
π, π, π, π, π ...

اختبار 1

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. احسب كلاً مما يأتي :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)$ ❷ $\int_0^{\ln 2} e^x(1-e^x)^3\,dx$

السؤال الثاني. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $9^x-3^{x+1}+2=0$.

السؤال الثالث. $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الرابع. في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$، والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$ ، اكتب معادلة الكرة التي مركزها A ، وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. أثبت أنّ $\ln x \le x-1$، أياً يكن $x>0$. باختيار $x=e^{1/3}$ و $x=e^{-1/3}$، احصر e.

التمرين الثاني. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرّفة تدريجياً بالعلاقات: $u_0=0$ و $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً.

التمرين الثالث. احسب قيمة r إذا علمت أن . $\dfrac{1}{\binom{4}{r}}=\dfrac{1}{\binom{5}{r}}+\dfrac{1}{\binom{6}{r}}$.

التمرين الرابع. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

1. أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.
2. ادرس التابع f، وعين المقارب الشاقولي لـ C، وارسم كل مقارب وجدته ، ثُمّ ارسم C.
3. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله 0.5.

المسألة الثانية. يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$، نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1. عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الإحتمالي.
2. احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$، والتباين $\mathbb{V}(X)$.

اختبار 2

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

❶ أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

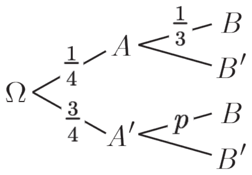
❷ أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط $(\mathcal{C})$.

السؤال الثاني. نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي: $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$.

❶ أثبت أنّ $0\leq u_n\leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

السؤال الثالث. ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور. كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟



السؤال الرابع. نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط $A(1,5,4)$ ، و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$.

❶ بيّن أنّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

❷ بين أنّ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعدادحقيقية يطلب تعيينها.

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$، ثمّ أعطِ عدداً حقيقياً α يحقق الشرط: إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in\,]2.9,3.1[$.

التمرين الثاني. أثبت أنّه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\dfrac{x}{1+x}\leq \ln(x+1)$

التمرين الثالث.

❶ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ (لاحظ أنّ : $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين $z_A=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$ و $z_B=\overline{z_A}$ بيّن أنّ $\frac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

التمرين الرابع. نريد تأليف لجنة مكونة من (مديرو نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرَّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x+1)^2.\,e^{-x}$.

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع $(\mathcal{C})$ بالنسبة إليه.

❷ ارسم كل مقارب وجدته، ثم ارسم $(\mathcal{C})$.

❸ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α وأنّ هذه الحل ينتمي إلى المجال $]-2,-1[$ واستنتج أنّ α تحقّق المعادلة $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

❺ استنتج مجموعة تعريف التابع $x\mapsto g(x)=\ln(f(x))$ ثم حلّ المعادلة $g(x)=-x$.

المسألة الثانية. لدينا n صندوقاً $u_1,u_2,\dots,u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء. وكلّ صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n.

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

1. احسب $\mathbb{P}(R_1)$.
2. أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_2)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1)+\frac{1}{4}$.
3. أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_k)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1})+\frac{1}{4}$ في حالة $2\le k\le n$.
4. نعرّف $x_k=\mathbb{P}(R_k)-\frac{1}{3}$.

❶ أثبت أنّ المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسية. عيّن أساسها وحدها الأول.

❷ اكتب x_k بدلالة k واستنتج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k.

اختبار 3

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. أثبت أنّ للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثمّ بيّن أنّ $\alpha \in]-1,0[$.

السؤال الثاني. حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$، ثم عيّن حلها f الذي يحقق $f(-1)=2$.

السؤال الثالث. ليكن التابع f المعرّف بالصيغة $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$. احسب النهايتين:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

السؤال الرابع. يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء، عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين. يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

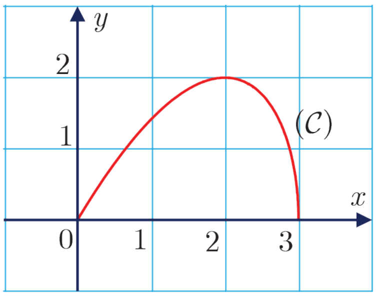
ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان كما يأتي

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n=u_n+\frac{1}{4n}$$

أثبت أنّ هاتين المتتاليتين متجاورتان.

التمرين الثاني. في الشكل المجاور $(\mathcal{C})$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة: $f(x)=x\sqrt{3-x}$. عندما يدور $(\mathcal{C})$ دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً $\mathcal{S}$.



❶ ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x\in]0,3[$؟

❷ عيّن $A(x)$، مساحة هذا المقطع بدلالة x، ثمّ استنتج V حجم المجسم S.

التمرين الثالث. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$.

❶ اكتب العدد العقدي $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ تخيلياً بحتاً.

❸ عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M\neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M-z_C}{z_M-z_B}$ حقيقياً.

التمرين الرابع. في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,\ 3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,\ 1)$.

❶ أثبت أنّ المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها واستنتج ما للخط $(\mathcal{C})$ من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدية مبيناً نوعها.

❷ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم $(\mathcal{C})$.

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$.

المسألة الثانية. يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء. إذا صدّ ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8، وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6. نفترض أنّ احتمال أن يصد أوّل ضربة جزاء يساوي 0.7.

ليكن A_n الحدث « يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n ».

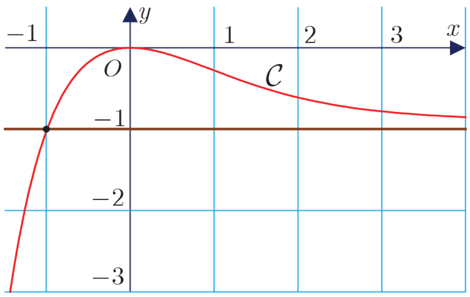
1. احسب $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ و $\mathbb{P}(A_2|A_1')$.
2. استنتج أنّ $\mathbb{P}(A_2)=0.74$.
3. نعرّف $p_n=\mathbb{P}(A_n)$:

❶ برهن أنّ $p_{n+1}=(0.2)p_n+0.6$.

❷ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بالصيغة $u_n=p_n-0.75$ بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2. استنتج عبارة p_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.

اختبار 4

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول. في الشكل المجاور خط بياني $\mathcal{C}$ لدالة f، ومن خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة التالية:

❶ ما معادلة المستقيم المقارب للخط $\mathcal{C}$؟ وما الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ مع هذا المقارب ؟

❷ يقبل f قيماً حدية محلياً. عيّنها وعين نوعها.

❸ في حالة عدد حقيقي k، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة k.

السؤال الثاني. لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$.

❶ ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

السؤال الثالث. في لمعلمٍ متجانسٍ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط : $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$. **بيّن مع التعليل صحّة أو خطأ كل من المقولات الآتية:**

❶ **المثلث ABC قائم**

❷ **المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).**

❸ **حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$.**

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot e^{-x}$ والمطلوب :

❶ احسب $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$.

❷ أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$.

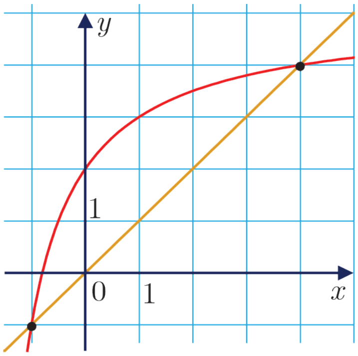
التمرين الثاني. المستقيمان L و L' معرّفان وسيطياً وفق

$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} : t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+2s \end{cases} : s\in\mathbb{R}$$

❶ أثبت أنّ L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

❷ أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L'

التمرين الثالث.



نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

❶ باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3.

❷ ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها.

❸ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$.

1. بيّن أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، وعيّن أساسها وحدها الأول.

2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n، وعين نهاية المتتالية u_n.

التمرين الرابع. نتأمّل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية: $a=-1$ و $b=2+i\sqrt{3}$ و $c=2-i\sqrt{3}$ و $d=3$ بالترتيب. والمطلوب :

❶ ارسم النقاط A و B و C و D، ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عين $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

❸ أثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. **أولاً** : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=x(\ln x)^2$$

❶ أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل : $f(x)=4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=-2x\ln x$. أثبت أنه عند $x>0$ يكون $f(x)-g(x)=xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g.

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

❶ بين أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y=xf'(x_0)+g(x_0)$.

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب، ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0.

المسألة الثانية. نتأمّل صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد 3 , 2 , 1، ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد 5 , 4 , 3 , 2. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

❶ اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.

❷ ليكن A الحدث «إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم (3)»

وليكن B الحدث «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من (5)»

هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علل إجابتك.

❸ نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه.