الارتباط الخطي.

الارتباط الخطي لثلاث أشعة.

الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{U}=\alpha\vec{V}$

اذا تساوى شعاعين وكان لهما البداية

ذاتها كانت النهايات منطبقة

$\vec{AM}=\vec{AB} \Leftrightarrow$ B منطبقة على M

قوانين ٢٦ + ٢٤

$$\vec{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$

$$\vec{AB}(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2},\ \frac{z_B+z_A}{2}\right)$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_A-y_B)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$\vec{U}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{AB}=\vec{CD}$$

ABDC متوازي أضلاع

ثلاث نقاط على استقامة واحدة

٢. شعاعين

توازي.

المفهوم الهندسي: توازي أو انطباق.

المفهوم الجبري: $\vec{U}=\lambda\vec{V}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

الشعاع الصفري يرتبط خطياً بأي شعاع.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

$\vec{U}(0,0,3)$

$\vec{V}(0,0,4)$

$\cancel{\frac{\vec{U}}{\vec{V}}=\frac{3}{4}} \Rightarrow \vec{U}=\frac{3}{4}\vec{V}$

الشعاعان مرتبطان $\vec{AB}=\lambda\vec{AC}$

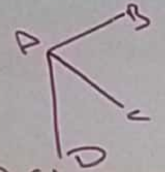
خطياً فهما متوازيان

والنقاط مرتبطة خطياً إذاً

A - B - C على استقامة

واحدة.

أربع نقاط



الوقوع في مستوٍ واحد.

$A(1,-1,0)$ $B(1,2,-3)$

$C(-2,1,1)$ $D(0,1,-1)$

اثبت أن A - B - C - D في مستوٍ واحد.

$\vec{AB}(0,3,-3)$

$\vec{AC}(-3,2,1)$ غير مرتبطة

$\vec{AD}(-1,2,-1)$

$$\vec{AD}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$$

$$(-1,2,-1)=\alpha(0,3,-3)+\beta(-3,2,1)$$

$$=(-3\beta,\ 3\alpha+2\beta,\ -3\alpha+\beta)$$

$-3\beta=-1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{3}$ (1)

$3\alpha+2\beta=2$ (2) $\Rightarrow \alpha=\frac{4}{9}$

$-3\alpha+\beta=-1$ (3)

$-\frac{12}{9}+\frac{1}{3}\overset{?}{=}-1 \Rightarrow -1=-1$

لا تقع على استقامة واحدة إذاً A - B - C - D في مستوٍ واحد

$-1, 3)$

$1, 0, -1)$

اثبت أن AB

غير مرتبطة

$+\beta(4,2,-6)$

$2\beta, -4\alpha-6\beta)$

$\vec{U} = \alpha \vec{V} + \beta \vec{W}$

الارتباط الخطي لثلاث أشعة.

الارتباط الخطي لشعاعين

$\vec{U} = \alpha \vec{V}$

ثلاث نقاط

توازي.

توازي في المتجهات:

$\vec{U} = \lambda \vec{V} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

الشعاع الصفري يوازي أي شعاع.

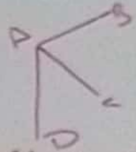
$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

$\vec{U}(0,0,3)$, $\vec{V}(0,0,4)$ $\quad \frac{\vec{U}}{\vec{V}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \vec{U} = \frac{3}{4}\vec{V}$

الشعاعان يرتبطان $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$ خطيا معناها متوازيان

يرتبطان خطيا اذا النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة.

أربع نقاط



الوقوع في مستوٍ واحد.

$A(1,-1,0)$ $B(1,2,-3)$

$C(-2,1,1)$ $D(0,1,-1)$

اثبت ان A ، B ، C ، D في مستوٍ واحد

$\vec{AB}(0,3,-3)$

$\vec{AC}(-3,2,1)$ غير متوازيين

$\vec{AD}(-1,2,-1)$

$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

$(-1,2,-1) = \alpha(0,3,-3) + \beta(-3,2,1)$

$= (-3\beta, 3\alpha + 2\beta, -3\alpha + \beta)$

$-3\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$ (1)

$3\alpha + 2\beta = 2$ (2) $\Rightarrow \alpha = \frac{4}{9}$

$-3\alpha + \beta = -1$ (3)

$-\frac{12}{9} + \frac{1}{3} \stackrel{?}{=} -1 \Rightarrow -1 = -1$

بالاشعة ترتبط خطيا اذا A ، B ، C ، D في مستوٍ واحد

خمس نقاط.

شعاع يوازي مستوٍ.

$A(1,-2,3)$ $B(0,-1,3)$

$C(-3,0,3)$ $D(1,0,-1)$

$E(1,2,-3)$

اثبت ان $\vec{AB}$ يوازي المستوي CDE

$\vec{AB}(-1,1,0)$

$\vec{CD}(4,0,-4)$

$\vec{CE}(4,2,-6)$ غير متوازيين

$\vec{AB} = \alpha \vec{CD} + \beta \vec{CE}$

$(-1,1,0) = \alpha(4,0,-4) + \beta(4,2,-6)$

$= (4\alpha + 4\beta, 2\beta, -4\alpha - 6\beta)$

بالمطابقة

$4\alpha + 4\beta = -1$ (1)

$2\beta = 1$ (2)

$-4\alpha - 6\beta = 0$ (3)

من (2) $\beta = \frac{1}{2}$

(3) $\rightarrow -4\alpha - 3 = 0$

$\boxed{\alpha = -\frac{3}{4}}$

نعوض في (1)

$-3 + 2 \stackrel{?}{=} -1$

$-1 = -1$

بالاشعة ترتبط خطيا

$\vec{AB}$ يوازي CDE.

الارتباط الخطي

إذا تساوى شعاعين وكان لهما البداية ذاتها كانت النهايات منطبقة

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ M تنطبق على B

④ قوانين

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_B + z_A}{2}\right)$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ABDC متوازي أضلاع

الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{U} = \alpha\vec{V}$

ثلاث نقط على استقامة واحدة

ثلاث نقط توازي.

المفهوم الهندسي: توازي أو انطباق.

المفهوم الجبري: $\vec{U} = \lambda\vec{V} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

الشعاع الصفري مرتبط خطياً مع أي شعاع.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

$\vec{U}(0,0,3)$
$\vec{V}(0,0,4)$
$\frac{\vec{U}}{\vec{V}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \vec{U} = \frac{3}{4}\vec{V}$

الشعاعان مرتبطان $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$

خطياً فهما متوازيان

ويشتركان بنقطة واحدة إذاً

النقاط C - B - A على استقامة

واحدة.

الارتباط الخطي لثلاث أشعة. $\vec{U} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{W}$

أربع نقط

الوقوع في مستوٍ واحد.

$A(1,-1,0) \quad B(1,2,-3)$
$C(-2,1,1) \quad D(0,1,-1)$

اثبت أن D، C، B، A في مستوٍ واحد

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,3,-3)\\ \overrightarrow{AC}(-3,2,1)\end{array}\right\}$ غير مرتبطين

$\overrightarrow{AD}(-1,2,-1)$

$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$(-1,2,-1) = \alpha(0,3,-3) + \beta(-3,2,1)$
$= (-3\beta, 3\alpha + 2\beta, -3\alpha + \beta)$

$-3\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$ ①

$3\alpha + 2\beta = 2$ ② $\Rightarrow \alpha = \frac{4}{9}$

$-3\alpha + \beta = -1$ ③

$-\frac{12}{9} + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow -1 = -1$

فالأشعة مرتبطة خطياً إذاً النقاط D، C، B، A في مستوٍ واحد

خمس نقط.

شعاع يوازي مستوٍ.

$A(1,-2,3) \quad B(0,-1,3)$
$C(-3,0,3) \quad D(1,0,-1)$
$E(1,2,-3)$

اثبت أن AB يوازي المستوي CDE

$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CD}(4,0,-4)\\ \overrightarrow{CE}(4,2,-6)\end{array}\right\}$ غير مرتبطين

$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD} + \beta\overrightarrow{CE}$

$(-1,1,0) = \alpha(4,0,-4) + \beta(4,2,-6)$
$= (4\alpha + 4\beta, 2\beta, -4\alpha - 6\beta)$

بالمطابقة

$4\alpha + 4\beta = -1$ ①
$2\beta = 1$ ②
$-4\alpha - 6\beta = 0$ ③

من ② $\beta = \frac{1}{2}$

③ $\rightarrow -4\alpha - 3 = 0$

$\alpha = -\frac{3}{4}$

نعوض في ①

$-3 + 2 = -1$

$-1 = -1$

فالأشعة مرتبطة خطياً

AB يوازي CDE.

$\vec{\ldots A}+\vec{CB}=\vec{CB}+\vec{BA}$
$=\vec{CA}$

معادلة المستوي

يلزمنا نقطة وناظم (عمودي على المستوي) (المستوي يكون محدد تماماً بنقطة وناظم)

الشكل العام

$ax+by+cz+d=0$

الشكل الجزئي

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

المعطيات:
نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$
ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

المعطيات:
نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$
وشعاعين يوازيان المستوي غير متوازيين $\vec{v}, \vec{u}$

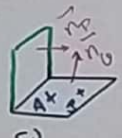
① نفرض $\vec{n}(a, b, c)$
$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \to$ نحصل على معادلة
$\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \to$ نحصل على معادلة
فنحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل
نفرض قيمة ما لأحد المجاهيل

المعطيات:
ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
A, B, C
نشكل الشعاعين $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$
ونعود للحالة السابقة

المعطيات:
جد معادلة المستوي Q
المار بالنقطتين A ، B
ويعامد المستوي P.

١٤+٤

① $\vec{n}_Q\cdot\vec{n}_P=0$ نحصل على معادلة ①



② $\vec{n}_Q\cdot\vec{AB}=0$ نحصل على معادلة ②

نفرض قيمة ما لأحد المجاهيل
فنحصل على ناظم Q.

بعد نقطة عن مستوي

$A(x_0, y_0, z_0)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$$dist(A, P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$dist=0$

إذن النقطة تقع في المستوي

$\vec{BA}+\vec{CB}=\vec{CB}+\vec{BA}$
$=\vec{CA}$

جمع الاشعة

توازي المتجه

مثال

$\vec{PQ}$: كفاية ـ بداية

$\vec{PQ}$: بداية ـ بداية

الناتج : مشترك بداية

الناتج : نهاية الاول وبداية كفاية الثاني

متوازي

ملاحظة : اجمع شعاعين

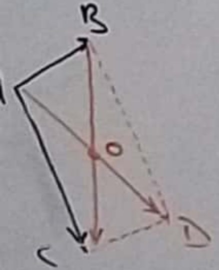
$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$

ثم ادخال نقطة .

$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$

$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$



$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$

$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AO}$

بعد نقطة عن مستوي

$A(x_0,y_0,z_0)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$dist=0$

اذن النقطة تقع في المستوي

ثم (توازي المستوي) (المستوي يحوي كم نقطة من المستوي)

المجهول

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

المعطيات .

جد معادلة المستوي Q

المار بالنقطتين A , B

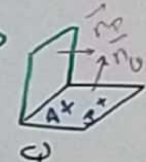
$4+4$

ويعامد المستوي P .

① $\vec{n}_Q\cdot\vec{n}_P=0$ تعامد المستويات

P

① معادلة



② $\vec{n}_Q\cdot\vec{AB}=0$

تعامد

② معادلة

نفرض متغير واحد من المجاهيل

فنحصل على ناظم Q .

المعطيات .

نقط ليس

استقامة واحدة .

A, B, C

$\vec{AB}$
$\vec{AC}$

الشعاعين

نعود المعادلة السابقة

جمع الاشعة

$\vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$

شال

شرط: نهاية = بداية

الناتج: شعاع بدايته بداية الاول ونهايته نهاية الثاني

ملاحظة: 1) جمع عدة اشعة

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

2) ادخال نقطة

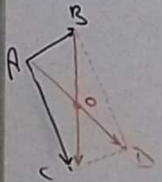
$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$

توازي المتوازي

شرط: بداية = بداية

الناتج: هو قطر متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين



$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$

بعد نقطة عن مستوي

$A(x_0, y_0, z_0)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$dist = 0$

اذا النقطة تقع في المستوي

معادلة المستوي

يلزمنا نقطة وناظم (عمودي على المستوي) (شعاعين غير مرتبطين خطياً يوازيان المستوي ويعطيان الناظم)

الشكل الجزئي

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

الشكل العام

$ax + by + cz + d = 0$

المعطيات

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

المعطيات

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاعين غير مرتبطين خطياً $\vec{u}, \vec{v}$

1) نفرض $\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow$ يتولد لدينا معادلة

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$ يتولد لدينا معادلة

فيتولد لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل

نفرض قيمة ما لاحد المجاهيل

المعطيات

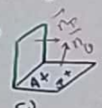
ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة A, B, C

نشكل الشعاعين $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

ونعود للحالة السابقة

المعطيات

جد معادلة المستوي Q المار بالنقطتين A, B والعامد المستوي P



1) $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0$ يتولد لدينا معادلة (1)

2) $\vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0$ يتولد لدينا معادلة (2)

نفرض قيمة ما لاحد المجاهيل

فنحصل على ناظم Q.

معادلات المستقيم

في الهندسة المستوية (x, y)

1) المعادلة العامة

$$ax + by + c = 0$$

$$m = \frac{-a}{b}$$

2) المعادلة المختزلة

$$y = ax + b$$

$$m = a$$

3) معادلة مستقيم يمر بنقطة معلومة وميله معلوم.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$\vec{n}(a, b)$

$\vec{v}(-b, a)$

* ملاحظة

m_1 ميل مستقيم d_1.

m_2 ميل مستقيم d_2.

$$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_2 \iff m_1 m_2 = -1$$

* بعد نقطة عن مستقيم.

احسب البعد النقطة عن (x_0, y_0)

$d: ax + by + c = 0$

$$dist(A, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

في الهندسة الفضائية (x, y, z)

المعطيات

نقطة (x_0, y_0, z_0)

شعاع توجيه (a, b, c)

$M(x, y, z)$ $\quad$ $A(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}(a, b, c)$

$$\vec{AM} = t\vec{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c) = (at, bt, ct)$$

$$x - x_0 = at \Rightarrow x = x_0 + at$$

$$y - y_0 = bt \Rightarrow y = y_0 + bt$$

$$z - z_0 = ct \Rightarrow z = z_0 + ct$$

$t \in \mathbb{R}$ مستقيم

$t \in [0, 1]$ قطعة مستقيم

$t \in [0, +\infty[$ نصف مستقيم

معادلات المستقيم

في الفضاء (x, y, z)

المعطيات: نقطة (x_0, y_0, z_0)

متجه توجيه (a, b, c)

المعطيات: نقطتين A, B

$\vec{u} = \vec{AB}$

والنقطة A أو B

المعطيات: معادلتي مستويين.

(المعادلة الوسيطة للفصل المشترك)

سنحل بين المشترك لمعادلتي مستويين نحل المعادلة الوسيطة للفصل المشترك

$P: 2x + y - z + 1 = 0$

$Q: x - y - 2z + 2 = 0$

$3x - 3z + 3 = 0 \quad \div 3$

$x - z + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 + z$

نعوض في P

$-2 + 2z + y - z + 1 = 0$

$y = 1 - z$

بفرض $z = t$

$x = -1 + t$

$y = 1 - t$

$z = t$

$t \in \mathbb{R}$

في الهندسة المستوية (x, y)

1) المعادلة العامة
$ax + by + c = 0$
$m = \frac{-a}{b}$

2) المعادلة المختزلة
$y = ax + b$
$m = a$

3) معادلة مستقيم يمر بنقطة معلومة وميله معلوم
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$\vec{n}(a, b)$
$\vec{v}(-b, a)$

* ميل
m_1 ميل المستقيم d_1
m_2 ميل المستقيم d_2

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

* بعد نقطة عن مستقيم.
حسب بعد النقطة عن (x_0, y_0)
$d: ax + by + c = 0$

$$dist(A, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

استنتاج المعادلات الوسيطية

$M(x, y, z)$ $A(x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v}(a, b, c)$

$\vec{AM} = t\vec{v}$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c)$
$= (at, bt, ct)$

$x - x_0 = at \Rightarrow x = x_0 + at$
$y - y_0 = bt \Rightarrow y = y_0 + bt$
$z - z_0 = ct \Rightarrow z = z_0 + ct$

$t \in$
- $\mathbb{R}$ مستقيم
- $[0, 1]$ قطعة مستقيم
- $[0, +\infty[$ نصف مستقيم

في الهندسة الفراغية.
(x, y, z)

المعطيات
نقطة (x_0, y_0, z_0)
شعاع توجيه
(a, b, c)

المعطيات
نقطتين A, B
$\vec{v} = \vec{AB}$
النقطة A أو B

المعطيات.
معادلتي مستويين.
(المعادلة الوسيطية للفصل المشترك)
مستويين غير متوازيين
المشترك لمعادلتي
المستويين P و Q
المعادلة الوسيطية للفصل
المشترك

مستويين

$P: 2x + y - z + 1 = 0$
$Q: x - y - 2z + 2 = 0$

$3x - 3z + 3 = 0 \quad \div 3$

$x - z + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 + z$

نعوض في 1

$-2 + 2z + y - z + 1 = 0$

$y = 1 - z$

بفرض $z = t$

$x = -1 + t$
$y = 1 - t$
$z = t$

$t \in \mathbb{R}$

الوضع النسبي لمستقيمين

نوجد $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$

غير مرتبطة خطيا

مرتبطة خطيا فالمستقيمان متوازيان والمستقيمان في مستوٍ واحد.

متخالفان لا يقعان في مستوٍ واحد.

متقاطعان يقعان في مستوٍ واحد.

مثال: $A(1,2,3)\ B(3,2,1)$

$$d\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

اثبت ان (AB) و d متقاطعان وجد نقطة التقاطع

بين فيما اذا كانا منطبقان ام لا

نفرض $A \in d$

$2 = 1+t \Rightarrow t=1$

$1 = t$

$0 = -1+t \Rightarrow t=1$

$d \ni A$

اذن (AB) و d منطبقان

$A(2,1,0)\quad B(3,2,1)$

$$d\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

اثبت ان $d \parallel (AB)$

$\vec{u}_{AB} = \vec{AB}(1,1,1)$

$\vec{u}_d(1,1,1)$

مرتبطة خطيا اذن

$AB \parallel d$

غير مرتبطة خطيا فالمستقيمان متقا...

λ

$\lambda \in \mathbb{R}$

λ

بالمطابقة

1

2

3

3-2

1

تمرين

غير مرتبطان خطيا.

متخالفان: لا ينتميان إلى مستوٍ واحد.

متقاطعان: ينتميان إلى مستوٍ واحد.

مثال: $A(1,2,3)$ $B(3,2,1)$

$$d\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أثبت أن (AB) و d متقاطعان وجد نقطة التقاطع

$\vec{u}_{AB} = \vec{AB}(2,0,-2)$

$\vec{u}_d(1,-1,0)$

غير مرتبطان خطيا

إذن المستقيمان متقاطعان أو متخالفان

$x = x_B + a\lambda = 3+2\lambda$

$y = y_B + b\lambda = 2$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$z = z_B + c\lambda = 1-2\lambda$

بالمطابقة:

$1+t = 3+2\lambda$ (1)

$2-t = 2$ (2)

$3 = 1-2\lambda$ (3)

من (2) $t=0$

من (3) $\lambda=-1$

$\xrightarrow{(1)}$ $1+0 \stackrel{?}{=} 3-2$

$1=1$

إذن المستقيمان متقاطعان ولدينا نقطة التقاطع

نعوض $t=0$ في d

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad (1,2,3)$$

نقطة التقاطع.

الوضع النسبي لمستقيمين

نوجد $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$

مستقيمان متوازيان

المستقيمان متوازيان والمستقيمان في مستوٍ واحد.

$A(2,1,0) \quad B(3,2,1)$

$$d\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

استنتج أن $d \parallel (AB)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_{AB} = \vec{AB}(1,1,1) \\ \vec{u}_d(1,1,1) \end{array}\right\} \text{مستقيمان متوازيان إذن}$$

$AB \parallel d$

بيّن فيما إذا كانا منطبقين أم لا

نعوض A في d

$2 = 1 + t \Rightarrow t = 1$

$1 = t$

$0 = -1 + t \Rightarrow t = 1$

$d \ni A$

إذن (AB) و d منطبقان

غير مستقيمين متوازيين

متقاطعان: يقعان في مستوٍ واحد.

متخالفان: لا يقعان في مستوٍ واحد.

مثال: $A(1,2,3)\ B(3,2,1)$:

$$d\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أثبت أن (AB) و d متقاطعان وجد نقطة التقاطع

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_{AB} = \vec{AB}(2,0,-2) \\ \vec{u}_d(1,-1,0) \end{array}\right\} \text{غير متوازيين}$$

المستقيمان متقاطعان أو متخالفان

$x = x_B + a\lambda = 3 + 2\lambda$

$y = y_B + b\lambda = 2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$z = z_B + c\lambda = 1 - 2\lambda$

بالمطابقة:

$1 + t = 3 + 2\lambda$ (1)

$2 - t = 2$ (2)

$3 = 1 - 2\lambda$ (3)

من (2) $t = 0$

من (3) $\lambda = -1$

$\xrightarrow{(1)}$ $1 + 0 \overset{?}{=} 3 - 2$

$1 = 1$

المستقيمان متقاطعان ولإيجاد نقطة التقاطع

نعوض $t = 0$ في d مثلاً

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\} (1,2,3) \text{ نقطة التقاطع.}$$

دراسة وضع مستقيم مع مستوٍ.

① اثبت أن المستقيم d عمودي على P

① $\vec{n}_P$ مرتبط خطياً مع $\vec{u}_d$

② $\vec{u}_d$ عمودي مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي.

② اثبت أن المستقيم d يوازي P

① $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0$

② $\vec{u}_d$ مرتبط خطياً مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي.

دراسة الوضع النسبي لـ d مع P.

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي P فنحصل على معادلة من الشكل

$$at = b$$

- $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$: للمعادلة حل وحيد، المستقيم يقطع المستوي بنقطة وحيدة
- $a = b = 0$: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول، المستقيم محتوى في المستوي
- $a = 0$, $b \in \mathbb{R}^*$: المعادلة مستحيلة الحل، المستقيم موازٍ للمستوي.

$dist > R$

الشكل النموذجي

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$

ونصف قطرها R

وتستخدم لإيجاد معادلة الكرة

حدد معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(2,-1,1)$ وتمر بالنقطة $A(0,2,1)$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=R^2$$

نعوض A

$$4+9+0=R^2$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=13$$

$$A\Omega=R$$

الشكل العام

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$$

$$R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$$

موجب: كرة

سالب: مجموعة خالية

صفر: نقطة

إذا عيّن مجموعة النقط

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$$

$a=-2 \quad b=4 \quad c=0 \quad d=-4$

$$\Omega(1,-2,0)$$

$$R^2=1+4+0+4=9$$

تمثل كرة مركزها Ω ونصف قطرها

$$R=3$$

$S: x^2+y^2+z^2=6$

اثبت ان المستوى P يقطع الكرة S
وجد نصف قطر دائرة التقاطع

$$dist(O, P) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{0+0+1}} = 2$$

$$R = \sqrt{6} > dist = 2$$

المستوى يقطع الكرة

$$r^2 = R^2 - dist^2$$

$$= 6 - 4 = 2$$

$$r = \sqrt{2}$$

وضع مستوى مع كرة

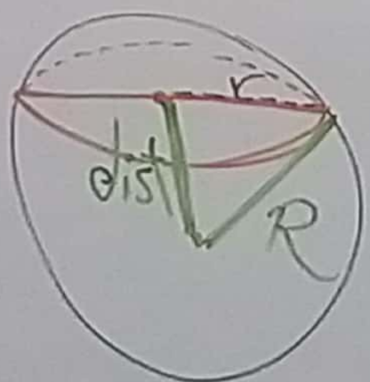
نحسب البعد بين مركز الكرة عن المستوى
ثم نقارن dist مع نق

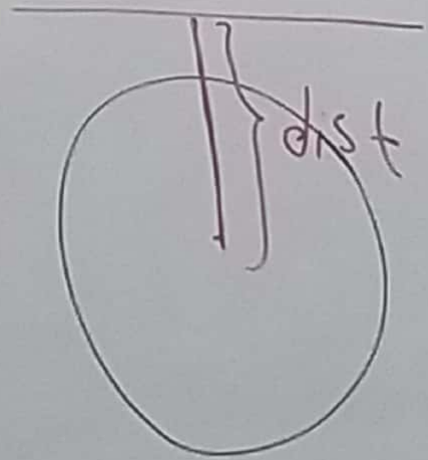
$dist < R$
المستوى يقطع الكرة
محدثاً عليها دائرة
نصف قطرها r

$r^2 = R^2 - dist^2$

$dist = R$
المستوى يمس
الكرة

$dist > R$
المستوى
خارج
الكرة





معادلة الكرة

الشكل النموذجي

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$

نصف قطرها R

ونستخدم لإيجاد معادلة الكرة

جد معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(2,-1,1)$ ، تمر بالنقطة $A(0,2,1)$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=R^2$

نعوض A

$4+9+0=R^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=13$

$A\Omega=R$

الشكل العام

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

كرة: مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$

$R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$ موجب

سالب: مجموعة خالية

صفر: نقطة

$1,2$ عين مجموعة النقط

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$

$a=-2$ $b=4$ $c=0$ $d=-4$

$\Omega(1,-2,0)$

$R^2=1+4+0+4=9$

تمثل كرة مركزها Ω ، نصف قطرها $R=3$

وضع مستوٍ و كرة

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي

ونقارن $dist$ مع R

$dist<R$

المستوي يقطع الكرة

بدائرة يطلق عليها دائرة

نصف قطرها r

$r^2=R^2-dist^2$

$dist=R$

المستوي مماس

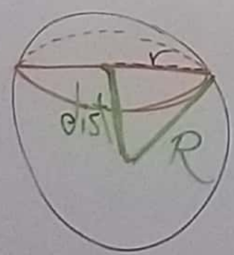
الكرة

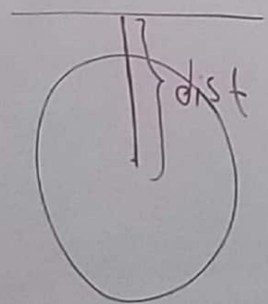
$dist>R$

المستوي

خارج

الكرة





مثال

$P: z=2$

$S: x^2+y^2+z^2=6$

اثبت أن المستوي P يقطع الكرة S

وجد نصف قطر دائرة التقطع

$dist(o,P)=\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{0+0+1}}=2$

$R=\sqrt{6}>dist=2$

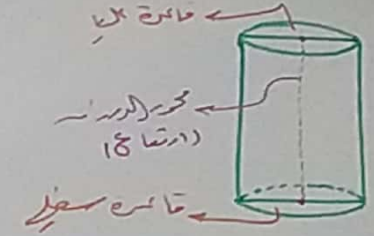
المستوي يقطع الكرة

$r^2=R^2-dist^2$

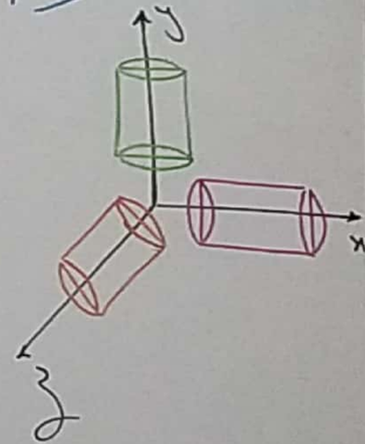
$=6-4=2$

$r=\sqrt{2}$

معادلة الاسطوانة



ناتج عن دوران مستطيل حول أحد محاوره.



محور الدوران Ox

$$y^2+z^2=R^2$$

$$x_{\text{سفلية}} \le x \le x_{\text{علوية}}$$

$$h = x_{\text{علوية}} - x_{\text{سفلية}}$$

محور الدوران Oy

$$x^2+z^2=R^2$$

$$y_{\text{سفلية}} \le y \le y_{\text{علوية}}$$

$$h = y_{\text{علوية}} - y_{\text{سفلية}}$$

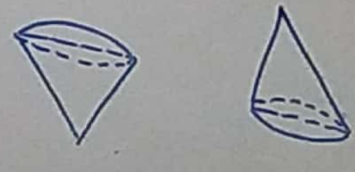
محور الدوران Oz

$$x^2+y^2=R^2$$

$$z_{\text{سفلية}} \le z \le z_{\text{علوية}}$$

$$h = z_{\text{علوية}} - z_{\text{سفلية}}$$

معادلة المخروط



Ox

$$y^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}x^2$$

$$x_{\text{سفلية}} \le x \le x_{\text{علوية}}$$

Oy

$$x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2$$

$$y_{\text{سفلية}} \le y \le y_{\text{علوية}}$$

Oz

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2$$

$$z_{\text{سفلية}} \le z \le z_{\text{علوية}}$$

البعد النقطي

لبعد نقطة عن مستقيم في الهندسة الفراغية

عن مستوٍ

في الهندسة المستوية

لبعد نقطة عن مستقيم

$\times A(x_0, y_0, z_0)$

d — $K \quad K \quad K \quad K \quad K$

① نكتب ما ت...
بالصيغة (الق...

$(x-b)^2 + c$

② نختار أصغ...
ونبدل ...

دعم للبعد
المستقيم

① نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم إن لم تكن موجودة.

② نختار نقطة K من المستقيم
نكتب إحداثيات K بدلالة
المعادلات الوسيطية.

③ نحسب المسافة بين
النقطتين A و K

$A(x_0, y_0)$

$d: ax + by + c = 0$

$$dist(A, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$A(x_0, y_0, z_0)$

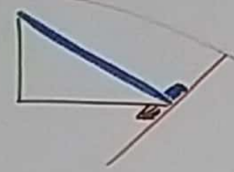
$P: ax + by + cz + d = 0$

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$dist = 0 \Leftarrow$ تنتمي النقطة إلى المستوي.

البعد النقطي

البعد النقطة عن مستقيم في الهندسة الفراغية



البعد النقطة عن مستقيم

$\times A(x_0, y_0, z_0)$

d — K K K K K

① نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم إن لم تكن موجودة.

② نختار نقطة K من المستقيم بحيث إحداثيات K هي المعادلات الوسيطية.

③ نحسب المسافة بين النقطتين A و K

$AK = \sqrt{\quad}$

④ نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية.

$AK = \sqrt{a(t-b)^2 + c}$

⑤ نختار أقصر مسافة وذلك من أجل $\boxed{t = b}$

$AK = \sqrt{c}$

هو البعد النقطة A عن المستقيم.

البعد النقطة عن فصل مشترك.

المستويان متقاطعان مع تعامد

نحسب d_1 بعد النقطة عن P.

نحسب d_2 " " عن Q.

ونحسب من مبرهنة فيثاغورث بالاعتماد على نظرية الأعمدة الثلاثة

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

المستويان متقاطعان دون تعامد

نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك ثم نتابع بنفس خطوات حساب البعد النقطة عن مستقيم

AC

d: a

dist

البعد بين مستوي

$A(x_0, y_0, z_0)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$dist = 0$ بان النقطة تنتمي للمستوي.

البعد نقطة عن مستقيم

في الهندسة المستوية

$A(x_0, y_0)$

$d: ax + by + c = 0$

$$dist(A, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

في الهندسة الفراغية

البعد نقطة عن مستقيم

$A(x_0, y_0, z_0)$

d — $K \quad K \quad K \quad K \quad K$

1) نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم إن لم تكن موجودة.

2) نختار نقطة K من المستقيم بإحداثيات K هي المعادلات الوسيطية.

3) نحسب المسافة بين النقطتين AK

$AK = \sqrt{\quad}$

4) نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية

$AK = \sqrt{a(t-b)^2 + c}$

5) نختار أصغر مسافة وذلك من أجل $t = b$

$AK = \sqrt{c}$

هو بعد النقطة A عن المستقيم.

البعد نقطة عن فصل مشترك.

المستويان متقاطعان دون تعامد

نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك ثم نتابع بنفس خطوات حساب البعد نقطة عن مستقيم

المستويان متقاطعان مع تعامد

نحسب d_1 بعد النقطة P عن ...

نحسب d_2 .. .. .. عن Q.

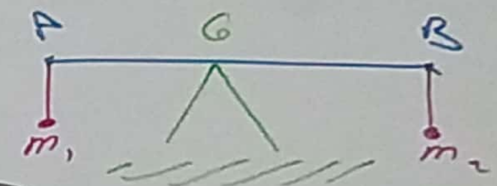
ونحسب من مبرهنة فيثاغورث مباشرة من نظرية الأعمدة الثلاثة

$d^2 = d_1^2 + d_2^2$

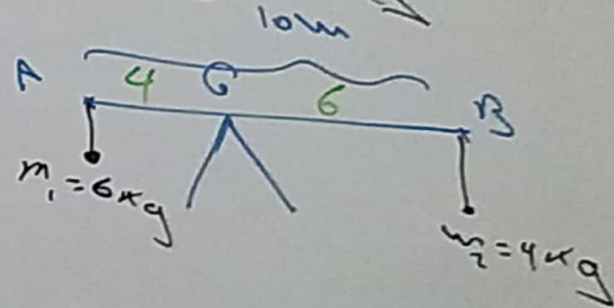
مركز الابعاد المتناسبة

اي مركز التوازن.

فيزياء: قانون ارخميدس في التوازن



$$m_1 \times AG = m_2 \times GB$$



رياضياً: $m_1 = \alpha$ $\quad m_2 = \beta$

$\alpha \overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{GB}$

$\alpha \overrightarrow{AG} - \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

العلاقة الشعاعية لمركز الابعاد المتناسبة.

تعريف: G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha)(B,\beta)$ اذا تحقق الشرطان

1) $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

2) $\alpha + \beta \neq 0$

عين α, β التي تجعل G م.ا.م ل $(A,\alpha)(B,\beta)$ في كل من:

1) $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 2 \quad \beta = -1$

2) $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 2 \quad \beta = -3$

3) $2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha + \beta = 0$ خطأ لا

4) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

G

$3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 1 \quad \beta = 2$

تعين موضع

G م.ا.م ل (

B

A

تمرين: ع

B