاهتزاز	X_{max}	m
الزمن – زمن الهزات	t	s
عدد الهزات	n	
الكتلة	m	kg
السرعة الخطية	v	$m.s^{-1}$
السرعة العظمى (طويلة)	v_{max}	$m.s^{-1}$
التسارع الخطي	a	$m.s^{-2}$
التسارع الأعظمي (طويلة)	a_{max}	$m.s^{-2}$
ثابت صلابة النابض	k	$N.m^{-1}$
شدة قوة الإرجاع	F	N
الدور الخاص	T_0	s
النبض الخاص	ω_0	$rad.s^{-1}$
الاستطالة السكونية	x_0	m
تسارع الجاذبية الأرضية	g	$m.s^{-2}$
طور الحركة الإبتدائي	φ	rad

احسب $F, x_0, m, k, \omega_0, T_0$

الدور الخاص	النبض الخاص	ثابت صلابة النابض	كتلة الجسم	الاستطالة السكونية	شدة قوة الإرجاع
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $T_0 = \frac{t}{n}$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$k = m\omega_0^2$	$m = \frac{k}{\omega_0^2}$	$x_0 = \frac{mg}{k}$	$F = \lvert kx \rvert$

احسب a_{max}, a, v_{max}, v

السرعة			التسارع	
عند مطال x	عند لحظة t	العظمى (طويلة)	عند مطال x	الأعظمي (طويلة)
$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$	$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$v_{max} = \omega_0 X_{max}$	$a = -\omega_0^2 x$	$a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$

احسب E_k, E_{tot}, E_p			
الطاقة الكامنة المرونية عند مطال x	الطاقة الميكانيكية	الطاقة الحركية عند	
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$	مطال x: $E_k = E_{tot} - E_p$	سرعة v: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

استنتج التابع الزمني للمطال X

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حساب X_{max}: إما $X_{max} = \frac{d}{2}$ (حيث d: طول القطعة المستقيمة التي يرسمها الجسم أثناء حركته)

أو: $X_{max} = x, t = 0$ (ترك دون سرعة ابتدائية)

حساب ω_0: إما $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ أو: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

حساب φ: نعوض شروط البدء في التابع الزمني للمطال: نميز أربع حالات: لحظة البدء الجسم في موضع:

مطاله الأعظمي الموجب	المطال الأعظمي السالب	$\frac{X_{max}}{2}$ وهو متحرك بالاتجاه السالب	التوازن وهو متحرك بالاتجاه السالب
$t = 0, x = +X_{max}$ $X_{max} = X_{max}\cos\varphi$ $\cos\varphi = 1$ $\varphi = 0$	$t = 0, x = -X_{max}$ $-X_{max} = X_{max}\cos\varphi$ $\cos\varphi = -1$ $\varphi = \pi rad$	$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi$ $\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}rad$ $v = -\omega_0 X_{max}\sin\varphi$ $\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v<0$ مقبول $\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v>0$ مرفوض	$0 = X_{max}\cos\varphi$ $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}rad$ $v = -\omega_0 X_{max}\sin\varphi$ $\varphi = \frac{\pi}{2}rad \Rightarrow v<0$ مقبول $\varphi = -\frac{\pi}{2}rad \Rightarrow v>0$ مرفوض

حدد لحظة المرور الأول والثاني والثالث للجسم في موضع التوازن: t_1, t_2, t_3

$$x = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k ; k = 0,1,2,3,...$$

المرور الأول	المرور الثاني	المرور الثالث
$k = 0 \Rightarrow t_1 = ...$	$k = 1 \Rightarrow t_2 = ...$	$k = 2 \Rightarrow t_3 = ...$

الدرس الثاني: نواس الفتل

المقدار	الرمز	الواحدة
المطال الزاوي	θ	rad
السعة الزاوية	$\theta_{\max}$	rad
السرعة الزاوية	ω	$rad.s^{-1}$
السرعة الزاوية العظمى	$\omega_{\max}$	$rad.s^{-1}$
التسارع الزاوي	α	$rad.s^{-2}$
التسارع الزاوي الأعظمي	$\alpha_{\max}$	$rad.s^{-2}$
ثابت فتل السلك	k	$m.N.rad^{-1}$
عزم العطالة	I_{Δ}	$kg.m^{2}$
طول سلك الفتل ، طول الساق	ℓ	m
كتلة القرص أو الساق	m	kg
نصف قطر القرص	r	m

احسب T_0, ω_0, k

الدور الخاص	النبض الخاص	ثابت فتل السلك
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}}$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$k = I_{\Delta}\omega_0^2$

احسب ω, α

السرعة الزاوية		التسارع الزاوي	
عند مطال زاوي θ	العظمى	عند مطال زاوي θ	الأعظمي
$\omega = -\omega_0\theta_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\omega_{\max} = \omega_0\theta_{\max}$	$\alpha = -\omega_0^2\theta$	$\alpha_{\max} = \omega_0^2\theta_{\max}$

احسب الطاقة E

الكامنة عند مطال θ	الميكانيكية	الحركية عند	
$E_p = \frac{1}{2}k\theta^2$	$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta_{\max}^2$	مطال θ: $E_k = E_{tot} - E_p$	سرعة زاوية ω: $E_k = \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2$

استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي θ
$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$
(ترك دون سرعة ابتدائية) $\theta_{\max} = \theta, t = 0$
حساب φ: $\theta_{\max} = \theta_{\max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

حدد لحظة المرور الأول والثاني والثالث للجسم في موضع التوازن t_1, t_2, t_3		
$\theta = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$ $\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k \,; k = 0,1,2,3,\ldots$		
المرور الأول: $k = 0 \Rightarrow t_1 = \ldots$	المرور الثاني: $k = 1 \Rightarrow t_2 = \ldots$	المرور الثالث: $k = 2 \Rightarrow t_3 = \ldots$

نجعل طول سلك الفتل .... احسب الدور الخاص الجديد T'_0			
$\ell' = \frac{\ell}{4}$	$\ell' = \frac{\ell}{2}$	$\ell' = 4\ell$	$\ell' = 2\ell$
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{\frac{k'(2r)^4}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \ell}{k'(2r)^4}} = const\sqrt{\ell}$			
$T'_0 = const\sqrt{\ell'}$ $T'_0 = const\sqrt{\frac{\ell}{4}} = \frac{T_0}{2}$	$T'_0 = const\sqrt{\ell'}$ $T'_0 = const\sqrt{\frac{\ell}{2}} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	$T'_0 = const\sqrt{\ell'}$ $T' = const\sqrt{4\ell} = 2T_0$	$T'_0 = const\sqrt{\ell'}$ $T' = const\sqrt{2\ell} = \sqrt{2}T_0$

حالة خاصة: ساق مع كتلتين نقطيتين:	
ساق مهملة الكتلة طولها ℓ نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $m_1 = m_2$ احسب ثابت فتل السلك أو الدور الخاص	ساق كتلتها m طولها ℓ عزم عطالتها I_Δ نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $m_1 = m_2$ معلقة من منتصفها بسلك فتل احسب الدور الخاص الجديد
نحسب I_Δ: $I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$ $I_\Delta = 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2m_1\frac{\ell^2}{4}$ $I_\Delta = \frac{1}{2}m_1\ell^2$	$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}} = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_\Delta}}$ $I'_\Delta = I_\Delta + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = I_\Delta + 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ $I'_\Delta = I_\Delta + \frac{1}{2}m_1\ell^2$

الدرس الثالث: النواس الثقلي

النواس الثقلي البسيط

احسب الدور الخاص من أجل السعات	
الصغيرة T_0	الكبيرة T'_0
$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$	$T'_0 = T_0\left(1+\dfrac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

نزيح الكرة بزاوية θ_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية استنتج: a) علاقة السرعة الخطية v b) قيمة θ_{max}

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية ، $W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh = 2g\ell(1-\cos\theta_{max})$$

a) $v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{max})}$	b) $\cos\theta_{max} = 1 - \dfrac{v^2}{2g\ell}$

استنتج علاقة توتر الخيط لحظة المرور بالشاقول T

القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{W}$ ، قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الناظم:

$$-W + T = ma_c \Rightarrow T = ma_c + W = m\frac{v^2}{\ell} + mg = m\left(\frac{v^2}{\ell} + g\right)$$

النواس الثقلي المركب

<table>
<tr><td colspan="3">الحالة الأولى: جسم + محور لا يمر بمركزه (هايغنز)</td></tr>
<tr><td>قرص كتلته m نصف قطره r
يهتز حول محور مار بنقطة من محيطه
$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$</td><td>ساق كتلتها m طولها ℓ
تهتز حول محور مار بطرفها العلوي
$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m \ell^2$</td><td>حلقة كتلتها M نصف قطرها R
تهتز حول محور مار بنقطة من محيطها
$I_{\Delta/c} = M R^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">استنتج علاقة الدور الخاص من أجل السعات الصغيرة واحسب قيمتها</td></tr>
<tr><td colspan="3">$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$</td></tr>
<tr><td>$d = r$</td><td>$d = \frac{\ell}{2}$</td><td>$d = R$</td></tr>
<tr><td>$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$
$I_\Delta = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$
$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$</td><td>$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$
$I_\Delta = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{4}$
$I_\Delta = \frac{1}{3} m \ell^2$</td><td>$I_\Delta = I_{\Delta/c} + M d^2$
$I_\Delta = M R^2 + M R^2$
$I_\Delta = 2 M R^2$</td></tr>
<tr><td>$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{mgr}}$
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}$</td><td>$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m \ell^2}{mg \frac{\ell}{2}}}$
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$</td><td>$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2 M R^2}{MgR}}$
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج: a) علاقة السرعة الزاوية b) قيمة θ_{max}</td></tr>
<tr><td colspan="3">نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$
$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = mgh + 0 \Rightarrow I_\Delta \omega^2 = 2mgd\,(1 - \cos\theta_{max})$
$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية ، $W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{2} m r^2 \omega^2 = 2mgr\,(1 - \cos\theta_{max})$
$3r\,\omega^2 = 4g\,(1 - \cos\theta_{max})$</td><td>$\frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2 = 2mg \frac{\ell}{2} (1 - \cos\theta_{max})$
$\ell \omega^2 = 3g\,(1 - \cos\theta_{max})$</td><td>$2 M R^2 \omega^2 = 2MgR\,(1 - \cos\theta_{max})$
$R\,\omega^2 = g\,(1 - \cos\theta_{max})$</td></tr>
<tr><td>$a)\,\omega = \sqrt{\frac{4g\,(1 - \cos\theta_{max})}{3r}}$
$b)\,\cos\theta_{max} = 1 - \frac{3r\,\omega^2}{4g}$</td><td>$a)\,\omega = \sqrt{\frac{3g\,(1 - \cos\theta_{max})}{\ell}}$
$b)\,\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\ell \omega^2}{3g}$</td><td>$a)\,\omega = \sqrt{\frac{g\,(1 - \cos\theta_{max})}{R}}$
$b)\,\cos\theta_{max} = 1 - \frac{R\,\omega^2}{g}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">احسب السرعة الخطية لمركز عطالة النواس: $v_c = d\,\omega$</td></tr>
<tr><td>$v_c = r\,\omega$</td><td>$v_c = \frac{\ell}{2} \omega$</td><td>$v_c = R\,\omega$</td></tr>
</table>

الحالة الثانية: جسم + محور مار بمركزه + كتلة نقطية	
قرص كتلته m_1 نصف قطره r يهتز حول محور مار بمركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m_1 r^2$	ساق كتلتها m_1 طولها ℓ تهتز حول محور مار بمركزها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m_1 \ell^2$
استنتج علاقة الدور الخاص من أجل السعات الصغيرة	
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$	
$m = m_1 + m_2 = 2m_1$ $d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + m_1 r}{2m_1} = \frac{r}{2}$ $I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_2} = \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2 = \frac{3}{2} m_1 r^2$ $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m_1 r^2}{2m_1 g \frac{r}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}$	$m = m_1 + m_2 = 2m_1$ $d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + m_1 \frac{\ell}{2}}{2m_1} = \frac{\ell}{4}$ $I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_2} = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_2 \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$ $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m_1 \ell^2}{2m_1 g \frac{\ell}{4}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$
نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج: a) علاقة السرعة الزاوية b) قيمة θ_{max}	
نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$ $\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = mgh + 0 \Rightarrow I_\Delta \omega^2 = 2mgd\,(1 - \cos\theta_{max})$ $E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية $W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل	
$\frac{3}{2} m_1 r^2 \omega^2 = 2 \times 2m_1 g \frac{r}{2} (1 - \cos\theta_{max})$ $3r\,\omega^2 = 4g\,(1 - \cos\theta_{max})$	$\frac{1}{3} m_1 \ell^2 \omega^2 = 2 \times 2m_1 g \frac{\ell}{4} (1 - \cos\theta_{max})$ $\ell \omega^2 = 3g\,(1 - \cos\theta_{max})$
$a)\,\omega = \sqrt{\frac{4g\,(1 - \cos\theta_{max})}{3r}}$ $b)\,\cos\theta_{max} = 1 - \frac{3r\,\omega^2}{4g}$	$a)\,\omega = \sqrt{\frac{3g\,(1 - \cos\theta_{max})}{\ell}}$ $b)\,\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\ell \omega^2}{3g}$
احسب السرعة الخطية لمركز عطالة النواس: $v_c = d\,\omega$	
$v_c = \frac{r}{2} \omega$	$v_c = \frac{\ell}{4} \omega$
احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 : $v_{m_2} = r_2 \omega$	
$v_{m_2} = r\,\omega$	$v_{m_2} = \frac{\ell}{2} \omega$

الحالة الثالثة: ساق مهملة الكتلة طولها ℓ مع كتلتين نقطيتين	
في الطرف العلوي m_1 في الطرف السفلي m_2 محور الدوران مار بمنتصف الساق	في المنتصف m_1 في الطرف السفلي m_2 محور الدوران مار بالطرف العلوي
احسب الدور الخاص من أجل السعات الصغيرة	
$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{mgd}}$	
$m = m_1 + m_2$	
$d = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$	
$d = \dfrac{-m_1\frac{\ell}{2} + m_2\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2}$	$d = \dfrac{m_1\frac{\ell}{2} + m_2\ell}{m_1 + m_2}$
$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$	
$I_\Delta = m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ $I_\Delta = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\frac{\ell^2}{4}$	$I_\Delta = m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\ell^2$ $I_\Delta = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\ell^2$
نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج: a) علاقة السرعة الزاوية b) قيمة θ_{max}	
نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$ $\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 - 0 = mgh + 0 \Rightarrow I_\Delta\omega^2 = 2mgd\,(1-\cos\theta_{max})$ $E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية $W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل	
a) $\omega = \sqrt{\dfrac{2mgd\,(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$	b) $\cos\theta_{max} = 1 - \dfrac{I_\Delta\omega^2}{2mgd}$
احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة المرور بالشاقول	
$v_{m_2} = \dfrac{\ell}{2}\omega$	$v_{m_2} = \ell\omega$
	احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_1 لحظة المرور بالشاقول $v_{m_1} = \dfrac{\ell}{2}\omega$
احسب السرعة الخطية لمركز عطالة النواس لحظة المرور بالشاقول	
$v_c = d\,\omega$	

في الطرف العلوي m_1 ، في الطرف السفلي $m_2 = m_1$ ، محور مار بنقطة تبعد $\frac{\ell}{4}$ عن الطرف العلوي

استنتج علاقة الدور الخاص من أجل السعات الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$m = m_1 + m_2 = 2m_1$$

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{\ell}{4} + m_2\frac{3\ell}{4}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{\ell}{2}m_1}{2m_1} = \frac{\ell}{4}$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = m_1\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m_2\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 = m_1\frac{\ell^2}{16} + m_1\frac{9\ell^2}{16} = \frac{10}{16}m_1\ell^2 = \frac{5}{8}m_1\ell^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}m_1\ell^2}{2m_1 g\,\frac{\ell}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\ell}{4g}}$$

نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج: a) علاقة السرعة الزاوية b) قيمة θ_{max}

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec F} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec W} + W_{\vec R} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 - 0 = mgh + 0 \Rightarrow I_\Delta\omega^2 = 2mgd\,(1-\cos\theta_{max})$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec R} = 0$: نقطة تأثير $\vec R$ لا تنتقل

$$\frac{5}{8}m_1\ell^2\omega^2 = 2\times 2m_1 g\,\frac{\ell}{4}(1-\cos\theta_{max})$$

$$5\ell\omega^2 = 8g\,(1-\cos\theta_{max})$$

$a)\,\omega = \sqrt{\frac{8(1-\cos\theta_{max})}{5\ell}}$	$b)\cos\theta_{max} = 1 - \frac{5\ell\omega^2}{8g}$

احسب السرعة الخطية لـ .... لحظة المرور بالشاقول

مركز عطالة النواس	الكتلة النقطية m_2
$v_c = d\,\omega$	$v_{m_2} = \frac{3\ell}{4}\omega$

ملاحظة هامة: نحسب ω عند استنتاج θ_{max} في جميع الحالات من قيمة السرعة الخطية المعطاة

$v_c = d\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{d}$	$v_{m_2} = r_2\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_{m_2}}{r_2}$

الوحدة الأولى: الحركة والتحريك

الدرس الأول: النواس المرن

المسألة الأولى:

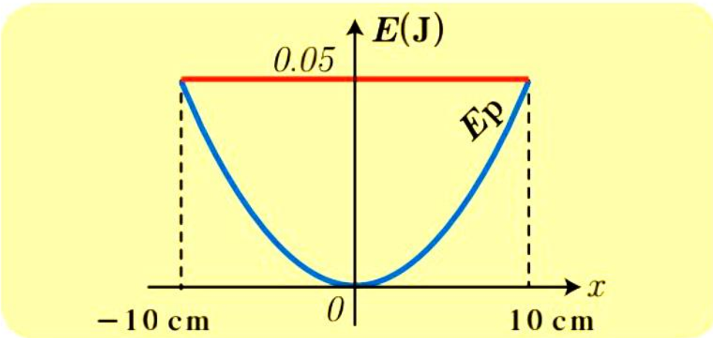
تتألّفُ هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابية من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهمل الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابتِه $k = 10\ \text{N.m}^{-1}$ ، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحملُ في طرفه الآخر جسماً كتلتُه m ، ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة. $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

المطلوب:

1. أوجدْ قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.
2. احسبْ كتلة الجسم m.
3. احسب قيمةَ السّرعة في موضعٍ مطالُه $x = 6\ \text{cm}$، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجبِ للمحور.
4. حدّد موضع الجّسم وجهة حركته لحظة بدء الزّمن.

المعطيات: $k = 10N.m^{-1}, x = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$	
$1) X_{max}, \omega_0, \varphi, T_0 = ?$ $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $X_{max} = 0.1m$ $\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$ $\varphi = \frac{\pi}{2} rad$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$	$3) v = ?, x = 6\times10^{-2}m$ $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2} = \pi\sqrt{10^{-2} - 36\times10^{-4}}$ $v = \pi\sqrt{100\times10^{-4} - 36\times10^{-4}}$ $v = \pi\sqrt{64\times10^{-4}} = 8\pi\times10^{-2} m.s^{-1}$
$2) m = ?$ $m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{10} = 1kg$	$4) x = ?, v = ?, t = 0$ $t = 0 \Rightarrow x = 0.1\cos\frac{\pi}{2} = 0m$ $v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $t = 0 \Rightarrow v = -\pi\times0.1\sin\frac{\pi}{2} = -0.1\pi m.s^{-1}$ $v < 0$ فالحركة بالاتجاه السالب للمحور

المسألة الثانية:



يوضّحُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ الطاقةِ الكامنةِ المرونية بتغيّرِ الموضعِ لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلّفةٍ من نابضٍ مرنٍ مهملَ الكتلة حلقاتُهُ متباعدةٌ ثابتُ صلابتِهِ k معلّقٌ به جسمٌ كتلتُه $0.4\ kg$.

المطلوب:

1. استنتجْ قيمةَ ثابت صلابة النابض k.
2. احسبْ الدورَ الخاصّ للحركة.
3. احسبْ قيمةَ السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

المعطيات: $m = 4\times10^{-1}kg\ ,E_{tot} = 5\times10^{-2}J\ ,X_{\max} = 10^{-1}m$
$1)k = ?$ $E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{\max}^{2}$ $5\times10^{-2} = \frac{1}{2}k\,10^{-2}$ $k = 10N.m^{-1}$
$2)T_0 = ?$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{4\times10^{-2}} = 4\pi\times10^{-1}s$
$3)v = ?, x = 0$ $v = \omega_0\sqrt{X_{\max}^{2} - x^{2}}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4\pi\times10^{-1}} = 5rad.s^{-1}$ $v = 5\sqrt{10^{-2} - 0} = 0.5m.s^{-1}$

المسألة الثالثة:

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطة من جسمٍ كتلتُهُ $m = 1\,\text{kg}$ معلّقٌ بطرفِ نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ فينجزُ 10 هزّاتٍ في 10 s، ويرسمُ في أثناءِ حركتِهِ قطعةً مستقيمةً طولُها 16 cm.

المطلوب:

1. استنتجْ علاقةَ الاستطالة السكونيّة لهذا النابض، ثمّ احسبْ قيمتها.
2. احسبْ قيمةَ السرعة العظمى (طويلة).
3. احسبْ قيمةَ التسارع في مطال $x = 6$ cm.
4. احسبِ الطاقةَ الكامنةَ المرونيّة في موضع مطاله $x = -4\,\text{cm}$، واحسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ.

المعطيات: $m = 1kg, n = 10, t = 10s, d = 16\times10^{-2}m$

$1)\ x_0 = ?$

يتأثر الجسم بقوتين: قوة الثقل $\overrightarrow{W}$ وقوة توتر النابض $\overrightarrow{F_{s_0}}$

$$\sum \overrightarrow{F} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{W} + \overrightarrow{F_{s_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0 \Rightarrow W = F_{s_0}$$

يتأثر النابض بالقوة $\overrightarrow{F'_{s_0}}$:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$$

$$W = kx_0 \Rightarrow mg = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$

$$k = m\omega_0^2$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{t}{n} = \frac{10}{10} = 1s$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$k = 1\times40 = 40N.m^{-1}$$

$$x_0 = \frac{1\times10}{40} = \frac{1}{4}m$$

$2)\ v_{max} = ?$

$$v_{max} = \omega_0 X_{max}$$

$$X_{max} = \frac{d}{2} = \frac{16\times10^{-2}}{2} = 8\times10^{-2}m$$

$$v_{max} = 2\pi\times8\times10^{-2} = 16\pi\times10^{-2}m.s^{-1}$$

$3)\ a = ?, x = 6\times10^{-2}m$

$$a = -\omega_0^2 x = -40\times6\times10^{-2} = -24\pi\times10^{-1}m.s^{-2}$$

$4)\ E_P = ?\ x = -4\times10^{-2}m, E_k = ?$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times40\times16\times10^{-4} = 32\times10^{-3}J$$

$$E_k = E_{tot} - E_P$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}\times40\times64\times10^{-4} = 128\times10^{-3}J$$

$$E_k = 128\times10^{-3} - 32\times10^{-3} = 96\times10^{-3}J$$

المسألة الرابعة:

تهتزُّ كرةٌ معدنيّةٌ كتلتُها m بمرونةِ نابضٍ شاقوليّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 16\,\mathrm{N.m^{-1}}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورُها الخاصّ $1\,\mathrm{s}$، وبسعةِ اهتزاز $X_{max} = 0.1\,\mathrm{m}$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالُها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيَّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.
2. عيّنْ لحظتَي المرور الأوّلِ والثالثِ للكرة في موضع التوازن.
3. احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالُها $x = +0.1\,\mathrm{m}$
4. احسبْ كتلة الكرة.

<table>
<tr><td colspan="2">المعطيات: $k = 16N.m^{-1}, T_0 = 1s, X_{max} = 0.1m, t = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{X_{max}}{2}, v \langle 0\right)$</td></tr>
<tr><td>$2)\ t_1 = ?, t_3 = ?, x = 0$
$x = 0$
$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$
$2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k\,; k = 0,1,2,3,...$
$2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = \frac{1+6k}{6}$
$t = \frac{1+6k}{12}$
$k = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{12}s$
$k = 2 \Rightarrow t_3 = \frac{13}{12}s$</td><td>$1)\ x = ?$
$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$
$t = 0 \Rightarrow x = \frac{X_{max}}{2}, v \langle 0$
$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}rad$
$v = -\omega_0 X_{max}\sin\varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v \langle 0$ مقبول
$\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v \rangle 0$ مرفوض
$x = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td>$4)\ m = ?$
$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} = 0.4kg$</td><td>$3)\ F = ?, x = 0.1m$
$F = \lvert -kx \rvert = \lvert -16 \times 0.1 \rvert = 1.6N$</td></tr>
</table>

حل المسائل العامة (النواس المرن)

المسألة (1):

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطةً مؤلّفةً من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10\,\text{N.m}^{-1}$ مثبّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُهُ $m = 0.1\,\text{kg}$ فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز الاهتزاز، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v = -3\,\text{m.s}^{-1}$.

المطلوب:

1. احسبْ نبضَ الحركة.
2. استنتج التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة.
3. احسبْ شدّةَ قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $3\,\text{cm}$.

المعطيات: $k = 10N.m^{-1}, m = 1kg, t = 0 \Rightarrow \left(x = 0, v \langle 0\right)$

$1)\omega_0 = ?$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = \sqrt{100} = 10 rad.s^{-1}$$

$2)\, x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$t = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \mp\frac{\pi}{2} rad$$

$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} rad \Rightarrow v \langle 0$$

مقبول

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} rad \Rightarrow v \rangle 0$$

مرفوض

$$-3 = -10X_{max}\sin\frac{\pi}{2}$$

$X_{max} = 0.3m$

$$x = 0.3\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$3)F = ?, x = 3\times10^{-2}m$

$$F = |-kx| = |-10\times3\times10^{-2}| = 0.3N$$

المسألة (2):

تهتزُّ نقطة ماديَّة كتلتها $0.5\,kg$ بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور خاص $4\,s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\,cm$ فإذا علمت أنَّ النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرِّكة بالاتِّجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عيّن لحظتي المرور الأوَّل والثالث في وضع التوازن.
3. عيّن المواضع التي تكون فيها شدَّة محصّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدَّة هذه المحصّلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاصّ $1\,s$.

المعطيات: $m = 0.5kg, T_0 = 4s, X_{max} = 8\times10^{-2}m, t = 0 \Rightarrow (x = \frac{X_{max}}{2}, v<0)$

1) $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,rad.s^{-1}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = \frac{X_{max}}{2}, v<0$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}rad$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin\varphi$$

$\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v<0$ مقبول

$\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v>0$ مرفوض

$$x = 8\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

2) $t_1 = ?, t_3 = ?, x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k\,;k = 0,1,2,3,...$$

$$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = \frac{1+6k}{6} \Rightarrow t = \frac{1+6k}{3}$$

$$k = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}s$$

$$k = 2 \Rightarrow t_3 = \frac{13}{3}s$$

3) $F = -kx$

تكون شدة محصلة القوى عظمى في الموضعين الطرفيين:

$$x = \mp X_{max} \Rightarrow F_{max} = kX_{max} = m\omega_0^2 X_{max}$$

$$F_{max} = 5\times10^{-1}\times\frac{10}{4}\times8\times10^{-2} = 10^{-1}N$$

تكون شدة محصلة القوى معدومة في موضع التوازن:

$$x = 0 \Rightarrow F = 0$$

4) $k = ?$

$$k = m\omega_0^2 = 5\times10^{-1}\times\frac{10}{4} = \frac{5}{4}N.m^{-1}$$

لا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض باستبدال الكتلة المعلقة

5) $m' = ?, T_0' = 1s$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{\frac{5}{4}}}$$

$$1 = 40\frac{4m'}{5} \Rightarrow 1 = 32m' \Rightarrow m' = \frac{1}{32}kg$$

المسألة الأولى دورة 2020 الثانية:

تتألف هزازة توافقية بسيطة غير متخامدة من جسم صلب كتلته $m = 1kg$ معلق إلى طرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدور خاص $T_0 = 0.4s$ ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $d = 12cm$ المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام باعتبار مبدأ الزمن كان الجسم في مطاله الأعظمي الموجب
2. احسب ثابت صلابة النابض 3. احسب قيمة الاستطالة السكونية للنابض
4. عين لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز 5. احسب الطاقة الكامنة المرونية للنابض عند نقطة مطالها $x = 4cm$ ثم احسب الطاقة الحركية للجسم عندئذ

<table>
<tr><td colspan="2">المعطيات: $m = 1kg, T_0 = 4\times10^{-1}s, d = 12\times10^{-2}m$</td></tr>
<tr><td>$4)t = ?$
$x = 0$
$\cos(5\pi t) = 0$
$5\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k ; k = 0,1,2,...$
$k = 0 \Rightarrow 5t = \frac{1}{2}$
$t = \frac{1}{10} = 0.1s$</td><td>$1)x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$
$X_{max} = \frac{d}{2} = \frac{12\times10^{-2}}{2} = 6\times10^{-2}m$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{4\times10^{-1}} = \frac{20\pi}{4} = 5\pi rad.s^{-1}$
$t = 0 \Rightarrow x = X_{max}$
$X_{max} = X_{max}\cos\varphi$
$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$
$x = 6\times10^{-2}\cos(5\pi t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$5)E_P = ?, x = 4\times10^{-2}m, E_k = ?$
$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times250\times16\times10^{-4} = 2\times10^{-1}J$
$E_k = E_{tot} - E_p$
$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}\times250\times36\times10^{-4} = 45\times10^{-2}J$
$E_k = 45\times10^{-2} - 20\times10^{-2} = 25\times10^{-2}J$</td><td>$2)k = ?$
$k = m\omega_0^2 = 1\times250 = 250N.m^{-1}$</td></tr>
<tr><td>$3)x_0 = ?$
$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{1\times10}{250} = \frac{1}{25}m$</td></tr>
</table>

المسألة الأولى: 2021 الأولى:

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 100N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 12cm$ باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب المطلوب: 1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام

2- عين لحظة المرور الأول للكرة في موضع التوازن ثم احسب سرعتها عندئذ

3- احسب كتلة الكرة m 4- احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 4cm$

5- احسب الاستطالة السكونية للنابض 6- احسب الطاقة الميكانيكية (الكلية) لهذا النواس

المعطيات: $k = 100N.m^{-1}, T_0 = \frac{\pi}{5}s, X_{max} = 12cm = 12\times10^{-2}m, t = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{X_{max}}{2}, v < 0\right)$	
$1) x = ?$ $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10 rad.s^{-1}$ $t = 0 \Rightarrow x = \frac{X_{max}}{2}, v < 0$ $\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}rad$ $v = -\omega_0 X_{max}\sin\varphi$ $\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v < 0$ مقبول $\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow v > 0$ مرفوض $x = 12\times10^{-2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$	$2) t = ?, x = 0, v = ?$ $x = 0 \Rightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ $10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0,1,2,...$ $k = 0 \Rightarrow 10t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ $t = \frac{\pi}{60}s$ $v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $v = -10\times12\times10^{-2}\sin\left(10\times\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}\right)$ $v = -1.2m.s^{-1}$
$3) m = ?$ $m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{100}{100} = 1kg$	$4) F = ?, x = 4\times10^{-2}m$ $F = \lvert -kx \rvert = \lvert -100\times4\times10^{-2} \rvert = 4N$
$5) x_0 = ?$ $x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{1\times10}{100} = 0.1m$	$6) E_{tot} = ?$ $E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}\times100\times144\times10^{-4} = 72\times10^{-2}J$

الدرس الثاني: نواس الفتل

المسألة الأولى:

يتألّفُ نوّاس فتل من قرصٍ متجانسٍ كتلتُه $m = 2\,kg$، نصفُ قطره $r = 4\,cm$، معلّقٌ من مركزه إلى سلك فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 16\times10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$، نديرُ القرص في مستوٍ أفقيٍّ زاويةً $\theta = +\frac{\pi}{4}\,rad$ عن وضع توازنِه، ونتركُهُ دون سرعةٍ ابتدائيّةٍ في اللحظة $t = 0$.

المطلوب:

1. احسبِ الدورَ الخاصّ للنوّاس.
2. استنتج التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
3. احسبِ الطاقةَ الكامنةَ في وضع مطاله الزاويّ $\theta = \frac{\pi}{8}\,rad$، ثمّ احسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ. (عزم عطالة قرص حول محور عموديّ على مستويه ومارّ من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$)

المعطيات: $m = 2kg, r = 4\times10^{-2}m, k = 16\times10^{-3}m.N.rad^{-1}, t = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}rad$	
$1)\ T_0 = ?$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ $I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\times2\times16\times10^{-4} = 16\times10^{-4}kg.m^2$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}} = 2s$	$3)\ E_P = ?, \theta = \frac{\pi}{8}rad, E_k = ?$ $E_P = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}\times\frac{10}{64} = \frac{1}{8}\times10^{-2}J$ $E_k = E_{tot} - E_p$ $E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}\times\frac{10}{16} = \frac{1}{2}\times10^{-2}J$ $E_k = \frac{1}{2}\times10^{-2} - \frac{1}{8}\times10^{-2} = \frac{3}{8}\times10^{-2}J$
$2)\ \theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4}rad, t = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad.s^{-1}$ $\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ $\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)$	

المسألة الثانية:

ساقٌ مهملةُ الكتلةِ طولُها l، نثبّتُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّةً $125\,g$، ونعلّقُ الجملة من منتصفها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $16\times10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$ لتؤلّفَ الجملةُ نوّاس فتلٍ، نزيحُ السّاقَ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}\,rad$ وتُتركُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ لحظةَ بدء الزمن، فتهتزُّ بحركةٍ جيبيّة دورانيّة، دورُها الخاصّ $2.5\,s$

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
2. احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِها الأوّل بوضع التوازن.
3. احسبْ طولَ الساق.

المعطيات: $m_1=m_2=125\times10^{-3}kg\,,k=16\times10^{-3}m.N.rad^{-1},T_0=2.5s\,,t=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}rad$	
$1)\theta=\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$ $\theta=\theta_{max}=\frac{\pi}{3}rad\,,t=0$ ترك دون سرعة ابتدائية $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{2.5}=\frac{4\pi}{5}rad.s^{-1}$ $\theta_{max}=\theta_{max}\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$ $\theta=\frac{\pi}{3}\cos(\frac{4\pi}{5}t)$	$3)\ell=?$ $I_\Delta=I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/m_2}=2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m_1\ell^2$ $k=I_\Delta\omega_0^2$ $16\times10^{-3}=I_\Delta\frac{160}{25}$ $I_\Delta=25\times10^{-4}kg.m^2$ $25\times10^{-4}=\frac{1}{2}\times125\times10^{-3}\ell^2$ $\ell^2=\frac{1}{25}\Rightarrow\ell=0.2m$
$2)\omega=?,t=?$ $\omega=-\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$ $\theta=0\Rightarrow\cos(\frac{4\pi}{5}t)=0$ $\frac{4\pi}{5}t=\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k=0,1,2,3,\ldots$ $k=0\Rightarrow\frac{4}{5}t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{5}{8}s$ $\omega=-\frac{4\pi}{5}\times\frac{\pi}{3}\sin(\frac{4\pi}{5}\times\frac{5}{8})=-\frac{8}{3}rad.s^{-1}$	

المسألة الثالثة:

ساقٌ أفقيّةٌ متجانسةٌ طولُها $l = ab = 40\,\mathrm{cm}$ معلّقةٌ بسلك فتلٍ شاقوليّ يمرُّ من منتصفها.

a. نديرُ الساقَ في مستوٍ أفقيٍّ بزاوية $\theta = 60^\circ$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ فتهتزّ بحركة جيبيّة دورانيّة دورُها الخاصّ $T_0 = 1\,\mathrm{s}$ فإذا علمتَ أنّ عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c} = 2\times 10^{-3}\,\mathrm{kg.m^2}$

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
2. احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِها الثاني بوضع التوازن.
3. احسبْ قيمةَ التسارع الزاويّ للساق عندما تصنع زاوية (-30°) مع وضع توازنها.

b. نثبّت بالطرفين a, b كتلتين نقطيّتين $m_1 = m_2 = 75\,\mathrm{g}$ استنتجْ قيمةَ الدورِ الخاصّ الجديد للجملة المهتزّة، ثم احسب قيمةَ ثابت فتل السلك.

c. نقسّمُ سلكَ الفتل قسمين متساويين، ونعلّقُ الساقَ بعدئذٍ بنصفَي السلك معاً؛ أحدُهما من الأعلى، والآخرُ من الأسفل ومن منتصفها، ويثبّت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقوليّاً. استنتجْ قيمةَ الدورِ الخاصّ الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية). افترض $\pi^2 = 10$

المعطيات: $\ell = 4\times10^{-1} m,\ t = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} rad,\ T_0 = 1s,\ I_\Delta = 2\times10^{-3} kg.m^2$

$a)1)\ \theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad,\ t = 0$

ترك دون سرعة ابتدائية

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$

$\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t)$

$2)\ \omega = ?,\ t = ?$

$\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta = 0 \Rightarrow \cos(2\pi t) = 0$

$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k = 0,1,2,3,\ldots$

$k = 1 \Rightarrow 2t = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow t = \frac{3}{4}s$

$\omega = -2\pi\times\frac{\pi}{3}\sin(2\pi\times\frac{3}{4}) = \frac{20}{3} rad.s^{-1}$

$3)\ \alpha = ?,\ \theta = -\frac{\pi}{6} rad.s^{-1}$

$\alpha = -\omega_0^2\theta = -40\times-\frac{\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} rad.s^{-2}$

$b)\ m_1 = m_2 = 75\times10^{-3} kg,\ T_0' = ?,\ k = ?$

$$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}} = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_\Delta}}$$

$$I'_\Delta = I_\Delta + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = I_\Delta + 2m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = I_\Delta + \frac{1}{2}m_1\ell^2$$

$$I'_\Delta = 2\times10^{-3} + \frac{1}{2}\times75\times10^{-3}\times16\times10^{-2} = 8\times10^{-3} kg.m^2$$

$$T_0' = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} = 2s$$

$$k = I_\Delta\omega_0^2 = 2\times10^{-3}\times40 = 8\times10^{-2} m.N.rad^{-1}$$

$$c)\ T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1 + k_2}}$$

$$k_1 = k_2 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{\ell}{2}} = 2k$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4k}} = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2}s$$

المسألة الأولى 2022 الثانية:

ساق متجانسة طولها L كتلتها M معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي

A) ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{2} rad$ انطلاقاً من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1s$ المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام

2- احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن

3- احسب قيمة التسارع الزاوية للساق عندما تصنع زاوية $\theta = -\frac{\pi}{4} rad$ مع وضع توازنها

B) نثبت بطرفي الساق كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2 = 100g$ فيصبح الدور الخاص للجملة المهتزة $T_0' = 2s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق حول محور عمودي عليها ومار من منتصفها $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}ML^2$ وباعتبار أن $\pi^2 = 10$ استنتج قيمة كتلة الساق M

<table>
<tr><td colspan="2">ألمعطيات: $t = 0, \theta = +\frac{\pi}{2} rad, T_0 = 1s$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$B) m_1 = m_2 = 10^{-1} kg, T_0' = 2, M = ?$
$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta'}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}} = \sqrt{\frac{I_\Delta'}{I_\Delta}}$
$2 = \sqrt{\frac{I_\Delta'}{I_\Delta}} \Rightarrow 4 = \frac{I_\Delta'}{I_\Delta} \Rightarrow 4I_\Delta = I_\Delta'$
$4I_\Delta = I_\Delta + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$
$3I_\Delta = 2I_{\Delta/m_1}$
$3 \times \frac{1}{12} ML^2 = 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$
$\frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{2}m_1 L^2$
$M = 2m_1 = 2 \times 10^{-1} kg$</td>
<td>$A)1) \theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$
$\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{2} rad, t = 0$
ترك دون سرعة ابتدائية
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$
$\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}\cos(2\pi t)$</td></tr>
<tr><td>$2) \omega = ?, t = ?$
$\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$
$\theta = 0 \Rightarrow \cos(2\pi t) = 0$
$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k; k = 0,1,2,3,...$
$k = 1 \Rightarrow 2t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}s$
$\omega = -2\pi \times \frac{\pi}{2}\sin(2\pi \times \frac{1}{4}) = -10 rad.s^{-1}$</td></tr>
<tr><td>$3) \alpha = ?, \theta = -\frac{\pi}{4} rad.s^{-1}$
$\alpha = -\omega_0^2\theta = -40 \times -\frac{\pi}{4} = 10\pi rad.s^{-2}$</td></tr>
</table>

الدرس الثالث: النواس الثقلي

المسألة الأولى:

يتألّفُ نوّاسٌ ثقليٌّ مركّبٌ من ساقٍ شاقوليّةٍ، متجانسةٍ، كتلتُها $m = 0.5\ Kg$، طولُها $1.5\ m$، يمكنُها أنْ تنوسَ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من طرفها العلويّ، ومثبّت عليها كتلةٌ نقطيّة $m' = 0.5\ kg$ على بُعد $1\ m$ من هذا الطرف، كما في الشكل المجاور

1. احسبْ دورَ هذا النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.
2. نزيحُ جملة النوّاس عن موضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{\pi}{2}\ rad$، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة. احسبِ الطاقةَ الحركيّة للنوّاس لحظة مروره بالشاقول، ثمّ احسب السرعة الخطّيّة للكتلة النقطيّة m' عندئذٍ.
(عزم عطالة ساق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m L^2$)

المعطيات: $m = \frac{1}{2}kg, L = \frac{3}{2}m, m' = \frac{1}{2}kg, r' = 1m$

$1)\ T_0' = ?$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{(m+m')gd}}$$

$$I_\Delta = I_{m/\Delta} + I_{\text{ساق}\Delta}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m'r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}mL^2 + m'r'^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}kg.m^2$$

$$d = \frac{mr + m'r'}{m+m'} = \frac{m\frac{L}{2} + m'}{m+m'} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1} = \frac{7}{8}m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times 10\times\frac{7}{8}}} = 2s$$

$2)\ \theta_{max} = \frac{\pi}{2}rad, E_k = ?, v_{m'} = ?$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{R}} = 0$: نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_k = (m+m')gh = (m+m')gd(1-\cos\theta_{max})$$

$$E_k = 1\times 10\times\frac{7}{8}(1-0) = \frac{70}{8} = 8.75J$$

$$v_{m'} = r'\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\times\frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}rad.s^{-1}$$

$$v_{m'} = 1\times 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}m.s^{-1}$$

المسألة الثانية:

خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40\,\text{cm}$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 100\,\text{g}$

المطلوب:

1. يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{\max}$ ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2\,\text{m.s}^{-1}$ استنتج قيمة الزاوية $\theta_{\max}$.
2. استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمته.

المعطيات: $\ell = 4\times10^{-1}m, m = 10^{-1}kg$	
$1) v = 2m.s^{-1}, \theta_{\max} = ?$ نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الأول: $\theta_1 = \theta_{\max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$ $\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$ $E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية $W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh = 2g\ell(1-\cos\theta_{\max})$ $\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{v^2}{2g\ell} = 1 - \frac{4}{2\times10\times4\times10^{-1}} = \frac{1}{2}$ $\theta_{\max} = \frac{\pi}{3}rad$	$2) T = ?$ القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{W}$ ، قوة توتر الخيط $\vec{T}$ نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي: $\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$ بالإسقاط على محور الناظم: $-W + T = ma_c \Rightarrow T = ma_c + W$ $T = m\frac{v^2}{\ell} + mg = m\left(\frac{v^2}{\ell} + g\right)$ $T = 10^{-1}\left(\frac{4}{4\times10^{-1}} + 10\right) = 10^{-1}(20) = 2N$

المسألة الثالثة:

نعلّقُ كرةً صغيرةً نعدُّها نقطةً ماديّةً، كتلتُها $m = 0.5\,\text{kg}$ بخيطٍ مهملِ الكتلة، لا يمتطُّ، طولُه $l = 1.6\,\text{m}$، لتؤلّفَ نوّاساً ثقليّاً بسيطاً، ثمّ نزيحُ الكرة إلى مستوٍ أفقيّ يرتفع $h = 0.8\,\text{m}$ عن المستوي الأفقيّ المارّ منها وهي في موضع توازنها الشاقوليّ، ليصنعَ خيطُ النوّاس مع الشاقول زاوية $\theta_{\max}$ ، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة،

المطلوب:

1. استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثمّ احسبْ قيمتها، موضّحاً بالرسم.
2. استنتجْ قيمةَ الزاوية $\theta_{\max}$ ، ثمّ احسبْ قيمتها.
3. احسبْ دورَ هذا النوّاس.
4. استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لشدّة قوّة توتّر الخيط عند المرور بالشاقول، ثمّ احسب قيمتها.

المعطيات: $m = 0.5kg\,,\ell = 1.6m\,,h = 0.8m$

1) $v = ?$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{\max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times0.8} = \sqrt{16} = 4m.s^{-1}$$

3) $T_0' = ?$

$$T_0' = T_0\left(1+\frac{\theta_{\max}^2}{16}\right)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{16\times10^{-2}} = 8\pi\times10^{-1} = 2.5s$$

$$T_0' = 2.5\left(1+\frac{\frac{10}{9}}{16}\right) = 2.5\left(1+\frac{10}{144}\right) = 2.5(1+0.07)$$

$$T_0' = 2.675s$$

1) $\theta_{\max} = ?$

$$h = \ell(1-\cos\theta_{\max})$$

$$\cos\theta_{\max} = 1-\frac{h}{\ell} = 1-\frac{0.8}{1.6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{3}rad$$

2) $T = ?$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الناظم:

$$-W + T = ma_c \Rightarrow T = ma_c + W$$

$$T = m\frac{v^2}{\ell} + mg = m\left(\frac{v^2}{\ell}+g\right)$$

$$T = 5\times10^{-1}\left(\frac{16}{16\times10^{-1}}+10\right) = 5\times10^{-1}(20) = 10N$$

المسألة الرابعة:

ساقٌ شاقوليّة، مهملةُ الكتلة، طولُها $L = 1\,m$، نثبّت في منتصفها كتلةً نقطيّة $m_1 = 0.4\,kg$، ونثبّتُ في طرفها السفليّ كتلةً نقطيّة $m_2 = 0.2\,kg$، لتؤلّف الجملةُ نوّاساً ثقليّاً مركّباً يمكنُه أنْ ينوسَ في مستوٍ شاقوليٍّ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من الطرف العلويّ للساق.

المطلوب:

1. احسبْ دورَ نوساتِها صغيرةِ السّعة.
2. نزيحُ الجملةَ عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\,rad$، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة، فتكونُ السرعةُ الخطيّةُ لمركز عطالة جملة النوّاس لحظةَ مرورها بالشاقول، $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$ **المطلوب:**

a. احسبِ السرعةَ الخطيّةَ للكتلة النقطيّة m_2 لحظة المرور بالشاقول.

b. استنتجْ قيمةَ الزاوية θ_{max}.

المعطيات:

$$L = 1m ,m_1 = 0.4kg ,m_2 = 0.2kg$$

$$1)\ T_0 = ?$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.2 = 0.6kg$$

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.4\frac{L}{2} + 0.2L}{0.4 + 0.2}$$

$$d = \frac{0.4\times\frac{1}{2} + 0.2}{0.6} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}m$$

$$I_\Delta = I_{m_1/\Delta} + I_{m_2/\Delta} = m_1\frac{L^2}{4} + m_2 L^2$$

$$I_\Delta = 0.4\times\frac{1}{4} + 0.2 = 0.3kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6\times10\times\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\frac{3}{6\times\frac{2}{3}}} = \sqrt{3}s$$

$$2)\ v_c = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}m.s^{-1},\ a)\ v_{m_2} = ?$$

$$v_{m_2} = L\omega$$

$$v_c = d\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{d} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}rad.s^{-1}$$

$$v_{m_2} = 1\times\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}m.s^{-1}$$

$$b)\ \theta_{max} = ?$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$$

ترك دون سرعة ابتدائية : $E_{k_1} = 0$

لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل : $W_{\vec{R}} = 0$

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = mgh \Rightarrow I_\Delta\omega^2 = 2mgd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_\Delta\omega^2}{2mgd} = 1 - \frac{0.3\times\frac{40}{3}}{2\times0.6\times10\times\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

المسألة الخامسة:

يتألفُ نوّاسٌ ثقليٌّ من ساقٍ شاقوليّةٍ، مهملةِ الكتلة طولُها L، تحملُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّة m'، نعلّقُ الجملة بمحور دوران أفقيّ يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلويّ، نزيحُ الجملة عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{1}{2\pi}$ rad، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$، فتهتزّ بدور خاصّ $T_0 = 2.5\,s$.

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ لحركة هذا النوّاس انطلاقاً من شكله العامّ.
2. استنتجْ بالرموز العلاقة المحدّدة لطول الساق، ثمّ احسب قيمته.
3. احسبْ قيمة السرعة الزاويّة العُظمى للحركة (طويلة).
4. لنفرضْ أنّه في إحدى النّوْسات انفصلتِ الكتلةُ السفليّةُ عن الساق، استنتج الدورَ الخاصَّ الجديد للجملة في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

المعطيات: $t = 0, \theta = \frac{1}{2\pi} rad, T_0 = 2.5s$

$$1)\ \theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\theta_{max} = \theta = \frac{1}{2\pi} rad, t = 0$$

ترك دون سرعة ابتدائية

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad.s^{-1}$$

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

$$2)\ L = ?$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$m = 2m'$$

$$d = \frac{-m'\frac{L}{4} + m'\frac{3L}{4}}{2m'} = \frac{L}{4}$$

$$I_\Delta = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = m'\frac{L^2}{16} + m'\frac{9L^2}{16} = \frac{5}{8}m'L^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}m'L^2}{2m'g\frac{L}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{5L}{4g}$$

$$L = \frac{T_0^2 g}{5\pi^2} = \frac{625\times10^{-2}\times10}{5\times10} = 1.25m$$

$$3)\ \omega_{max} = ?$$

$$\omega_{max} = \omega_0\theta_{max} = \frac{4\pi}{5}\times\frac{1}{2\pi} = \frac{2}{5} = 0.4 rad.s^{-1}$$

$$4)\ T_0 = ?$$

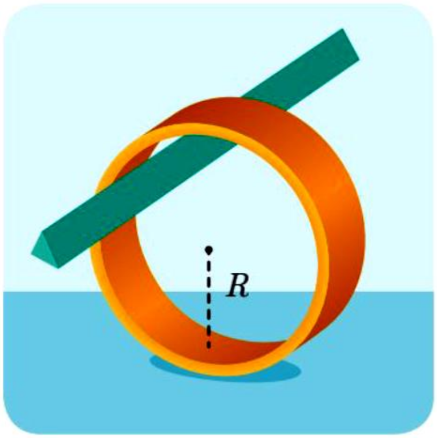
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$m = m', d = \frac{L}{4}$$

$$I_\Delta = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}m'L^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{16}m'L^2}{m'g\frac{L}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.25}{4\times10}} = 0.5\sqrt{5}s$$

حل المسائل العامة: نواس ثقلي مركب:



المسألةُ (4):

نعلّقُ حلقةً معدِنيّةً نصفُ قطرها $R = 12.5\,\text{cm}$ ، بمحور أفقيّ ثابت، كما هـو موضّحٌ بالشكل.

المطلوب:

1. استنتج عبارة الدور الخاصّ لاهتزاز هذا النوّاس من أجل السّعات الزاوية الصغيرة إذا علمت أنّ عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها، ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = M\,R^2$ ثم احسبه.
2. احسبْ طول النوّاس البسيط المواقت.

المعطيات: $R = 0.125m \,, I_{\Delta/c} = MR^2$
$1)\ T_0 = ?$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{Mgd}}$ $d = R$ $I_\Delta = I_{\Delta/c} + Md^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\times 0.125}{10}} = 1s$
$2)\ \ell = ?$ $T_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}}$ $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 1 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{10}} = 1$ $2\sqrt{\ell} = 1$ $4\ell = 1$ $\ell = \dfrac{1}{4}m$

المسألة (5):

يتألّف نوّاس ثقليٌّ من ساق شاقوليّة مهملة الكتلة طولها $1\,\text{m}$ تحمل في نهايتها العلويّة كتلة نقطيّة $m_1 = 0.2\,\text{kg}$ وتحمل في نهايتها السفليّة كتلة نقطيّة $m_2 = 0.6\,\text{kg}$ تهتزُّ هذه السّاق حول محور أفقيّ مارّ من منتصفها

المطلوب:

1. احسب دور النوّاس في حالة السّعات الصّغيرة.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس.
3. احسب دور النوّاس لو ناس بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\,\text{rad}$.
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\theta_{max} = 60^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائيّة.
   a. استنتج بالرموز علاقة السّرعة الزاوية لجملة النوّاس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثمَّ احسب قيمتها عندئذٍ.
   b. احسب السُّرعة الخطّيّة لمركز عطالة جملة النوّاس لحظة المرور بالشّاقول.
5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2\,\text{kg}$ ونعلّق السّاق من منتصفها بسلك فتل شاقوليّ لنشكّل بذلك نوّاساً للفتل، نزيح السّاق الأفقيّة عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائيّة فتهتزُّ بدور $T_0 = 2\pi\,\text{s}$. احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.
6. احسب قيمة التّسارع الزاوي لنوّاس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5\,\text{rad}$.

المعطيات: $\ell = 1m, m_1 = 0.2kg, m_2 = 0.6kg$

$1)\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

$m = m_1 + m_2 = 0.2 + 0.6 = 0.8kg$

$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{\ell}{2} + m_2\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2}$

$d = \frac{-0.2\times\frac{1}{2} + 0.4\times\frac{1}{2}}{0.6} = \frac{1}{4}m$

$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\frac{\ell^2}{4}$

$I_\Delta = 0.2\times\frac{1}{4} + 0.6\times\frac{1}{4} = 0.2kg.m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8\times 10\times\frac{1}{4}}} = 2s$

$2)\ T_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}}$

$2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} = 2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{10}} = 2$

$\ell' = 1m$

$3)\ T_0' = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

$T_0' = 2\left(1 + \frac{0.16}{16}\right) = 2(1 + 0.01)$

$T_0' = 2(1.01) = 2.02s$

$4)\ \theta_{max} = 60^\circ, a)\ \omega = ?, b)\ v_c = ?$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to 2)}$

$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$

ترك دون سرعة ابتدائية : $E_{k_1} = 0$

لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل : $W_{\vec{R}} = 0$

$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = mgh$

$I_\Delta\omega^2 = 2mgd(1 - \cos\theta_{max})$

$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$

$\omega = \sqrt{\frac{2\times 0.8\times 10\times\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})}{0.2}}$

$\omega = \sqrt{10} = \pi rad.s^{-1}$

$b)\ v_c = d\,\omega = \frac{1}{4}\times\pi = \frac{\pi}{4}m.s^{-1}$

$5)\ m_1 = m_2 = 0.2kg, T_0 = 2\pi s. k = ?$

$k = I_\Delta\,\omega_0^2$

$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$I_\Delta = 2m_1\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{2}m_1\ell^2$

$I_\Delta = \frac{1}{2}\times 0.2\times 1 = 0.1kg.m^2$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1rad.s^{-1}$

$k = 0.1\times 1 = 0.1m.N.rad^{-1}$

$6)\ \alpha = ?, \theta = 0.5rad$

$\alpha = -\omega_0^2\theta = -1\times 0.5$

$\alpha = -0.5rad.s^{-2}$

المسألة (6):

يتألّف نوّاس ثقليّ مركّب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r=\frac{2}{3}\text{m}$ يمكن أن يهتزّ في مستوٍ شاقوليّ حول محور أفقيّ مارّ من نقطة على محيطه.

المطلوب:

1. انطلاقاً من العلاقة العامّة لدور النوّاس الثقليّ المركّب، استنتج العلاقة المحدّدة لدوره الخاصّ في حالة السّعات الصّغيرة، ثمّ احسب قيمة هذا الدّور.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس المركّب.
3. نثبّت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطيّة m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتزّ حول محور أفقيّ مارّ من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة من أجل السّعات الزاوية الصّغيرة.
4. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقوليّ بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائيّة فتكون السرعة الخطيّة للكتلة النقطيّة m' لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}\text{m.s}^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max} (إذا علمت أنّ: $\theta_{max} > 0.24\,\text{rad}$, $g=10\text{m.s}^{-2}$, $\pi^2=10$ عزم عطالة القرص حول محور مارّ من مركزه وعموديّ على مستويه $I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}m\,r^2$)

المعطيات: $r=\frac{2}{3}m\,,\,I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}mr^2$

$1)\ T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

$d=r$

$I_\Delta=I_{\Delta/c}+md^2=\frac{1}{2}mr^2+mr^2$

$I_\Delta=\frac{3}{2}mr^2$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mgr}}=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times10}}=2s$

$2)\ T_{0\,\text{بسيط}}=T_{0\,\text{مركب}}$

$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=2\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}=2$

$\ell=1m$

$1)\ T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{(m+m')gd}}$

$d=\frac{m(0)+m'r'}{m+m'}=\frac{mr}{2m}=\frac{r}{2}$

$I_\Delta=I_{\Delta/\text{قرص}}+I_{\Delta/m'}$

$I=\frac{1}{2}mr^2+m'r'^2$

$I_\Delta=\frac{3}{2}mr^2$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{2mg\frac{r}{2}}}$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times10}}=2s$

$4)\theta_{max}=?,\ v_{m'}=\frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1=\theta_{max}$ الثاني: $\theta_2=0$

$\Delta E_k=\sum W_{\vec{F}(1\to2)}$

$E_{k_2}-E_{k_1}=W_{\vec{W}}+W_{\vec{R}}$

ترك دون سرعة ابتدائية : $E_{k_1}=0$

لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل : $W_{\vec{R}}=0$

$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2=(m+m')gh$

$I_\Delta\omega^2=2(m+m')gd\,(1-\cos\theta_{max})$

$\cos\theta_{max}=1-\frac{I_\Delta\omega^2}{2(m+m')gd}=1-\frac{\frac{3}{2}mr^2\omega^2}{4mg\frac{r}{2}}$

$\cos\theta_{max}=1-\frac{3r\,\omega^2}{4g}$

$v_{m'}=r\,\omega\Rightarrow\omega=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2}{3}}=\pi rad.s^{-1}$

$\cos\theta_{max}=1-\frac{3\times\frac{2}{3}\times10}{4\times10}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_{max}=60^\circ$

المسألة الأولى: 2020 الأولى:

يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 300g$ معلقة بخيط خفيف لا يمتط طوله $L = 1.44m$ المطلوب:

1- احسب الدور الخاص لهذا النواس عندما يهتز بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4rad$

2- نزيح النواس عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{max} \rangle 0.24rad$ ويترك دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية لكرة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{12}{\pi} m.s^{-1}$ احسب قيمة θ_{max}. 3- استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بالشاقول ثم احسب قيمتها

المعطيات: $\ell = 144\times10^{-2} m, m = 3\times10^{-1} kg$

$1)\ T'_0 = ?$

$$T'_0 = T_0\left(1+\frac{\theta^2_{max}}{16}\right)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{144\times10^{-2}}{10}} = 2\times12\times10^{-1} = 2.4s$$

$$T'_0 = 2.4\left(1+\frac{0.16}{16}\right) = 2.4(1+0.01) = 2.4(1.01) = 2.424s$$

$1)\ v = \frac{12}{\pi} m.s^{-1}, \theta_{max} = ?$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to2)} \Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh = 2gL(1-\cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gL} = 1 - \frac{\frac{144}{10}}{2\times10\times144\times10^{-2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

$2)\ T = ?$

القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{W}$ ، قوة توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الناظم:

$$-W + T = ma_c \Rightarrow T = ma_c + W$$

$$T = m\frac{v^2}{L} + mg = m\left(\frac{v^2}{L} + g\right)$$

$$T = 3\times10^{-1}\left(\frac{\frac{144}{10}}{144\times10^{-2}} + 10\right)$$

$$T = 3\times10^{-1}(20) = 6N$$

المسألة الأولى: 2021 الثانية:

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r=\frac{1}{6}m$ يمكن أن يهتز في مستو شاقولي حول محور أفقي ثابت مار بنقطة من محيطه المطلوب:

1- انطلاقا من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب في حالة السعات الزاوية الصغيرة استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص بدلالة r ثم احسب قيمة هذا الدور

2- احسب طول النواس الثقلي البسيط الموافق لهذا النواس

3- نزيح النواس عن الشاقول بزاوية $\theta_{max} \rangle 0.24rad$ ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة النواس عند المرور بالشاقول $v=\frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$ استنتج قيمة السعة الزاوية θ_{max} علما أن:

(عزم عطالة القرص حول محور يمر بمركز عطالته وعمودي على مستويه $I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}mr^2$)

<table>
<tr><td colspan="2">المعطيات: $r=\frac{1}{6}m, I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}mr^2$</td></tr>
<tr>
<td>

$3)\theta_{max}=?, v_c=\frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1=\theta_{max}$ الثاني: $\theta_2=0$

$\Delta E_k=\sum W_{\vec{F}(1\to2)}$

$E_{k_2}-E_{k_1}=W_{\vec{W}}+W_{\vec{R}}$

$E_{k_1}=0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{R}}=0$: لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$\frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2=mgh$

$I_{\Delta}\omega^2=2mgd(1-\cos\theta_{max})$

$\cos\theta_{max}=1-\frac{I_{\Delta}\omega^2}{2mgd}=1-\frac{\frac{3}{2}mr^2\omega^2}{2mgr}=1-\frac{3r\omega^2}{4g}$

$v_c=r\omega \Rightarrow \omega=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{1}{6}}=2\pi rad.s^{-1}$

$\cos\theta_{max}=1-\frac{3\times\frac{1}{6}\times40}{4\times10}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_{max}=60^\circ$

</td>
<td>

$1)T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$

$d=r$

$I_{\Delta}=I_{\Delta/c}+md^2=\frac{1}{2}mr^2+mr^2$

$I_{\Delta}=\frac{3}{2}mr^2$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mgr}}=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{1}{6}}{2\times10}}=1s$

<hr>

$2)T_{0\text{بسيط}}=T_{0\text{مركب}}$

$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=1\Rightarrow2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}=1$

$\ell=\frac{1}{4}m$

</td>
</tr>
</table>

المسألة الأولى: 2022 الأولى:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها $\ell = 1m$ تحمل في نهايتها العلوية كتلة نقطية $m_1 = 0.3kg$ وتحمل في نهايتها السفلية كتلة نقطية $m_2 = 0.9kg$ نجعلها تهتز حول محور أفقي مار من منتصفها

المطلوب:

1. احسب دور النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة
2. احسب طول النواس الثقلي البسيط المواقت لهذا النواس
3. نزيح النواس عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = 60^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائية المطلوب:

a) استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق ثم احسب قيمتها عندئذ

b) احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة مرورها بالشاقول

المعطيات: $\ell = 1m, m_1 = 0.3kg, m_2 = 0.9kg$

$$1) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$m = m_1 + m_2 = 0.3 + 0.9 = 1g2$$

$$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\frac{\ell}{2} + m_2\frac{\ell}{2}}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{-0.3\times\frac{1}{2} + 0.9\times\frac{1}{2}}{1.2} = \frac{1}{4}m$$

$$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2} = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\frac{\ell^2}{4}$$

$$I_\Delta = 0.3\times\frac{1}{4} + 0.9\times\frac{1}{4} = 0.3kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{1.2\times10\times\frac{1}{4}}} = 2s$$

$$2) T_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} = 2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{10}} = 2$$

$$\ell' = 1m$$

$$3) \theta_{max} = 60^\circ, a) \omega = ?, b) v_{m_2} = ?$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$ الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}(1\to2)}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$$

$E_{k_1} = 0$: ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{R}} = 0$: لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = mgh$$

$$I_\Delta\omega^2 = 2mgd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\times1.2\times10\times\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})}{0.3}}$$

$$\omega = \sqrt{10} = \pi rad.s^{-1}$$

$$b) v_{m_2} = \frac{\ell}{2}\omega = \frac{1}{2}\times\pi = \frac{\pi}{2}m.s^{-1}$$