الاستاذ: وسام علي.
موبايل: ٠٩٤١٤٨٣٩٤١ - ٠٩٣٦٤٥٣٠٩٠

1

الصف: ....
البحث: ....
التاريخ: ....

1 لدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

والمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$w_n = 5^n \cdot u_n$$

1) أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واكتب v_n بدلالة n

2) أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية واكتب w_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n.

2 لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على N بالتدريج وفق:

$$u_0 = 4 \ , \ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3)$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$v_n = u_n - 3$$

1) أثبت أنّ: $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

2) عبّر عن v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n

3) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة تماماً على N.

3 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases}$$

1) أثبت أنّ التابع $x \to \frac{1+3x}{3+x}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $0 \leq u_n < 1$ أياً يكن العدد الطبيعي n.

2) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم استنتج أنّها متقاربة واحسب نهايتها.

4 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{7}{3}$$

أياً يكن $n \in N^*$

1) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ متتالية هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n

2) استنتج أنّ $u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$ أياً يكن $n \in N^*$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة

$$u_n = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1) أثبت أنّ العدد $\left(\frac{5}{2}\right)$ راجح على المتتالية.

2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

6 لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_0 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$$

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً.

2) أثبت بالتدريج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

7 لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{3^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة.

2) احسب u_n بدلالة n.

3) استنتج عنصراً راجحاً على هذه المتتالية.

4) استنتج مما سبق أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة

8 بفرض $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{n(n+1)}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

1) احسب S_1, S_2, S_3 ، أعبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

2) أثبت بالتدريج $S_n = \frac{n}{n+1}$ وذلك أياً كانت $n \in \mathbb{N}$

9 أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

أياً كان العدد الطبيعي n فإنّ $3^{2n} - 1$ مضاعف للعدد 4

10 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \quad , \quad u_1 = \frac{5}{2}$$

1) أثبت بالتدريج أنّ $2 < u_n \leq 3$

2) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

3) أثبت أنّها متقاربة واحسب نهايتها.

11 أدرس تقارب كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

$$v_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n - 1}$$

12 في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ أثبت أن المتتالية متناقصة

13

الأستاذ : وسام علي .
موبايل : ٠٩٤١٤٨٣٩٤١ - ٠٩٣٦٤٥٣٠٩٠

3

13 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$$u_0=0 \ , \ u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

① أثبت أنّ $\frac{2x+1}{x+2}$ متزايد تماماً ثم استنتج أنّ $0\leq u_n<1$ أياً كان العدد n

② أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

③ لتكن المتتالية v_n المعرفة عند كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

a) أثبت أنّ v_n هندسية

b) عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

14 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً :

$$u_0=0 \ , \ u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

① أثبت بالتدريج أنّ $0\leq u_n\leq 1$

② أثبت أنّ u_n متزايدة تماماً ثم احسب نهايتها وبيّن تقاربها

15 $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق $u_1=\frac{1}{2}$

$u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$ عند كل $n\geq 1$

① أثبت بالتدريج على العدد n ، أنّ $u_n>0$ مهما كان العدد الطبيعي $n\geq 1$ وبالاستفادة من النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ومن ثم استنتج أنها متقاربة .

② نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $v_n=\frac{u_n}{n}$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعيّن أساسها واستنتج عبارة v_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

16 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق :

$$u_0=4 \ , \ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}$$

① احسب u_1 ، u_2

② لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة عند كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=u_n-3$

a) أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

b) عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

③ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

17) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{4^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1) أثبت بالتدريج أنه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ كان $n \leq 2^n$

2) استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

---

18) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتين

---

19) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق :

$u_{n+1} = u_n + 2$ ، $u_0 = 1$

عند كل $n \geq 0$

1) بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

2) نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = e^{-u_n}$: أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية عيّن أساسها واستنتج عبارة v_n بدلالة n

3) استنتج قيمة $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ، حيث

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

---

20) أثبت بالتدريج أنه أياً كان العدد الطبيعي n فإن $10^n + 2$ مضاعف للعدد 3

---

21) a, b, c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها q كما نعلم أن $4a, 3b, 2c$ ثلاثة حدود من متوالية حسابية احسب q