AHMAD TKRORY

MATHEMATICS TEACHER

أساسيات في النهايات:

تسميات:

① $\lim$ نهاية

② $f(x)$ تابع

③ $x \to$ شلفة نعني x تسعى إلى شلفة

نقول عن $\lim\limits_{x \to \text{شلفة}} f(x)$

نهاية $f(x)$ عندما x تسعى إلى شلفة

في البكالوريا:

أولاً: $x \to$ عدد

x تسعى إلى عدد

ثانياً: $x \to \mp\infty$

x تسعى إلى $\mp\infty$

أولاً: $\lim\limits_{x \to \text{عدد}} f(x) = \boxed{}$ الجواب

نبدل كل x بذلك العدد

① عدد ← نقطة مقاربة

② ∞ ← $x =$ عدد مقارب شاقولي

ما نهاية التوابع الآتية:

① $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

② $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x+1} = \sqrt{2(1)+1} = \sqrt{3}$

$\dfrac{\text{عدد}}{0} = \infty$ هامة جداً

③ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ ، $a = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1+2}{1-1} = \dfrac{3}{0}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3}{0} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

نعوض ١- بالمقام فيصبح سالب

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{0} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

نعوض 2 بالمقام فيصبح موجب

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط c

④ $f(x) = \dfrac{3+x}{9-x}$ ، $a = 9$

$\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \dfrac{12}{0}$

$\lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{12}{0} = \dfrac{12}{0^+} = +\infty$

نبدل بدل كل x في المقام بـ 8

$\lim\limits_{x \to 9^+} \dfrac{12}{0} = \dfrac{12}{0^-} = -\infty$

نبدل بدل كل x في المقام بـ ١٠

$x = 9$ مقارب شاقولي للخط c و c على يمين ويسار المقارب

أضحك لله ضحكتي يا غامضة

فهل تظن يداً على الأرض تطفئني؟!

تشغيلات في اللا نهايات

① $(\text{عدد سالب}).(-\infty) = +\infty$

② $(\text{عدد سالب})(+\infty) = -\infty$

③ $(\text{عدد موجب})(\mp\infty) = \mp\infty$

④ $-\infty \mp \text{أي عدد} = -\infty$

⑤ $+\infty \mp \text{أي عدد} = +\infty$

⑥ $\frac{-\infty}{0} = -\infty$ و $\frac{+\infty}{0} = +\infty$

⑦ $\frac{-\infty}{\text{عدد سالب}} = +\infty$ و $\frac{-\infty}{\text{عدد موجب}} = -\infty$

⑧ $(-\infty)^2 = +\infty$ و $(+\infty)^2 = +\infty$

⑨ $\sqrt{+\infty} = +\infty$ و $\sqrt{-\infty} =$ لا يجوز

⑩ $+\infty + \infty = +\infty$

⑪ $-\infty - \infty = -\infty$

⑫ $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ هامة جداً

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \boxed{}$ الجواب

ثانياً:

عدد

$y =$ عدد نقول مقارب أفقي

∞

احتمال وجود مقارب مائل

1 التابع الصحيح: نعوض في أكبر أس (الحد المسيطر)

① $\lim_{x \to +\infty} (x+4) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

② $\lim_{x \to -\infty} (x^2+3x-5) = \lim x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

③ $\lim_{x \to -\infty} (-x^3-2x^2+x-7) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$

2 التابع الجذري داخله صحيح: نعوض في الحد المسيطر فقط

① $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

② $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+4} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

3 التابع الكسري: $\frac{\text{صحيح}}{\text{صحيح}}$

نميز ثلاث حالات

① درجة البسط = درجة المقام (الأمثال)

$\frac{\text{أمثال أكبر أس}}{\text{أمثال أكبر أس}}$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

مثال: جد النهايات:

① $f(x) = \dfrac{x+5}{3x-7}$, $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

مقارب أفقي $y = \frac{1}{3}$

② $f(x) = \dfrac{3x^2+x}{6x^2-5}$, $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{3x^2}{6x^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مقارب أفقي للخط c في جوار $+\infty$: $y = \frac{1}{2}$

② درجة البسط > درجة المقام

الجواب $(\mp\infty)$

$$\frac{\text{أكبر قوة مع إشارتها}}{\text{أكبر قوة مع إشارتها}} = \mp\infty$$

مثال: جد النهايات:

① $f(x) = \dfrac{x^2+5x+1}{x-3}$, $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

② $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$, $a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

تكرورية هامة:

إذا طلب إيجاد A عدداً حقيقياً يحقق الشرط $x \geq A$ كان $f(x) \in]a,b[$ فإننا نبحث عن

① نصف القطر $r = \dfrac{b-a}{2}$

② مركز المجال $c = \dfrac{a+b}{2} = \lim_{x\to\infty} f(x)$

③ نطبق القانون

$$|f(x) - c| < r$$

تدريب ③: ص34: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$$

① أوجد نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

② أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]4{,}9 \,,\, 5{,}1[$

الحل:

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 = c$

② $r = \dfrac{5{,}1 - 4{,}9}{2} = \dfrac{0{,}2}{2} = 0{,}1 = \dfrac{1}{10}$

$c = \dfrac{4{,}9+5{,}1}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

نطبق القانون:

$$|f(x) - C| < r$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1} - 5\right| < \frac{1}{10}$$ نوحد المقامات

$$\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{|4|}{|x-1|} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{x-1} < \frac{1}{10} \xrightarrow[\text{ب } 10]{\text{نضرب الطرفين}} \frac{40}{x-1} < 1$$

$$40 < x-1 \Rightarrow 41 < x$$

$$A = 41 \Leftarrow A < x$$

تدريب ③ ص38: أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند $a = 1$

ثم عين عدداً α يحقق

$$x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\Rightarrow f(x) > 10^3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{(1-1)^2} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

لدينا $f(x) > 10^3$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$

نضرب الطرفين ب $(x-1)^2$

$$5x-1 > (x-1)^2 10^3$$

$$5x - 5 + 5 - 1 > (x-1)^2 10^3$$

$$5(x-1) + 4 > (x-1)^2 10^3$$

نفرض $t = x-1$

$$5t + 4 > 10^3 t^2$$

$$10^3 t^2 - 5t + 4 < 0$$

تربيع + صراحة + دراسة إشارة

$$10^3 t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(10^3)(-4)$$

$$\Delta = 25 + 16000$$

$$= 16025$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 126,5$$

$$t_1 = \frac{5 + 126,5}{2(1000)} = \frac{65,75}{1000} = 0,06$$

$$t_2 = -0,06$$

$$+ \quad -0,06 \quad - \quad 0,06 \quad +$$

$$t \in]-0,06, 0,06[\; ; \; t = x-1$$

$$-0,06 < x-1 < 0,06$$

نضيف 1: $1 - 0,06 < x < 1 + 0,06$

$$\alpha = 0,06$$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

تكرورية هامة:

اذا طلب عين مجال I بحيث $x \in I$

كان $f(x) \in]a,b[$ ماذا نفعل

$$a < f(x) < b$$

$$\vdots$$

منا $< x <$ كذا

مثال 37ص: ليكن لدينا التابع

$$f(x) = \sqrt{4x+1}$$

عين مجال I يحقق الشرط عندما $x \in I$

$$f(x) \in]2,3[$$

الحل:

نضع $2 < \sqrt{4x+1} < 3$

$\xRightarrow{\text{تربيع الطرفين}} 4 < 4x+1 < 9$

$\xRightarrow{\text{نطرح واحد}} 3 < 4x < 8$

$\xRightarrow{\div 4 \text{ نقسم}} \frac{3}{4} < x < 2$

$$x \in]\tfrac{3}{4}, 2[$$

تدريب ③ /42: أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$$

ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط $x > A$

$$f(x) \in]\underset{a}{-2,05}, \underset{b}{-1,95}[$$

الحل: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim \left(\frac{-2x}{x}\right) = -2 = c$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-1,95+2,05}{2}$$

$$= 0,05$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3} + \frac{2}{1}\right| < 0,05$$

نوحد المقامات

$$\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right| < \frac{5}{100}$$

$$\frac{7}{|x+3|} < \frac{5}{100}$$

نقلب

$$\frac{|x+3|}{7} > \frac{100}{5}$$

$$|x+3| > 140$$

$$x+3 > 140$$

$$x > 137$$

$$\boxed{A = 137}$$

تكروريات هامة:

① $\sqrt{x^2} = |x|$

② $\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

③ $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ محنة الطلاب

④ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

⑤ $\sqrt{x}^2 = x$

كيف نخرج x من تحت الجذر إلى خارجه

① $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$

$\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$= \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

$= |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

$x \to -\infty$, $x \to 0^-$: $-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

$x \to +\infty$, $x \to 0^+$: $x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

② $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$x \to -\infty$, $x \to 0^-$: $-x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$x \to +\infty$, $x \to 0^+$: $+x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

حالات عدم التعيين:

① $\frac{\infty}{\infty}$ ② $\infty - \infty$

③ $\frac{0}{0}$ ④ $0.(\infty)$

الحالة① $\frac{\infty}{\infty}$: تزال بإخراج x أو $\sqrt{x}$

عامل مشترك من البسط والمقام واختصارها

احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

Q- $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$ جذري / صحيح $\quad a = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ ع.ت

تزال بإخراج x عامل مشترك

$= \dfrac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)} = \dfrac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}$

$-x$ لأن جوار $-\infty$

$\dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-3\right)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$

$= \dfrac{-\sqrt{4+0}}{0-3} = \dfrac{-2}{-3}$

$= \dfrac{2}{3}$

② $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+4}$ $\quad a = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ ع.ت

نخرج الحد المسيطر عامل مشترك

$f(x) = \dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{4}{x}\right)}$

تكرورية

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1+0}{1+0} = \dfrac{1}{1} = 1$

② الحالة $\infty - \infty$:

① تزال بإخراج الحد المسيطر عامل مشترك

② أو الضرب والتقسيم بالمرافق بشرطين

وجود جذر + حدين فقط

حيث $a-b$ مرافقة $a+b$ بالعكس

احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

① $f(x) = x - \sqrt{x}$ $\quad a = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ع.ت

لإزالتها نخرج الحد المسيطر عامل مشترك

$f(x) = x\left[\dfrac{x}{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right]$

$= x\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0)$

$= +\infty$

② $f(x) = 2x+1-\sqrt{x^2-x-2}$

$a = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ع.ت

لإزالتها الحد المسيطر أولاً من تحت الجذر ثم من التابع الكلي

$= 2x-1-\sqrt{x^2\left[1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}$

$= 2x+1-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

موجب لأننا في جوار $+\infty$

$= 2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

$f(x) = x\left[2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\left[2+0-\sqrt{1+0+0}\right]$

$= +\infty(2-1)$

$= +\infty$

لا يوجد مقارب أفقي لأن الجواب $+\infty$

حتى يكون مقارب يجب أن يكون الجواب عدد

$$= \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{\infty} = 0$$

الحالة ⑤: تزال بإحدى ثلاث طرق:

① - اذا كان البسط والمقام كثيرات حدود نحلل البسط والمقام للتخلص من القوس المسبب للصفر

② اذا كان البسط أو المقام يحوي جذر نضرب ونقسم على المرافق ثم قد نحتاج إلى تحليل كثيرات حدود

③ اذا كان البسط أو المقام يحوي sin أو cos أو tan نستخدم صيغة sin أو tan

$$\lim_{g \to 0} \frac{\sin g}{g} = 1 = \lim_{g \to 0} \frac{g}{\sin g}$$

$$\lim_{g \to 0} \frac{\tan g}{g} = 1 = \lim_{g \to 0} \frac{g}{\tan g}$$

③- $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ $\quad a = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \infty$$

ع د ت

نستخدم المرافق:

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط c في جوار $-\infty$

④ $f(x) = \sqrt{(x+1)^2+5} - x - 1$

$a = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$ ع د ت

نستخدم المرافق

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2+5} - (x+1)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{(x+1)^2+5} - (x+1)\right]\left[\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)\right]}{\left(\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)^2}+5 - \cancel{(x+1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)}$$

احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

① $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$, $a=-2$

$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{(-2)^2+3(-2)+2}{(-2)^2-4}$

$= \frac{4-6+2}{4-4} = \frac{0}{0}$ ع.ت

لإزالتها نحلل البسط والمقام

$\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{(\cancel{x+2})(x+1)}{(x-2)(\cancel{x+2})}$

تذكرية ← $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$

$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

تذكرية②: نقول أن:

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

نقطة مقاربة (a,b)

② - $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$, $a=-1$

$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{(x-1)(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)}$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1-1}{3} = \frac{-2}{3}$

تذكرية:

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

③ $f(x) = \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$, $a=3$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\sqrt{6+10}-4}{3-3} = \frac{4-4}{3-3}$

$= \frac{0}{0}$ ع.ت

نضرب ونقسم على مرافق البسط لأنه يحوي جذر.

$= \frac{(\sqrt{2x+10}-4)(\sqrt{2x+10}+4)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$

$= \frac{2x+10-16}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$

$= \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)} = \frac{2(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(\sqrt{2x+10}+4)}$

$= \frac{2}{\sqrt{2x+10}+4}$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+10}+4}=\frac{2}{4+4}$$

$$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

④ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x^2-3x+2}$ $a=1$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1-1}{3-3}=\frac{0}{0}\ \text{ع.ت}$$

لأنها ترابانضرب ونقسم على مرافق البسط ونحلل المقام

$$=\frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2x^3-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-2)\cancel{(x-1)}(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x^2+x+1)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{2(1+1+1)}{(1-2)(1+1)}=\frac{6}{-2}=-3$$

⑤ $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2x}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\sin 2(0)}{2(0)}=\frac{0}{0}\ \text{ع.ت}$$

بما أنها تحوي $\sin$ نحتاج إلى مبرهنة

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin g}{g}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=1$$

حسب مبرهنة ال $\sin$

⑥ $f(x)=\dfrac{\sin 6x}{x}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{0}\ \text{ع.ت}$$

نستخدم مبرهنة $\sin$

لكن يجب مطابقة أمثال الزاوية في البسط مع المقام

نضرب ونقسم على 6

$$f(x)=\left(\frac{\sin 6x}{6x}\right)\cdot 6$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin g}{g}=1$ حسب مبرهنة

$$\lim_{x\to 0}f(x)=(1)(6)=6$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\ \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

⑨ - $f(x) = \dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نعلم أن $x = \sqrt{x}^2$

$$f(x) = \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = (1)^2 = 1$$

⑩ - $f(x) = \dfrac{x + x\cos x}{\sin x}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نستخدم مبرهنة sin

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 1(1) = 2$$

⑦ - $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

حسب مبرهنة sin

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

تذكوريات قبل الحل!

$$1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{ax}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

⑧ $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نستخدم القانون المثلثي

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

(11) $f(x) = \dfrac{x\tan 2x}{3x^2 + 3\sin^2 x}$, $a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت

نقسم البسط والمقام على x^2

$$= \dfrac{\dfrac{x\tan 2x}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{3\sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \dfrac{2\,\dfrac{\tan 2x}{2x}}{3 + 3\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{2(1)}{3+3(1)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$$

(12) $f(x) = \dfrac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت

تذكرة هامة!

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$$= \dfrac{-3\cos x + 4\cos^3 x - \cos x}{x \cdot \sin x}$$

$$= \dfrac{4\cos^3 x - 4\cos x}{x \cdot \sin x}$$

$-\sin^2 x$

$$= \dfrac{4\cos x(\cos^2 x - 1)}{x \cdot \sin x}$$

تذكرة: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$$= \dfrac{4\cos x(-\sin x)}{x}$$

$$\lim 4\cos x\left(-\dfrac{\sin x}{x}\right)$$

$$= 4(1)(-1) = -4$$

(13) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2 + x^3}}$, $a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ ع.ت $\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2(1+x)}}$

$$= \dfrac{\sin x}{|x|\sqrt{1+x}}$$

في جوار 0^- : $-x$ في جوار 0^+ : $+x$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{-x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = -1(1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 \cdot 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ليس للتابع نهاية

مبرهنات المقارنة :

مبرهنة الإحاطة الأولى: تنص هذه المبرهنة أنه اذا كان لدينا ثلاث توابع f و g و h معرفة على المجال $I =]b, +\infty[$ وتحقق على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad g(x) \le f(x) \le h(x)$$

وكان

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = l \quad \text{و} \quad \lim_{x \to} h(x) = l$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

حيث l = عدد

للمسائل: نستخدم مبرهنة الاحاطة في ايجاد نهاية تابع تحقق متراجحة أو في ايجاد نهاية تابع تحقق $\sin\infty$ أو $\cos\infty$ حيث أن

$-1 \le \cos$ شغلة ≤ 1

$-1 \le \sin$ شغلة ≤ 1

أو

$0 \le \sin^2$ شغلة ≤ 1

$0 \le \cos^2$ شغلة ≤ 1

مثال 43: احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ عند $a=0$ ، $a=+\infty$

الحل:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نستخدم مبرهنة $\sin$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sin\infty}{\infty} \quad \text{تحتاج احاطة}$$

عندما نرى $\sin\infty$ أو $\cos\infty$ في الجواب احاطة حصراً

نعلم أن: $-1 \le \sin x \le 1$

نقسم ع $x > 0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بما أن نهاية الطرفين تساوي فإنه حسب الاحاطة 1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

لا تقلقوا ...

تدريب: احسب نهاية f المعرف على $]0,+\infty[$ عند $a=+\infty$

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+\cos\infty}{\infty}$$

نحتاج احاطة

نعلم أن $-1\le\cos x\le 1$

نضيف الى الأطراف (1)

$$1-1\le 1+\cos x\le 1+1$$

$$0\le 1+\cos x\le 2$$

نقسم على $x^2>0$

$$\frac{0}{x^2}\le\frac{1+\cos x}{x^2}\le\frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$$

حسب مبرهنة الاحاطة :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

تدريب 1 / 46: تابع f يحقق :

$$\frac{3x-1}{x+2}\le f(x)\le\frac{3x+7}{x+3}$$

احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل: باستخدام مبرهنة الاحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\lim\left(\frac{3x}{x}\right)=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+7}{x+3}\right)=\lim\left(\frac{3x}{x}\right)=3$$

وحسب مبرهنة الاحاطة 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

مبرهنة الاحاطة الثانية:

ليكن لدينا f و g تابعين على $I=]b,+\infty[$ ولنفرض أن كل x من I تحقق المتراجحة

$$|f(x)-l|\le g(x)$$

(l عدد)

ولنفرض أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

تدريب: ليكن f تابع يحقق

$$|f(x)-1| \leq \frac{1}{x^2}$$

احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل: لنفرض $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة الثانية

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

تدريب: ليكن f تابع يحقق

$$|f(x)+3| \leq \frac{x}{x^2+1}$$

احسب نهاية عند $+\infty$

نفرض $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim \left(\frac{x}{x^2}\right) = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة الثانية

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

مبرهنة الإحاطة الثالثة:

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I =]b, +\infty[$

لدينا حالتين:

1. إذا كان $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. إذا كان $f(x) \leq g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

في المسائل:

للتفريق بين المقارنة الأولى والثالثة

إذا كان نهاية الطرفين l (عدد) كان يجب استخدام الإحاطة الأولى

إذا كان نهاية الطرفين $\mp\infty$ نستخدم الإحاطة الثالثة

لا أخاف من محاولاتي المستمرة

بل أخاف من توقفي عن المحاولة

تدريب: احسب نهاية f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $a=+\infty$ ، $a=-\infty$

$$f(x) = \cos x + x$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \cos\infty \pm \infty$$

نحتاج احاطة

نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$

نضيف x: $x-1 \le \cos x + x \le x+1$

$$x-1 \le f(x) \le x+1$$

لدينا $x-1 \le f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حسب الاحاطة 3

عند $-\infty$: $f(x) \le x+1$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

حسب الاحاطة 3

تدريب ②/46: أثبت أن

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

ثم استنتج نهاية $\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

ثم ادرس بالشكل نهاية التابع ذاته $-\infty$

الحل: نعلم أن

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نقسم على $x+1>0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب مبرهنة الاحاطة 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x+1}\right) = 0$$

عند $-\infty$: $-1 \le \cos x \le 1$

نقسم على $x+1<0$

قلبنا جهة المتراجحة لأننا قسمنا على سالب

$$\frac{-1}{x+1} \ge \frac{\cos x}{x+1} \ge \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

تدريب 3/146 f تابع يحقق

$$|f(x) - 3| \le \frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x > 0$ جد نهاية f(x) عند $+\infty$؟

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب الإحاطة الثانية

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

④ f تابع يحقق $f(x) \ge \frac{1}{4} x^2$

أياً كان $x < 0$ احسب نهاية f عند $-\infty$؟

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4} x^2 = +\infty$$

حسب الإحاطة الثالثة

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

⑤ أثبت أنّ $x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$ استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

الحل:

نعلم أنّ $-1 \le \sin x \le 1$ نضرب بـ -1

$$+1 \ge -\sin x \ge -1$$

نضرب بـ 5

$$5 \ge -5\sin x \ge -5$$

نضيف x^2

$$x^2 + 5 \ge x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$$

عند $+\infty$ $x^2 + 5\sin x \ge x^2 - 5$

$$\lim (x^2 - 5) = +\infty$$

حسب الإحاطة 3

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

عند $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 5) = +\infty$$

حسب الإحاطة 3

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ما تستغله اليوم ستجده غداً
قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً
التكروري

146/2 : ليكن التابع f المعرف على المجال $[0 , +\infty[$ وفق

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

1) تحقق أن

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

2) استنتج أن

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

في حالة $x>0$

3) ما نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

الحل: 1) نضرب ونقسم على مرافق الجذر

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$f(x) = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

تذكرية : $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$

2) أولاً

$$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$$

نقلب الأطراف

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad *$$

$$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$$

نضيف للأطراف $\sqrt{x+1}$

$$2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

نقلب

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \quad **$$

من * و ** نستنتج

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب الاحاطة (1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

نهاية تابع مركب :

لتكن التوابع التالية : f, g, h

فإذا

$f = g \overset{يلي}{\circ} h(x) \underset{بالشكل}{\overset{تكتب}{\Longrightarrow}} f = g(h(x))$

إذا طلب نهاية النهاية $\lim\limits_{x \to a} g(h(x))$

ماذا نفعل ؟؟

① نوجد $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$

② نفرض $h(x) = X$

③ فيكون $\lim\limits_{x \to a} g(h(x)) = \lim\limits_{X \to b} g(X)$

تدريب / 49 : ليكن التابع المعرف على $]-5, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

① احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

② استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x))$

بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

الحل ① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

p_1 ② 1" $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 = b$

2" نفرض $f(x) = X$

3" $f(\cancel{f(x)}X) = \frac{X-3}{X+5}$

$$\lim\limits_{X \to 1} f(X) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

p_2 يعني نبدل بدل كل x بـ $f(x)$

$$f(f(x)) = \frac{f(x) - 3}{f(x) + 5}$$

$$= \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{\cancel{x+5}}}{\frac{x-3+5x-25}{\cancel{x+5}}}$$

$$f(f(x)) = \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim \left(\frac{-2x}{6x}\right)$$

$$= \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

تذكرة بالمقاربات

① $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ ← عدد

$y = l$ مقارب أفقي

② $\lim_{x \to عدد} f(x) = \mp\infty$

$x =$ عدد مقارب شاقولي

③ $\lim_{x \to عدد} f(x) =$ عدد

نقطة مقاربة

④ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

لا يوجد مقارب أفقي

احتمال وجود مقارب مائل

المقارب المائل:

هو مستقيم شريف يقترب من c ولا يمسه

معادلته: $y = ax + b$

لاثبات أنه مقارب مائل يجب أن نبرهن

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

لدراسة الوضع النسبي للمقارب المائل

يعني هل هو فوق c أو تحته ندرس

المقدار $f(x) - y = ??$

لا ينعدم — ينعدم

ندرسه على الجدول — في الحلقة القادمة

المعطاة في Df

وذلك بأخذ القيم اذا كان

$f(x) - y < 0 \Rightarrow y$ تحت c

$f(x) - y > 0 \Rightarrow y$ فوق c

تدريب: أثبت أن $y = 2x + 3$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي

$x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x-1}$$

الحل: لإثبات أنه مقارب مائل يجب أن نبرهن

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\cancel{2x} + \cancel{3} + \frac{10}{x-1} - (\cancel{2x} + \cancel{3})\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{10}{x-3} = \frac{10}{\infty} = 0$$

بما أن نهاية الطرف تساوي الصفر فإن

$y = 2x + 3$ مقارب مائل للخط c في جوار $\mp\infty$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

لدراسة الوضع النسبي

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{10}{x-1}$$ لا يعدم

$]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$

$]-\infty, 1[$: $f(x) - y_{\Delta} < 0$ ، C تحت y

$]1, +\infty[$: $f(x) - y_{\Delta} > 0$ ، C فوق Δ

تكرورية: عندما يكون درجة البسط ≥ درجة المقام نطبق القسمة الأقليدية

$$\begin{array}{r|l} \text{البسط} & \text{المقام} \end{array}$$

$f(x) =$ الناتج + $\dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقام (المقسوم عليه)}}$

تدريب:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

① اكتب $f(x)$ بالشكل

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}$$

② أثبت أن $y = ax + b$ مقارب مائل للخط C في جوار $\mp\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

الحل: ① درجة البسط > درجة المقام ⇐ قسمة أقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \quad \rightarrow \text{ناتج} \\ \hline x-4 \ \text{(المقسوم عليه)} & 2x^2 - 7x - 3 \\ & \mp 2x^2 \pm 8x \\ \hline & x - 3 \\ & \mp x \pm 4 \\ \hline & 1 \quad \rightarrow \text{باقي} \end{array}$$

$f(x) =$ الناتج + $\dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-4}$$

② يجب أن نبرهن

$$\lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - y_{\Delta}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(\cancel{2x} + 1 + \frac{1}{x-4} - (\cancel{2x} + 1) \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f(x) - y = \frac{1}{x-4}$$

$]-\infty, 4[$, $]4, +\infty[$

$]-\infty, 4[$: $f(x) - y < 0$ ، C تحت y

$]4, +\infty[$: $f(x) - y > 0$ ، C فوق y

تدريب 1

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3} \qquad x \in]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$$

① اكتب f بالشكل

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+3}$$

② أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $\mp\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

الحل:

درجة البسط > درجة المقام ← قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+1 & x+3 \\ \mp 2x^2 \mp 6x & 2x-6 \\ \hline -6x+1 & \\ \pm 6x \pm 18 & \\ \hline +19 & \end{array}$$

$$f(x) = 2x-6+\frac{19}{x+3}$$

② لإثبات $y=2x-6$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_\Delta) \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\cancel{2x-6}+\frac{19}{x+3}-\cancel{(2x-6)}\right)$$

$$= \frac{19}{\infty} = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=2x-6$ مقارب مائل للخط C في جوار $\mp\infty$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{19}{x+3}$$

$]-3,+\infty[$ (-2) — $]-\infty,-3[$ (-4)

$f(x)-y_\Delta > 0$: C فوق y

$f(x)-y_\Delta < 0$: C تحت y

تدريب:

$$f(x) = x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x \in]-\infty,+\infty[$$

① - أثبت أن $y=x+1$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

② ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

الحل: لنبرهن أن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\cancel{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) = \frac{\infty}{\infty}-1$$

عدم تعيين

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} - 1 = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$ محقق

② الوضع النسبي

لا يعدم $f(x) - y_\Delta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta < 0$$

C تحت y

تدريب: أثبت أن $y = x$ مقارب مائل للخط C في جواريه $\mp$ للتابع

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$$

ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع مقاربه

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to \infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} - x \right]$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \infty}{\infty}$$

تحتاج احاطة

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نقسم على $x > 0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$$ حسب الاحاطة ①

لنأخذ في جوار $-\infty$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نقسم على $x < 0$

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

حسب مبرهنة الاحاطة الاولى

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

دراسة الوضع النسبي : $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$$

$]0,\pi]$ ربع أول وثاني

$\sin x>0$

$x>0$

$\Rightarrow f(x)-y_\Delta>0$

y فوق C

$[-\pi,0[$ ربع ثالث ورابع

$\sin x<0$

$x<0$

$f(x)-y_\Delta>0$

y تحت C

عندما يطلب إيجاد معادلة المقارب المائل ماذا نفعل ؟؟ . هناك حالتين

حالة ① عامة

صيغة السؤال: أوجد معادلة المقارب المائل للتابع $f(x)$

① $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ عدد حقيقي

② $\lim\limits_{x\to\mp\infty} [f(x)-ax] = b$ عدد حقيقي

معادلة المقارب المائل هي

* $y = ax+b$
* نعوض قيمة الـ a,b في المعادلة

لا تقلقوا

تدريب: ليكن التابع

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \quad ; x\in]-\infty,+\infty[$$

أوجد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل: معادلة المقارب المائل هي $y=ax+b$ نبحث عن a,b من خلال

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ح.ع.ت}$$

نزيلها بإخراج x^2 عامل مشترك من الجذر

$$= \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

في جوار $+\infty$

$$= \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1+0} = 1 = a$$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-ax] = b$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \infty-\infty \quad \text{ح.ع.ت}$$

نضرب ونقسم على المرافق

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)}{1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0 = b$$

نعوض a, b في $y = ax + b$

$y = (1)x + 0 \Rightarrow y = x$

مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$

حالة ② خاصة

إذا طلب الكتب بالصيغة القانونية يعني (الإتمام إلى مربع كامل) نتبع

① - نكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية

② $\sqrt{(\text{لكذا})^2 + ??} = \mp \text{لكذا} \sqrt{1 + \frac{??}{(\text{لكذا})^2}}$

حسب أي جوار

③ إذا كان $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\text{لكذا}} = 1$

④ $y =$ لكذا مقارب مائل

تذكرية: طريقة الإتمام إلى مربع كامل

$ax^2 + bx + c = 0$

① صفراً

نضيف ونطرح نصف أمثال x درجة أولى للتربيع

$ax^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c$

جذر إشارة جذر

تدريب: ليكن التابع

$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

① اكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية

② استنتج وجود مقارب لـ c في جوار $+\infty$

الحل: $x^2 + 4x + 5$

نضيف ثم نطرح $(\frac{\text{أمثال } x}{2})^2$

$x^2 + 4x + 4 - 4 + 5$

جذر إشارة جذر

$(x+2)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x+2)^2+1}$

② نخرج ما أمكننا إلى خارج الجذر

$f(x) = \sqrt{(x+2)^2 \left[1 + \frac{1}{(x+2)^2}\right]}$

لأن في جوار $+\infty$

$f(x) = (x+2)\sqrt{1 + \frac{1}{(x+2)^2}}$

نقسم الأطراف على $x+2$

$$\frac{f(x)}{x+2} = \sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2} = \sqrt{1+\frac{1}{\infty}} = \sqrt{1+0}$$

$$= 1$$

إذاً المقارب المائل هو $y = x+2$

الاستمرار:

① - **بيانياً:** يعني أن يكون c على امتداد واحد دون انقطاع

② - **تحليلياً:** الاستمرار عند a يعني نقطة قاعدته

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

تذكيرات هامة:

① مجموع تابعين مستمرين هو تابع مستمر

② جداء تابعين مستمرين هو تابع مستمر

③ قسمة تابعين مستمرين هو تابع مستمر

④ تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر

تدريب: ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

تعني x تسعى إلى نقطة

$f(0) = 2$ تعني صورة التابع

① احسب نهاية f عند الصفر

② هل f مستمر عند الصفر

③ هل f مستمر على $\mathbb{R}$ ولماذا؟

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$$

$= 0 \cdot \sin\infty$ نحتاج إحاطة

نعلم أن $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

نضرب بـ $3x^2 > 0$

$$-3x^2 \leq 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \leq 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0}(-3x^2) = \lim_{x\to 0}(3x^2) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x\to 0} 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

② يكون f مستمر عند الصفر إذا تحقق:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$0 \neq 2$$

f ليس مستمراً عند الصفر

③ f ليس مستمراً على $\mathbb{R}$ لأنه ليس مستمراً عند الصفر

تدريب: ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} & ; \; x \neq 0 \quad x \to 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر

② هل f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 \cdot \cos\infty \quad \text{تحتاج إحاطة}$$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ $x^2 > 0$

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0}(-x^2) = \lim_{x \to 0}(x^2) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\boxed{2}$

حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$0 = 0$$

تحقق

$\Leftarrow$ f مستمراً عند الصفر

لا أحد يبدأ بارعاً أو محترفاً ... اسمح لنفسك بأن تكون مبتدئاً في البداية

#ع_الله

تابع الجزء الصحيح: بدون مُوصِل

أياً كان x فإن هناك عدد n يحقق:

$$n \le x < n+1$$

مثال: $x = 2,3$

$$2 \le 2,3 < 3$$

ندعو n الجزء الصحيح لـ x ونرمز له بـ $E(x)$

تكرورية: تابع الجزء الصحيح للعدد الصحيح هو نفسه

$$E(3) = 3$$

حيث نكتب

$$E(x) \le x < E(x)+1 \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{x}$$

$$x-1 < E(x) \le x \Rightarrow \lim \frac{E(x)}{x}$$

73/30

تدريب: يرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد X

ليكن التابع f المعرف على المجال $x \in [0,2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$

① اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$ ثم ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

② هل f مستمر عند 1 وهل مستمر على المجال $[0,2]$

③ احسب نهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

الحل:

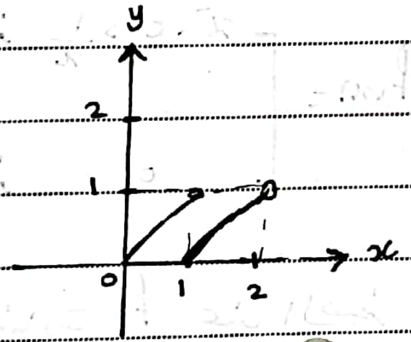
$$E(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \in [0,1[\\ 1 & ; \ x \in [1,2[\\ 2 & ; \ x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ [0,1[\quad x=0,\ x \to 1 \\ x-1 & ; \ [1,2[\quad x \to 2,\ x=1 \\ 0 & ; \ x = 2 \end{cases}$$

منصف الربع الأول $y_1 = x$

$y_2 = x-1$

x	1	2
y	0	1



② حتى يكون f مستمر عند 1 يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{?}{=} f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} x \overset{?}{=} x-1 \quad \text{معوضاً}$$

$$1 \neq 0$$

f ليس مستمر عند 1 وبالتالي ليس مستمراً على المجال $[0,2]$

تدريب 31/73: نرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد x ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

① اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

② أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

$$E(x) \begin{cases} 0 & ; \ x \in [0,1[\\ 1 & ; \ x \in [1,2[\\ 2 & ; \ x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} x^2 & ; x \in [0,1[\quad \begin{matrix} x=0 \\ x \to 1 \end{matrix} \\ 1+(x-1)^2 & ; x \in [1,2[\quad \begin{matrix} x=1 \\ x \to 2 \end{matrix} \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$$

② متى يكون f مستمر عند المجال $[0,2]$

يجب أن يكون مستمر على قيمة صحيحة منه يعني يجب أن يكون مستمر $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = x^2$$

محقق $0 = 0$ f مستمر عند الصفر

$x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1+(x-1)^2$$

③ من العلاقة

$$x-1 < E(x) \le x$$

نقسم على $x>0$

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

حسب مبرهنة الاحاطة الأولى

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x} = 1$$

من العلاقة $E(x) \le x < E(x)+1$

نضيف $-E(x)$

$$0 \le \underbrace{x - E(x)}_{f(x)} < 1$$

نقسم على $x>0$

$$0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب مبرهنة الاحاطة ①

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

$1 = 1$

محقق ⇐ f مستمر عند 1

$x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \left(1+(x-1)^2\right) = f(2)$$

$2 = 2$

محقق f مستمر عند ال 2

⇐ f مستمرة على المجال $[0,2]$

تمرينات ومسائل

②/67 : أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

عند 1 أو عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم استنتج المقاربات ثم ادرس الوضع النسبي لكل مقارب مع C

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2+1}{1-1} = \frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين المقارب

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

$y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

$y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

تذكرية: دراسة الوضع النسبي

دراسة وضع نسبي لمقارب شاقولي يكفي كتابة

نحدد $x=$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين أو يسار المقارب

دراسة وضع نسبي للمقارب أفقي نشكل فرقاً

$$f(x)-y_\Delta = ??$$

يعدم في الحلقة القادمة

لا يعدم

$]-\infty,a[$: $f(x)-y_\Delta \geq 0$

$]a,+\infty[$: $f(x)-y_\Delta \leq 0$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

دراسة الوضع النسبي :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{1}_{(x-1)}$$

$$= \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

$]-\infty, 1[$ $\quad 0 \quad$ $]1, +\infty[$ $\quad 2$

$f(x) - y_\Delta < 0$ $\qquad$ $f(x) - y_\Delta > 0$

C تحت المقارب $\qquad$ C فوق المقارب

---

③ 67/ : أوجد نهاية التابع المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$$

عند -1 و $+\infty$ و $-\infty$ ثم استنتج المقاربات ثم ادرس الوضع النسبي لكل مقارب مع C

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{2}{0}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين المقارب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \left(\frac{-2x}{x}\right) = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x}{x}\right) = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي للمقارب الأفقي :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-2x}{x+1} - (-2)$$

$$= \frac{-2x}{x+1} + 2 = \frac{-2x+2x+2}{x+1}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{x+1}$$

$]-\infty, -1[$ $\quad -2$ $\qquad$ $]-1, +\infty[$ $\quad 0$

$f(x) - y_\Delta < 0$ $\qquad$ $f(x) - y > 0$

C تحت y $\qquad$ C فوق y

كل فكرة تصنعها في عقلك تصنع مستقبلك

④ / 67 : f هو التابع المعرف على $]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-1}$$

① أثبت أن

$$\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$$

② استنتج نهاية f عند $+\infty$

الحل: ① نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$

نضيف $2x$

$$2x-1 \le 2x+\sin x \le 2x+1$$

نقسم على $x-1>0$

$$\frac{2x-1}{x-1} \le \frac{2x+\sin x}{x-1} \le \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$$

②

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = \lim\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \lim\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

حسب مبرهنة الإحاطة ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

⑤ / 70 : ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$$

① أثبت محدودية $g(x)$

② استنتج نهاية كلاً من

①" $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = x^2 \cdot g(x)$

②" $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = (x+\sin x)\, g(x)$

الحل: ① $-1 \le \sin x \le 1$

نضرب بـ 2

$$-2 \le 2\sin x \le 2$$

نضيف 3

$$1 \le 3+2\sin x \le 5$$

نقلب

$$1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$$

$$1 \ge g(x) \ge \frac{1}{5}$$

② انطلاقاً من

$$1 \ge g(x) \ge \frac{1}{5}$$

نضرب بـ $x^2 > 0$

$$x^2 \ge x^2 \cdot g(x) \ge \frac{x^2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$$

الأستاذ: أحمد تكروري
094446057

حسب الاحاطة ③

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)\,x^2) = +\infty$$

② نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$

نضيف x

$$x-1 \le x+\sin x \le x+1$$

نضرب بـ $g(x)$

$$g(x)(x-1) \le (x+\sin x)g(x) \le (x+1)g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)g(x) = +\infty$$

حسب الاحاطة ③

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)g(x) = +\infty$$

⑪ 70/ : ليكن التابع

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

① عين D_f ثم أوجد a, b, c التي تحقق

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

② أوجد نهاية f عند أطراف D_f

الحل: ①

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{(x-2)(x+1)}$$

$$D = \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ x^2-x-2 & 3x^2+6x \\ & \mp 3x^2 \pm 3x \pm 6 \\ \hline & 9x+6 \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{9x+6}{x^2-x-2}$$

$a = 3$

$$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{b}{(x+1)}_{(x-2)} + \frac{c}{(x-2)}_{(x+1)}$$

$$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{bx-2b+cx+c}{(x-2)(x+1)}$$

نحذف المقامات

$$9x+6 = (b+c)x - 2b + c$$

بالمطابقة

$b + c = 9$ ①

$-2b + c = 6$ بالطرح

$3b = 3 \Rightarrow b = 1$

نعوض في ①

$1 + c = 9 \Rightarrow c = 8$

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

② $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 3 + 0 + 0 = 3$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3 + \frac{1}{0^-} + \frac{8}{-3} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 + \frac{1}{0^+} + \frac{8}{-3} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 + \frac{1}{3} + \frac{8}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 + \frac{1}{3} + \frac{8}{0^+} = +\infty$

⑮ / ١٧٠ ليكن g التابع المعرف على $]3, +\infty[$

وفق: $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

① احسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

② استنتج $\lim_{x \to +\infty} g(g(x))$

③ أعد حساب $\lim_{x \to +\infty} g(g(x))$ بعد كتابة

$g(g(x))$ بدلالة x

الحل: ① $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x}\right) = 3$

② $1''$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3 = b$

$2''$ نفرض $g(x) = X$

$3''$ $\lim_{x \to +\infty} g(g(x)) = \lim_{X \to 3^+} g(X) = \frac{8}{0^+}$

$= +\infty$

③ $g(g(x)) = \frac{3 \cdot g(x) - 1}{g(x) - 3}$

$$= \frac{3 \cdot \frac{3x-1}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x-3}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3}$$

$$= \frac{\frac{9x-3-x+3}{\cancel{x-3}}}{\frac{3x-1-3x+9}{\cancel{x-3}}}$$

$g(g(x)) = \frac{8x}{8} = x$

$\lim_{x \to +\infty} g(g(x)) = +\infty$

73/29 : ليكن f التابع على IR وفق:

$$f(x) \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

عين m ليكون f مستمراً عند الصفر

الحل: حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق الشرط:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \right)$$

ع.ت $= \frac{0}{0}$

نضرب ونقسم على المرافق

$$\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1-x^2-1}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{2} = 0 = m$$

انتهت وحدة النهايات والاستمرار

ما ستفعله اليوم سيقال عنك ... غداً قرار أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

انتظروا الشروحات على قناتي اليوتيوب
الاستاذ: أحمد تكروري