

الفصل ٢

العلاقات و الدوال الأسية
و اللوغاريتمية

المحتوي

١٦



١٥



١٤



١٣



١٢



١١



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدّد مجالها، ومداهها، ثم استعمل تمثيلها البياني لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:

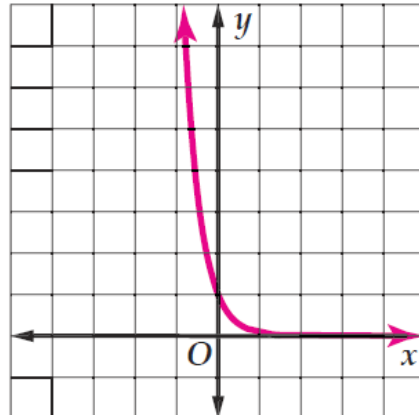
$$\left(\frac{1}{12}\right)^{0.5}, y = \left(\frac{1}{12}\right)^x \quad (2)$$

1؛ المجال مجموعة الأعداد

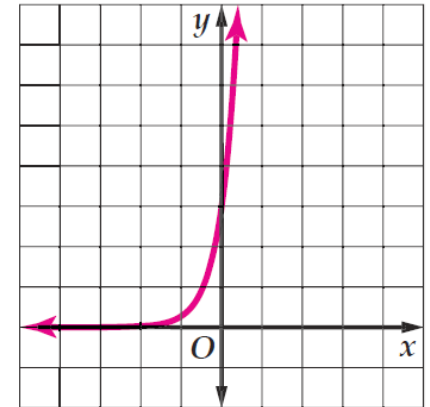
الحقيقية (R)

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$$\left(\frac{1}{12}\right)^{0.5} \approx 0.3$$



$$3(11)^{-0.2}, y = 3.11^x \quad (1)$$



3؛ المجال مجموعة الأعداد

الحقيقية (R)

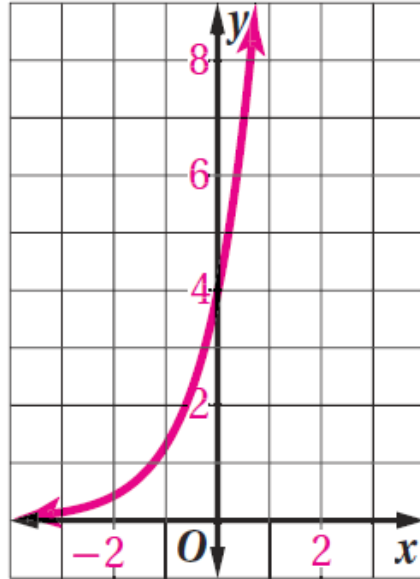
المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$$3(11)^{-0.2} \approx 1.9$$



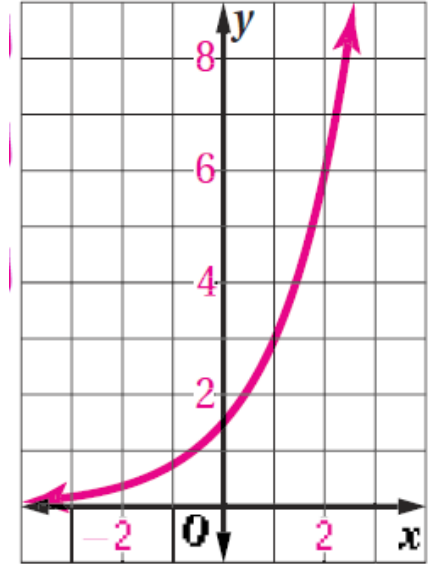
مثّل كل دالة مما يأتي بيانًا، وحدّد مجالها، ومداهها.

$$y = 4(3)^x \quad (4)$$



المجال مجموعة
الأعداد الحقيقية (R)
المدى هو (R⁺)

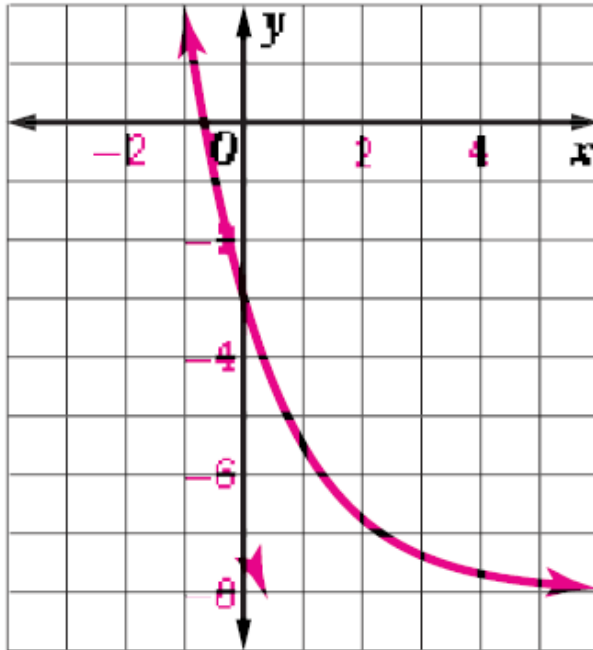
$$y = 1.5(2)^x \quad (3)$$



المجال مجموعة
الأعداد الحقيقية (R)
المدى هو (R⁺)



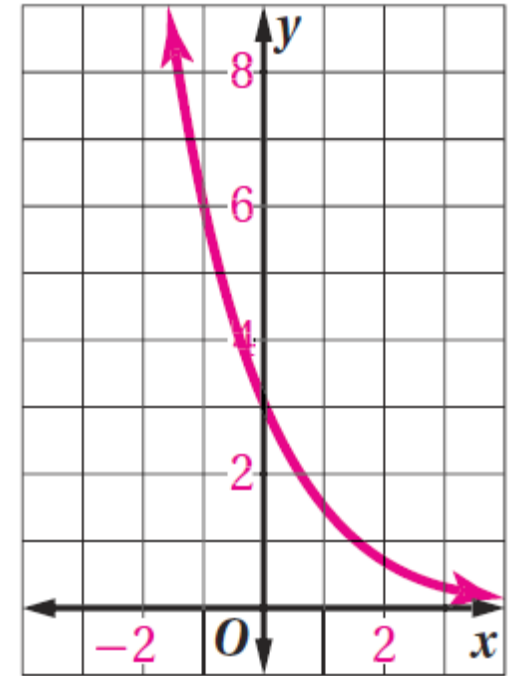
$$y = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 \quad (6)$$



المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

$$\text{المدى} = \{y \mid y > -8\}$$

$$y = 3(0.5)^x \quad (5)$$



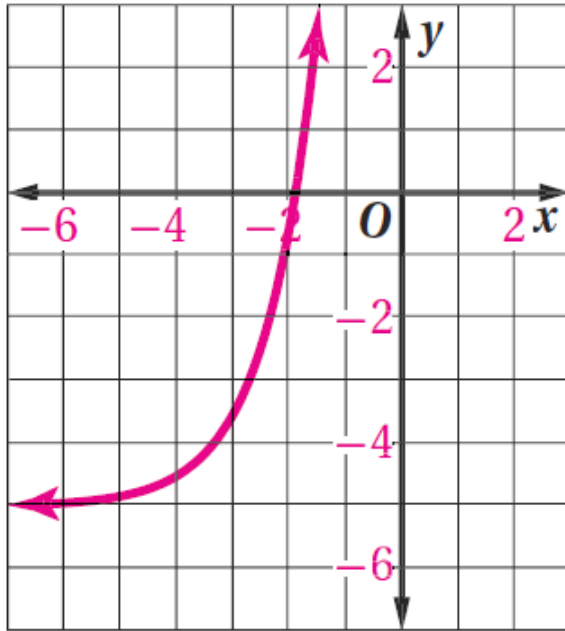
المجال مجموعة

الأعداد الحقيقية (R)

المدى هو (R⁺)



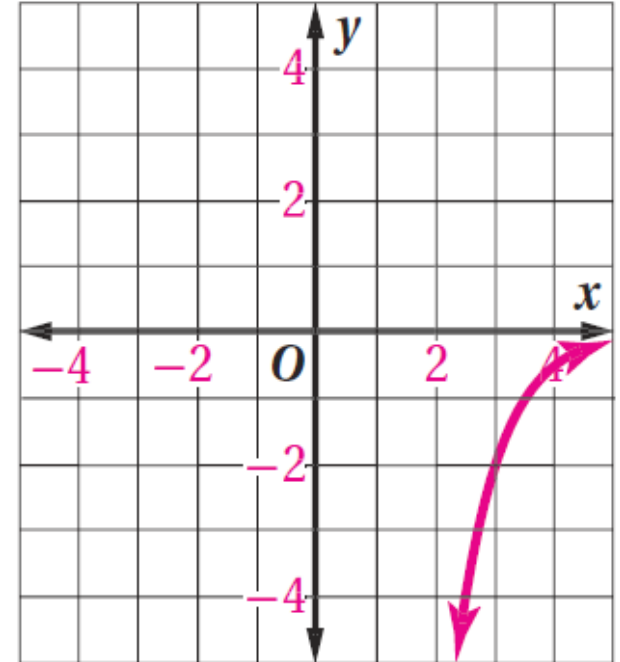
$$y = \frac{1}{2} (3)^{x+4} - 5 \quad (8)$$



المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

$$\text{المدى} = \{y \mid y > -5\}$$

$$y = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} \quad (7)$$



المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

$$\text{المدى} = \{y \mid y < 0\}$$



9) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يومياً.

(a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم. $y = 12000 (2)^x$

(b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟ **768000 خلية**

10) جامعات: بلغ عدد طلاب السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ، ويُتوقع زيادة العدد بنسبة 5% سنوياً. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلاب السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 1429 هـ.

$$y = 4000 (1.05)^t$$



حُل كل معادلة مما يأتي:

$$x = \frac{4}{5} \quad \left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2} \quad (2)$$

$$x = 22 \quad 4^{x+35} = 64^{x-3} \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1} \quad (4)$$

$$x = -60 \quad 3^{x-4} = 9^{x+28} \quad (3)$$

$$x = 0 \quad 3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \quad (6)$$

$$x = -\frac{1}{13} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1} \quad (5)$$

$$x = 7 \quad 10^{2x+7} = 1000^x \quad (8)$$

$$x = -\frac{10}{7} \quad 400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (7)$$



اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

(11) $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$

$$y = 0.75(7)^x$$

(10) $(0, 8), (4, 2048)$

$$y = 8(4)^x$$

(9) $(0, 5), (4, 3125)$

$$y = 5(5)^x$$

(14) $(0, 0.7), (\frac{1}{2}, 3.5)$

$$y = 0.7(25)^x$$

(13) $(0, 15), (2, \frac{15}{16})$

$$y = 15\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

(12) $(0, -0.2), (-3, -3.125)$

$$y = -0.2(0.4)^x$$



حُلّ كل متباينة مما يأتي:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq 64^{x-1} \quad (17)$$

$$x \geq \frac{11}{9}$$

$$10^{2x+7} \geq 1000^x \quad (16)$$

$$x \leq 7$$

$$400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (15)$$

$$x > -\frac{10}{7}$$

$$128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x} \quad (20)$$

$$x < -\frac{7}{9}$$

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \leq 216^{x-3} \quad (19)$$

$$x \geq -\frac{7}{5}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5} \quad (18)$$

$$x > \frac{8}{11}$$

(21) علوم: إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t ، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العيتين؟

$$t = 38$$



اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

$$3^{-4} = \frac{1}{81}$$

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad (3)$$

$$2^6 = 64 \quad \log_2 64 = 6 \quad (2)$$

$$6^3 = 216 \quad \log_6 216 = 3 \quad (1)$$

$$\log_{32} 8 = \frac{3}{5} \quad (6)$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\log_{10} 0.00001 = -5 \quad (4)$$

$$32^{\frac{3}{5}} = 8$$

$$25^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$10^{-5} = 0.00001$$



اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$$\log_3 81 = 4 \quad 3^4 = 81 \quad (9) \quad \log_7 1 = 0 \quad 7^0 = 1 \quad (8) \quad \log_5 125 = 3 \quad 5^3 = 125 \quad (7)$$

$$\log_{7776} 6 = \frac{1}{5} \quad 7776^{\frac{1}{5}} = 6 \quad (12) \quad \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3 \quad \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad (11) \quad \log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad 3^{-4} = \frac{1}{81} \quad (10)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

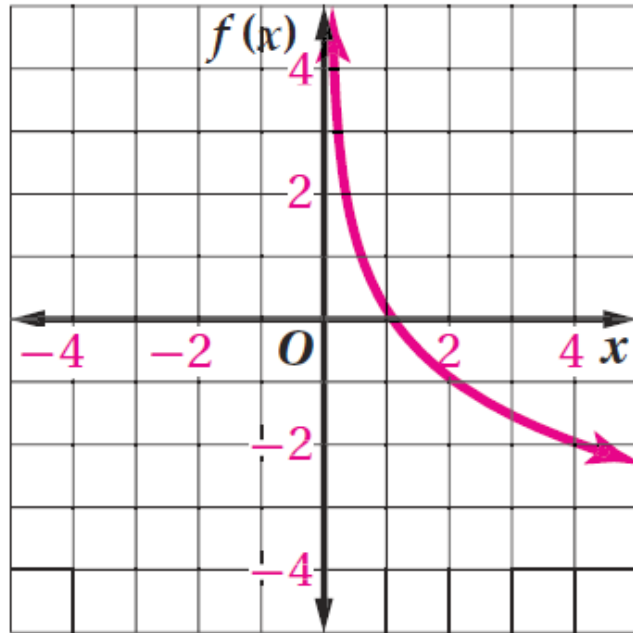
$$-3 \quad \log_{\frac{1}{3}} 27 \quad (16) \quad -4 \quad \log_2 \frac{1}{16} \quad (15) \quad -4 \quad \log_{10} 0.0001 \quad (14) \quad 4 \quad \log_3 81 \quad (13)$$

$$4 \quad \log_6 6^4 \quad (20) \quad -2 \quad \log_7 \frac{1}{49} \quad (19) \quad \frac{2}{3} \quad \log_8 4 \quad (18) \quad 0 \quad \log_9 1 \quad (17)$$

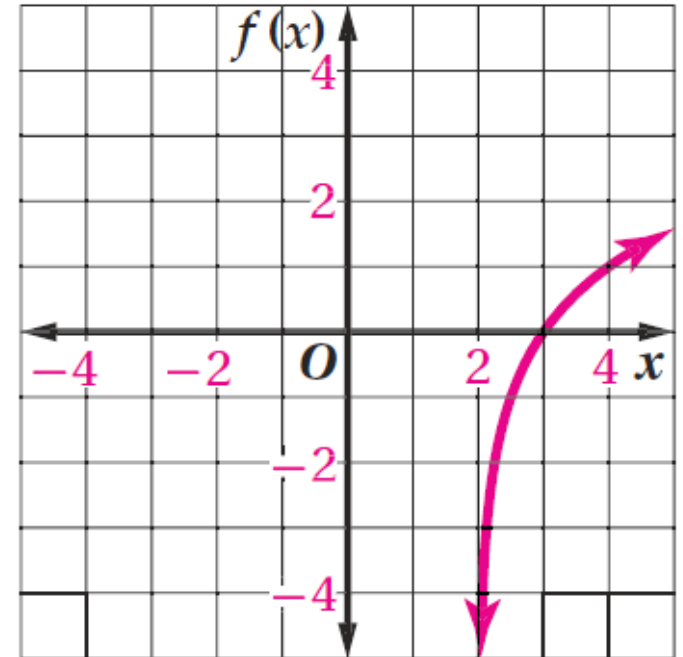


مثّل كل دالة مما يأتي بيانًا:

$$f(x) = -2 \log_4 x \quad (22)$$



$$f(x) = \log_2(x - 2) \quad (21)$$



(23) صوت: تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوت شدته 120 dB؟
 10^{12}

(24) استثمار: استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 4%، وتُضاف الأرباح سنوياً إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [100000(1 + 0.04)^5]$ ، فاكتب المعادلة على الصورة الأسية.

$$A = 100000(1 + 0.04)^5$$



خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ، $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ لتقريب قيمة كلِّ مما يأتي:

$$1.3980 \quad \log_{10} 25 \quad (2)$$

$$1.5441 \quad \log_{10} 35 \quad (1)$$

$$-0.1461 \quad \log_{10} \frac{5}{7} \quad (4)$$

$$0.1461 \quad \log_{10} \frac{7}{5} \quad (3)$$

$$2.2431 \quad \log_{10} 175 \quad (6)$$

$$2.3892 \quad \log_{10} 245 \quad (5)$$

$$0.5529 \quad \log_{10} \frac{25}{7} \quad (8)$$

$$-0.6990 \quad \log_{10} 0.2 \quad (7)$$



اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_8 [(4x + 2)^3 (x - 4)] \quad (10)$$

$$3 \log_8 (4x + 2) + \log_8 (x - 4)$$

$$\log_2 \frac{(x + 1)^3}{\sqrt[3]{x + 5}} \quad (12)$$

$$3 \log_2 (x + 1) - \frac{1}{3} \log_2 (x + 5)$$

$$\log_2 [(2x)^3 (x + 1)] \quad (9)$$

$$3 + 3 \log_2 x + \log_2 (x + 1)$$

$$\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x - 3}} \quad (11)$$

$$\log_{13} 3 + 4 \log_{13} x - \frac{1}{3} \log_{13} (7x - 3)$$



اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$\log_2 \frac{(5x + 6)^3}{\sqrt{x - 4}} \quad 3 \log_2 (5x + 6) - \frac{1}{2} \log_2 (x - 4) \quad (13)$$

$$\log_7 \frac{49}{6x^2} \quad 2 - \log_7 6 - 2 \log_7 x \quad (14)$$

$$\log_7 \frac{49}{6x^2} \quad \log_3 8 + \log_3 x - 2 \log_3 (x + 4) \quad (15)$$

$$\log \frac{3yz^2}{\sqrt[3]{x}} \quad \log_{10} y + \log_{10} 3 - \frac{1}{3} \log_{10}(x) + 2 \log_{10} z \quad (16)$$

$$\log_3 \frac{xyz^3}{\sqrt{x}} \quad \log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 z \quad (17)$$



احسب قيمة كل مما يأتي:

$$\log_2 \sqrt[5]{4} \quad (20)$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\log_{100} 10000 \quad (19)$$

$$2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \quad (18)$$

$$3$$

(21) صوت: تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تُعطى بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟

4.8 dB تقريبًا



حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

$$x = 65 \quad \log_3 (4x - 17) = 5 \quad (2)$$

$$x = -1 \quad x + 5 = \log_4 256 \quad (1)$$

$$\{x | 3 > x \geq 2\}$$

$$\log_6 (3 - x) \leq \log_6 (x - 1) \quad (4)$$

$$x = 4 \quad \log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x \quad (3)$$

$$\text{لا يوجد حل} \quad \log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x \quad (6)$$

$$x = -\frac{4}{3} \quad \log_8 (-6x) = 1 \quad (5)$$

$$8 \log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4 \quad (8)$$

$$4 \quad \log_7 n = \frac{2}{3} \log_7 8 \quad (7)$$

$$12 \quad \log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4 \quad (10)$$

$$6 \quad \log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54 \quad (9)$$



$$3 \quad 4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405 \quad (12)$$

$$2 \quad \log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u \quad (11)$$

$$4 \quad \log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8 \quad (14)$$

$$\frac{1}{4} \log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3} \log_3 64 \quad (13)$$

$$1 \quad \log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4 \quad (16)$$

$$2 \quad \log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2 \quad (15)$$

$$0 \quad \log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6 \quad (18)$$

$$2 \quad \log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12 \quad (17)$$

$$3 \quad \log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1 \quad (20)$$

$$2 \quad \log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1) \quad (19)$$

$$4 \quad \log_8 (n - 3) + \log_8 (n + 4) = 1 \quad (22)$$

$$25 \quad \log_{10} 4 + \log_{10} w = 2 \quad (21)$$

$$3 \quad \log_{16} (9x + 5) - \log_{16} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} \quad (24)$$

$$\pm 4 \quad 3 \log_5 (x^2 + 9) - 6 = 0 \quad (23)$$



$$0 \quad \log_2(5y + 2) - 1 = \log_2(1 - 2y) \quad (26)$$

$$8 \quad \log_6(2x - 5) + 1 = \log_6(7x + 10) \quad (25)$$

$$6 \quad \log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72 \quad (28)$$

$$101 \quad \log_{10}(c^2 - 1) - 2 = \log_{10}(c + 1) \quad (27)$$

$$\{x | 1 < x < 2\} \log_9(x + 2) > \log_9(6 - 3x) \quad (30)$$

$$\{x | 0 > x > -\frac{4}{3}\} \log_8(-6x) < 1 \quad (29)$$

$$\{x | 11 > x > -6\} \log_2(x + 6) < \log_2 17 \quad (32)$$

$$\{x | 27 \geq x > 0\} \log_{81} x \leq 0.75 \quad (31)$$

$$\text{لا يوجد حل} \quad \log_{10}(x - 5) > \log_{10} 2x \quad (34)$$

$$\log_{12}(2x - 1) > \log_{12}(5x - 16) \quad (33)$$

$$\{x | 3\frac{1}{5} < x < 5\}$$

$$\log_2(x + 3) < \log_2(1 - 3x) \quad (35)$$

$$\{x | -3 < x < -\frac{1}{2}\}$$



اللوغاريتمات العشرية

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log 101 \quad (1) \quad 2.0043 \quad \log 2.2 \quad (2) \quad 0.3424 \quad \log 0.05 \quad (3) \quad -1.3010$$

استعمل الصيغة $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

$$(4) \text{ الحليب : } [\text{H}^+] = 2.51 \times 10^{-7} \text{ mol/L} \quad 6.6 \text{ تقريباً}$$

$$(5) \text{ المطر الحمضي : } [\text{H}^+] = 2.51 \times 10^{-6} \text{ mol/L} \quad 5.6 \text{ تقريباً}$$

$$(6) \text{ القهوة : } [\text{H}^+] = 1.0 \times 10^{-5} \text{ mol/L} \quad 5$$

$$(7) \text{ الحليب الغني بالماغنيسيوم : } [\text{H}^+] = 3.16 \times 10^{-11} \text{ mol/L} \quad 10.5 \text{ تقريباً}$$



حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$3.0885 \quad 3.5^x = 47.9 \quad (10) \quad 2.1319 \quad 6^z = 45.6 \quad (9) \quad 2.9746 \quad 5^a = 120 \quad (8)$$

$$10.3593 \quad 2^{a-4} = 82.1 \quad (13) \quad 1.1887 \quad 4^{2x} = 27 \quad (12) \quad 1.9802 \quad 8.2^y = 64.5 \quad (11)$$

$$\pm 2.3785 \quad 5^{x^2-3} = 72 \quad (16) \quad \pm 1.0725 \quad 30^{x^2} = 50 \quad (15) \quad -1.2396 \quad 5^{w+3} = 17 \quad (14)$$

$$n \geq 0.9117 \quad 2^{n+1} \leq 5^{2n-1} \quad (18) \quad x > 3.8188 \quad 4^{2x} > 9^{x+1} \quad (17)$$

»



اكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\frac{\log 9}{\log 11}, 0.9163 \log_{11} 9 \quad (21)$$

$$\frac{\log 32}{\log 8}, 1.6667 \log_8 32 \quad (20)$$

$$\frac{\log 12}{\log 5}, 1.5440 \log_5 12 \quad (19)$$

$$\frac{\log 8}{2 \log 7}, 0.5343 \log_7 \sqrt{8} \quad (24)$$

$$\frac{\log 6}{\log 9}, 0.8155 \log_9 6 \quad (23)$$

$$\frac{\log 18}{\log 2}, 4.1699 \log_2 18 \quad (22)$$



(25) درجة الحموضة: استعمل الصيغة الواردة في الأسئلة 4-7 أعلاه. إذا كان الرقم الهيدروجيني (pH) لمحلول الخل 2.9، وللحليب 6.6، فكم مرة (تقريباً) يساوي تركيز أيون الهيدروجين في الخل تركيزه في الحليب؟

5000 مرة تقريباً

(26) أحياء: تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. ما الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟

5.6 h تقريباً

(27) صوت: تُعطى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة من شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار تساوي شدة الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟ **1000 مرة**

