الثالث الثانوي العلمي

أوراق جلسة المراجعة في

التحليل

مراجعة نموذجية شاملة للمنهاج تساعد الطالب على فهم وتثبيت المعلومات

من خلال عرض منظم ومترابط لأفكار الكتاب غني بالأسئلة والتدريبات الامتحانية

إعداد المدرس:

علي سالم - أحمد الضبع

ايهم تميم

مؤسسة المتفوقين التربوية

بكالوريا & تاسع مؤسسة المتفوقين التربوية

www.mutafwkenschool.com

المنصة التعليمية - مؤسسة المتفوقين التربوية

المتتاليات:

التمرين ①: $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية تحقق $U_n = 3\cdot 2^n$.

والمتتالية $(V_n)_{n\ge0}$ فيها $V_n = U_{2n}$

①: أثبت أن V_n هندسية.

②: استنتج المجموع $S_n = U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

الحل: ①: $V_n = U_{2n} = 3\cdot 2^{2n}$

$= 3\cdot(2^2)^n = 3\cdot 4^n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3\cdot 4^{n+1}}{3\cdot 4^n} = \frac{3\cdot 4^n\cdot 4}{3\cdot 4^n} = 4$

فالمتتالية (V_n) هندسية وأساسها $\boxed{q=4}$

②: $S_n = U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

هنا نلاحظ أن الحدود ليست متعاقبة فيمكن كتابتها بالشكل

$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q} = V_1\,\frac{1-4^n}{1-4}$

$V_1 = 3\times 4 = 12 \Rightarrow$

$S_n = \frac{12}{-3}(1-4^n) = -4(1-4^n)$

$= -4 + 4^{n+1}$

التمرين ③: لتكن المتتالية $(S_n)_{n\ge1}$

$S_n = 1 + 2 + \dots + n$

①: احسب S_1, S_2, S_3

②: أثبت بالتدريج أن $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل: ①: $S_1 = 1$ ، $S_2 = 1+2 = 3$

$S_3 = 1+2+3 = 6$

②: نفرض القضية $E(n)$

نثبت صحة القضية $E(1)$

$L_1: S_1 = 1$

$L_2: \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

فالشرط الأول محقق

نفرض صحة القضية $E(n)$

ثم نثبت صحة القضية $E(n+1)$

أي علينا إثبات أن

$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

انطلاقاً من L_1:

$L_1: 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$

$L_1: S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = L_2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة

التمرين ②: لتكن المتتالية $(V_n)_{n\ge0}$ هندسية فيها

$V_2 = 8$ ، $V_5 = 64$

①: احسب q و V_0

②: اكتب عبارة V_n بدلالة n

③: احسب المجموع

$V_3 + V_4 + \dots + V_7$

التمرين ④: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ حسابية فيها

$U_1 = 5$ ، $U_3 = 9$

①: احسب U_0 ، r

②: اكتب عبارة U_n بدلالة n.

③: احسب المجموع

$U_2 + U_3 + \dots + U_7$

التمرين (5): أثبت بالتدريج أن

$(n+1)! \geq 3^{n-1}$ ، $n \geq 1$

نفرض القضية $E(n)$

نثبت صحة القضية $E(1)$

$2! \geq 3^0 \Rightarrow 2 \geq 1$

فالشرط الأول محقق.

نفرض صحة القضية $E(n)$

ونثبت صحة القضية $E(n+1)$

أي علينا إثبات أن

$(n+2)! \geq 3^n$

انطلاقاً من الفرض

$(n+1)! \geq 3^{n-1}$

نضرب الطرفين بـ $(n+2)$

$(n+2)\cdot(n+1)! \geq (n+2)\cdot 3^{n-1}$

$(n+2)! \geq 3\cdot 3^{n-1}$

لأن

$(n+2) \geq 3$

$\Rightarrow (n+2)! \geq 3^n$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة

التمرين (6): لتكن المتتالية

$u_n = 4^n+5$ ، $n \geq 0$

(1): أثبت أن جميع حدود u_n من مضاعفات العدد (3).

(2): أثبت أن (u_n) متزايدة تماماً

(3): احسب نهاية u_n ماذا تستنتج

الحل: نفرض القضية $E(n)$

نثبت صحة القضية $E(0)$

$u_0 = 4^0+5 = 6$

فالشرط الأول محقق لأن العدد (6) مضاعف للعدد (3).

نفرض صحة القضية $E(n)$

$u_n = 4^n+5 = 3k$ ، $k \in \mathbb{Z}$

ثم نثبت صحتها من أجل $(n+1)$

$u_{n+1} = 4^{n+1}+5 = 4^n\cdot 4+5 = (3k-5)\cdot 4+5$

$= 12k-15 = 3(4k-5)$

وهو من مضاعفات العدد (3).

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة.

(2): $u_{n+1} = 4^{n+1}+5 = 4^n\cdot 4+5$

$u_{n+1}-u_n = 4^n\cdot 4+5-4^n-5$

$4^n\cdot 4-4^n = 3\cdot 4^n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

(3): $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

وبالتالي المتتالية متزايدة.

التمرين (7): لتكن a و b و c ثلاث حدود متعاقبة وموجبة من متتالية هندسية. تحقق

$a\cdot c = 36$ ----- (1)

$a+b+c = 19$ ----- (2)

احسب a و b و c

الحل: بما أن a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن

$b^2 = a\cdot c \Rightarrow b^2 = 36$

$\Rightarrow b = -6$ مرفوض ، $b = 6$ مقبول

نعوض في (2) ⇐

$a+6+c = 19 \Rightarrow \boxed{a+c=13} \Rightarrow$

$\boxed{a = 13-c}$ --- (3)

بالتعويض في (1) ⇐

$(13-c)\cdot c = 36 \Rightarrow 13c-c^2 = 36$

$c^2-13c+36 = 0$

$(c-9)(c-4) = 0$

إما $c-9=0 \Rightarrow c=9 \Rightarrow a=4$

أو $c-4=0 \Rightarrow c=4 \Rightarrow a=9$

سلسلة المعرفين التربوية

التمرين 8: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$U_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

1: احسب نهاية U_n وماذا تستنتج

2: أثبت أن $0 \leq U_n \leq 2$

الحل: I:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

إذاً المتتالية متقاربة نحو الصفر

2: نفرض $U_n = f(n)$ وندرس تغيراته على المجال $[0, +\infty[$

$$f(0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$$

$$f'(n) = \frac{-2}{2\sqrt{n+1}\cdot(n+1)} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\cdot(n+1)} < 0$$

n	0		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	
$f(n)$	2	$\searrow$	0

إذاً $0 \leq U_n \leq 2$

فهي محدودة.

التمرين 9:

$$U_n = \frac{2n-1}{n+1} \qquad n \geq 0$$

1: احسب نهاية U_n

2: عين n_0 بشرط $n > n_0$ إذا علمت أن $U_n \in]1{,}9\ ,\ 2{,}1[$

3: أثبت أن $-1 \leq U_n \leq 2$

التمرين 10:

$$U_{n+1} = \sqrt{6+U_n} \quad , \quad U_0 = 1$$

1: أثبت أن $0 \leq U_n \leq 3$

2: أثبت أن U_n متزايدة تماماً

3: استنتج أن U_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل: 1: نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحة القضية $E(0)$

$$0 \leq U_0 = 1 \leq 3$$

والشرط الأول محقق.

* نفرض صحة القضية $E(n)$

ثم نثبت صحة $E(n+1)$

انطلاقاً من الفرض

$$0 \leq U_n \leq 3$$

$$6 \leq 6+U_n \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{6+U_n} \leq 3$$

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة.

2: نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحة القضية $E(0)$

$$U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = \sqrt{7} > 1$$

فالشرط الأول محقق

* نفرض صحة القضية $E(n)$ ثم نثبتها من أجل $E(n+1)$

أي علينا إثبات أن $U_{n+2} > U_{n+1}$

من الفرض

$$U_{n+1} > U_n$$

$$6+U_{n+1} > 6+U_n$$

$$\sqrt{6+U_{n+1}} > \sqrt{6+U_n}$$

$$\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة.

3: طالما المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة.

لحساب نهايتها نشكل التابع $U_{n+1} = f(x)$ ونحل المعادلة $f(x) = x$ حيث ℓ هو الحل الوحيد للمعادلة و $\ell \in [0, 3]$

$f(x)=\sqrt{6+x} \Rightarrow x=\sqrt{6+x}$

$\Rightarrow x^2=6+x \Rightarrow x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

إما $x=3$ مقبول

أو $x=-2$ مرفوض

$\Rightarrow \ell=3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n=3$

التمرين 11

$U_{n+1}=2U_n-3$, $U_0=2$

①: احسب U_1 , U_2 , U_3

②: أثبت أن U_n متناقصة تماماً.

③: لتكن لدينا المتتالية $V_n=U_n-3$

Ⓐ: أثبت أن V_n هندسية

Ⓑ: اكتب عبارة V_n و U_n بدلالة n.

Ⓒ: احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج

الحل: ①:

$U_1=1$

$U_2=-1$

$U_3=-5$

②: نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحة القضية $E(0)$

$U_1<U_0$

والشرط الأول محقق

* نفرض صحة القضية $E(n)$

ثم نثبت صحة القضية $E(n+1)$

أي المطلوب إثبات

$U_{n+2}<U_{n+1}$

من الفرض لدينا

$U_{n+1}<U_n$

$2U_{n+1}<2U_n$

$2U_{n+1}-3<2U_n-3 \Rightarrow U_{n+2}<U_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً قضية $E(n)$ محققة

③: $V_n=U_n-3$

A: $V_{n+1}=U_{n+1}-3$

$\Rightarrow V_{n+1}=2U_n-6=2(U_n-3)$

$\Rightarrow \dfrac{V_{n+1}}{V_n}=2$

فالمتتالية هندسية أساسها $q=2$

B: $V_n=V_0\cdot q^n$

حيث $V_0=U_0-3=-1$

$\Rightarrow V_n=-(2)^n$

$\Rightarrow \boxed{U_n=-(2)^n+3}$

Ⓒ: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\lim\limits_{n\to+\infty} -(2)^n=-\infty$

فهي متباعدة نحو $(-\infty)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty} -(2)^n+3=-\infty$

فهي متباعدة.

التمرين 12

$U_{n+1}=\dfrac{3}{U_n+2}$, $U_0=2$

$t_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+3}$

1: أثبت أن $U_n>0$

2: أثبت أن t_n هندسية

3: اكتب عبارة U_n , t_n بدلالة n واحسب نهاية كلاً منهما.

الحل: ①: نفرض القضية $E(n)$

- نثبت صحة القضية $E(0)$

$U_0=2>0$

والشرط الأول محقق

- نفرض صحة القضية $E(n)$

ونثبت صحة $E(n+1)$

انطلاقاً من الفرض $U_n > 0$

$$\Rightarrow U_n + 2 > 0 \Rightarrow \frac{3}{U_n+2} > 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > 0$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة

:2

$$t_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\frac{3}{U_n+2}-1}{\frac{3}{U_n+2}+3}$$

$$= \frac{3-U_n-2}{3+3U_n+6} = \frac{1-U_n}{3(U_n+3)}$$

$$= \frac{-1}{3}\cdot\frac{U_n-1}{U_n+3} = -\frac{1}{3}\cdot t_n$$

إذاً t_n هندسية وأساسها $(q = -\frac{1}{3})$

:3

$$t_n = t_0 \cdot q^n$$

$$t_0 = \frac{U_0-1}{U_0+3} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

- عبارة (U_n).

$$t_n = \frac{U_n-1}{U_n+3} \Rightarrow$$

$$t_n\cdot(U_n+3) = U_n - 1 \Rightarrow$$

$$t_n \cdot U_n + 3t_n = U_n - 1 \Rightarrow$$

$$t_n \cdot U_n - U_n = -3t_n - 1$$

$$U_n(t_n - 1) = -3t_n - 1 \Rightarrow$$

$$U_n = \frac{-3t_n-1}{t_n-1} = \frac{3t_n+1}{1-t_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = \frac{\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+1}{1-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}}$$

- طالما t_n هندسية وأساسها $q = -\frac{1}{3}$

$$-1 < -\frac{1}{3} < 1$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{5}\times 0 = 0$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{0+1}{1-0} = 1$$

التمرين (13):

$$X_n = \frac{3^n-2^n}{3^n-1}$$

ادرس تقارب X_n.

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{\infty-\infty}{\infty}$$ ح ع ت

$$X_n = \frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

وطالما

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \quad \text{و} \quad -1 < \frac{2}{3} < 1$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

وأيضاً

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} X_n = 1$$

التمرين (14): لتكن المتتاليات

$$U_n = \frac{n+1}{n+3} \qquad n \geq 0$$

$$V_n = \frac{n+2}{n+1} \qquad n \geq 0$$

أثبت أن U_n و V_n متجاورتين واحسب النهاية المشتركة.

الحل:

$f_1(x)=\frac{x+1}{x+3}$

f اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$

$f_1'(x)=\frac{2}{(x+3)^2}>0$

إذا U_n متزايدة تماما.

$f_2(x)=\frac{x+2}{x+1}$

$f_2'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}<0$

V_n متناقصة تماما.

$U_n-V_n=\frac{n+1}{n+3}-\frac{n+2}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=1-1=0$

وبالتالي U_n و V_n متجاورتين

وبالتالي

$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=1$

التمرين 15:

$f(x)=x^2-4x+6$ $\quad D_f:\mathbb{R}$

1: ادرس تغيرات.

2: لتكن المتتالية المعرفة وفق

$U_0=5$

$U_{n+1}=U_n^2-4U_n+6$

A: أثبت أن $U_n\geq 4$

B: استنتج أن $U_{n+1}-U_n=(U_n-3)(U_n-2)$

C: استنتج أن U_n متزايدة تماما

الحل: التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \boxed{x=2}$

$\Rightarrow f(2)=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2: A: نفرض العقضية $E(n)$

* نثبت صحة العقضية $E(0)$

$U_0=5\geq4$

والشرط الأول محقق

* نفرض صحة العقضية $E(n)$

$U_n\geq4$

* نثبت صحة $E(n+1)$

انطلاقا من الفرض

$U_n\geq 4$

حيث يمكننا كتابة

$U_{n+1}=(U_n^2-4U_n+4)-4+6$

$=(U_n-2)^2+2$

$U_n\geq4\Rightarrow$

$U_n-2\geq2$

$\Rightarrow(U_n-2)^2\geq4$

$\Rightarrow(U_n-2)^2+2\geq6$

$\Rightarrow U_{n+1}\geq4$

والعقضية $E(n+1)$ محققة إذا $E(n)$ صحيحة

B:

$U_{n+1}-U_n=U_n^2-4U_n+6-U_n$

$=U_n^2-5U_n+6=(U_n-3)(U_n-2)$

C: طالما وجدنا أن $U_n\geq4$

فإن $U_n-3>0$

$U_n-2>0$

$\Rightarrow (U_n-3)(U_n-2)>0$

إذا

$U_{n+1}-U_n>0$

وبالتالي U_n متزايدة.

التمرين (16):
$f(x) = x^2 - 2x + 2$ ، $D_f : \mathbb{R}$

① : ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

② : لتكن لدينا المتتالية المعرفة وفق
$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ ، $u_0 = \frac{3}{2}$

Ⓐ : أثبت أن
$1 \leq u_n \leq 2$

Ⓑ : أثبت أن
$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$
واستنتج أن المتتالية u_n متناقصة
ثم استنتج تقاربها.

التمرين (17): لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة:
$u_0 = 1$
$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$
والمتتالية v_n المعرفة بالعلاقة
$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$

① : أثبت أن $u_n > 0$
② : أثبت أن v_n حسابية
③ : اكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n
④ : احسب نهاية u_n و v_n

الحل: ① : نفرض القضية $E(n)$
* نثبت صحة القضية $E(0)$
$u_0 = 1 > 0$
* نفرض صحة القضية $E(n)$
ونثبت صحتها من أجل $E(n+1)$
أي $u_{n+1} > 0$.
من الفرض لدينا $u_n > 0 \Leftarrow$
$2u_n + 1 > 0$

$\Rightarrow \frac{u_n}{2u_n + 1} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$
والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة

② :
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} + 1$$
$$= \frac{2u_n + 1}{u_n} + 1$$
$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n+1}{u_n} + 1 - \frac{1}{u_n} - 1$$
$$= \frac{2u_n}{u_n} = 2$$
فالمتتالية v_n حسابية وأساسها $\boxed{r = 2}$

③ :
$v_n = v_0 + n \cdot r$
$v_0 = \frac{1}{u_0} + 1 = 2$
$\Rightarrow \boxed{v_n = 2 + 2n}$

- كتابة عبارة u_n.
$v_n = \frac{1}{u_n} + 1 \Rightarrow v_n - 1 = \frac{1}{u_n}$
$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1} \Rightarrow$
$$\boxed{u_n = \frac{1}{1 + 2n}}$$

④ :
$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ متباعدة
$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ متقاربة

التمرين (18): لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}$$
① : أثبت أن المتتالية u_n متزايدة
② : أثبت بالتدريج أن
$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

(٧): ماذا تستنتج بالنسبة لـ U_n

الحل: (١):

$$U_{n+1} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً.

(٢): نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحة القضية $E(1)$

أي علينا إثبات أن

$$U_1 \le 2-\frac{1}{1} \Rightarrow 1\le 1$$

والشرط الأول محقق.

* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$U_n \le 2-\frac{1}{n}$$

* نثبت صحة القضية $E(n+1)$

أي علينا إثبات أن

$$U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n+1}$$

انطلاقاً من الفرض:

$$U_n \le 2-\frac{1}{n}$$

نضيف للطرفين $\frac{1}{(n+1)^2}$

$$U_n+\frac{1}{(n+1)^2} \le 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n+1}+\frac{n^2+n-n^2-2n-1+n}{n(n+1)^2}$$

$$U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1}\le 2-\frac{1}{n+1}$$

لأن $\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ محققة

(٣): طالما كانت

$$U_n \le 2-\frac{1}{n}$$

وبالتالي هي محدودة من الأعلى بالعدد (2).

وطالما هي متزايدة. فهي متقاربة.

التمرين (15):

$$U_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

(1): أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

(2): أثبت أن العدد (3) راجح على المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$

(3): أثبت أن U_n متقاربة.

الحل: (1): نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحتها من أجل $\boxed{n=1}$

$$\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^0}\Rightarrow 1\le 1$$

فالشرط الأول محقق

* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

* نثبت صحة القضية $E(n+1)$

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

انطلاقاً من الفرض

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{(n+1)}$

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\le\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

والتجنية $E(n+1)$ صحيحة إذا $E(n)$ تحققت.

②: $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$U_n \le 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$U_n \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$U_n \le 1 + q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1}$ تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول (1)

$U_n \le 1 + a \, \frac{1-q^n}{1-q}$

$U_n \le 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$U_n \le 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$U_n \le 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$U_n \le 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0}$

$\Rightarrow U_n \le 3$

فالعدد (3) راجح على المتتالية.

③: $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة.

التمرين ⑳: لدينا المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة

$U_n = 3n+1$

①: أثبت أن المتتالية U_n حسابية

②: احسب

$U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$

التمرين ㉑: ليكن لدينا المتتاليتين $(U_n)_{n\ge1}$, $(V_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق:

$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$V_n = U_n + \frac{1}{n}$

أثبت أنه U_n ، V_n متجاورتين.

الحل:

$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$
$(2n+2) \quad (2n+1)$

$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

والمتتالية U_n متزايدة تماما.

$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n}$

$= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
$(n) \quad (n2(2n+1)) \quad (2n+1)(2n+2)$

$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-4n-2}{n(2n+1)(2n+2)} =$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{-n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

والمتتالية متناقصة.

$$V_n - U_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$$

فالمتتاليتين متجاورتين.

التمرين 22: ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم لتكن المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$U_0 = 2\cos\theta$ $\quad$ $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

1: احسب U_1 و U_2

2: أثبت بالتدريج أن $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

الحل: 1:

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2\cdot(2\cos^2\frac{\theta}{2})}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\boxed{U_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}}$$

2: نفرض القضية $E(n)$

* نثبت صحة القضية $E(0)$

$$U_0 = 2\cos(\frac{\theta}{2^0}) = 2\cos\theta$$

والشرط الأول محقق

* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$$

* نثبت صحة القضية $E(n+1)$

أي علينا إثبات أن

$$U_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$$

حيث لدينا

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos(\frac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n}))}$$

$$= \sqrt{2(2\cos^2(\frac{\theta}{2^n\cdot 2}))}$$

$$= 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$$

والقضية $E(n+1)$ إذاً $E(n)$ محققة.

التمرين 23: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق

$$U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

1: أثبت أن U_n هندسية

2: أثبت أن المتتالية متناقصة

3: ادرس تقارب المتتالية U_n

الحل: 1:

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2^n.2}{3^n.3^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n.2}{3^n.3^2}\cdot\frac{3^n.3}{2^n} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

2: بما أن $q<1$ فالمتتالية متناقصة

3:

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

$$\Rightarrow U_n = (\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{3}$$

وبما $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$$

فالمتتالية متقاربة نحو الصفر.

التمرين 24: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية وفق $u_1=1$ ، $u_3=2$ المطلوب

احسب أساس المتتالية الحسابية r

اكتب عبارة u_n

احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\dots+10$

الحل: u_n متتالية حسابية

$u_n=u_m+(n-m)r$

$u_3=u_1+(3-1)r$

$2=1+2r \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

$u_n=u_1+(n-1)r$

$u_n=1+(n-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\dots+10$

$S=u_0+u_1+\dots+u_{20}$

$S=\frac{(u_0+u_{20})\times 20}{2}$

$S=\frac{(\cancel{\frac{1}{2}}+10)(20)}{2}=\frac{10+200}{2}$

$S=105$

التمرين 25: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجيا وفق $u_0=2$ ،

$u_n=\frac{3}{4}u_n+2$

أثبت $u_n\leq u_{n+1}<8$

استنتج أن u_n متقاربة واحسب نهايتها

أثبت أن $v_n=u_n-8$ هندسية

التمرين 26: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n=2^{3n}-1$ أثبت أن u_n متزايدة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

أثبت أن كل حد من المتتالية u_n هو مضاعف للعدد 7

التمرين 27: f تابع معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

أثبت أن f متزايد

نعرف المتتالية $u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+1}$

$u_0=2$

أثبت أن $1<u_{n+1}<u_n$

احسب نهاية u_n

الحل:

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

f متزايد

$E(n): 1<u_{n+1}<u_n$

$E(0): 1<u_1<u_0 \Rightarrow 1<\frac{4}{3}<2$

$E(n): 1<u_{n+1}<u_n$

نبرهن من أجل $n+1$

$E(n+1): 1<u_{n+2}<u_{n+1}$

نبدأ من الفرض

$1<u_{n+1}<u_n$

$f(1)<f(u_{n+1})<f(u_n)$

$1<2<u_{n+2}<u_{n+1}$

أي $1<u_{n+2}<u_{n+1}$ أي المطلوب

u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى

نهايتها حل المعادلة $f(x)=x$

$\frac{2x}{x+1}=x \Rightarrow 2x=x^2+x$

$x^2-x=0 \Rightarrow x=0$ مرفوض

$x=1$ مقبول ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

تمرين 28: نعرف المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$

$x_0=3$ ، $x_n=\frac{1}{3}x_n-2$

ونعرف المتتالية $u_n=\ln(x_n+3)$

أثبت أن u_n حسابية

نعرف $y_n=x_n+3$ هندسية

اكتب عبارة y_n و x_n

احسب $S_n=y_0+y_1+\dots+y_n$

احسب $S'_n=x_0+x_1+\dots+x_n$

الحل:

$u_n=\ln(x_n+3)$

$u_{n+1} = \ln(x_{n+1}+3)$

$u_{n+1} = \ln(\frac{1}{3}x_n - 2 + 3) = \ln(\frac{1}{3}x_n + 1)$

$u_{n+1} = \ln\frac{1}{3} + \ln(x_n+3)$

$u_{n+1} = -\ln 3 + u_n$

$u_{n+1} - u_n = -\ln 3 = r$

إذا u_n حسابية

$y_n = x_n + 3$

$y_{n+1} = x_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}x_n - 2 + 3$

$y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 1 = \frac{1}{3}(x_n+3)$

$y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n$

y_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$y_n = y_0 q^n = 6(\frac{1}{3})^n$

$x_n = y_n - 3 = 6(\frac{1}{3})^n - 3$

$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

$S_n = y_0 \times \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 6\left[\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right]$

$S_n = 9\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$

إضافة إلى أن S_n محدودة

$S_n \le 9$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 9$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$S'_n = (y_0-3) + (y_1-3) + \dots + (y_n-3)$

$S'_n = (y_0 + y_1 + \dots + y_n) + (\underbrace{-3-3-\dots-3}_{n+1 \text{ مرة}})$

$S'_n = 9\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] + (-3)(n+1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$

تمرين 29

$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$

أثبت أن $\frac{2n-1}{3n} \le u_n \le \frac{2n+1}{3n}$

احسب نهاية u_n

$-1 \le (-1)^n \le 1$

$2n-1 \le 2n+(-1)^n \le 2n+1$

نقسم على $3n$

$\frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n+(-1)^n}{3n} \le \frac{2n+1}{3n}$

$\frac{2n-1}{3n} \le u_n \le \frac{2n+1}{3n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3n} = 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n} = 1$

تابع الحل ص 130

تمرين 30

$u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

ادرس اطراد المتتالية واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

نعرف $x_n = \frac{u_n}{n}$ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

الحل:

$u_n = f(n)$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ على المجال $[0,+\infty[$

f متزايدة على $[0,+\infty[$

إذا u_n متزايدة

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ، u_n متباعدة

$x_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n^2+1}{n^2+n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

x_n متقاربة نحو 1

تمرين 31

$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$ ، $n \ge 4$

أثبت أن $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$

نعرف $v_n = \frac{-1}{n}$ أثبت أن u_n ، v_n متجاورتان

$u_n = f(n)$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$

$f'(x) = \frac{-2x+5}{(x^2-5x+6)^2}$ معرفة على $[4,+\infty[$

$f'(x) < 0$ متناقصة إذا

تمرين 32 : $\frac{24}{144}$

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

$$K \times m \leq U_n \leq K \times M$$

K عدد الحدود $= n$

m أصغر حد $m = \frac{n}{n^2+n}$

M أكبر حد $M = \frac{n}{n^2+1}$

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

$$f'(x) = \frac{-2x+5}{(x^2-5x+6)}$$

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

f متناقصة ومحدودة

إذاً U_n متناقصة و $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

$$V_n = \frac{-1}{n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

V_n متزايدة .

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0 \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

U_n و V_n متجاورتان

تمرين 33 : المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ معرفة

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ أثبت أن $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

واستنتج أنها متقاربة

نعرف

$$V_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

اكتب عبارة بسيطة لـ V_n واحسب نهايتها

الحل :

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$U_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

$$U_n = 1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$$

$$U_x = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \infty$$

اوجد تابعاً أصلياً

① $f(x) = \cos^2 x$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

② $f(x) = \sin^2 x$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

③ $f(x) = \tan^2 x$

$f(x) = 1 + \tan^2 x - 1$

$F(x) = \tan x - x$

④ $f(x) = \cos 3x \sin x$

$f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin 4x - \sin 2x\right]$

$F(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

اوجد تابعاً أصلياً يحقق الشرط المعطى

(يعني التكامل)

① $f(x) = \cos 3x \cos x$ $\quad F(0) = 1$

$f(x) = \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 2x\right]$

$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]$

$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$F(0) = 1$ $\quad C = 1$

$F(x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + 1$

② $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ $\quad F(1) = 2$

$f(x) = (3-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$= (-2x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2}(-2x+3)^{-\frac{1}{2}}(-2)$

$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{(-2x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$= -\sqrt{-2x+3} + C$

$F(1) = 2 \Rightarrow -\sqrt{1} + C = 2$

$C = 3$

$F(x) = -\sqrt{-2x+3} + 3$

$1 \rightarrow$ التكاملات

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\, dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 x}\, dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x|\, dx$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x \, dx$$

$$= \left[2\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left[2\cos 2\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$= 2 - 0 = 2$$

$$I = \int_{-2}^{2} |x^2 - 4x| \, dx$$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$ إما $x = 0$ أو $x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$I = \int_{-2}^{0} (x^2 - 4x)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{8}{3} - 8\right)\right] + \left[-\frac{8}{3} + 8\right]$$

$$= 16$$

تمرين: $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ ، $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

١) احسب J ، $I+J$ ثم استنتج I

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln(1)\right] = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

$$I + J = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$I + J = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

تمرين ٣: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

١) عين a, b, c ليكون

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

٢) أوجد $F(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a + bx - b + c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 + (b-2a)x + a - b + c}{(x-1)^2}$$

$$x^2 = ax^2 + (b-2a)x + a - b + c$$

$a = 1$ ، $b - 2a = 0$ ، $b = 2$

$a - b + c = 0$

$1 - 2 + c = 0$ ، $c = 1$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = 1 + 2\cdot\frac{1}{x-1} + (x-1)^{-2}$$

$$F(x) = x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}$$

$$= x + 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}$$

تمرين: احسب التكاملات

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_0^1$$

$$= \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}\right)$$

$$I=\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx$$

$$=\int_2^3 \frac{2}{x-1}\,dx+\int_2^3 1\,dx$$

$$=2\Big[\ln(x-1)\Big]_2^3+\Big[x\Big]_2^3$$

$$=2\Big[\ln 2-\ln(1)\Big]+\Big[3-2\Big]$$

$$=2\ln 2+1$$

مثال:

تحقق ان $0<x<a \Leftarrow \frac{1}{a+1}\le\frac{1}{x+1}\le 1$

- استنتج ان

$$\frac{a}{a+1}\le \ln(1+a)\le a$$

حيث $a>0$

الحل: $0<x<a$ نضيف 1

نجد $1\le x+1\le 1+a$

$$1\ge \frac{1}{x+1}\ge\frac{1}{1+a}$$

$$\frac{1}{a+1}\le\frac{1}{x+1}\le 1$$

$$\int_0^a \frac{1}{a+1}\,dx\le\int_0^a\frac{1}{x+1}\,dx\le\int_0^a 1\,dx$$

$$\Big[\frac{x}{a+1}\Big]_0^a\le\Big[\ln(x+1)\Big]_0^a\le\Big[x\Big]_0^a$$

$$\frac{a}{a+1}\le\ln(a+1)\le a$$

$$I=\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$$

$$=\frac14\int_1^2\frac{4x^3}{x^4+2}\,dx$$

$$=\frac14\Big[\ln(x^4+2)\Big]_1^2$$

$$=\frac14\Big[\ln 18-\ln 3\Big]$$

$$=\frac14\ln 6$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\,dx$$

$u=x \qquad u'=1$

$v'=\sin x \qquad v=-\cos x$

$$I=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\Big[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\Big]+\Big(\sin\frac{\pi}{2}-\sin(0)\Big)$$

$$=1$$

التمرين ① : أوجد نهاية :

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x.\sin 2x} \qquad a=0$$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)) : \frac{0}{0}$ عدم تعين

$$f(x)=\frac{2\sin^2 x}{2x.\sin x.\cos x}=\frac{\sin x}{x.\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x))=\frac{1}{1}=1$$

ولكن: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

$$f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x} \qquad a=0$$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)) : \frac{0}{0}$ عدم تعين

$$f(x)=\frac{-2\sin 2x.\cancel{\sin x}}{x\cancel{\sin x}}=\frac{-2\sin 2x}{x}$$

$$f(x)=\frac{-4.\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x))=-4(1)=-4$$

ولكن: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1}$

التمرين ② : $C: f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3} : R\setminus\{0\}$

1] أثبت أن التابع زوجي

2] إذا كان $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

أوجد $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))$ ؟

1] الشرط الأول: $x\in D$ ، $-x\in D$

الشرط الثاني: يجب إثبات $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=\frac{(-x)-\sin(-x)}{(-x)^3}=\frac{-x+\sin x}{-x^3}$$

$$f(-x)=\frac{-[x-\sin x]}{-x^3}=\frac{x-\sin x}{x^3}=f(x)$$

محققة

2] $$x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

نضرب بـ -1 :

$$-x+\frac{x^3}{6}\geq -\sin x\geq -x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$

نضيف x

$$\frac{x^3}{6}\geq x-\sin x\geq \frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$

نقسم x^3 :

$$\frac{1}{6}\geq \frac{x-\sin x}{x^3}\geq \frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x}\right)=0$$

التمرين ③ : $|f(x)-3|<\frac{\sin x}{x^2+1}$

أوجد نهاية f عند $+\infty$:

علينا حساب نهاية $\frac{\sin x}{x^2+1}$:

نعلم أن $-1\leq \sin x\leq 1$ نقسم $x^2+1>0$

$$\frac{-1}{x^2+1}\leq \frac{\sin x}{x^2+1}\leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}(f(x))=3$$

حسب مبرهنة الإحاطة

التمرين (4):

$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - |2x|$ $\quad \mathbb{R}$

أوجد نهاية f عند $\mp\infty$ ؟

$\lim_{x\to-\infty}(f(x))$: $+\infty-\infty$ عدم تعين

$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - (-2x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x$

لـ نضرب بالمرافق

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x}$

* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x))$ نفس الطريقة نحسب

تذكير: $|2x| = \begin{cases} +2x : x\to+\infty \\ -2x : x\to-\infty \end{cases}$

التمرين (5): أوجد نهاية

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$: 1^∞

نهايات مميزة

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$\lim_{x\to 0}(f(x)) = e$ ⟸ لكن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$

$\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty$ عدم تعين

$f(x) = (3-x)^{\frac{1}{x-2}}$

نفرض: $3-x = 1+t$

نعزل x: $x = 2-t$ ⟸ نهاية جديدة $\lim_{t\to+\infty}(2-t) = -\infty$

$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2-t-2}} = (1+t)^{\frac{-1}{t}} = \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = \lim_{t\to-\infty}(f(t)) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$: جواب: e^2

التمرين (6): أوجد نهاية (تعريف العدد المشتق):

* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}\right)$: $\frac{0}{0}$ عدم تعين

نفرض:

$f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \Rightarrow f(1) = e^1 - e = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$ التابع f اشتقاقي عند $a=1$

حسب تعريف العدد المشتق:

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = f'(1)$

نعوض

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{x^2}-e}{x-1}\right)$: جواب: $2e$

التمرين (7):

$C: f(x) = \sqrt{x} - \ln x$; $]0,+\infty[$

[1] أوجد نهاية f عند $+\infty$.

[2] أوجد $f'(1)$, $f'(x)$, $f(1)$

[3] استنتج $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x} - \ln x - 1}{x-1}\right]$

[1] $\lim_{x\to+\infty}(f(x))$: $+\infty-\infty$ عدم تعين

$f(x) = \sqrt{x}\left[1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right] = \sqrt{x}\left[1 - \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\right]$

$f(x) = \sqrt{x}\left[1 - 2\underbrace{\boxed{\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}_{x\to+\infty}^{0}\right]$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = +\infty[1-2(0)] = +\infty$

[2] * $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

$f'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ التابع f اشتقاقي عند $a=1$

حسب تعريف العدد المشتق $a=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=f'(1)$$ نعوض .

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-\ln x-1}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

$c: f(x)=1-\cos x \quad \mathbb{R}$

1] أوجد $f(0)$, $f'(x)$, $f'(0)$

2] استنتج $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$

التمرين 8 :

$c: f(x)=\frac{5e^{x}-1}{e^{x}+1} \quad \mathbb{R}$

1] أوجد نهاية f عند $+\infty$

2] أعط عدد حقيقي A بشرط $x>A$ إذا كانت $f(x)\in]4.9\,,5.1[$

3] استنتج $\lim_{x\to+\infty}\left(f(f(x))\right)$

1] $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)=\frac{\infty}{\infty}$ ع ح تعيين

$$f(x)=\frac{e^{x}\left[5-\frac{1}{e^{x}}\right]}{e^{x}\left[1+\frac{1}{e^{x}}\right]}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)=\frac{5-0}{1+0}=5$$

2] $l=\frac{a+b}{2}=\frac{4.9+5.1}{2}=5$

$\varepsilon=\frac{b-a}{2}=\frac{5.1-4.9}{2}=0.1$

$|f(x)-l|<\varepsilon$

$$\left|\frac{5e^{x}-1}{e^{x}+1}-5\right|<0.1$$

$$\left|\frac{5e^{x}-1-5e^{x}-5}{e^{x}+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-6}{e^{x}+1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{6}{e^{x}+1}<\frac{1}{10}$$

$60<e^{x}+1\Rightarrow 59<e^{x}\Rightarrow \ln(59)<x$

$A<x$

ومنه $A=\ln(59)$

3] $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)=5$

$\lim_{x\to 5}\left(f(x)\right)=\frac{5e^{5}-1}{e^{5}+1}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(f(x))\right)=\frac{5e^{5}-1}{e^{5}+1}$

$c: f(x)=\frac{\ln x-1}{\ln x+1} :]e^{-1},+\infty[$

1] أوجد نهاية f عند $+\infty$ $\boxed{\text{جواب : 1}}$

2] عين قيمة A بشرط $x>A$ إذا كانت $f(x)\in]0.9\,,1.1[\Rightarrow$ $\boxed{\text{جواب } A=e^{19}}$

3] أوجد $\lim_{x\to+\infty}\left(f(f(x))\right)$ $\boxed{\text{جواب : 1}}$

تمرين 9 :

$c: f(x)=\frac{x+1}{x+2} : \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

1] أوجد $f'(x)$

2] استنتج مشتق : $g(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x+2}$

3] أوجد $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)\right)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty}\left(g(g(x))\right)$

1] $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^{2}}$

2] $g(x)=f(\ln x)$

$g'(x)=f'(\ln x)\cdot(\ln x)'$

$g'(x)=\frac{1}{(\ln x+2)^{2}}\cdot\frac{1}{x}$

$\boxed{3}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = \frac{1}{2}$$

$C : f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ، $R\setminus\{1\}$

$\boxed{1}$ أوجد $f'(x)$ ، $\boxed{2}$ استنتج مشتق $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$\boxed{3}$ أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$

تمرين (10) :

$$f(x) = \begin{cases} x - x\ln x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ ادرس قابلية الاشتقاق التابع f عند الصفر

$\boxed{2}$ ادرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ وارسمه

$\boxed{3}$ احسب مساحة السطح المحصور بين C، $x'x$ والمستقيمين $x=1$، $x=e$

$\boxed{1}$ $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} = \dfrac{x - x\ln x}{x} = 1 - \ln x$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 + \infty = +\infty$

ليس للتابع g نهاية حقيقية فالتابع f غير قابل للاشتقاق عند الصفر

$\boxed{2}$ $f(x) = x - x\ln x$: $]0,+\infty[$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$ نقطة مقاربة : $(0,0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) : +\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = x[1 - \ln x]$

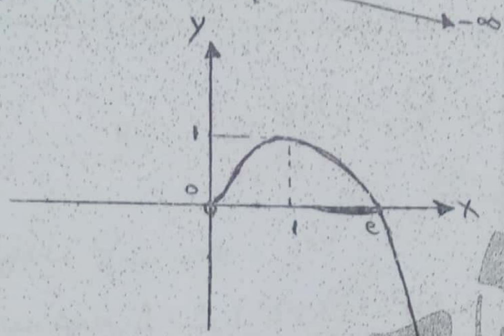
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 1 - [(1)(\ln x) + (\frac{1}{x})(x)] = -\ln x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \in D$

$f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



$f(x) = 0 \Rightarrow x - x\ln x = 0 \Rightarrow x[1 - \ln x] = 0$

$x = 0 \notin D$ أو $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$ $(e,0)$

$\boxed{3}$ $S = \int_1^e x - x\ln x \, dx$

$* \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}$

$* \int x\ln x\,dx$: $u = \ln x$, $u' = \dfrac{1}{x}$; $v' = x$, $v = \dfrac{x^2}{2}$

$\int x\ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \dfrac{1}{4}x^2$

$S = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$S = \left[\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{e^2}{4}\right] - \left[\dfrac{1}{2} - 0 + \dfrac{1}{4}\right]$

$S = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{e^2 - 3}{4}$

تمرين (11) :

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1} \; ; R$$

1] ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند الصفر من اليمين

2] أوجد معادلة نصف المماس عند $x=0$

1]

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1} - 0}{x}$$

$$g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to 0} (g(x)) : \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$g(x) : \begin{cases} \frac{x^2+x}{x^3+x} = \frac{x+1}{x^2+1} \; : \; x>0 & \text{يمين} \\ \frac{x^2-x}{x^3+x} = \frac{x-1}{x^2+1} \; : \; x<0 & \text{يسار} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} (g(x)) = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

g قابل للاشتقاق عند الصفر من اليمين

2] معادلة نصف المماس : $x=0$

$y=f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة التماس :

$m=1$

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

$$\boxed{y=x}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad [0,1]$$

1] ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 وفسر النتيجة "هندسيا"

2] أوجد معادلة المماس عند $x=0$

3] أثبت أن الدالة زوجية

4] ادرس تغيرات وارسمه .

1]

$$g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{1-x^2}{(x-1)(\sqrt{1-x^2})}$$

$$g(x) = \frac{(\cancel{1-x})(1+x)}{(\cancel{x-1})(\sqrt{1-x^2})}$$

$$\lim_{x\to 1} (g(x)) = \frac{2}{0} = \infty$$

الدالة f غير قابل للاشتقاق عند 1 :

من اليسار

التفسير الهندسي : يقبل نصف مماس شاقولي $\boxed{x=1}$

2] معادلة المماس : $x=0$

نقطة تماس : $(0,1)$ $\quad y=f(0)=1$

ميل : $m=f'(0)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow m=0 \Rightarrow y=y_0$$

$$\boxed{y=1}$$

3] الشرط الأول : $x\in D \; , \; -x\in D$

الشرط الثاني : يجب إثبات : $f(-x)=f(x)$

$$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$ محققة

4] الدالة معرف ومستمرة $[0,1]$, اشتقاقي $]0,1[$

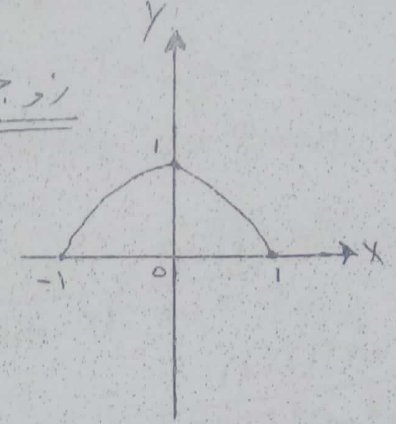
$f(0)=1 \qquad f(1)=0$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=1$$

x	0		1
$f'(x)$	0	—	||
$f(x)$	1	$\searrow$	0

زوج



تمرين (12):

$c: f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$: $]0,+\infty[$

[1] عين a, b اذا علمت ان c يقبل مماسا يوازي المستقيم $y=3x$ في النقطة $A(1,0)$

[2] أوجد $\int f(x)\,dx$

[1] $* \; f(x_0)=y_0 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow a+b=0 \; ...(1)$

$* \; f'(x_0)=m \Rightarrow f'(1)=3$

$f'(x) = a + \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow a + \frac{1-\ln 1}{(1)^2} = 3$

نعوض (1) $\boxed{a=2}$

$a+b=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

$f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

[2] $\int f(x)\,dx = \int 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}\,dx$

$= \int 2x - 2 + \frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx$

$= x^2 - 2x + \frac{\ln^2 x}{2} + c$

$c: f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ $\quad R\setminus\{1\}$

[1] عين a, b اذا علمت أن c يقبل مماس أفقي في النقطة $A(-1,0)$

[2] أوجد $\int f(x)\,dx$

تمرين (13)

$c: f(x) = \sin x \quad R$

أثبت بالاستدلال بالتراجع صحة العلاقة

$f^{(n)}(x) = \sin(n\frac{\pi}{2} + x)$

$f'(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

[1] نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$f^{(1)}(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = f'(x)$

[2] نفرض صحة العلاقة من أجل n

$f^{(n)}(x) = \sin(n\frac{\pi}{2} + x)$

[3] نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$f^{(n+1)}(x) = \sin((n+1)\frac{\pi}{2} + x)$ يعني إثبات

$L_1: f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

$= [\sin(n\frac{\pi}{2} + x)]'$

$= (n\frac{\pi}{2} + x)' \cdot \cos(n\frac{\pi}{2} + x)$

$= 1 \cdot \cos(n\frac{\pi}{2} + x)$

$= \sin(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2} + x)$

$= \sin((n+1)\frac{\pi}{2} + x) = L_2$

فالعلاقة محققة $n+1$ ومنه محققة من أجل n

$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad R\setminus\{1\}$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ أثبت

تمرين (14) :

$C: f(x) = x^2+1 \quad : \ ]-\infty , +\infty[$

أوجد معادلة المماس المار من مبدأ الإحداثيات

(المبدأ ليس نقطة تماس)

الحل: نفرض فاصلة نقطة التماس $x = a$

← نقطة التماس (a , a^2+1)

← ميل : $m = f'(a)$

$f'(x) = 2x \Rightarrow m = 2a$

معادلة المماس : $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - a^2 - 1 = 2a(x - a)$

ونعوض النقطة $(0,0)$

$0 - a^2 - 1 = 2a(0 - a)$

$-a^2 - 1 = -2a^2 \Rightarrow a^2 = 1$

نقبل مماسين $a = \mp 1$

$a = 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 2x$

$a = -1 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = -2x$

التمرين (15) :

$C: f(x) = x + \dfrac{E(x)}{x^2+1} \quad : \ \mathbb{R}$

$D: y = x$

أثبت أن D مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$f(x) - y_0 = \dfrac{E(x)}{x^2+1}$

$x - 1 < E(x) \leq x$ $\quad \boxed{\text{نقسم } 0 < x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{x-1}{x^2-1} < \dfrac{E(x)}{x^2+1} \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

$\dfrac{x-1}{x^2+1} < f(x) - y_0 \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_0\right) = 0$ محققة

∴ D مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

التمرين (16) :

$C: f(x) = x + \dfrac{4 + \cos x}{x^2+1} \quad : \ \mathbb{R}$

$D: y = x$

أثبت أن D مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.

الحل

$f(x) - y_0 = \dfrac{4 + \cos x}{x^2+1}$

نستخدم مبرهنة الإحاطة :

$-1 \leq \cos x \leq 1$ $\quad \boxed{\text{نضيف } 4}$

$3 \leq 4 + \cos x \leq 5$ $\quad \boxed{\text{نقسم } 0 < x^2+1}$

$\dfrac{3}{x^2+1} \leq \dfrac{4 + \cos x}{x^2+1} \leq \dfrac{5}{x^2+1}$

$\dfrac{3}{x^2+1} \leq f(x) - y_0 \leq \dfrac{5}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x^2+1}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{x^2+1}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_0\right) = 0$ محققة

الوضع النسبي :

$f(x) - y_0 = \dfrac{4 + \cos x}{x^2+1}$ لندرس إشارة

عبارة $4 + \cos x > 0 \Leftarrow \cos x \in [-1,1]$

عبارة $x^2+1 > 0$

ومنه $f(x) - y_0 > 0$

C فوق D

التمرين (17):

$C: f(x) = \dfrac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1} \; ; \; \mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$

$\Delta: y = x$

1) أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ و ادرس وضعه النسبي.

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C ، Δ والمستقيمين $x=2$ ، $x=3$

1) نجد الكتابة الاختيارية:

$f(x) = x + \dfrac{2}{x^2-1}$

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ محققة

$\therefore$ Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: ندرس اشارة $f(x) - y_\Delta = \dfrac{2}{x^2-1}$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ	C تحت Δ	C فوق Δ

2) $S = \displaystyle\int_2^3 (f(x) - y_\Delta)\,dx = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$

تفريق الكسور:

$\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}$

لحساب A نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)$ ثم نعوض $x=-1$

$\dfrac{2}{x-1} = A \xRightarrow{x=-1} \boxed{A = -1}$

لحساب B نضرب طرفي المعادلة في $(x-1)$ ثم نعوض $x=1$

$\dfrac{2}{x+1} = B \xRightarrow{x=1} \boxed{B = 1}$

$\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

$S = \displaystyle\int_2^3 \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,dx$

$S = \left[-\ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_2^3$

$S = \left[\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3$

$S = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$C: f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x-1} \quad \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Delta: y = x + 3$

1) أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C ، Δ والمستقيمين $x=2$ ، $x=3$

التمرين (18):

$C: f(x) = x - x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$\Delta: y = x - 1$

أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$f(x) - y_\Delta = 1 - x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 1 - 1 = 0$ محققة

$C: f(x) = \sqrt{x^2+1} + x \quad \mathbb{R}$

$\Delta: y = 2x$

أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

تمرين (19):

$C: f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ $]0,+\infty[$

$\Delta: y = x$

1] أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

2] احسب مساحة الحيز المحدد بين C, Δ والمستقيمين $x=1, x=e$

1]

$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

الوضع النسبي: ندرس إشارة

$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln x}{x}$

نعدم البسط: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

نعدم المقام: $x = 0$

x	0		1		$+\infty$
بسط $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
مقام x	‖	$+$		$+$	
$f(x)-y_\Delta$	‖	$-$	0	$+$	
وضع نسبي	‖	C تحت Δ		C فوق Δ	

نقطة مشتركة بين C, Δ $(1,1)$

2]

$S = \int_1^e f(x) - y_\Delta \, dx$

$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx$

$S = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{2}$

تمرين (20):

$C: f(x) = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ $\Delta: y = \frac{1}{2}x$

1] أثبت أن $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ مركز تناظر لـ C

2] أثبت أن Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C, Δ.

3] احسب مساحة الحيز المحدد بين C, Δ والمستقيمين $x=2$, $x=3$

1] الشرط الأول: $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

يجب إثبات: $2x_0 - x \in D$:

$\to$ $1 - x \in D$

ننطلق من: $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ — ضرب (-1)

$-x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ — نضيف 1

$1 - x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ محققة

الشرط الثاني:

يجب إثبات $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

$\to$ $f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$

ل. $f(1-x) + f(x) = \frac{1-x}{2} + \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right) + \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right) + \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} + \ln\left[\frac{-x}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x}\right]$

$= \frac{1}{2} + \ln(1)$

$= \frac{1}{2}$ محققة

$\therefore$ C متناظر بالنسبة للنقطة $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

2]

$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$ محققة

$\therefore$ Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي [ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ على كامل مجموعة التعريف]

$f(x)-y_D = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

نعلم أن $x-1 < x$

نقسم على x

$0 > x$	$0 < x$
$\frac{x-1}{x} > 1$ نعكس الترتيب	$\frac{x-1}{x} < 1$ نعكس الترتيب
$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) > \ln(1)$	$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < \ln(1)$
$f(x)-y_D > 0$	$f(x)-y_D < 0$
C فوق D على المجال $]-\infty,-1[$	C تحت D على المجال $]1,+\infty[$

$S=\int_2^3 y_D - f(x)\,dx = \int_2^3 -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx$

$S=\int_3^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx$

$u=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ $\quad u'=\frac{1}{x(x-1)}$

$v'=1$ $\quad v=x$

[1] $S=\left[x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]_3^2 - \int_3^2 \frac{1}{x-1}\,dx$

[2] $S=\left[x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]_3^2 - \left[\ln|x-1|\right]_3^2$

$S=\left[x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \ln|x-1|\right]_3^2$

$S=\left[2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \cancel{\ln(1)}\right] - \left[3\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln(2)\right]$

$S=\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \ln\left(\frac{8}{27}\right) + \ln 2$

$S=\ln\left(\frac{27}{32}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$

التمرين (21): $C: f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad R$

[1] أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$

[2] استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$

[1] $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)=+\infty$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\sqrt{1+0}=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

مرافق

$f(x)-ax=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

[2] معادلة المقارب المائل: $D: y=ax+b$

$D: y=x$

التمرين (22): $C: f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ $\quad R$

[1] أوجد $\lim_{x\to-\infty}(f(x))$ [2] اكتب بالصيغة القانونية x^2+4x+5

[3] استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$

ادرس الوضع النسبي

[1] $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)=+\infty$

[2] $x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5$

$=(x+2)^2+1$

$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$

[3] لنفرض أن $D: y=-(x+2)$ مستقيم، لنبرهن أنه مائل في جوار $-\infty$

مرافق

$f(x)-y_D=\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_D\right)=0$ محققة

∴ D مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_D=\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)$

علماً أن: $\sqrt{(x+2)^2+1}>x+2 \Leftarrow \sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)>0$

$f(x)-y_D>0$ $\quad$ C فوق D

التمرين: (23)

$f(x) = x - 1 + x e^{x}$; $\mathbb{R}$

1) أثبت أن $\Delta: y = x-1$ مقارب مائل C و ادرس وضعه النسبي.

2) احسب مساحة السطح المحدد بين C , Δ والمستقيمين $x=0$, $x=1$

1) $g(x) = f(x) - y_{\Delta} = x e^{x}$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$ لأن $\lim_{x\to -\infty} (x e^{x}) = 0$

$\therefore$ Δ مقارب مائل C في جوار $-\infty$.

الوضع النسبي: ندرس إشارة $g(x) = x e^{x}$

$g(x) = 0 \Rightarrow x e^{x} = 0 \Rightarrow$ اما $e^{x} > 0$ او $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

C تحت Δ / C فوق Δ

2) $S = \int_0^1 f(x) - y_{\Delta}\, dx$

$S = \int_0^1 x e^{x}\, dx$ تجزئة

$u = x$, $u' =$

$v' = e^{x}$, $v = e^{x}$

$S = [x e^{x}]_0^1 - \int e^{x}\, dx$

$S = [x e^{x}]_0^1 - [e^{x}]_0^1 = [x e^{x} - e^{x}]_0^1$

$S = [1 \cdot e - e] - [0(1) - 1]$

$S = 1$

التمرين: (24) $f(x) = \ln(e^{x}+1)$; $\mathbb{R}$

1) أوجد معادلة المقارب الأفقي.

2) أوجد معادلة المقارب المائل و ادرس وضعه النسبي

1) نوجد النهايات عند محدودات التعريف: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\boxed{y=0}$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$.

2) إيجاد معادلة المقارب المائل:

$f(x) = \ln(e^{x}+1)$

نصلح التابع:

$f(x) = \ln[e^{x}(1 + \frac{1}{e^{x}})] = \ln e^{x} + \ln(1 + \frac{1}{e^{x}})$

$f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

نفرض أن $\Delta: y = x$ مستقيم ثم نبرهن أنه مائل في جوار $+\infty$.

• $g(x) = f(x) - y_{\Delta} = \ln(1 + e^{-x})$

• $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$ محققة

$\therefore$ $\Delta: y = x$ مقارب مائل C في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي: ندرس إشارة $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$

نعلم أن: $e^{-x} > 0$ $\boxed{\text{نضيف } 1}$

$\boxed{\text{نأخذ ln الطرفين}}$ $1 + e^{-x} > 1$

$\ln(1 + e^{-x}) > \ln(1)$

$g(x) > 0$

C فوق Δ

التمرين: (25)

قارن بين العددين: $x = \ln(e)^{3} - 2$, $y = \ln[e\sqrt{e}]$

$x = \ln(e)^{3} - 2 = 3 - 2 = 1$

$y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln(e \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 1 < \frac{3}{2}$, $x < y$

قارن بين العددين: $x = \ln(\frac{1}{e})^{3}$, $y = \ln(\frac{1}{e})^{2}$

$x = \ln(\frac{1}{e})^{3} = \ln(e)^{-3} = -3$

$y = \ln(\frac{1}{e})^{2} = \ln(e)^{-2} = -2$

$\Rightarrow -3 < -2$, $x < y$

تمرين (26): ارسم الخط البياني:

$\ln x = \ln(y+1)$

شرط الحل: $x>0 \,,\, y>-1$

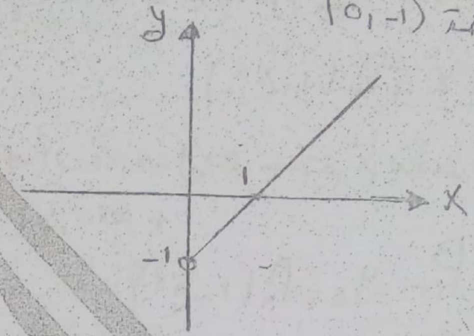
$\ln(x) = \ln(y+1)$ نأخذ e للطرفين

$x = y+1 \Rightarrow y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

تمثل معادلة نصف مستقيم $x\in]0,+\infty[$

النقطة $(0,-1)$



$\ln y = 2\ln x$

شرط الحل: $y>0 \,,\, x>0$

الحل:

$\ln y = 2\ln x$

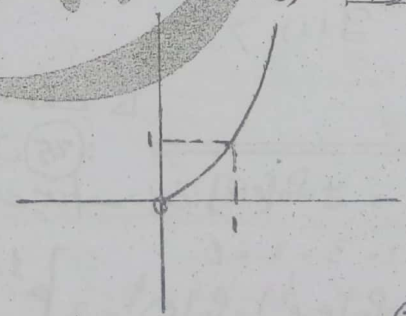
$\ln y = \ln x^2$ نأخذ e للطرفين

$y = x^2$

x	0	1
y	0	1

تمثل معادلة قطع مكافئ $x\in]0,+\infty[$

رأسه النقطة $(0,0)$



التمرين (27)

حل المعادلات التفاضلية التالية التي تحقق الشرط المعطى

$y' + 2y - 4 = 0$

ويمر من النقطة $(1,1)$

الحل: $y' + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y' = -2y+4$

معادلة تفاضلية تقبل حلاً هو التابع

$y = ke^{-2x} + \frac{1}{2}$

يمر من النقطة $(1,1)$

$1 = ke^{-2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = ke^{-2} \Rightarrow k = \frac{1}{2e^{-2}}$

$y = \frac{1}{2e^{-2}} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}$

$y' - 2y = 0$ تحقق الشرط $f(0)=1$

$y' = 2y$

$y = ke^{2x}$ معادلة تفاضلية تقبل حلاً:

تحقق الشرط: $f(0)=1$

$1 = ke^{2(0)} \Rightarrow k=1$

$y = e^{2x}$.

تمرين (28):

اثبت صحة المتراجحة: $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$

حيث $0<x$

الحل

$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$

$g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

التابع معرف وقابل للاشتقاق $]0,+\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

$g'(x)=0 \Rightarrow 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$

$g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	+	0	−	
$g(x)$	||	↗	0	↘	

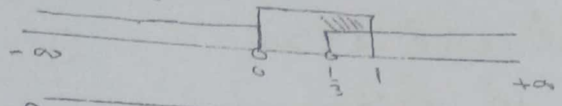
من جدول الاطراد نجد أن

$g(x) \le 0 \Rightarrow \ln x - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$

$\ln x \le 2\sqrt{x} - 2$

$D_2: [0,1]$

$D: D_1 \cap D_2 :]\frac{1}{3}, 1]$



5) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0$; $]0, +\infty[$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$ معادلة من الدرجة الثانية :

اما $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$ أو $\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

6) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$ $]0, +\infty[$

متراجحة من الدرجة الثانية ننظم جدول اشارة

$\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0 <$ $x = e^3$ ، $x = \frac{1}{e}$ من السابق

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$\ln^2 x - 2\ln x - 3$		+	0	−	0	+	
≥ 0		محققة		xxxx		محققة	

$x \in]0, \frac{1}{e}] \cup [e^3, +\infty[$

7) $\ln^2 x = 16 \longrightarrow$ جواب $x = e^4$ ، $x = e^{-4}$

$\ln^2 x \leq 16 \longrightarrow [e^{-4}, e^4]$ جواب

8) $e^x + \frac{6}{e^x} < 5$ نضرب ب e^x :

$e^{2x} + 6 < 5e^x$

$e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$

$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Rightarrow (e^x - 3)(e^x - 2) = 0$

$\to e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

$\to e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$e^{2x} - 5e^x + 6$		+	0	−	0	+	
< 0		xxxxx		محققة		xxxxx	

$x \in]\ln 2, \ln 3[$

9) $e^{-2x} - 5e^{-x} + 4 \geq 0$

(29) : حل المعادلات والمتراجحات :

1) $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(20)$

$D_1: x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow]-1, +\infty[$

$D_2: x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow]-2, +\infty[$

$D: D_1 \cap D_2 :]-1, +\infty[$

الحل :

$\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(20)$

$\ln[x^2 + 3x + 2] = \ln(20)$

$x^2 + 3x + 2 = 20$

$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-3) = 0$

اما $x = -6 \in D$ أو $x = 3 \notin D$

2) $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

$\ln(x+11) = \ln(x^2 + 5x + 6)$

$D_1: x + 11 > 0 \Rightarrow x > -11 \Rightarrow]-11, +\infty[$

$D_2: x^2 + 5x + 6 > 0 \xRightarrow{\text{جدول}}]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

$D: D_1 \cap D_2 :]-2, +\infty[$

الحل

$\ln(x+11) = \ln(x^2 + 5x + 6)$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

اما $x = -5 \notin D$ أو $x = 1 \in D$

3) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x-1})$

4) $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

* نوجد مجموعة تعريف الطرف الايمن $\ln(3x^2 - x)$.

$D_1: 3x^2 - x > 0 \xRightarrow{\text{جدول}} D_1:]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

* نحل المتراجحة الاصلية : $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

$\ln(3x^2 - x) \leq \ln(2x)$

$3x^2 - x \leq 2x$

$3x^2 - 3x \leq 0$ جدول

(10) $(e^x-2)e^x > 2(e^x-2)$

$(e^x-2)e^x - 2(e^x-2) > 0$

$(e^x-2)(e^x-2) > 0$

$(e^x-2)^2 > 0$

$e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ حل مضاعف

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$(e^x-2)^2$		$+$	0	$+$	
>0		محققة	/	محققة	

$x \in]-\infty, \ln 2[\cup]\ln 2, +\infty[$

(11) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

$(2^x+3)(2^x-1) = 0$

اما $2^x = -3$ مرفوض

او $2^x = 1 \Rightarrow \ln 2^x = 0 \Rightarrow x \ln 2 = 0$

$\boxed{x=0}$

(12) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 \leq 0$

$(2^x+3)(2^x-1) \leq 0$

ولكن 2^x+3 موجب دوما

ليكون الطرف الأيسر أصغر من الصفر

$2^x - 1 \leq 0$

$2^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$

$x \in]-\infty, 0]$

تمرين (39)

(1) حل جملة المعادلتين :

$3^x \cdot 3^y = 9$ ...(1)

$3^x + 3^y = 4\sqrt{3}$ ...(2)

من (2) نجد :

$3^x = 4\sqrt{3} - 3^y$ ...(3)

نعوض (3) بـ (1) :

$(4\sqrt{3} - 3^y) \cdot 3^y = 9$

$4\sqrt{3} \cdot 3^y - 3^{2y} = 9$

$3^{2y} - 4\sqrt{3} \cdot 3^y + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c = 48 - 4(1)(9)$

$\Delta = 48 - 36 = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$3^y = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$3^y = 3\sqrt{3} \rightarrow 3^y = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{y = \frac{3}{2}}$

$3^x = 4\sqrt{3} - 3^y \rightarrow 3^x = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$3^x = \sqrt{3} \rightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

(2) $2\ln x + \ln y = 7$ ...(1)

$3\ln x - 5\ln y = 4$ ...(2)

شرط الحل: $x > 0$, $y > 0$

نضرب المعادلة الأولى بـ 5 :

$10\ln x + 5\ln y = 35$ ...(1)

$3\ln x - 5\ln y = 4$ ...(2)

$(1)+(2): 13\ln x = 39 \Rightarrow \ln x = 3$

$\boxed{x = e^3}$

نعوض (1)

$2(3) + \ln y = 7 \Rightarrow \ln y = 1$

$\boxed{y = e}$

(3) $\ln x \cdot \ln y = -12$ ...(1)

$\ln(x \cdot y) = 1$ ...(2)

تمرين (31)

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = e^{\frac{x}{1-x}} \qquad R\setminus\{1\}$$

ادرس تغيرات وارسمه :

التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ...... $y=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ...... $y=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$ ...... $x=1$

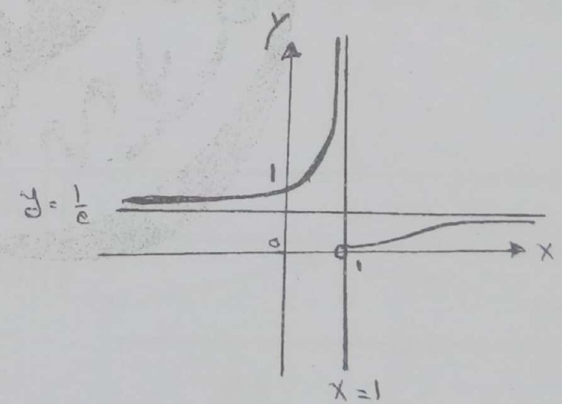
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$ $(1,0)$

نقطة مقاربة .

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' \cdot e^{\frac{x}{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{x}{1-x}} > 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{e}$



تقاطع $x=0$

$y = f(0) = e^0 = 1 \qquad (0,1)$

$$C: f(x) = e^{\frac{1}{2}-x^2} \qquad R$$

ادرس تغيرات وارسمه.

مسألة 24 ص 109

مسألة 17 ص 213

مسألة (32) :

$$C: f(x) = (x - E(x))^2 + E(x) \qquad [0,2]$$

(1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

(2) ادرس استمرار التابع f $[0,2]$

[1]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \in [0,1[\\ (x-1)^2+1 & : x\in[1,2[\\ 2 & : x=2 \end{cases}$$

[2] لندرس الاستمرار عند $x=1$, $x=2$:

عند $x=1$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x) \overset{?}{=} f(1)$

$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x) = (1)^2 = 1$] $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x) = f(1)$ محققة

عند $x=2$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x) \overset{?}{=} f(2)$

$f(2) = 2$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x) = (2-1)^2+1 = 2$] $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x) = f(2)$ محقق

فالتابع f مستمر على المجال $[0,2]$

تمرين (33)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^3 Ax}{x^3} & : x\neq 0 \\ 8 & : x=0 \end{cases}$$

عين قيمة A ليكون f مستمراً على R ؟

(1) التمرين

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$: $]0,+\infty[$

1] ادرس تغيرات f 2] ارسم C

3] استنتج الخط البياني للتابع g:

$g(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

4] لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 3}$ وفق العلاقة:

$U_n = \frac{\ln(n)}{n}$ ادرس اطراد المتتالية U_n:

5] احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$, $x=e$

6] قارن بين العددين $(\pi)^e, (e)^\pi$.

1] التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]0,+\infty[$:

$\lim_{x \to 0^{>}} (f(x)) = -\infty$ $x=0$ مقارب شاقولي هو oy

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = 0$ $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

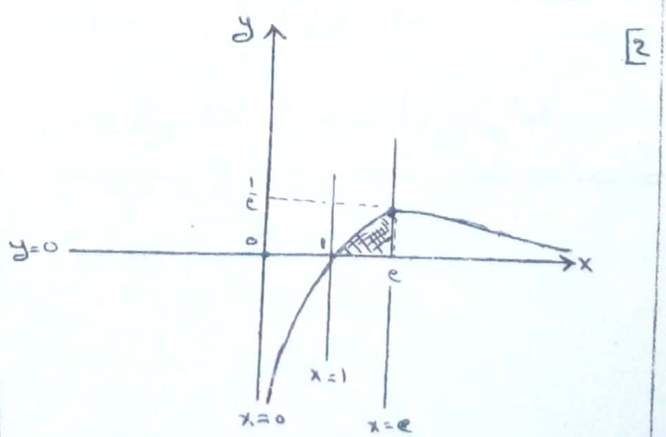
$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \in D$

$f(e) = \frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2]

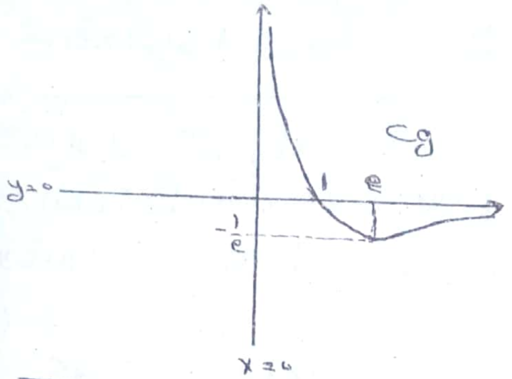


3] انطلاقاً من $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ نضرب بـ -1

$-f(x) = -\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} = g(x)$

$(x,y) \to (x,-y)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل.



4] المتتالية $(U_n)_{n\geq 3}$

$U_n = f(n) = \frac{\ln(n)}{n}$

من جدول التغيرات نجد أن f متناقص $[e,+\infty[$

فالمتتالية U_n متناقصة بدءاً من الحد الثالث $n=3$

5] $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

$S = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln x = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e$

$S = \left[\frac{\ln^2 e}{2}\right] - \left[\frac{\ln^2(1)}{2}\right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

6] لنقارن بين $(\pi)^e, (e)^\pi$

نعلم أن: $e > \pi$: [illegible] الطرفين

f متناقص $[e,+\infty[$ $f(e) < f(\pi)$

$\frac{\ln e}{e} < \frac{\ln \pi}{\pi}$

$\pi \ln e < e \ln \pi$

[illegible] e الطرفين: $\ln(e)^\pi < \ln(\pi)^e$

$(e)^\pi < (\pi)^e$

مسألة (2) $C: f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$; $D\ ]-1,3[$

1) أثبت أن خط البياني متناظر بالنسبة للنقطة $A(1,0)$ ، $x_0 \leftarrow 1$ ، $0 \to y_0$

2) ادرس تغيرات

3) أوجد معادلة المماس T للخط في النقطة التي فاصلتها $x=1$ وادرس وضعه النسبي.

4) ارسم C و T.

5) استنتج الخط البياني للتابع g : $g(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$

---

1) الشرط الأول: $x\in]-1,3[$

يجب إثبات أن $2x_0-x\in]-1,3[\Leftarrow 2-x\in]-1,3[$

انطلاقاً من: $x\in]-1,3[$ نضرب بـ -1

نضيف 2 : $-x\in]-3,1[$

محققة $2-x\in]-1,3[$

الشرط الثاني: يجب إثبات $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$

$\hookleftarrow f(2-x)+f(x)=0$

$l_1: f(2-x)+f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)+\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

$=\ln\left[\frac{3-x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{3-x}\right]$

$=\ln(1)=0=l_2$ محققة

C متناظر بالنسبة للنقطة $A(1,0)$

---

2) التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-1,3[$

$\lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ------ $x=-1$

$\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$ ------ $x=3$

" $\ln\left(\frac{عدد}{0}\right)=+\infty$ "

$f'(x)=\frac{4}{(x+1)(3-x)}>0$

x	-1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

---

3) معادلة المماس: $x=1$

$\hookleftarrow$ نقطة التماس: $y=f(1)=0 \Rightarrow (1,0)$

$\hookleftarrow$ ميل: $m=f'(1)=1$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-0=1(x-1)$

$T: y=x-1$

الوضع النسبي:

ندرس إشارة: $f(x)-y_T=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)-x+1$

نشكل التابع وندرس اطراده $]-1,3[$

$g(x)=f(x)-y_T=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)-x+1$

$g'(x)=\frac{4}{(x+1)(3-x)}-1=\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(3-x)}$

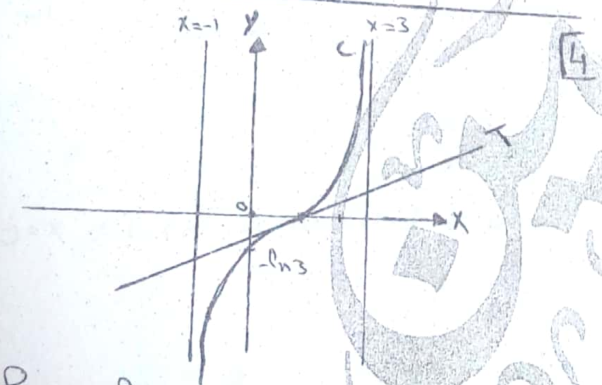
$g'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0$

$(x-1)(x-1)=0$

إما $x=1$ أو $x=1$ حل مضاعف لها إشارة توافق $g(1)=0$

x	-1		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
وضع نسبي		T فوق C		C فوق T	

4)



$y=f(0)=-\ln 3$ نعوض $x=0$

---

5) انطلاقاً من $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$: نضرب بـ -1

$-f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)=g(x)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل.

المسألة (3):

$C: f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \; : \;]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

1. ادرس تغيرات 2. ارسم C

3. لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$: $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

أثبت بالتراجع صحة العلاقة :

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \ln(n+1)$

4. استنتج الخط البياني للتابع g : $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$

---

1. التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty,-1[\, , \,]0,+\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ---- $y=0$

$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ ---- $x=-1$

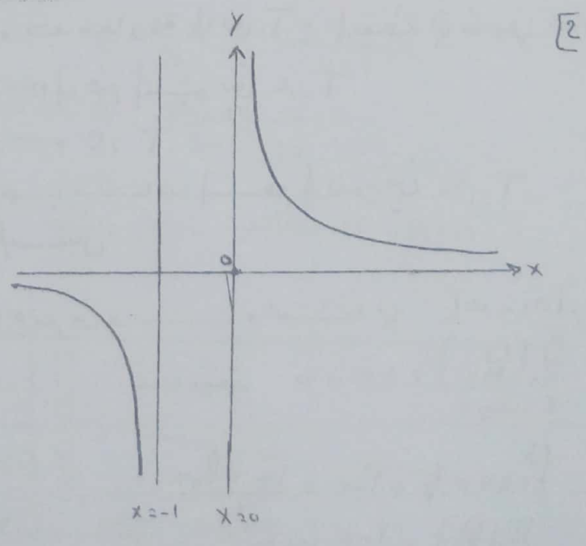
$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ---- $x=0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ---- $y=0$

$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} < 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖	‖	‖ $+\infty$	↘	0

2.



3. نثبت العلاقة $E(n): u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln(n+1)$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$L_1 = u_1 = \ln 2$
$L_2 = \ln(1+1) = \ln 2$] $L_1 = L_2$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln(n+1)$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

يجب إثبات : $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = \ln(n+2)$

$L_1 : u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$

$= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$= \ln\left[n+1 \cdot \frac{n+2}{n+1}\right] = \ln(n+2) = L_2$

ما العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل n.

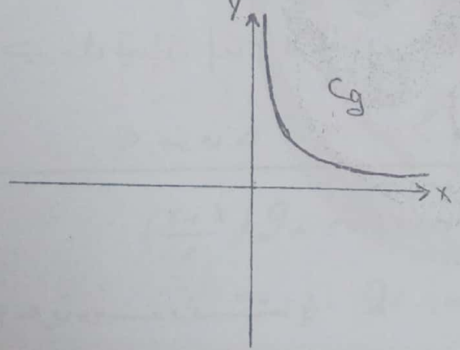
---

4. $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$

$D_g :]0,+\infty[$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x) = g(x)$

g مقصور التابع f على المجال $]0,+\infty[$



المسألة (4):

$C: f(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \; : \;]-\infty,-2[$

1. أثبت أن $D: y = x-2$ مقارب مائل C

2. ليكن التابع $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$ ادرس تغيرات التابع g على المجال $]-\infty,-2[$ واستنتج الوضع النسبي بين C, D

3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها

4. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $]-3,-2[$

5. ارسم C الخط البياني للتابع.

4) التابع مستمر ومتزايد $]-3,-2[$

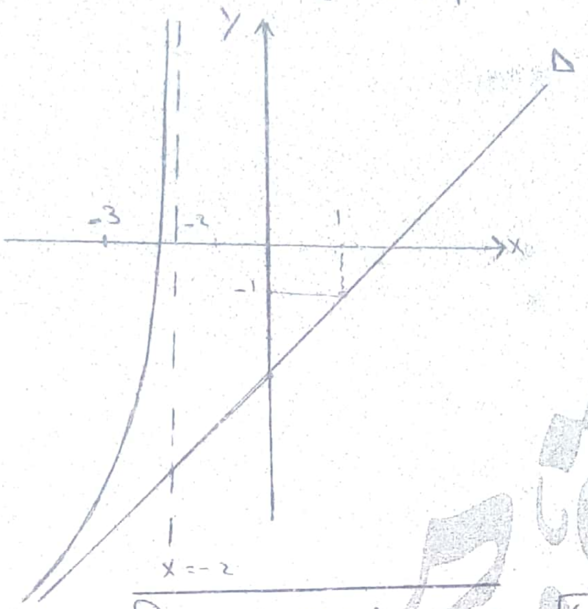
$f(]-3,-2[) =]-5+\ln 3, +\infty[$

$0 \in]-5+\ln 3, +\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $]-3,-2[$

5) $\Delta: y = x-2$

x	0	1
y	-2	-1



6) الطلب الخاص: تعريف: -1 $f(x) = x-2+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$-f(x) = 2-x+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = g(x)$

$(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل.

مسألة (5)

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \quad D:]0,+\infty[$

1) ادرس التغيرات

2) أوجد معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها $x=2$

3) ادرس الوضع النسبي بين C, T

4) ارسم C, T

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C, T والمستقيمين

1) التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x = \frac{1+x\ln x}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$ ------ $x=0$

6) استنتج الخط المقارب المائل للتابع g

$g(x) = 2-x+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

1) $f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$ محققة

$\therefore$ Δ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

2) $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty,-2[$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \ln(1) = 0$ ----- $y=0$

$\lim_{x \to -2} g(x) = +\infty$ ----- $x=-2$

$g'(x) = \frac{2}{x(x+2)} > 0$

x	$-\infty$		-2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين C, Δ: ندرس إشارة

$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = g(x)$

من جدول تغيرات التابع g نجد أن $g(x) > 0$

$f(x) - y_\Delta > 0$ C فوق Δ

3) $f(x) = x-2+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty,-2[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

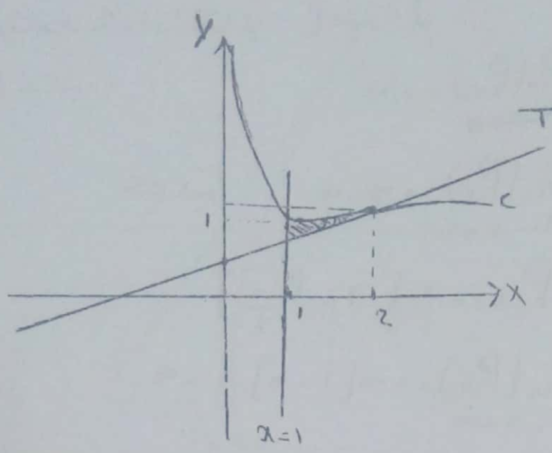
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ ------ $x=-2$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x(x+2)} > 0$

x	$-\infty$		-2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) $T: y = \frac{1}{4}x + \ln 2$

x	0
y	$\ln 2$



5) $S = \int_1^2 f(x) - y_T \, dx$

$S = \int_1^2 \frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{4}x - \ln 2 \, dx$

$S = \left[\ln|x| + x\ln x - x - \frac{1}{8}x^2 - x\ln 2 \right]_1^2$

$S = \left[\ln 2 + 2\ln 2 - 2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 \right] - \left[-1 - \frac{1}{8} - \ln 2 \right]$

$S = \left[\ln 2 - \frac{5}{2} \right] - \left[-\frac{9}{8} - \ln 2 \right]$

$S = 2\ln 2 - \frac{5}{2} + \frac{9}{8} = 2\ln 2 - \frac{11}{8}$

ولكن $\int \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \qquad v = x$

$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x\ln x - x$

مسألة (6)

$f(x) = x - \ln x \qquad]0,+\infty[$

1) ادرس تغيرات f 2) ارسم C

3) استنتج حلول المتراجحة $x > \ln x$

4) استنتج حلول المعادلة $x = \ln x + 1$

5) لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$: $U_n = n - \ln n$

ادرس اطراد المتتالية U_n

6) احسب مساحة المحصورة بين C ، xx' ، المستقيمين $x=1$ ، $x=e$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -1+x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \in D$

$f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) معادلة المماس : $x = 2$

نقطة التماس : $y = f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \Rightarrow (2, \frac{1}{2} + \ln 2)$

الميل : $m = f'(2) = \frac{1}{4}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{4}(x - 2)$

$T: y = \frac{1}{4}x + \ln 2$

3) الوضع النسبي بين C , T :

ندرس اشارة $f(x) - y_T = \frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{4}x - \ln 2$

نفرض التابع g وندرس اطراده $]0,+\infty[$:

$g(x) = f(x) - y_T = \frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{4}x - \ln 2$

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي $]0,+\infty[$:

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = \frac{-4+4x-x^2}{4x^2}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0$

$(x-2)(x-2) = 0$

لـ $x = 2$

أو $x = 2$ حل مضاعف $g(2) = 0$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	
وضع		C فوق T		C تحت T	

[1] $f(x) = x - \ln x \quad ; \ ]0,+\infty[$

الدالة معرفة ومستمرة واشتقاقية : $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ------ $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = x\left[1 - \frac{\ln x}{x}\right]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty[1 - 0] = +\infty$

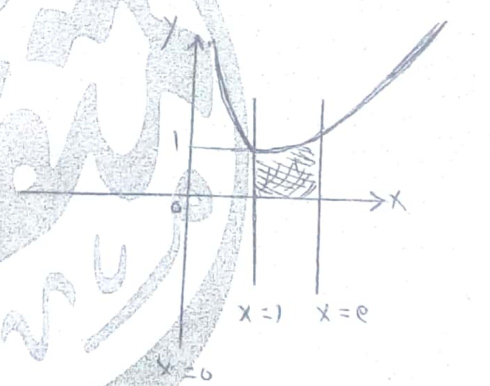
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \in D$

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

[2]



[3] حل المتراجحة $x > \ln x$

$x - \ln x > 0$

$f(x) > 0$

من جدول التغيرات نجد أن

$f(x) > 0 \Rightarrow \boxed{x \in]0,+\infty[}$

[4] حلول المعادلة $x = \ln(x) + 1$

$x - \ln x = 1$

$f(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

---

[5] $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x - \ln x)\,dx$

$S = \left[\frac{x^2}{2} - x\ln x + x\right]_1^e$

$S = \left[\frac{e^2}{2} - e + e\right] - \left[\frac{1}{2} - 0 + 1\right]$

$S = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$

ولكن

$\int \ln x\,dx \quad u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \quad v = x$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x$

مسألة (7)

$c : f(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad : \ ]0,1[\cup]1,+\infty[$

[1] ادرس تغيرات [2] ارسم c

[3] استنتج الخط البياني g : $\quad g(x) = \frac{1}{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

[4] ادرس اطراد المتتالية $\quad U_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

[5] احسب مساحة السطح المحصور بين c، محور الفواصل والمستقيمين $x = e$, $x = 2$

مسألة (8):

$c : f(x) = \frac{1}{x - x\ln x} \ ;$

$]0, e[\cup]e,+\infty[$

[1] ادرس تغيرات [2] ارسم c

[3] استنتج الخط البياني g : $\quad g(x) = \frac{1}{x\ln x - x}$

[4] ادرس اطراد المتتالية U_n: $\quad U_n = \frac{1}{n - n\ln n}$

[5] احسب مساحة السطح المحصور بين c، $x'x$ والمستقيمين $x = 1$, $x = \frac{1}{e}$

المسألة (21)

$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x})$: $]0,+\infty[$

1) أثبت أن $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

2) ادرس تغيراته ونظم جدولها

3) ارسم C , Δ

4) استنتج الخط البياني للتابع g:

$g(x) = \ln(e^{2x+1} - e^{x+1})$

1) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x})$

$f(x) = \ln\left[e^{2x}\left(1 - \frac{e^{x}}{e^{2x}}\right)\right] = \ln e^{2x} + \ln\left[1 - e^{-x}\right]$

$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$

$* \; f(x) - y_\Delta = \ln(1 - e^{-x})$

$* \; \lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$ محقق

الوضع النسبي:

$\ln(1 - e^{-x}) < 0 \Rightarrow f(x) - y_\Delta < 0$ C تحت Δ

2) التابع معرف ومستمر واشتقاقي: $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0} (f(x)) = -\infty$ ---- $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{[e^{2x} - e^{x}]^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - e^{x} = 0 \Rightarrow e^{x}[2e^{x} - 1] = 0$

إما $e^{x} > 0$

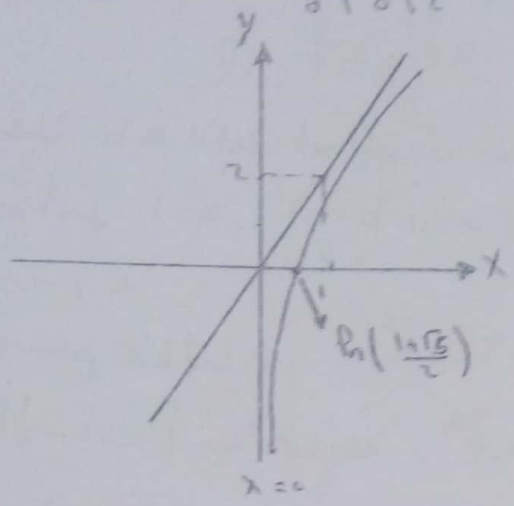
أو $2e^{x} = 1 \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{2}$

$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \notin D$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\Delta : y = 2x$

x	0	1
y	0	2



نفرض $y = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(e^{2x} - e^{x}) = 0$

$e^{2x} - e^{x} = 1$

$e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$

$e^{x} = \frac{-b+\sqrt{5}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$e^{x} = \frac{-b-\sqrt{5}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin D$

4) $g(x) = \ln(e^{2x+1} - e^{x+1})$

$g(x) = \ln[e[e^{2x} - e^{x}]]$

$g(x) = \ln e + \ln[e^{2x} - e^{x}]$

$g(x) = 1 + \ln(e^{2x} - e^{x})$

$g(x) = 1 + f(x)$

$(x, y) \to (x, y+1)$

Cg ينتج عن Cf بانسحاب مقداره 1 ↑ محور التراتيب.

المسألة (22):

$C : f(x) = \ln(e^{x} + 2)$ $\mathbb{R}$

1) أثبت أن $\Delta : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

2) ادرس تغيرات

3) ارسم C , Δ

4) استنتج الخط البياني: $g(x) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x} + 2}\right)$

المسألة (23):

$C: f(x) = ae^{2x} + be^{x}$; $\mathbb{R}$

[1] عين a, b إذا علمت أنه يقبل قيمة حدية $f(0)=-1$

[2] من أجل $a=1$, $b=-2$ ادرس تغيرات

[3] ارسم C

[4] استنتج الخط البياني: $g(x) = 2e^{x} - e^{2x}$

[5] أثبت أن f حلاً للمعادلة $y - y' = -e^{2x}$

[1] $(0,-1)$ نقطة حدية:

$* f(0) = -1 \Rightarrow a(1) + b(1) = -1$

$a + b = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1 - b}$ ... I

$* f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ae^{2x} + be^{x}$

$2ae^{0} + be^{0} = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$ ... II

نعوض (I) بـ (II):

$-2 - 2b + b = 0 \Rightarrow -b = 2$

$\boxed{b = -2}$

$a = -1 - b \Rightarrow \boxed{a = 1}$

[2] $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$; $\mathbb{R}$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ...... $y=0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعين

$f(x) = e^{2x}\left[1 - \frac{2}{e^{x}}\right]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty[1 - 0] = +\infty$

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - 2e^{x} = 0$

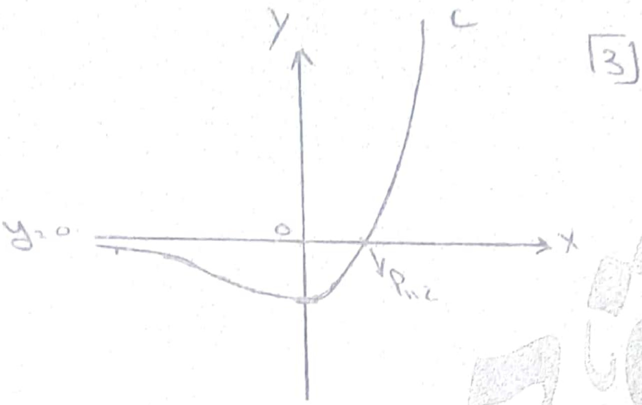
$2e^{x}[e^{x} - 1] = 0$

إما $2e^{x} > 0$

أو $e^{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \in D$ $f(0) = -1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

[3]



نفرض $y=0$

$f(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} = 0$

$e^{x}(e^{x} - 2) = 0$

$e^{x} > 0$

$e^{x} = 2$ $x = \ln 2$

[4] $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$ (البيان)

$-f(x) = 2e^{x} - e^{2x} = g(x)$

$(x, y) \to (x, -y)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

[5] ليكون f حلاً للمعادلة $y - y' = -e^{2x}$ يجب إثبات

$f - f' = -e^{2x}$

$L_1: f - f' = e^{2x} - 2e^{x} - 2e^{2x} + 2e^{x}$

$= -e^{2x} = L_2$

$\therefore f$ حلاً للمعادلة y

مسألة (20)

$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$; $R\setminus\{-1\}$

[1] ادرس تغيرات f [2] استنتج حلول المتراجحة $e^x - x - 1 > 0$

[3] استنتج حلول المعادلة $e^x = x+1$

[4] ناقش هندسياً حلول المعادلة $\lambda \in R : x = \ln(x\lambda + \lambda)$

[5] احسب القيمة التقريبية $f(2,1)$

[1] مجال تعريف واشتقاق : $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ---- $y=0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty$ ---- $x=-1$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$ ---- $x=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ ع ت ين

$f(x) = \frac{e^x}{x\left[1+\frac{1}{x}\right]} = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty$

$f'(x) = \frac{(e^x)(x+1) - (1)(e^x)}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x)}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x e^x = 0$ إما $x = 0 \in D$ $f(0) = 1$ أو $e^x > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x+1$

[2]

نقسم ÷ $x+1 > 0$: $\frac{e^x}{x+1} > 1$

$f(x) > 1$ من جدول التغيرات

$x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$

نقسم ÷ $x+1 < 0$: $\frac{e^x}{x+1} < 1$

$f(x) < 1$ من جدول التغيرات

$x \in]-\infty,-1[$

---

[3] حلول المعادلة $e^x = x+1$ ، نقسم ÷ $x+1$

$\frac{e^x}{x+1} = 1$

$f(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ حل وحيد

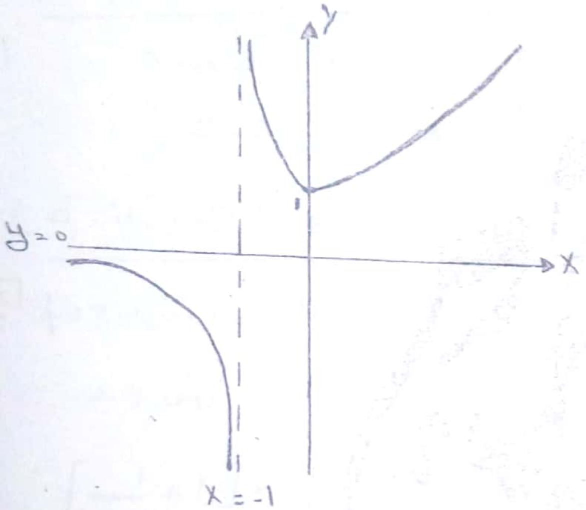
[4] $x = \ln(x\lambda + \lambda)$ أ ع e الطرفين

$e^x = x\lambda + \lambda$

$e^x = \lambda(x+1)$ نقسم ÷ $x+1$

$\frac{e^x}{x+1} = \lambda$

$f(x) = \lambda$



$\lambda \in]-\infty, 0[$ حل وحيد

$\lambda = 0$ لا يوجد حلول

$\lambda \in]0,1[$ لا يوجد حلول

$\lambda = 1$ حل وحيد

$\lambda \in]1,+\infty[$ حلان

[5] $f(2,1)$; $a=2$, $h=0,1$

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$

$f(2+0,1) \simeq f(2) + f'(2)\cdot 0,1$

$f(2,1) \simeq \frac{e^2}{3} + \frac{2e^2}{9}\cdot\frac{1}{10}$

$f(2,1) \simeq \frac{e^2}{3} + \frac{e^2}{45} \simeq \frac{16e^2}{45}$

المسألة (18)

$f(x) = x + e^{-x}$: $\mathbb{R}$

1] أثبت أن $\Delta : y = x$ مقارب مائل لـ C وادرس الوضع النسبي

2] ادرس التغيرات ودالة f ... الخط البياني وارسمه.

3] استنتج حلول المعادلة $x = 1 - \frac{1}{e^x}$

4] أثبت أن $f(x) > 0$ أيا كانت $x \in \mathbb{R}$

5] احسب مساحة السطح المحصور بين Δ و C والمستقيمين $x =$, $x =$

1] $f(x) - y_\Delta = e^{-x} > 0$ ، C فوق Δ

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ محققة

Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

2] التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = -\infty + \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x\left[1 + \frac{e^{-x}}{x}\right] = x\left[1 + \frac{1}{x e^x}\right]$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = -\infty\left[1 + \frac{1}{0^-}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \in D$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 1$ حدية صغرى

3] حلول المعادلة $x = 1 - \frac{1}{e^x}$

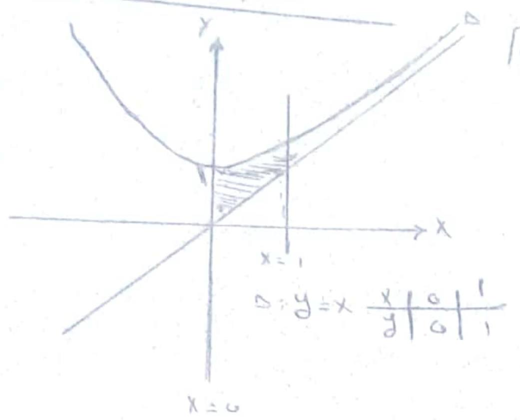
$x = 1 - e^{-x}$ نضيف e^{-x} :

$x + e^{-x} = 1$

(40). $f(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

4] من جدول التغيرات نجد أن : $f(x) \in [1, +\infty[$ وبالخصوص $f(x) > 0$

5]



$S = \int_0^1 f(x) - y_\Delta \, dx = \int_0^1 e^{-x} \, dx$

$S = [-e^{-x}]_0^1 = [-e^{-1}] - [-e^{0}]$

$S = 1 - \frac{1}{e}$

المسألة (19)

$f(x) = x + e^{x}$: $\mathbb{R}$

1] أثبت أن $\Delta : y = x$ مقارب مائل لـ C

2] ادرس التغيرات وارسم

3] أثبت أنه للمعادلة حل وحيد وليكن α ، $\alpha \in]-1, 0[$

4] استنتج الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{1 - x e^x}{e^x}$

5] احسب مساحة السطح المحصور بين C ، Δ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

4] $g(x) = \frac{1 - x e^x}{x}$

$f(x) = x + e^x$

$f(-x) = -x + e^{-x} = -x + \frac{1}{e^x} = \frac{-x e^x + 1}{e^x} = g(x)$

$(x, y) \to (-x, y)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب.

Scanned by CamScanner

[5] استنتج رسم البياني $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

[6] احسب مساحة المنطقة المحصورة بين محور السينات والمستقيمين $x = \ln 2 , x = 0$

[1] الشرط الأول : $x \in D$, $-x \in D$

الشرط الثاني كي إثبات أن $f(-x) = -f(x)$

نحقق $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -f(x)$

[2] التابع متزايد تماماً على $]-\infty , +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

[3] التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty , +\infty[$

$$f(]-\infty , +\infty[) =]-\infty , +\infty[$$

$$0 \in]-\infty , +\infty[$$

للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد في $]-\infty , +\infty[$

[4] $f(x) = 1$

$\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = 1$ — نضرب ب 2

$e^{x} - e^{-x} = 2$ — نضرب e^{x}

$e^{2x} - 1 = 2e^{x}$

$e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$e^{x} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$

$\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$

$e^{x} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ مرفوض

[5] $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$

$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = g(x)$

$(x, y) \to (-x, y)$

g نظير Cf بالنسبة لمحور التراتيب

[6] $S = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\,dx$

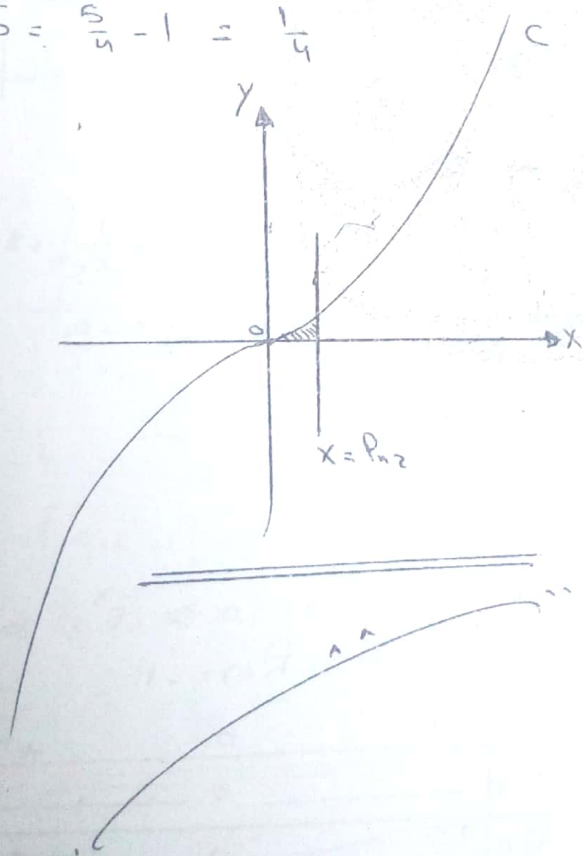
$S = \left[\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\right]_0^{\ln 2}$

$S = \left[\frac{1}{2}(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2})\right] - \left[\frac{1}{2}(e^{0} + e^{0})\right]$

$S = \left[\frac{1}{2}(e^{\ln 2} + e^{\ln \frac{1}{2}})\right] - \left[\frac{1}{2}(2)\right]$

$S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) - 1$

$S = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$



المسألة (16)

$c: f(x)=e^{-x}+x-2$ $\mathbb{R}$

1] أثبت أن المستقيم $D: y=x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

2] ادرس تغيرات ونظم جدولاً بها.

3] أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلان هما x_1, x_2
$x_1\in]1,2[$ $x_2\in]-2,-1[$

4] ارسم c

5] احسب بالنسبة $S(t)$ مساحة السطح المحصور بين c, Δ والمستقيمين $x=0, x=t$ حيث $t>0$.
واحسب $\lim_{t\to+\infty} S(t)$.

1]
$f(x)-y_D=e^{-x}$
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=0$ محقق
Δ مقارب مائل لـ c في جوار $+\infty$

2] التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty-\infty$ ع ع ش
$f(x)=x\left[\frac{e^{-x}}{x}+1-\frac{2}{x}\right]=x\left[\frac{1}{xe^{x}}+1-\frac{2}{x}\right]$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\left[\frac{1}{0^-}+1-0\right]=+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=-e^{-x}+1$
$f'(x)=0 \Rightarrow -e^{-x}+1=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow$
$\boxed{x=0}\in D$ $f(0)=-1$

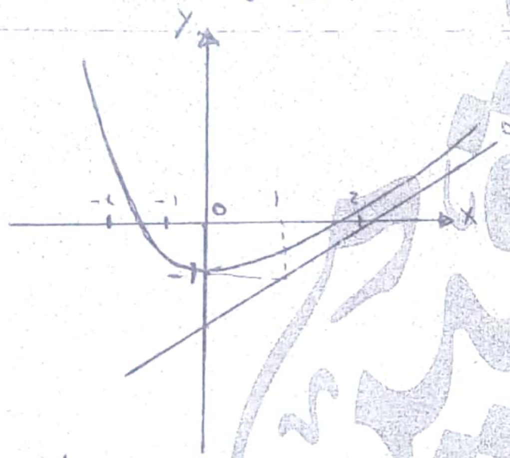
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3] التابع مستمر ومتناقص $]-2,-1[$
$f(]-2,-1[)=]e-3, e^2[$
$0\in]e-3,e^2[$
للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $]-2,-1[$

التابع مستمر ومتزايد $]1,2[$
$f(]1,2[)=]\frac{1}{e}-1,\frac{1}{e^2}[$
$0\in]\frac{1}{e}-1,\frac{1}{e^2}[$
للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $]1,2[$:

4] $D: y=x-2$

x	0	1
y	-2	-1



5]
$S(t)=\int_0^t e^{-x}\,dx$
$S(t)=[-e^{-x}]_0^t$
$S(t)=[-e^{-t}]-[-1]=1-e^{-t}$
$\lim_{t\to+\infty}(S(t))=1.$

المسألة (17): $c: f(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$ $\mathbb{R}$

1] أثبت أن التابع فردي

2] ادرس تغيرات

3] أثبت أن المعادلة $f(x)=1$ حل وحيد وليكن α

4] أثبت أن المعادلة $f(x)=1$ يكافئ $e^{2x}+2e^{x}-1=0$
واستنتج $\alpha=\ln(\sqrt{2}-1)$

(15). ت

$$f(x) = (x-1)e^{-x} - 1 \quad : R$$

1) ادرس تغيرات ودل ع اهم لجبة

2) أثبت أن $f(x) < 0$ أيا كانت $x \in R$

3) ارسم C

4) ليكن التابع $G(x) = (ax+b)e^{-x} - x$ تابعاً أصلياً لـ f عين a, b

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و $x = 2$, $x = 1$

---

1) التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty, +\infty[$:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) : +\infty . 0 \quad \text{عدم تعيين}$$

$$f(x) = xe^{-x} - e^{-x} - 1 = \frac{x}{e^{x}} - e^{-x} - 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0 - 0 - 1 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots y = -1$$

$$f'(x) = 1(e^{-x}) + (-e^{-x})(x-1)$$

$$f'(x) = e^{-x}[1 - x + 1] = e^{-x}(2 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(2-x) = 0$$

لأن $e^{-x} > 0$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \in D$

$$f(2) = \frac{1}{e^2} - 1$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2} - 1$	$\searrow$	-1

حدية كبرى $f(2) = \frac{1}{e^2} - 1$

---

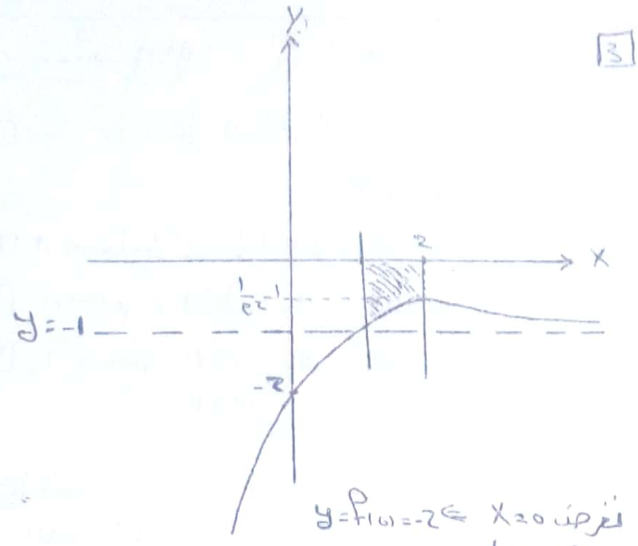
2) من جدول التغيرات نجد أن

$$f(x) \in]-\infty, \tfrac{1}{e^2} - 1] \cup \; -1, \tfrac{1}{e^2} - 1$$

$$f(x) \in]-\infty, -1[\quad \text{وهو سالب}$$

محققة $f(x) < 0$

3)



نفرض $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -2$
$(0, -2)$

---

4) بما أن G تابعاً أصلياً لـ f فيكون :

$$G'(x) = f(x)$$

$$G'(x) = (a)(e^{-x}) + (-e^{-x})(ax+b) - 1$$

$$G'(x) = e^{-x}[a - ax - b] - 1$$

$$G'(x) = e^{-x}[-ax + a - b] - 1$$

وفيه $G'(x) = f(x)$

$$e^{-x}[-ax + a - b] - 1 = e^{-x}(x-1) - 1$$

بالمطابقة بين الطرفين :

$$-a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$a + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$G(x) = (-x)e^{-x} - x$$

---

5)

$$S = \int_1^2 -f(x)\,dx = \int_2^1 f(x)\,dx$$

$$S = [G(x)]_1^2$$

$$S = [-1 . e^{-1} - 1] - [-2e^{-2} - 2]$$

$$S = \frac{-1}{e} - 1 + \frac{2}{e^2} + 2$$

$$S = 2 + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e}$$

مسألة (14) $f(x) = (x-1)e^x \; : \mathbb{R}$

1) اثبت بالاستقراء الرياضي صحة العلاقة :

$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً.

3) ارسم C الخط البياني للتابع f

4) استنتج الخط البياني للتابع g ؛

$g(x) = x \cdot e^{(x+1)}$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الاحداثيات .

الحل: 1) نرمز للقضية $E(n)$ بـ

$$E(n) = f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

$$f'(x) = (1)(e^x) + (e^x)(x-1)$$

$$f'(x) = e^x[1+x-1] = xe^x$$

1- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n=1$:

$$f^{(1)}(x) = (x+1-1)e^x = xe^x = f'(x)$$

فالعلاقة محققة من اجل $n=1$

2- نفرض صحة العلاقة من اجل n :

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

3- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$

- يجب اثبات أن ؛ $f^{(n+1)}(x) = (x+n)e^x$

$$L_1 = f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'$$

$$= \left[(x+n-1)e^x\right]' = (1)(e^x) + e^x(x+n-1)$$

$$= e^x[1+x+n-1] = (x+n)e^x = L_2$$

فالعلاقة محققة من اجل $(n+1)$ فرضاً محققة من اجل n

2) $f(x) = (x-1)e^x = xe^x - e^x$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = 0 - 0 = 0$$

$\boxed{y=0}$ مقارب ...

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$f'(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 0$$

$\Rightarrow xe^x = 0$ اما $x = 0 \in D \Rightarrow \boxed{f(0) = -1}$

أو $e^x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) + مساعدة:

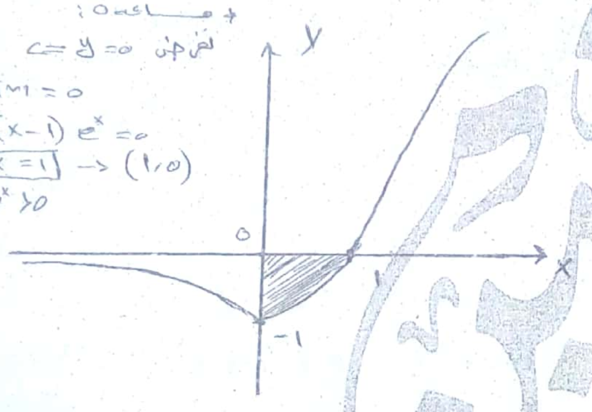
نفرض $y=0 \Leftarrow$

$f(x) = 0$

$\Rightarrow (x-1)e^x = 0$

اما $\boxed{x=1} \to (1,0)$

أو $e^x > 0$



4) $g(x) = x \cdot e^{(x+1)}$

$f(x) = (x-1)e^x$ انطلاقاً من:

نبدل كل x بـ $(x+1)$

$$f(x+1) = (x+1-1)e^{x+1} = xe^{x+1} = g(x)$$

$$(x, y) \longrightarrow (x-1, y)$$

C_g ينتج عن C_f بانسحاب بمقدار (-1) على محور الفواصل

5) $S = \int_0^1 -f(x)\,dx = \int_1^0 f(x)\,dx$

$S = \int_1^0 (x-1)e^x dx \; ; \quad u = x-1 \quad u' = 1 \quad v' = e^x \quad v = e^x$

$S = [(x-1)e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x dx = [(x-1)e^x]_1^0 - [e^x]_1^0$

$S = [(x-1)e^x - e^x]_1^0 = -2 + e$

Scanned by CamScanner

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

[1] ادرس تغيرات ، ونظم جدولا.

[2] ارسم C

[3] استنتج المنحني البياني للتابع g

$g(x) = x^2 \cdot e^{x}$

[4] F تابع معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$F(x) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x}$

اثبت أن F تابعاً اولياً لـ f

[5] احسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل والمستقيمين $x=0$, $x=1$

الحل: [1] $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) : +\infty \cdot 0$$ " عدم تعيين "

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$$

$\boxed{y = 0}$ مقارب افقي ...

$$f'(x) = (2x)(e^{-x}) + (-e^{-x})(x^2)$$

$$f'(x) = e^{-x}[2x - x^2] \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x}[2x - x^2] = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0$$

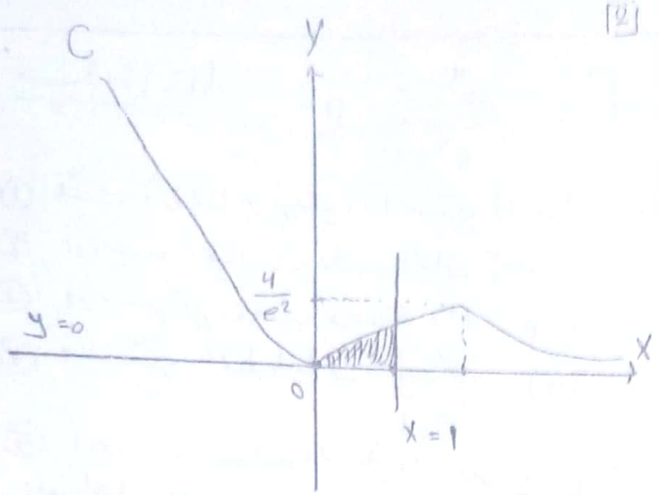
$$\Rightarrow x[2 - x] = 0$$

اما : $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

او : $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{4}{e^2}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

[2]



[3] انطلاقاً من : $g(x) = x^2 \cdot e^{x}$:

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

نبدل كل x بـ $-x$:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^{x} = g(x)$$

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب.

[4] F تابعاً أولياً لـ f :

ليكون F تابعاً أولياً لـ f يجب اثبات

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x}$$

$$F'(x) = (-2x - 2)(e^{-x}) + (-e^{-x})(-x^2 - 2x - 2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = x^2 \cdot e^{-x} = f(x)$$ محقق

F تابعاً اولياً لـ f.

[5]

$$S = \int_0^1 f(x)\, dx$$

$$S = [F(x)]_0^1$$

$$S = [(-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x}]_0^1$$

$$\vdots$$

$$S =$$

مسألة (12)

$C: f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\mathbb{R}$

① اثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية

② ادرس تغيرات على المجال $[0,+\infty[$

③ ارسم كل مقارب وجدته وارسم C

④ استنتج الخط البياني $g(x) = \frac{|e^x-1|}{e^x+1}$

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ ، $x=-1$.

الحل: [1] الشرط الأول محقق $x \in D_f \to -x \in D_f$

الشرط الثاني يجب اثبات أن: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x)$$

محقق

فالتابع فردي: فخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات.

② التابع معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $[0,+\infty[$

$$f(0) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

عامل مشترك

عامل مشترك

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{e^x[1-\frac{1}{e^x}]}{e^x[1+\frac{1}{e^x}]} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

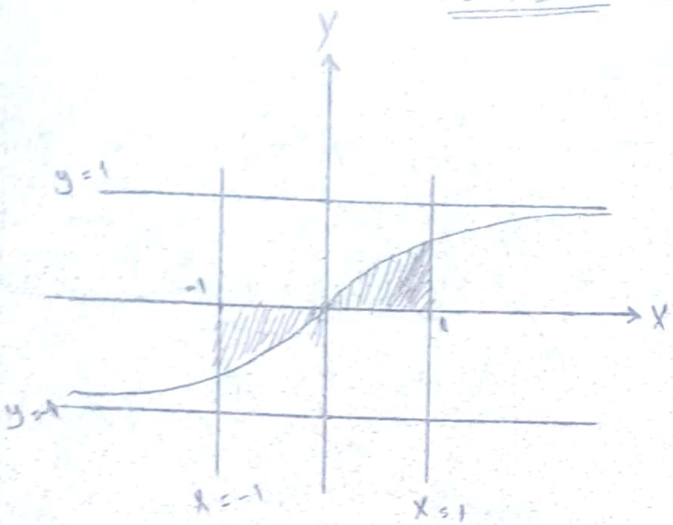
$\boxed{y=1}$ مقارب

$$f'(x) = \frac{e^x[e^x+1]-[e^x][e^x-1]}{[e^x+1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x[e^x+1-e^x+1]}{[e^x+1]^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

[3] التابع فردي:



[4] $g(x) = \frac{|e^x-1|}{e^x+1}$

انطلاقاً من: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ نأخذ القيمة المطلقة للطرفين

$$|f(x)| = \left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| = \frac{|e^x-1|}{e^x+1} = g(x)$$

موجب دوماً

$$(x,y) \longrightarrow (x,|y|)$$

C_g ينتج عن C_f بالحفاظ على التراتيب الموجبة ونأخذ نظائر التراتيب السالبة بالنسبة لمحور الفواصل.

[5] بما أن التابع فردي وحدود التكامل متناظرة

$$S = 2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$S = 2\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 2\int_0^1\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right)dx$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$=2\left[\ln|e^x+1| + \ln|1+e^{-x}|\right]_0^1$$

موجب ، موجب

$$=2\left[\ln(e^x+1)+\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$=2\left[\ln(e^x+1+1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$=2\left[\ln(e^x+2+e^{-x})\right]_0^1 = 2\left[\ln(e+2+e^{-1}) - \ln(1+2+1)\right]$$

$$=2\left[\ln(e+2+e^{-1}) - \ln(4)\right]$$

نقطة التماس : $x = 1$

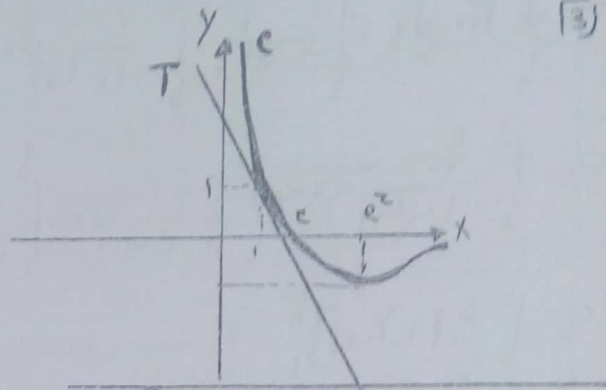
في نقطة التماس : $y = f(1) = 1 \Rightarrow (1,1)$

الميل : $m = f'(1) = -2$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$T : \boxed{y = -2x + 3}$$

[3]



[4] (1-) نعرف بدءاً : $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

$$-f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x} = g(x)$$

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل.

[5] $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x}\,dx$

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cdot \ln x\,dx$$

$$S = \left[\ln|x| - \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e$$

$$S = \left[1 - \tfrac{1}{2}\right] - [0 - 0] = \tfrac{1}{2}.$$

كذلك : الدالة زوجية.

[2] الدالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{x^2 - 1} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

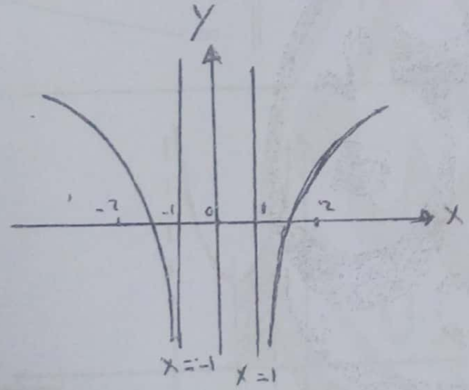
[3] الدالة مستمرة ومتزايدة $]1, 2[$:

$$f(]1,2[) =]-\infty, 4 + \ln 3[$$

$$0 \in]-\infty, 4 + \ln 3[$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $]1, 2[$:

[4]



المسألة (16) :

$C : f(x) = x^2 + \ln(x^2 - 1)$: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

[1] أثبت أن الدالة زوجية.

[2] ادرس النهايات $]1, +\infty[$

[3] أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $]1, 2[$

[4] ارسم C

[1] الشرط الأول : $x \in D$ ، $-x \in D$

الشرط الثاني : يجب إثبات أن $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = (-x)^2 + \ln[(-x)^2 - 1] = x^2 + \ln(x^2 - 1) = f(x)$$

المسألة (17) :

$C : f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$: $]0, +\infty[$

[1] ادرس النهايات

[2] أثبت أن المستقيم D $y = x - \ln 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

[3] ادرس الوضع النسبي بين C, D

[4] أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $]1, 2[$

[5] ارسم C, D

[1] التابع معرف ومستمر واشتقاقي $]0,e[\,\cup\,]e,+\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ---- $x=0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} e} f(x) = +\infty$ ---- $x=e$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} e} f(x) = -\infty$ ---- $x=e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ---- $y=0$

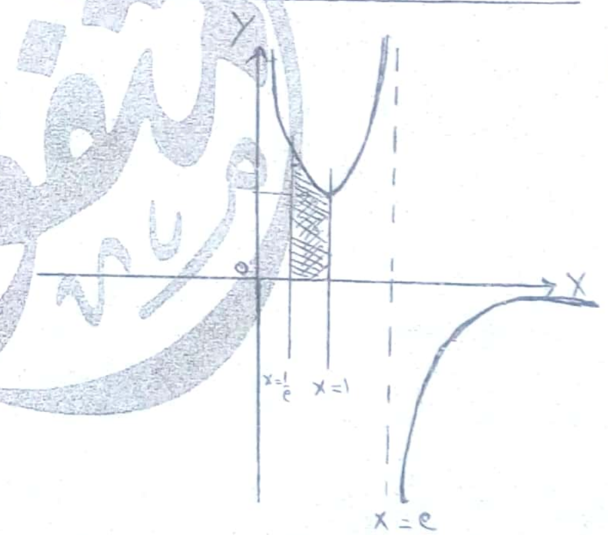
$$f'(x) = \frac{0-[1-(\ln x+1)]}{(x-x\ln x)^2} = \frac{\ln x}{[x-x\ln x]^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1 \in D$

$f(1) = 1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0

[2]



[3] انطلاقاً من [1] نعرف: $f(x) = \frac{1}{x-x\ln x}$

$-f(x) = \frac{1}{x\ln x - x} = g(x)$

$(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

[4] نفرض أن $u_n = f(n) = \frac{1}{n-n\ln n}$

من جدول التغيرات نجد أن التابع f متزايد $]e,+\infty[$

فالمتتالية متزايدة بدءاً من الحد الثالث $n=3$

[5] $$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x-x\ln x} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)}\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-\frac{1}{x}}{(1-\ln x)}\,dx = \int_{1}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$$

$$S = \Big[\ln|1-\ln x|\Big]_{1}^{\frac{1}{e}}$$

$$S = [\ln 2] - [\ln(1)] = \ln 2$$

المسألة (9) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$: $]0,+\infty[$

[1] ادرس تغيرات f [2] أوجد معادلة المماس $x=1$

[3] $f(e^{-1})$ [4] استنتج g : $g(x) = \frac{\ln(x)-1}{x}$

[5] احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x=e$, $x=1$

[1] التابع معرف ومستمر واشتقاقي : $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0-0 = 0$ ---- $y=0$

$$f'(x) = \frac{-2+\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x=e^2 \in D$

$f(e^2) = -\frac{1}{e^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↗	0

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

① - أوجد مجموعة التعريف

$]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

② - أوجد نهايات التابع ومقارباته

A.D

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ $\boxed{y=1}$ مقارب أفقي

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=+\infty$

$\boxed{x=2}$ مقارب شاقولي ...

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

③ : هل يقبل C مقارباً مائلاً ولماذا

لا يقبل C مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ لأنه يقبل مقارباً أفقياً.

ولا يقبل C مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ لأنه يقبل مقارباً أفقياً.

④ : أوجد معادلة المماس عند $\boxed{x=0}$

$y=2$

مماس أفقي.

⑤ : أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها (1)

مماس شاقولي $\boxed{x=1}$

⑥ - دل على القيم الحدية.

$f(0)=2$ قيمة كبرى

$f(1)=0$ قيمة صغرى

⑦ : احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=0$$

⑧ - ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

للمعادلة $f(x)=0$ حلان.

⑨ : أوجد $f(D_f)$ و $f(]2,+\infty[)$

$f(D_f)=]-\infty,+\infty[$

$f(]2,+\infty[)=]-\infty,1[$

⑩ : حل المتراجحة $f'(x)\geq 0$

A.S

$]-\infty,0]\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

3] أوجد $f(1)$ ، $f'(1)$ واستنتج $f(1,2)$

$f(1)=0 \qquad f'(1)=m=1$

$a=1$ ، $h=0,2 \Rightarrow f(1,2)=?$: التقريب التآلفي

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a).h$

$f(1+0,2) \simeq f(1) + f'(1).0,2$

$f(1,2) = 0 + 1 . \frac{2}{10} \simeq \frac{2}{10} \simeq 0,2$

A.S

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	1

1)- أوجد مجموعة التعريف ونهايات التابع ومقارباته

2)- اكتب معادلة المماس عند $x=-2$

3)- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

الحل: $D_f :]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x) = +\infty$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي ...

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = -\infty$ ... $\boxed{x=1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\boxed{y=1}$ مقارب أفقي ...

2) $\boxed{y=-1}$

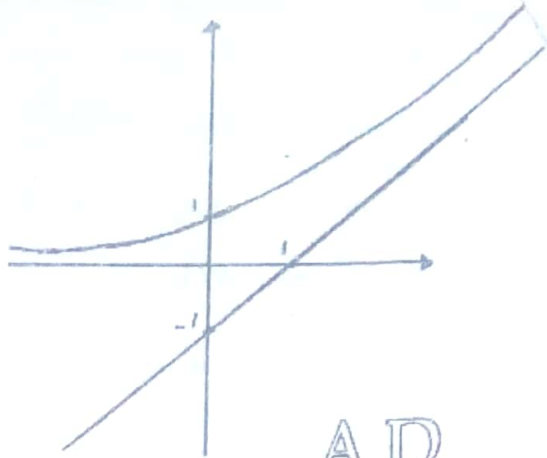
لأن المماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها (-2)

3) للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1)- مجموعة التعريف والنهايات

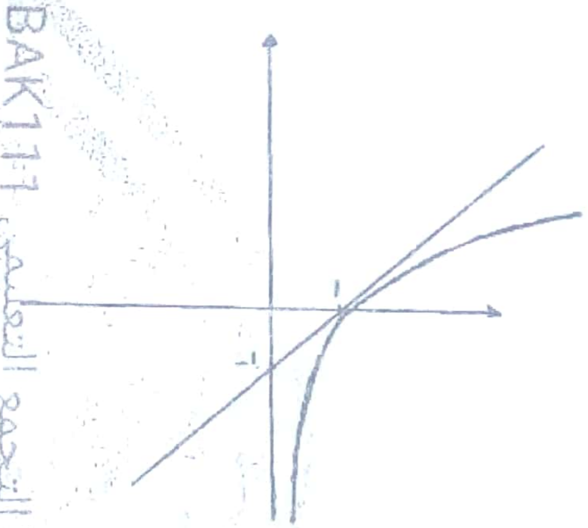
2)- أوجد القيم الحدية - 3) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$



A.D

1] أوجد مجموعة التعريف واستنتج ماله من مقاربات

2] أوجد معادلة المقارب



1] أوجد مجموعة التعريف واستنتج ماله من مقاربات

$D_f :]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} (f(x)) = -\infty$ ...... $\boxed{x=0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)) = +\infty$

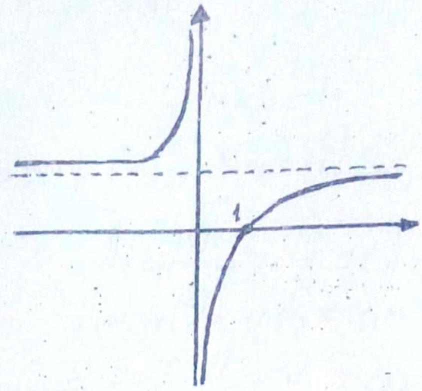
2] أوجد معادلة المماس عند $x=1$:

المماس يمر من النقطتين $A(1,0)$ ، $B(0,-1)$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$

رابعاً:



1- أوجد مجموعة التعريف.

$D_f:]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

2- أوجد المقاربات.

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$y=1$ = = = $+\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

3- حل المعادلة $f(x)=0$

للمعادلة حل وحيد $x=1$

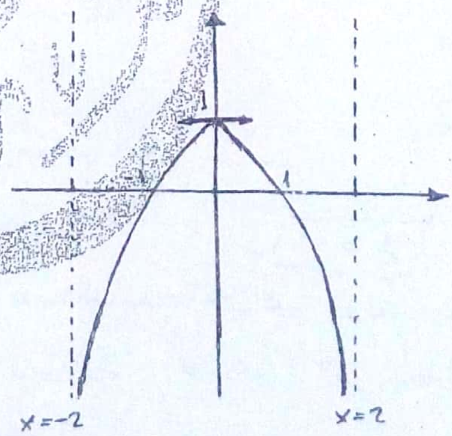
4: مجموعة تعريف التابع

$g(x)=\ln(f(x))$

التابع معرف على $f(x)>0 \Leftarrow$

$D_g:]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

خامساً:



① : أوجد مجموعة التعريف ونهايات على الأطراف

$D_f:]-2,2[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=-\infty$

② : أوجد مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$

للمعادلة حلان

$x=1$ و $x=-1$

③ : أوجد $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0)=1 \qquad f'(0)=0$

④- أوجد مجموعة تعريف التابع $g(x)$ حيث

$g(x)=\ln(f(x))$

$]-1,1[$

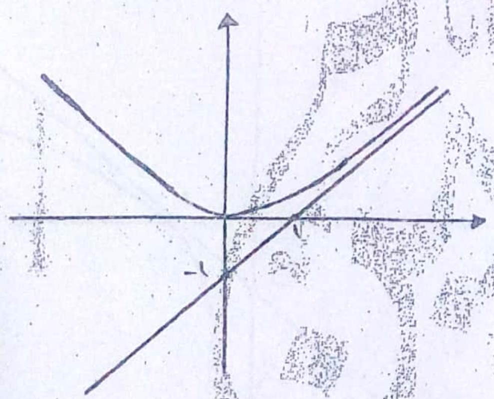
⑤ : أوجد $f(]-2,2[)$

$f([-1,1])$

$f(]-2,2[)=]-\infty,1]$

$f([-1,1])=[0,1]$

سادساً:



① : أوجد مجموعة تعريف التابع ونهاياته

الحل: $D_f:]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

② : دل على القيم الحدية

$f(0)=0$ صغرى محلياً

③ : معادلة المقارب المائل

نرمز للنقطتين $A(1,0)$ $B(0,-1)$

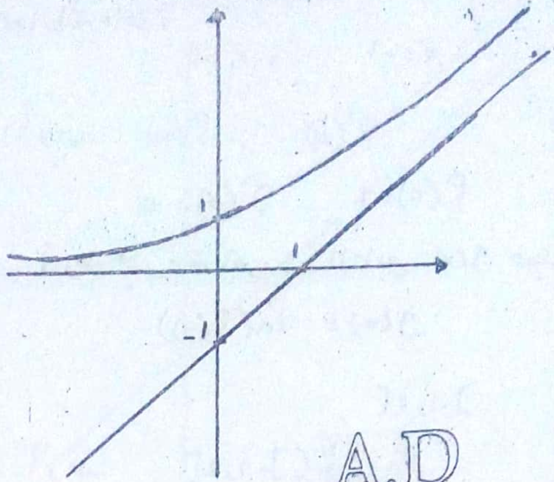
$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-0}{0-1}=1$

$y=mx+b \Rightarrow y=x+b$

نعوض $A(1,0) \Leftarrow$

$0=1+b \Rightarrow \boxed{b=-1} \Rightarrow$

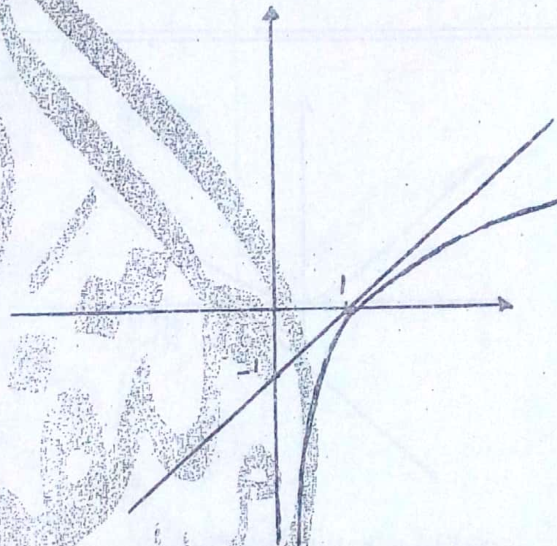
$\boxed{y=x-1}$



A.D

1] أوجد مجموعة التعريف واستنتج ماله من مقاربات

2] أوجد معادلة المقارب



1] أوجد مجموعة التعريف واستنتج ماله من مقاربات

$D_f :]0,+\infty[$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ...... $\boxed{x=0}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2] أوجد معادلة المماس عند $x=1$:

المماس يمر من النقطتين $A(1,0)$, $B(0,-1)$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$

3] احسب $f(1)$, $f'(1)$ واستنتج $f(1,2)$

$f(1) = 0$ $\qquad f'(1) = m = 1$

التقريب التآلفي : $f(1,2) = ?$ $\quad a=1$, $h=0,2$

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h$

$f(1+0,2) \simeq f(1) + f'(1) \cdot 0,2$

$f(1,2) \simeq 0 + 1 \cdot \frac{2}{10} \simeq \frac{2}{10} \simeq 0,2$

A.S

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

1) أوجد مجموعة التعريف ونهايات التابع ومقارباته

2) اكتب معادلة المماس عند $x=-2$

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

الحل

$D_f :]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ ...... $\boxed{x=1}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ...... $\boxed{y=1}$ مقارب أفقي

2) $\boxed{y=-1}$

لأن المماس أفقي عند النقطة التي فاصلتها 2-.

3) : للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

1) مجموعة التعريف والنهايات

2) أوجد القيم الحدية - 3) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$