السؤال الأول : ليكن التكاملان :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\,dx$$

❶ أثبت أنّ $I+J=\ln 2$.

❷ تحقّق أنّ $I-J=\dfrac{\pi-2\ln 2}{4}$.

❸ استنتج قيمة كل من I و J .

الحل

❶ $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\,dx$ ومنه

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\tan x}+\frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\overbrace{1+\tan^2 x}^{g'(x)}}{\underbrace{1+\tan x}_{g(x)}}\right)dx$$

ومنه $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\overbrace{1+\tan^2 x}^{g'(x)}}{\underbrace{1+\tan x}_{g(x)}}\right)dx=\left[\ln(1+\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=[\ln 2]-[0]=\ln 2$

❷ $I-J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\,dx$

ومنه $I-J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\tan x}-\frac{\tan^2 x}{1+\tan x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan x}\right)dx$

وبالتالي $I-J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{(1-\tan x)(1+\tan x)}{1+\tan x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\,dx$

$$I-J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\frac{-\sin x}{\cos x})\,dx=[x+\ln(\cos x)]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=[\frac{\pi}{4}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}}]-[0]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$$

❸ أصبح لدينا المعادلتين :

$$\begin{cases} I+J=\ln 2 & (1) \\ I-J=\dfrac{\pi-2\ln 2}{4} & (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $2I=\dfrac{\pi+2\ln 2}{4}$ ومنه $I=\dfrac{\pi+2\ln 2}{8}$.

بطرح (2) من (1) نجد $2J=\dfrac{6\ln 2-\pi}{4}$ ومنه $J=\dfrac{6\ln 2-\pi}{8}$.

السؤال الثاني :

❶ ليكن a عددٌ حقيقي موجب تماماً

أثبت أنّه عندما $t \in [1,1+a]$ يكون $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

❷ استنتج أنّ $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

❸ ليكن x عدد حقيقي موجب تماماً .

ولنعرّف التابع F بأنّه التابع الأصلي للتابع $x \mapsto \ln(1+e^{-2x})$

الذي ينعدم عند $x=0$ أي $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\, dt$

عوّض في المتراجحة المثبتة في الطلب الثاني $a = e^{-2t}$

ثمّ استنتج أنّ $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

❹ استنتج أنّه عندما x تسعى نحو $+\infty$ تسعى $F(x)$ نحو ℓ

يحقّق أنّ $\frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

الحل

❶ لدينا فرضاً $t \in [1, 1+a]$ أي : $1 \le t \le 1+a$

ومنه : $1 \ge \frac{1}{t} \ge \frac{1}{1+a}$ أي $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{t} \le 1$

❷ وجدنا من الطلب السابق أنّ $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{t} \le 1$

ومنه $\int_1^{1+a} \frac{1}{1+a}\, dt \le \int_1^{1+a} \frac{1}{t}\, dt \le \int_1^{1+a} 1\, dt$

$$\left[\frac{1}{1+a} t\right]_1^{1+a} \le \left[\ln t\right]_1^{1+a} \le \left[t\right]_1^{1+a}$$

$$\left[\frac{1+a}{1+a}\right] - \left[\frac{1}{1+a}\right] \le \left[\ln(1+a)\right] - \left[\ln 1\right] \le \left[1+a\right] - \left[1\right]$$

ومنه $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$.

❸ لنعوّض $a = e^{-2t}$ في المتراجحة $\dfrac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$ فنجد

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \le \ln(1+e^{-2t}) \le e^{-2t}$$

ومنه $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \le \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt \le \int_0^x e^{-2t}dt$

$$\int_0^x \frac{1}{-2}\cdot\frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \le F(x) \le \int_0^x e^{-2t}dt$$

$$\left[\frac{1}{-2}\cdot\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \le F(x) \le \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

$$\left[\frac{1}{-2}\cdot\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \le F(x) \le \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

$$\left[\frac{1}{-2}\cdot\ln(1+e^{-2x})\right]-\left[-\frac{1}{2}\ln 2\right] \le F(x) \le \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]-\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\ln(1+e^{-2x}) \le F(x) \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

❹ $$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\ln(1+e^{-2x})\le F(x)\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x})=0$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$$

وبفرض $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\ell$ فإنّ ℓ تحقّق

$$\frac{1}{2}\ln 2\le\ell\le\frac{1}{2}$$

السؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^{3x} \sin x$

❶ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

❷ عين عددين حقيقيين a و b :

يحقفان المساواة $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ أياً كان x .

❸ استنتج تابعاً أصلياً $F(x)$ للتابع $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

الحل

❶ $f'(x) = \cos x \, e^{3x} + 3e^{3x} \sin x$

ومنه $\boxed{f'(x) = e^{3x}(\cos x + 3\sin x)}$

$$f''(x) = 3e^{3x}(\cos x + 3\sin x) + (-\sin x + 3\cos x)e^{3x}$$

ومنه $\boxed{f''(x) = e^{3x}(6\cos x + 8\sin x)}$

❷ $f(x) = af'(x) + bf''(x)$

$$e^{3x} \sin x = e^{3x}((a + 6b)\cos x + (3a + 8b)\sin x)$$

بالمطابقة نجد
$$\begin{cases} a + 6b = 0 & (1) \\ 3a + 8b = 1 & (2) \end{cases}$$

لنضرب المعادلة (1) بالعدد -3

$$\begin{cases} -3a - 18b = 0 & (1) \\ 3a + 8b = 1 & (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $-10b = 1$ ومنه $b = \frac{-1}{10}$

نعوّض في (1) $a - \frac{6}{10} = 0$ ومنه $a = \frac{6}{10}$.

وبالتالي $f(x) = af'(x) + bf''(x)$

$$f(x) = \frac{6}{10}f'(x) - \frac{1}{10}f''(x)$$

❸ $$f(x) = \frac{6}{10}f'(x) - \frac{1}{10}f''(x)$$

ومنه $F(x) = \frac{6}{10}f(x) - \frac{1}{10}f'(x)$

$$F(x) = \frac{6}{10}e^{3x}\sin x - \frac{1}{10}e^{3x}(\cos x + 3\sin x)$$

$$F(x) = e^{3x}\left(\frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x\right)$$

ملاحظة : يمكننا إيجاد تابعاً أصلياً للتابع $f(x) = e^{3x} \sin x$

بالشكل : $$F(x) = \int_0^x e^{3t} \sin t \, dt$$

لنستخدم التكامل بالتجزئة :

$u(x) = e^{3t}$	$v'(x) = \sin t$
$u'(x) = 3e^{3t}$	$v(x) = -\cos t$

$$F(x) = \left[-e^{3t} \cos t\right]_0^x - \int_0^x -3 \cos t \, e^{3t} dt$$

$$F(x) = \left[-e^{3t} \cos t\right]_0^x + 3\int_0^x \cos t \, e^{3t} dt$$

بفرض $J = \int_0^x \cos t \, e^{3t} dt$

لإيجاد J نطبّق التكامل بالتجزئة مرّةً أخرى

بفرض

$u_1(x) = e^{3t}$	$v_1'(x) = \cos t$
$u_1'(x) = 3e^{3t}$	$v_1(x) = \sin t$

$$J = \left[e^{3t} \sin t\right]_0^x - \int_0^x 3e^{3t} \sin t \; dt$$

ومنه $J = \left[e^{3t} \sin t\right]_0^x - 3F(x)$

$$F(x) = \left[-e^{3t} \cos t\right]_0^x + 3\left[e^{3t} \sin t\right]_0^x - 9F(x)$$

$$10F(x) = \left[-e^{3t} \cos t + 3e^{3t} \sin t \right]_0^x$$

$$10F(x) = \left[-e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \sin x \right] - \left[-1 \right]$$

ومنه $F(x) = e^{3x}(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x) + \frac{1}{10}$

ونستطيع أنْ نعتبر $F_1(x) = e^{3x}(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x)$

تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

السؤال الرابع :

f تابع مستمر على المجال $[-4,5]$ جدول تغيّراته الآتي :

x	-4		-1		0		1		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

❶ استنتج إشارة كل من التكاملين :

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$ و b) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

❷ عيّن عددين يحصران كل من التكاملين :

a) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ و b) $\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx$

الحل

❶ a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$ نلاحظ من جدول تغيّرات f أنّ $f(x) \le 0$ على هذا المجال $[-\frac{1}{2},0]$ ومنه $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx \le 0$

b) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ نلاحظ من جدول تغيّرات f أنّ $f(x) \ge 0$ على هذا المجال $[0,3]$ ومنه $\int_{0}^{3} f(x)\,dx \ge 0$.

❷ a) $\int_0^1 f(x)\,dx$

وجدنا أنّ عندما $0 \le x \le 1$ يكون $0 \le f(x) \le 2$

ومنه $$\int_0^1 0\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 2\,dx$$

وبالتالي $$0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \Big[2x\Big]_0^1$$

ومنه $$0 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 2$$

b) $\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx$

وجدنا أنّ عندما $-4 \le x \le -1$ يكون $-1 \le f(x) \le 2$

ومنه $$\int_{-4}^{-1} -1\,dx \le \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx \le \int_{-4}^{-1} 2\,dx$$

ومنه $$\Big[-x\Big]_{-4}^{-1} \le \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx \le \Big[2x\Big]_{-4}^{-1}$$

ومنه $$\Big[1\Big]-\Big[4\Big] \le \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx \le \Big[-2\Big]-\Big[-8\Big]$$

وبالتالي $$-3 \le \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx \le 6 \quad .$$

السؤال الخامس :

لتكن لدينا التكاملات الآتية :

$$I=\int_1^e \frac{1}{x^2+x}\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx \quad \text{و} \quad K=\int_1^e \frac{(x^2+1)\ln x}{x(x+1)^2}\,dx$$

❶ احسب I .

❷ باستعمال التكامل بالتجزئة استنتج أنّ $J=I-\frac{1}{e+1}$

ثمّ استنتج قيمة J .

❸ بيّن أنّ $K+2J=\frac{1}{2}$ ثمّ استنتج قيمة K .

الحل

❶ $I=\int_1^e \frac{1}{x^2+x}\,dx$

$$I=\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

نوحّد المقامات ثمّ نحذفها

$$1 = a(x+1) + b(x)$$

❐ لإيجاد a نعطي $x = 0$ فنجد $1 = a$

❐ لإيجاد b نعطي $x = -1$ فنجد $b = -1$

ومنه $I = \int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^e (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx$

ومنه $I = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^e = \left[1 - \ln(e+1)\right] - \left[-\ln 2\right]$

ومنه $I = 1 + \ln\frac{2}{e+1}$.

❷ $J = \int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx = \int_1^e (x+1)^{-2} \cdot \ln x \, dx$

لنستخدم التكامل بالتجزئة :

$u(x) = \ln x$	$v'(x) = (x+1)^{-2}$
$u'(x) = \frac{1}{x}$	$v(x) = \frac{-1}{x+1}$

$$J = \left[\frac{-\ln x}{x+1}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$J = \left[\frac{-\ln e}{e+1}\right] - \left[0\right] + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$J = \frac{-1}{e+1} + I$$

ومنه $J = \frac{-1}{e+1} + 1 + \ln\frac{2}{e+1}$.

$$J = \frac{e}{e+1} + \ln\frac{2}{e+1}$$

$$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{(x^{2}+1)\ln x}{x(x+1)^{2}}dx+2\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{(x+1)^{2}}dx$$ ❸

ومنه $$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{(x^{2}+1)\ln x}{x(x+1)^{2}}dx+\int_{1}^{e}\frac{2x\ln x}{x(x+1)^{2}}dx$$

وبالتالي $$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{(x^{2}+2x+1)\ln x}{x(x+1)^{2}}dx$$

ومنه $$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{(x+1)^{2}\ln x}{x(x+1)^{2}}dx$$

وبالتالي $$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$$

ومنه $$K+2J=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\ln x\ dx$$

$$K+2J=\int_{1}^{e}\underbrace{\frac{1}{x}}_{H'(x)}\ \underbrace{\ln x}_{H^{r}(x)}\ dx$$

وبالتالي $$K+2J=\int_{1}^{e}\underbrace{\frac{1}{x}}_{H'(x)}\ \underbrace{\ln x}_{H^{r}(x)}\ dx=\left[\frac{\ln^{2}x}{2}\right]_{1}^{e}=\left[\frac{1}{2}\right]-\left[0\right]=\frac{1}{2}$$

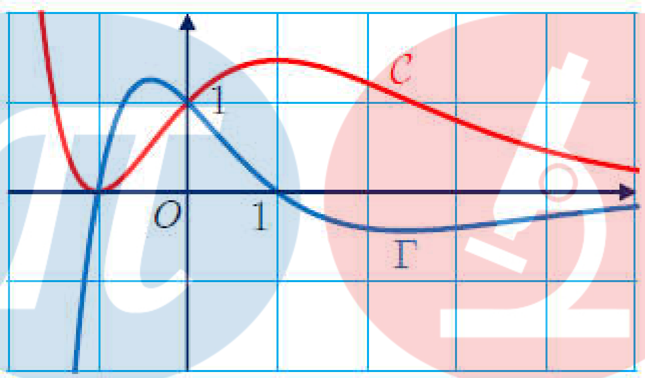
أي $$K+2J=\frac{1}{2}$$

$$K=\frac{1}{2}-2\left(\frac{e}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}\right)$$

وبالتالي $$K=\frac{1}{2}-\frac{2e}{e+1}-2\ln\frac{2}{e+1}$$

مسألة مركبة (المسألة 27 من وحدة التكامل)

❶ في معلم متجانس رسمنا الخطين البيانيين C و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$.



نعلم أنّ أحدهما مشتق للآخر , لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و g'

① بيّن مُعلّلاً أيّ هذين الخطين هو الخط البياني للتابع g وأيهما لمشتقه .

② ما ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

❷ نتأمّل المعادلة التفاضلية : $(E)\ : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ هو حل للمعادلة (E)

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $(E') : y + y' = 0$.

أثبت أنّ « f حل للمعادلة (E) » , يكافئ « $u = f - f_0$ حل للمعادلة (E') » . ثمّ حل (E')

واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E) .

③ إذا علمت أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حل للمعادلة (E) ,

فأعطِ صيغة $g(x)$ بدلالة x .

④عين h حل المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$

② ليكن C' الخط البياني الذي يمثّل f في معلم متجانس .

اكتب معادلةً للمماس T للخط C' في النقطة Ω التي

فاصلتها -1 . وارسم C' و T.

③ عيّن الأعداد a و b و c حتى يكون التابع

$F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

ثمّ احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل

و C' والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

الحل

❶ ① قبل البدء في حل هذا الطلب .

يجب على الطالب أن يمتلك المهارات الآتية :

❒ إذا كان التابع g اشتقاقياً و متزايداً تماماً على مجال I أي $g'(x) \geq 0$ على هذا المجال I هذا يكافئ أنّ الخط البياني $C_{g'}$ للتابع g' سيكون مرسوماً فوق محور الفواصل على هذا المجال .

❒ إذا كان التابع g اشتقاقياً و متناقصاً تماماً على مجال I أي $g'(x) \leq 0$ على هذا المجال I هذا يكافئ أنّ الخط البياني $C_{g'}$ للتابع g' سيكون مرسوماً تحت محور الفواصل على هذا المجال .

❒ إذا كان للخط C_g مماساً أفقياً عند نقطة منه فاصلتها $x = a$ أي $g'(a) = 0$ كان الخط البياني $C_{g'}$ للتابع g' يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = a$.

❒ إذا كان ميل المماس للخط C_g في النقطة التي فاصلتها a

يساوي b أي $g'(a)=b$ كان الخط البياني للتابع $C_{g'}$ يمر بالنقطة

(a,b) .

❒ إذا كان g ليس اشتقاقياً عند $x=a$ كان التابع g' غير

معرف عند هذه النقطة .

❒ إذا الخط البياني للتابع g' يقطع محور الفواصل عند $x=a$

وقد غيّر إشارته من السالب إلى الموجب قلنا بأنّ $g(a)$ قيمة

صغرى محلياً أمّا إذا غيّر إشارته من الموجب إلى السالب

قلنا بأنّ $g(a)$ قيمة كبرى محلياً .

وهناك أمور أخرى لم يتعرّض إليها منهاجنا

ملاحظة هامة : نفس الأمر يندرج إذا أعطي رسمة خط بياني

لتابع f ورسمة خط بياني لتابعه الأصلي F حيث نعلم أنّه إذا كان

F اشتقاقياً على I كان $F'(x)=f(x)$.

أي يجب أن يمثّل F التابع و f تابعه المشتق ثمّ نتابع كما سبق .

لنعود إلى المسألة : لنفرض جدلاً أنّ الخط البياني للتابع g

هو Γ أي نلاحظ أنّ الخط Γ يقبل مماساً أفقياً في نقطة

فاصلتها $a \in]-1,0[$ أي الخط البياني للتابع g' يجب أنْ يقطع

محور الفواصل في نقطة $a \in]-1,0[$ وهذا تناقض

ومنه C هو الخط البياني للتابع g و Γ هو الخط البياني لتابعه g' .

② نلاحظ أنّ Γ هو الخط البياني للتابع g' حيث يمر بالنقطة

$(0,1)$ أي $g'(0) = 1$ وهو ميل المماس للخط C في النقطة التي

فاصلتها 0 .

❷ $(E)\ : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① إثبات أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2+2x)e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

$$f_0'(x) = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2+2x)$$

ومنه $f_0'(x) = e^{-x}(-x^2+2)$.

نعوّض في المعادلة التفاضلية (E) :

$$f_0'(x)+f_0(x)=e^{-x}(-x^2+2)+e^{-x}(x^2+2x)$$

ومنه $f_0'(x)+f_0(x)=e^{-x}(2x+2)=2(x+1)e^{-x}$

أي f_0 هو حل للمعادلة التفاضلية (E) .

② $(E'):y+y'=0$.

نريد أنْ نثبت أنّه إذا كان f حلاً للمعادلة (E) يكافئ

$f-f_0$ حل للمعادلة (E')

f حل للمعادلة (E) هذا يكافئ أنّ $f'(x)+f(x)=2(x+1)e^{-x}$

وهذا يكافئ $f'(x)+f(x)=f_0'(x)+f_0(x)$

وهذا يكافئ $(f-f_0)'(x)+(f-f_0)(x)=0$

وهذا يكافئ $(f-f_0)$ حل للمعادلة (E') .

لمّا كانت المعادلة (E') من الشكل $y'=-y$ حلّها من الشكل

$y = ke^{-x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

ولكن وجدنا أنّ $f - f_0$ حل للمعادلة (E') حيث f حل للمعادلة (E)

ومنه $(f - f_0)(x) = ke^{-x}$ أي $f(x) - f_0(x) = ke^{-x}$

ومنه $f(x) - f_0(x) = ke^{-x}$

$$f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} + ke^{-x}$$

$f(x) = (x^2 + 2x + k)e^{-x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

و f هي جميع حلول المعادلة (E) .

③ إذا علمت أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حل للمعادلة (E) ,

فأعطِ صيغة $g(x)$ بدلالة x .

لنعتبر $g(x) = (x^2 + 2x + k)e^{-x}$

نلاحظ أنّ $g(-1) = 0$

$(1 - 2 + k)e = 0$ ومنه $(-1 + k) = 0$ وبالتالي $k = 1$

فالتابع $g(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}$.

④عين h حل المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x=0$.

بافتراض $h(x)=(x^2+2x+k)e^{-x}$

الشرط : $h'(0)=0$

$$h'(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+k)$$

$$h'(x)=(-x^2+2-k)e^{-x}$$

لدينا $h'(0)=0$ ومنه $(2-k)=0$ ومنه $k=2$

$$h(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$$

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$

① f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$.

و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

عند $+\infty$ يكون $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}+2\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{2}{e^x}$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ فإنّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ وبالتالي $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي للخط C'

في جوار $+\infty$.

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2)$$

$f'(x) = 0$ عندما $-x^2 = 0$ ومنه $x = 0$ وبالتالي $f(0) = 2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

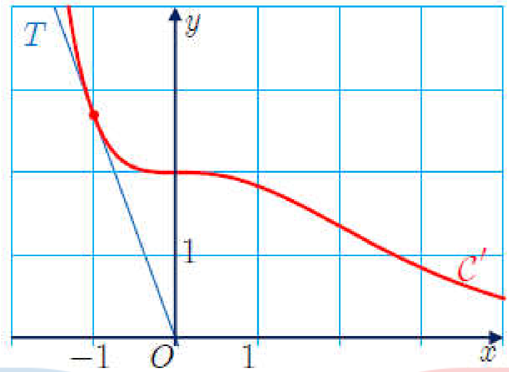
② معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط C' في نقطة منه فاصلتها $x = -1$

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$f(-1) = e \text{ و } f'(-1) = -e$$

$$y = -e(x+1) + e$$

$$\mathcal{T} : \boxed{y = -ex}$$



③ عيّن الأعداد a و b و c حتى يكون التابع $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

F اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c)$$

ومنه $F'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x - c + b)e^{-x}$

لنعيّن a و b و c بحيث يتحقّق $F'(x) = f(x)$ أي

$$(-ax^2 + (2a - b)x - c)e^{-x} = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} -a = 1 & (1) \\ 2a - b = 2 & (2) \\ -c + b = 2 & (3) \end{cases}$

من (1) نجد $a = -1$

نعوّض في (2) فنجد $-2 - b = 2$ ومنه $b = -4$.

نعوّض في (3) فنجد $-c - 4 = 2$ ومنه $c = -6$

ومنه $F(x) = (-x^2 - 4x - 6)\mathrm{e}^{-x}$

المساحة المطلوبة :

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\alpha}$$
$$=F(\alpha)-F(0)=(-\alpha^2-4\alpha-6)\,\mathrm{e}^{-\alpha}+6$$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=6$.