العلاقات

تعريف: ليكن A, B كلا منهما مجموعة غير خالية

(١) الضرب الديكارتي $A \times B$ هو المجموعة التالية

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A , y \in B\}$$

(٢) R علاقة (ثنائية) من A إلى B إذا كان $R \subseteq A \times B$.

ونرمز $(a,b) \in R$ أو aRb، ونقرأ a على علاقة مع b أو a مرتبط بـ b.

• إذا كان $(a,b) \notin R$ نرمز لذلك $a \not R\, b$ ونقول a ليس مرتبط بـ b

(٣) R علاقة على A إذا كان R علاقة من A إلى A

أمثلة خاصة

ليكن $A \neq \phi$

العلاقة القطرية : $I = \{(a,a) : a \in A\}$

$A \neq \phi$, $B \neq \phi$

$A \times B$ العلاقة التامة من A إلى B

مثال

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2), (d,1), (d,2)\}$

$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d)\}$

ملاحظة:

$(x, y) \neq (y, x)$

$\{x, y\} = \{y, x\}$

تعريف: ليكن R علاقة من A إلى B $(R \subseteq A \times B)$

مجال العلاقة R ونرمز له D_R هو المجموعة:

$D_R = \{ a , a \in A$ و $\exists b \in B, (a,b) \in R \}$

مدى العلاقة R: هي المجموعة نرمز لها $Im(R)$

$Im(R) = \{ b , b \in B$ و $\exists a \in A, (a,b) \in R \}$

ملاحظة:

$D_R \subseteq A$

$Im(R) \subseteq B$

مثال (3,1) ص 106

$B = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,c), (3,c)\}$

$D_R = \{1, 2, 3\} \subset A$

$Im(R) = \{a, b, c\} = B$

مثال (3,2) ص 106

لنكن العلاقة:

$$S = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 + 9y^2 = 9\}$$

$$D_S = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ و } -3 \leq x \leq 3\}$$
$$= [-3, 3]$$

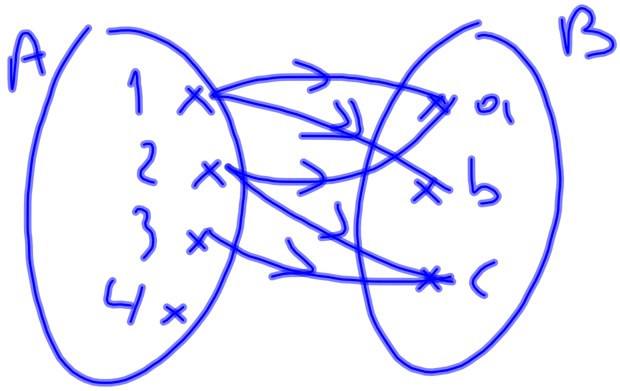
$$Im(S) = \{y : y \in \mathbb{R} \text{ و } -1 \leq y \leq 1\}$$
$$= [-1, 1]$$

تمثيل العلاقة

(1) الشكل السهمي

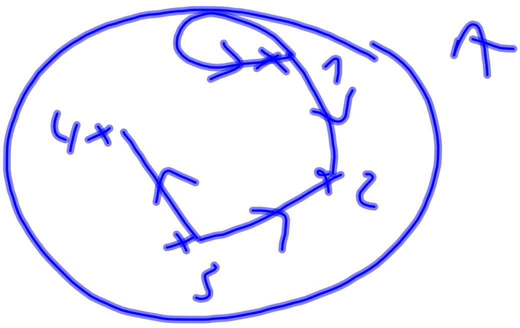
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,c), (3,c)\}$



مثال: ليكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$S = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,4)\}$

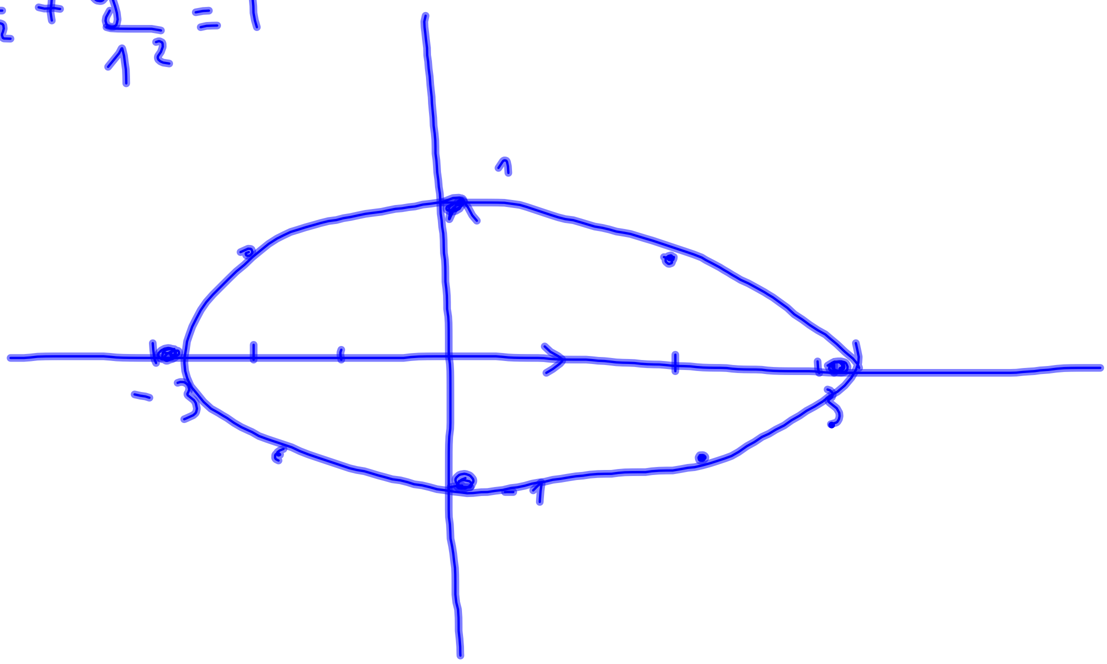


(٢) طريقة بيان العلاقة

$$S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + 9y^2 = 9\}$$

$$D_S = [-3, 3],\quad Im(S) = [-1, 1]$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$



معادلة الشكل البيضاوي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(٣) طريقة الرسم الموجه

R علاقة على A .

الزوج المرتب (A, R)

A: مجموعة الرؤوس

R: مجموعة الأضلاع.

مثال (٢,٣) ص ١٠٩

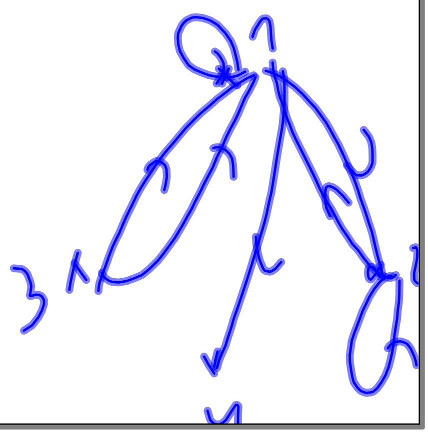
لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ والعلاقة R على A

معرفة: $x R y \Leftrightarrow x(y+1) \leq 6$

اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة ومثلها باستخدام الرسم الموجه.

الحل:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$



(٤) المصفوفات:

ليكن A مجموعة: $A=\{a_1,\dots,a_n\}$

B مجموعة: $B=\{b_1,\dots,b_m\}$

R علاقة من A إلى B

M_R <u>مصفوفة العلاقة</u> R من A إلى B هي:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & , (a_i, b_j) \in R \\ 0 & , (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

مثال (3,6) ص 110

ليكن $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

R علاقة من A إلى B حيث

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(4,2),(4,3),(5,1),(6,3),(6,5)\}$$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

العمليات على العلاقات

تعريف

لتكن R علاقة من A إلى B

S علاقة من A إلى B

(1) تقاطع العلاقة R, S ونرمز له $R \cap S$

حيث $R \cap S = \{(a,b), (a,b) \in R, (a,b) \in S\}$

(2) اتحاد العلاقة R, S ونرمز له $R \cup S$

حيث $R \cup S = \{(a,b) : (a,b) \in R$ أو $(a,b) \in S\}$

(3) العلاقة $R \setminus S$ أو $R - S$

$R \setminus S = \{(a,b) : (a,b) \in R$ و $(a,b) \notin S\}$

(4) متمم العلاقة R ونرمز له $\overline{R}$ حيث

$$\overline{R} = A \times B \setminus R$$

(5) معكوس العلاقة R ونرمز له: R^{-1} هي العلاقة من B إلى A حيث

$$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$$

ملحوظة: $(R^{-1})^{-1} = R$

مثال:

$A = \{1,2,3,4\}$ لتكن

$B = \{x,y,z\}$

$R = \{(1,x),(1,y),(2,x),(3,y),(3,z)\}$ والعلاقتين:

$S = \{(1,x),(2,x),(3,x),(4,x),(4,y)\}$

$R \cap S = \{(1,x),(2,x)\}$

$R \cup S = \{(1,x),(1,y),(2,x),(3,y),(3,z),(3,x),$
$(4,x),(4,y)\}$

$R \setminus S = \{(1,y),(3,y),(3,z)\}$

$S \setminus R = \{(3,x),(4,x),(4,y)\}$

$R^{-1} = \{(x,1),(y,1),(x,2),(y,3),(z,3)\}$

$\overline{S} = A \times B \setminus S = \{(1,y),(2,y),(3,y),(1,z),$
$(2,z),(3,z),(4,z)\}.$

مثال: ليكن $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(x,1), (x,2), (y,1), (y,3), (z,4)\}$

$S = \{(x,1), (x,3), (y,2), (y,3), (z,1)\}$

$R \cap S = \{(x,1), (y,3)\}$

$R \cup S = \{(x,1), (x,2), (y,1), (y,3), (z,4), (x,3), (y,2), (z,1)\}$.

$R^{-1} = \{(1,x), (2,x), (1,y), (3,y), (4,z)\}$

$R \setminus S = \{(x,2), (y,1), (z,4)\}$

$\overline{R} = \{(x,3), (x,4), (y,2), (y,4), (z,1), (z,2), (z,3)\}$

التحصيل

ليكن علاقة R من A إلى $\boxed{B}$

و العلاقة S من $\boxed{B}$ إلى C

التحصيل S على R ونرمز له: $S \circ R$

هي العلاقة من A إلى C حيث

$$S \circ R = \{(x,y) : \exists\, z \in B,\ (x,z) \in R \text{ و } (z,y) \in S\}$$

مثال (3,10) ص 114

$R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$

علاقة من $A = \{1,2,3\}$ إلى $B = \{1,2,3,4\}$

و $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

علاقة من B إلى $C = \{0,1,2\}$

احسب $S \circ R$

$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$

$S \circ R$ علاقة من A إلى C.

مثال (3,9) ص 114

لتكن $R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$

و $S = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

علاقتين على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$

جد كلاً من $S \circ R$ و $R \circ S$.

الحل:

$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R \circ S = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

$S \circ R \neq R \circ S$

خصائص:

(1) $(S\circ R)\circ T = S\circ(R\circ T)$

(2) اذا كان $R_1 \subset R_2$ فإن $S\circ R_1 \subset S\circ R_2$

(3) اذا كان $R_1 \subset R_2$ فإن $R_1\circ S \subset R_2\circ S$

(4) $S\circ(R_1\cup R_2) = (S\circ R_1)\cup(S\circ R_2)$

(5) $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$

تعريف

لتكن R علاقة على المجموعة A.

$$R^1 = R$$

$$R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1} \quad \text{لكل } n \geq 2$$

مثال (3,13)

اذا كان $R=\{(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)\}$ علاقة على $A=\{1,2,3,4\}$. احسب R^n لكل $n\geq 1$.

الحل:

$$R^1=R$$

$$R^2=R\circ R=\{(1,4),(1,2),(3,4)\}$$

$$R^3=R^2\circ R=\{(1,4)\}$$

$$R^4=R^3\circ R=\emptyset$$

لكل $n\geq 4$, $R^n=\emptyset$

لأن $R^4=\emptyset$ ، نبين $k\geq 4$, نفرض $R^k=\emptyset$ ونبرهن: أن $R^{k+1}=\emptyset$

لدينا $R^k=\emptyset$ فإن $R^{k+1}=R^k\circ R$

$$=\emptyset \quad (R^k=\emptyset)$$

وبالتالي: $R^n=\emptyset$ لكل $n\geq 4$.

استعمال المصفوفات في العمليات على العلاقات

ليكن R , S علاقتان منتهيتان:

$$M_{S \cup R} = M_S + M_R$$

$$M_{S \cap R} = M_S \cdot M_R$$

$$M_{S^{-1}} = {}^t(M_S)$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

ص 23-10:36 فبراير

مثال (3,11) ص 115

في المثال (3,9)

$R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$

$S=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

علاقة على A . $A=\{1,2,3,4\}$

$$M_R=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{array} \quad ; \quad M_S=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}1+0&=0+1\\&=1+1=1\\0+0&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.0&=0.1=1.0\\&=0\\1.1&=1\end{aligned}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}
\end{array} \quad ; \quad M_{R\cap S}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$M_{R^{-1}}={}^{t}(M_R)=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}
\end{array}$$

مثال (3,12) ص 116

R و S مثال (3,10)

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \odot \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 \\ 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \\ 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+1\cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$