الأشعة:

★ فكرة ايجاد إحداثيات رؤوس مكعب او متوازي اضلاع أو ــــــ .

أولاً: المعلم في الفراغ:

تمهيد: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ معلم في الفراغ حيث:

* O: هو مبدأ المعلم، و $(\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ السداسي أشعة الفراغ، ونقول ان بعد الفراغ يساوي (3) لأن عدد الأشعة لرأس اساسي فيه يساوي (3)

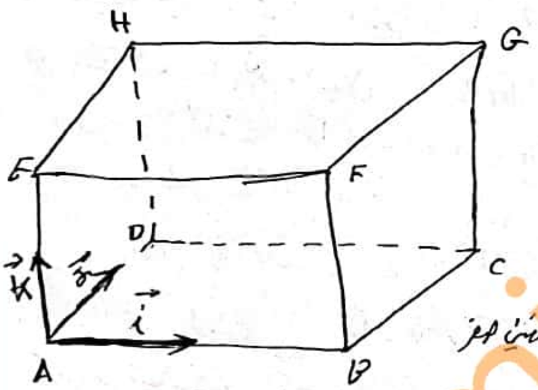
* نفرض M نقطة $M(x,y,z)$ فإن $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{K}$ ونسمي x فاصلة النقطة M، و y ترتيبها و z علو أو راقم M

يعني اذا كان عندي مكعب بختار معلم او شي وره نتعامل بداغلب المسائل مع المعلم المتجانس

اختيار المعلم $(A;\frac{1}{\$}\vec{AB},\frac{1}{\$}\vec{AC},\frac{1}{\$}\vec{AE})$

الـ $\$$ هو الافتراضي يالك الـ $\$$ هي يعني طول حرف او طول ضلع.

يمكن كتابته بشكل تالي:



$\vec{AB} = \$\vec{i}$ وهنا نقصد x تساوي $\$$

$\vec{AD} = \$\vec{j}$ " " y " $\$$

$\vec{AE} = \$\vec{K}$ " " z " $\$$

النقطة A بالنها مبدأ فهي $(\overset{x}{0},\overset{y}{0},\overset{z}{0})$

" B " " على محور الأكسات وهيكون الها اكسات x اما الوايات والزدات فهي صفر $(\$,0,0)$

" D الها اكسات والوايات والازدات وقيمة الزد تساوي الصفر $(0,\$,0)$ وكان الاكسات H

" C الها اكسات والوايات بس ما الها زدات $(\$,\$,0)$

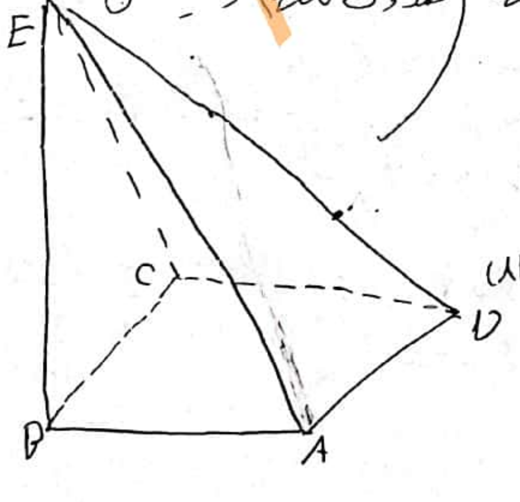
النقطة E مثل الـ A بس الها z

" F " " B " " z $(x,0,z)$

" H " " D " " z $(0,y,z)$

" G " " C " " z (x,y,z)

(هدول للفهم وليس للحفظ) لانها متوقفة $(0,0,z)$



مثال: 8 ص 39

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$ (مالا تكفي بالنص لحي يريان:)

* أعط معلماً متجانساً مبدؤه B وأوجد احداثيات جميع النقاط

الحل: أولاً نفرض معلماً متجانساً $(B;\frac{1}{4}\vec{BA},\frac{1}{4}\vec{BC},\frac{1}{4\sqrt{2}}\vec{BE})$

$B(0,0,0)$ المبدأ، $A(4,0,0)$ الها أكسات بدون y وبدون z، $C(0,4,0)$ الها وايات بدون x و z

$D(4,4,0)$ الها x و y بدون z، الـ $E(0,0,4\sqrt{2})$ الها z بدون x و y

خواص الأشعة بالفراغ:

ليكن لدينا المعلم متعامد بالفراغ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و ليكن لدينا الشعاعات: $\vec{U}(x_1,y_1,z_1)$ ، $\vec{V}(x_2,y_2,z_2)$

و النقاط $A(x_A,y_A,z_A)$ ، $B(x_B,y_B,z_B)$ ، $C(x_C,y_C,z_C)$

⊛ اذا كانت لدينا K عدد من المجموعة R ، وضربنا بـ K بـ شعاع $\vec{U}$ او $\vec{V}$ سينتج لدينا $K\vec{U}=(Kx_1,Ky_1,Kz_1)$

يعني الـ K رح تنضرب بالمركبات كلها (المركبات يعني الـ x,y,z)

⊛ جمع شعاعين $\vec{U}+\vec{V}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ يعني اذا بدي اجمع شعاعين بجمع الـ x مع بعضهن الـ y مع بعضهن وال

ما بجمع الـ x مع y أو z كرمال علماء الرياضيات ما يقبروك لأنك عم تخترع قواعد جديدة 🙂 .

⊛ مركبات الشعاع $\vec{AB}$ هي :

$$\vec{AB}(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$$

يعني رح اخد النقطة لي بالنهاية أو بالأخير و رح اطرح منها النقطة لي بالأول (رح نحفظها نهاية - بداية)

⊛ طيب اذا ذكرلي احداثيات منتصف قطعة مستقيمة مثلا $[AB]$ هي النقطة: $M(\underbrace{\frac{x_B+x_A}{2}}_{x_M},\underbrace{\frac{y_B+y_A}{2}}_{y_M},\underbrace{\frac{z_B+z_A}{2}}_{z_M})$

يعني بجمع المركبات وبقسم على 2

⊛ G مركز ثقل المثلث ABC عندئذ:

$$G(\overbrace{\frac{x_A+x_B+x_C}{3}}^{x_G},\overbrace{\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}^{y_G},\overbrace{\frac{z_A+z_B+z_C}{3}}^{z_G})$$

يعني منجمع مركبات النقاط A و B و C ومنقسم ع 3 (هام)

⊛ النقطة D التي تجعل $ABCD$ متوازي الأضلاع تحقق $\vec{AB}=\vec{DC}$

يعني اذا كانت D مجهولة بقدر طالعها باخد نهاية ناقص بداية لكل حرف وبعيد بين مطابقة وبطالع المجهول

تدريب: ليكن لدينا المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-1,3,3)$ و $C(4,-1,2)$ ولتكن D نقطة تجعل $ABCD$ متوازي اضلاع ، احسب احداثيات D ثم احسب احداثيات I مركز متوازي الأضلاع.

الحل: يكون $ABCD$ متوازي اضلاع اذا تحقق $\vec{AB}=\vec{DC}$

نوجد مركبات $\vec{AB}$ وهي: $\vec{AB}(-2,1,6)$

ونفرض احداثيات D هي: $D(x,y,z)$ ومنه مركبات $\vec{DC}$ تكون

$$\vec{DC}(4-x,\ -1-y,\ 2-z)$$

$$\vec{AB}=\vec{DC}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}4-x=-2 \Rightarrow x=6\\ -1-y=1 \Rightarrow y=-2\\ 2-z=6 \Rightarrow z=-4\end{array}\right\} \Rightarrow D(6,-2,-4)$$

احداثيات I مركز متوازي الأضلاع: هو منتصف القطرين اما $[AC]$ أو $[BD]$ رح اشتغل على AC

$$I\left(\frac{4+1}{2},\frac{-1+2}{2},\frac{2-3}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

ثانياً: الأوضاع النسبية: اول شي لازم نميز (شعاع التوجيه هو للمستقيم ونسمي $\vec{u}$ والناظم وهي هو للمستوي ونسمي $\vec{n}$)

أولاً: الوضع النسبي لمستويين:

نفرض لدينا

$$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

$\vec{n_1}(a_1,b_1,c_1)$

$\vec{n_2}(a_2,b_2,c_2)$

ولدينا 3 حالات:

منطبقين: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_1}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$

متوازيين: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$

يعني لازم تكون النواظم مرتبطة خطياً أو فينا نعبر عنا بشكل تامي: $\vec{n_1}=K\vec{n_2}$

متقاطعين: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (م: لما يتقاطعو، يتقاطعو بشي اسمو فصل مشترك)

النواظم غير مرتبطة خطياً وما منعبر عنا بشكل تامي: $\vec{n_1}\neq K\vec{n_2}$

حالة خاصة: اذا كان $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ وهو يعني عندي التعامد

كيف يعني؟؟!!!

$$a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2+c_1\cdot c_2=0$$

ثانياً: الوضع النسبي لمستقيمين:

هون رح نشرح شوي بالعامي، اولاً لازم نناقش شعاعي التوجيه للمستقيمين $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$

رح يكون عنا حالتين: أ- الأولى اذا كان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطين خطياً فالمستقيمين إما متوازيين أو منطبقين

رح تسألني كيف بميز بين توازي والانطباق ؟؟!!

بقلك بسيطة: الطريقة العامة

* نوجد احداثيات نقطة من احد المستقيمين وذلك بفرض قيمة لـ t

* نعوض فيّ المستقيم الآخر (الثاني لي ما تستعملناه) إذا طلعت معي نفس القيمة للوسيط t في المعادلات الثلاثة فالمستقيمين منطبقين والا فهما متوازيين يعني اذا ما انسحبت بكونو متوازيين

طريقة ثانية كرمال اثبت انه متوازيين وهي: $\vec{u_1}=K\vec{u_2}$ يعني مرتبطين خطياً

ثانياً: $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطياً فالمستقيمين إما متقاطعين او متخالفين

نفس السؤال كيف بميز بين التقاطع والتخالف ؟!

* نحل المعادلات الوسيطية للمستقيمين حل مشترك (مع تغير اسم الوسيط في احدى المعادلات)

* نحسب قيمة المجهولين من المعادلتين ونتأكد من الثالثة فاذا تحققت فهما متقاطعين واذا ما تحققت فهما متخالفين

طريقة ثالثة كرمال اثبت انه متقاطعين وهي: $\vec{u_1}\neq K\vec{u_2}$

في حالة خاصة وهي هي اثبات انه مستقيمين متعامدين:

$$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$$

ثالثاً: الوضع النسبي لمستقيم ومستوي:

- نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي بعد التعويض: نميز حالات.

الحالة الأولى: معادلة محققة (طرفين متساويين): فالمستقيم محتوى في المستوي

$\$ = \$$

الحالة الثانية: معادلة غير محققة (طرفين غير متساويين): فالمستقيم يوازي المستوي

أو طريقة ثانية $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ ← ناظم المستوي

شعاع توجيه المستقيم

الحالة الثالثة: عدد $= t$ ⟸ فالمستقيم قاطع للمستوي ⟸ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي فنحصل على احداثيات نقطة التقاطع

حالة خاصة: لإثبات أن المستقيم عمودي على المستوي لدينا طريقتين: أ) $\vec{n}$، $\vec{u}$ مرتبطين خطياً $\vec{n} = k\vec{u}$

ب) موجه المستقيم عمودي على شعاعي توجيه المستوي.

كيف نجيب الناظم؟ الناظم هو امثال x و y و z بـ معادلة المستوي

معادلة المستوي بشكلها القياسي $ax+by+cz+d=0$ وهو شرط عملنا بتفصيل

فالناظم هو $\vec{n}(a,b,c)$

كيف نجيب شعاع التوجيه المستقيم؟ هي امثال الوسيط t بالتمثيل الوسيطي للمستقيم

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

، نشرحها عملياً بالتفصيل بعدين

$$\vec{u}(a, b, c)$$

ملاحظة: طريقة ايجاد النظيم أو طويلة أو المسافة بين نقطتين:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

أو

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال: ليكن لدينا النقطتين $A(2,1,3)$ $B(-2,1,4)$

$$\|AB\| = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (0) + (1)^2} = \sqrt{17}$$

3

تذكرة: كيف نثبت ان مثلث متساوي الساقين ؟؟؟

يجب ان نوجد طولين وهذين الطولين يجب ان يكونا متساويين

كيف نثبت ان مثلث متساوي الأضلاع ؟؟؟

يجب ان نوجد الأطوال ويجب ان تكون متساوية

كيف نثبت ان المثلث قائم ؟؟؟

منرجع منتذكر مبرهنة وهي مبرهنة عكس فيثاغورث

$(\text{طول الضلع الأول})^2 + (\text{طول الضلع الثانية})^2 = (\text{طول الوتر})^2$

م: يكون معطينا نقاط فمنوجد الأطوال

كيف نثبت ان ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة ؟

يجب ان نشكل شعاعين ونجزئ احداثيتهما ويجب ان تكون المركبات متناسبة

شعاع الأول $(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

" الثاني (x_2, y_2, z_2)

كيف نوجد احداثيات نقطة C نظيرة نقطة B بالنسبة للنقطة A ؟؟

يكفي كتابة العلاقة التالية ⇐ $\vec{CA} = \vec{AB}$ ⇐ استنتج هذه العلاقة من الرسم

مثال: اوجد احداثيات نقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ .. ؟

يعني بأخذ احداثيات B مضروبة بناقص

اذا كان $B(1,1,-3)$ و $C(x,y,z)$

فتكون احداثيات $C(-1,-1,3)$

معادلة المستوي:

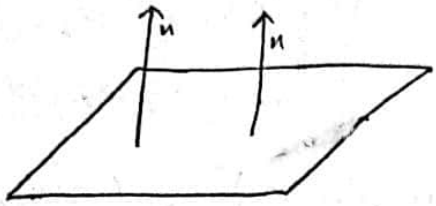
تكون بشكلها القياسي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

يعني لحتى اكتب معادلة مستوي بلزمني شغلتين
نقطة (x_0, y_0, z_0)
ناظم (a, b, c)

الناظم: هو الشعاع العمودي على المستوي

ملاحظة: للمستوي عدد لانهائي من النواظم



بعد التعويض نتبع الشكل التالي:

$$ax+by+cz+d=0$$

وحالات نكتب فيها معادلات المستوي اربعة بالكتاب ولي بتجي بالامتحان

الحالة الأولى: اكتب معادلة المستوي المار بنقطة معلومة وناظم معلوم:

مثال: اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,-3)$ ويقبل $\vec{n}(1,1,2)$ ناظماً له

خوارزمية الحل:

الخطوة الأولى: نكتب الشكل القياسي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

الخطوة الثانية: نعوض النقطة والناظم بالمعادلة:

$$1(x-2)+1(y-1)+2(z+3)=0$$

الخطوة الثالثة: نبسط المعادلة:

$$x+y+2z+3=0$$

الحالة الثانية: كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي مستوي معلوم:

ملاحظة: المستويات المتوازيات ناظميهما مرتبطان خطياً

يعني هون يكون معي نقطة بس ما معي ناظم وبالنسبة للمستوي التاني باجد الناظم تبعو وبطبقو

معادلة المستوي لي بدي ياه (هل هي حكينا بالأوضاع النسبية لمستويين)

مثال: اوجد معادلة المستوي Q المار من A ويوازي المستوي P
حيث $P: 4x-2y+6z=8$ ، $A(2,0,2)$

خوارزمية الحل: أولاً: من الملاحظة نجد أن $\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(4,-2,6)$

ثانياً: لدينا النقطة $A(2,0,2)$ نكتب المعادلة القياسية ثم نعوض ونبسط.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$4(x-2)-2(y-0)+6(z-2)=0$$

$$4x-2y+6z-20=0$$

الحالة الثالثة: كتابة معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$:

أولاً شي لازم نعرف شو هو المستوي المحوري: (المستوي المحوري هو مستوي عمودي على القطعة في منتصفها)

ملاحظة: النقطة التي يمر منها المستوي هي أحد إنشاءات منتصف قطعة مستقيمة مثلاً $[AB]$

* الناظم هو شعاع القطعة المستقيمة $\overrightarrow{AB}$

مثال: أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(1,1,2)$ و $B(3,-1,4)$

خوارزمية الحل: 1- نوجد الناظم $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ (نهاية - بداية)

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$

2- ونوجد النقطة التي يمر منها المستوي المحوري وهي منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

3- ونكتب معادلة المستوي القياسية، نعوض، ونبسط

الحل:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2,-2,2)$$

$$I(2,0,3)$$

$$\Rightarrow a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$2x-2y+2z-10=0$$

الحالة الرابعة: كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة A ويعامد مستقيم (BC)

خوارزمية الحل: 1- نوجد الناظم $\vec{n}=\overrightarrow{BC}$

2- نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي

مثال: أكتب معادلة المستوي P الذي يمر من A ويعامد (BC) حيث $A(1,1,-1)$ و $C(3,1,2)$ $B(3,-1,4)$

لدينا $n \perp P$:

$$\vec{n}=\overrightarrow{BC}(0,2,-2)$$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$0(x-1)+2(y-1)+(-2)(z+1)=0$$

$$P: 2y-2z-4=0$$

الحالة الخامسة: كتابة معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها:

ملاحظة: الناظم هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الكرة

مثال: أكتب معادلة المماس للكرة في النقطة $A(-1,1,0)$ وكان لدينا معادلة الكرة S:

$$S: x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$$

الحل: أولاً نوجد مركز الكرة $\Omega(0,2,-1)$ ثم نوجد الناظم $A(-1,1,0)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{A\Omega}=(1,1,-1)$$

ونكتب المعادلة القياسية ونعوض ونبسط شكلها

$$x+y-z=0$$

دورة 2018 الأولى.

الحالة السادسة: كتابة معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط، أو كتابة معادلة مستوي يمر بنقطتين ويعلم شعاع توجيه:

خوارزمية الحل:

* نشكل شعاعين. ونثبت أنهما غير مرتبطين خطياً
* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي فيكون:

$\vec{n} \perp$ الشعاع الأول $\Rightarrow$ جداؤهما السلمي $=0 \Rightarrow$ تنتج معادلة 1

$\vec{n} \perp$ الشعاع الثاني $\Rightarrow$ جداؤهما السلمي $=0 \Rightarrow$ تنتج معادلة 2

ملاحظات:

1- إذا كانت إحدى المعادلات بمجهولين نعزل ثم نفرض قيمة

2- إذا كانت المعادلتين بثلاث مجاهيل بجمعهما أو بطرحهما للحصول على معادلة بمجهولين ونطبق ما سبق

مثال: لتكن النقاط $A(1,-1,0)$ ، $B(-1,0,1)$ ، $C(0,2,1)$

1- اثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

2- أوجد معادلة المستوي (ABC)

الحل:

$\vec{AB}(-2,1,1)$ ، $\vec{AC}(-1,3,1)$

$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-2}$ بما أن المركبات غير متناسبة فالشعاعين $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة (موود لاحظة: تفيد إثبات أنها تشكل مستوي)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (ABC) فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -2a+b+c=0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow -a+3b+c=0$ ②

بطرح ① من ②: $-a-2b=0 \Rightarrow a=-2b$

نفرض $b=-1$ فيكون $a=2$ بالتعويض في ② فيكون $c=5$

$\vec{n}(2,-1,5)$

(حيث منقدر نفرض b القيمة لي بدنا ياها ومنقدر كمان نعوض بـ ① بدل ②)

نكتب المعادلة القياسية $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

نعوض

نبسط: $(ABC): 2x-y+5z-3=0$

(سوود لاحظة: بالتعويض الخطوة الثانية منقدر نعوض النقطة لي بدنا ياها A أو B أو C)

5 الحالة السابعة: كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة علم شعاعي توجيهه $\vec{v}$ ، $\vec{u}$

خوارزمية الحل: *نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي ونعود للحالة السادسة

مثال: اوجد معادلة المستوي P المار بالنقطة $B(2,2,-1)$ الذي يقبل $\vec{u}(1,0,2)$ $\vec{v}(0,-2,1)$ شعاعي توجيه له.

الحل: نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي P فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n}.\vec{u}=0 \Longrightarrow a+2c=0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n}.\vec{v}=0 \Longrightarrow -b+c=0$ ②

من ① نجد $a=-2c$ ونفرض $\boxed{c=1}$ فيكون $\boxed{a=-2}$ بالتعويض في ② فيكون $b=\frac{1}{2}$

$\vec{n}(-2,\frac{1}{2},1)$

معادلة قياسية: $P:\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

تعويض:

تبسيط: $P: -2x+\frac{1}{2}y+z+4=0$

الحالة الثامنة: كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة ويعامد مستويين P و Q

هون متل الحالة السابعة بس بدل ما يعطيني النواظم جاهزة بيعطيني مستويين وانا بطالعن النواظم من المستوي

خوارزمية الحل: *نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{n}_Q$ و $\vec{n} \perp \vec{n}_P$ أي نعود للحالة السابقة.

الحالة التاسعة: كتابة معادلة مستوي يمر من نقطتين ويعامد مستوي:

مثال: أكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(2,0,-2)$ و $B(4,6,2)$ عمودياً على المستوي P حيث:

$P: 2x-6z+2=0$

الحل: $\vec{n}_P(2,0,-6)$ ، $\vec{AB}(2,6,4)$ نفرض $\vec{n}_Q(a,b,c)$

لهيك عندي مشكلة ولي هي ايجاد النواظم من المستوي P منطالع النواظم ومن النقطتين لي عطاني ياهن ونفرض ناظم جديد

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P=0 \Rightarrow 2a-6c=0$ ——①

$\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_Q.\vec{AB}=0 \Longrightarrow 2a+6b+4c=0$ ---②

من ① نجد أن $a=3c \Leftarrow$ نفرض $\boxed{c=1} \Leftarrow \boxed{a=3} \Leftarrow$ في ② $b=-\frac{5}{3}$

معادلة قياسية:

تعويض:

تبسيط: $Q: 3x-\frac{5}{3}y+z-2=0$

$\times 3$ $Q: 9x-5y+3z-6=0$

6

فكرة جديدة: المعادلات الوسيطية لمستقيم.

رح نحكي عن حالات كتابة المعادلات الوسيطية.

لكتابة المعادلات الوسيطية فقط بحاجة لنقطة يمر منها المستقيم (x_0, y_0, z_0) وشعاع توجيه للمستقيم $\vec{u}(a, b, c)$.

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in R$$

الحالة الأولى: كتابة معادلة وسيطية لمستقيم يمر من نقطة وعلم شعاع توجيهه.

طريقة الحل: نعوض في المعادلة بشكل مباشر.

مثال: اعط معادلة الوسيطية للمستقيم d المار بالنقطة $A(5, 3, 3)$ ويقبل $\vec{u}(2, 3, 1)$ موجهاً له.

$\quad a\ b\ c \qquad x_0, y_0, z_0$

$$d: \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 3t + 3 \\ z = t + 3 \end{cases} t \in R$$

الحالة الثانية: كتابة معادلة وسيطية لمستقيم يمر من نقطتين A و B

هون لازم نعرف انو النقطتين رح يكونوا شعاع وهاد الشعاع $\vec{AB}$ هو الموجه

مثال: اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطتين $A(4, 2, 6)$ $B(-4, 0, 2)$

الحل:

$$\vec{u_d} = \vec{AB}(-8, -2, -4)$$

$$d: \begin{cases} x = -8t + 4 \\ y = -2t + 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases} ; t \in R$$

هون عوضت A ممكن تعوض B

((ملاحظة: معي نقطتين بعوض لحي بدي ياه بالمعادلة الوسيطية السبب لأن المستقيم بيمر بهالنقطتين)) بختار اي وحدة منن وبعوضها.

الحالة الثالثة: فصل مشترك لمستويين متقاطعين

هون لازم نحل معادلتي المستويين حل مشترك وذلك بعزل مجهولين بدلالة الثالث.

نحفظ الملاحظات الهامة جداً:

* يكون المستويين متقاطعين اذا كان ناظميهما غير مرتبطين خطياً (تذكر)

عند حل جملة المعادلتين حل مشترك:

1- المجهول الذي نعزل بدلالته في المرة الأولى نعزل بدلالته في المرة الثانية (يعني اذا عزلت بدلالة x بكمل بدلالة x، y .. y، z .. z)

2- نفرض المجهول المعزول بدلالته t

مثال: ليكن لدينا المستويين $P_1: 2x + 4y - 6z + 2 = 0$ $P_2: 4x + 2y - 2z - 2 = 0$ اثبت ان المستويين P_1 و P_2 متقاطعين، ثم اوجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

الحل: $\begin{cases} \vec{n}_{P_1}(2, 4, -6) \\ \vec{n}_{P_2}(4, 2, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$ بما ان المركبات غير متناسبة فالمستويين P_1 و P_2 متقاطعين

$$2x + 4y - 6z + 2 = 0 \quad ---- ①$$

$$4x + 2y - 2z - 2 = 0 \quad ---- ②$$

نضرب المعادلة الثانية بـ 2 ثم نطرح 2 من ①:

$$-6x - 2z + 6 = 0 \Rightarrow 2z = -6x + 6$$

$$\boxed{z = -3x + 3}$$

نعوض في ②:

$$4x + 2y + 6x - 8 = 0 \Rightarrow y = -5x + 4$$

بفرض $x = t$ يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 4 \\ z = -3t + 3 \end{cases} ; t \in R$$

قف على ناصية الحلم وقاتل ....

الحالة الرابعة: يمر من نقطة ويعامد مستوي.

هون لازم نعرف انو ناظم المستوي هو نفسو موجه المستقيم

مثال: أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A(-1,3,2) عموديا على المستوي P المعطى بالمعادلة:

$P: 2x - y + z + 1 = 0$

الحل: بما أن $d \perp P$ فإن $\vec{n_P} = \vec{u_d}(2,-1,1)$

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t + 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

مو ملاحظة هامة:

1- إن التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة [AB] هو نفسه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) لكن $t \in [0,1]$

2- " " " " لنصف المستقيم [AB) الذي مبدؤه A هو " " " " (AB) $t \in [0,\infty[$

★ الأبعاد في الفراغ ★

أولاً: بعد نقطة عن مستوي: يعطى بعد النقطة $O(x_0, y_0, z_0)$ عن المستوي $P: ax + by + cz + d = 0$ بالعلاقة:

$$dist(O,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

يعني a, b, c احداثيات الناظم للمستوي P إما بالنسبة للشي لبين القيمة المطلقة فهو معادلة المستوي بس منبدل كل x بـ x_0 وكل y بـ y_0 وكل z بـ z_0 لأن x_0, y_0, z_0 احداثيات النقطة يلي عم نحسب بعدها

حالة خاصة: البعد بين مستويين متوازيين.

1- نثبت كون المستويين متوازيين، 2- نوجد احداثيات نقطة من احد المستويين وذلك بالطريقة لنفترضها مسبقاً

3- نحسب بعد النقطة الناتجة عن المستوي الآخر فنكون بذلك اوجدنا البعد بين المستويين

مثال: اوجد البعد بين المستويين. $Q: 4x + 2y - 2z = 1$ $P: 2x + y - z = 3$

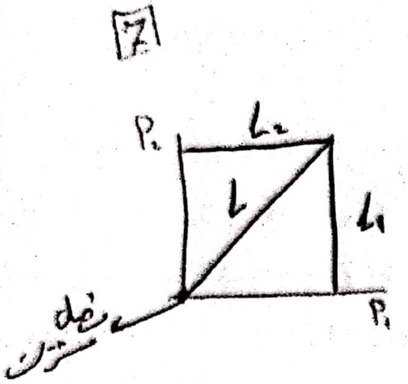
الحل: $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ بما أن المركبات متناسبة فالمستويين P و Q متوازيين

نحسب احداثيات نقطة من P: نفرض: $x = 0$ $y = 0 \Leftarrow z = -3 \Leftarrow H(0,0,-3) \in P$

$$dist(H,Q) = \frac{|(4)(0) + (2)(0) + (-2)(-3) - 1|}{\sqrt{16 + 4 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{24}}$$ البعد بين P و Q

بعد نقطة عن مستقيم:

حالة خاصة: المستقيم هو فصل مشترك لمستويين متعامدين.



1- إذا كان المستويين متعامدان

2- نحسب بعد النقطة عن المستوي الأول وليكن L_1

3- " " " " الثاني وليكن L_2

4- يكون البعد بين النقطة والفصل المشترك $L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}$

مثال: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,0,-1)$ والمستويين P و Q:

$P: 3x+y-z+1=0$ $\quad Q: 2x-3y+3z=0$

1- اثبت أن المستويين P و Q متعامدين

2- احسب بعد A عن كل من المستويين P و Q

3- استنتج بعد A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q

الحل:

1) $\vec{n}_Q(2,-3,3)$ $\quad \vec{n}_P(3,1,-1)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=(2)(3)+(-3)(1)+(3)(-1)=6-3-3=0$

إذاً $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ ومنه P و Q متعامدان

2)

$$L_1=dist(A,P)=\frac{|(3)(1)+(1)(0)+(-1)(-1)+1|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$L_2=dist(A,Q)=\frac{|(2)(1)+(-3)(0)+(3)(-1)+0|}{\sqrt{4+9+9}}=\frac{1}{\sqrt{22}}$$

3)

$$L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}=\sqrt{\frac{25}{11}+\frac{1}{22}}=\sqrt{\frac{51}{22}}$$

الحالة العامة: بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ:

1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم إن لم تعطى

2- نفرض أن A' هو المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d فيجب تحقق تمثيله الوسيطي

3- يكون $\vec{u}_d \perp \vec{AA'}$ ومنه $\vec{u}_d\cdot\vec{AA'}=0$

4- نوجد قيمة t ونحسب طول القطعة المستقيمة $[AA']$ وهو نفسه بعد A عن d

مسألة: في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليكن لدينا المستقيم d المعرف وسيطيا:

$$d: \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

والنقطة $C(1, 0, -1)$

1- اكتب معادلة المستوي المار من C ويعامد المستقيم d.

2- احسب البعد بين النقطة C والمستقيم d.

الحل:

$C(1, 0, -1)$ $\quad \vec{n_P} = \vec{u_d}(-1, 2, 2)$

معادلة قياسية: $P: a(x - x_C) + b(y - y_C) + c(z - z_C) = 0$

تعويض:

تبسيط:

$$\Rightarrow P: -x + 2y + 2z + 3 = 0$$

2- ليكن $C'(x, y, z)$ المسقط القائم لـ C على المستقيم d فهي تحقق تمثيله الوسيطي أي:

$C'(-t - 1, 2t + 1, 2t - 3)$

$\vec{CC'}(-t - 2, 2t + 1, 2t - 2)$

$\vec{u_d}(-1, 2, 2)$

نعلم أن: $\vec{CC'} \cdot \vec{u_d} = 0$

$$\Rightarrow (-1)(-t - 2) + (2)(2t + 1) + 2(2t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow t + 2 + 4t + 2 + 4t - 4 = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\vec{CC'}(0 - 2, 0 + 1, 0 - 2) \Rightarrow \vec{CC'}(-2, 1, -2)$$

يكون بعد النقطة C عن المستقيم d:

$$\|\vec{CC'}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

هلا اذا بدو احداثيات المسقط القائم نعوض قيمة t الناتجة في احداثيات النقطة C' فقط.

الوصف النسبي لمستقيم وكرة ومستوي وكرة :

الكرة: هي مجموعة النقاط في الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً

النقطة الثابتة: مركز الكرة

البعد الثابت: نصف القطر

معادلة الكرة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

حيث (x_0,y_0,z_0): مركز الكرة و R: نصف قطر الكرة.

حالات كتابة معادلة الكرة:

الحالة الأولى: علم مركزها ونقطة منها؛ الحل: نصف القطر هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين المركز والنقطة

مثال: اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,2)$ وتمر بالنقطة $A(2,1,0)$

الحل: $R=\Omega A=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

نعوض في المعادلة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=5$$

الحالة الثانية: علم قطرها: المركز: احداثيات منتصف القطر (نصف القطر هو طول القطر على 2)

الحالة الثالثة: علم مركزها ونصف قطرها: نعوض في المعادلة بشكل مباشر

الحالة الرابعة: علم مركزها ويمس مستوي في نقطة:

نصف القطر هو البعد (dist) بين المركز والمستوي المماس

مثال: نتأمل النقطة $A(3,1,1)$ والمستوي P الذي معادلته $P: 2x-y+3z-1=0$

اكتب معادلة الكرة التي مركزها A ويمس المستوي P.

الحل: $R=dist(A,P)=\frac{|(2)(3)+(-1)(1)+(3)(1)-1|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{49}{14}$$

طريقة مجموعة النقاط من الشكل:

$$ax^2+by^2+cz^2+ax+by+cz+d=0$$

نتمم إلى مربع كامل لتصبح من الشكل:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=K$$

لازم نميز 3 أشكال:

* $K>0$ تمثل كرة مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها R
* $K=0$ تمثل نقطة (x_0,y_0,z_0)
* $K<0$ تمثل مجموعة خالية.

ماتنساش تأخذ الاكسات لحال و الوايات لحال و الزادات لحال:

__مثال:__ عين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+\frac{5}{2}=0$

__الحل:__

$$x^2-2x+y^2-4y+z^2+\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{5}{2}$$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها $\Omega(1,2,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$

الوضع النسبي لثلاث مستويات:

لتكن لدينا المستويات:

$$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$P_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

1) طريقة غاوس:
نسعى لحذف الـ x من المعادلتين الثانية والثالثة اعتماداً على المعادلة الأولى ثم نسعى لحذف الـ y من المعادلة الثالثة اعتماداً على الثانية ونميز 3 حالات:

* معادلة محققة: المستويات تتقاطع في فصل مشترك (ط ث = ط ث)
* قيم لـ x, y, z المستويات تتقاطع في نقطة
* معادلة غير محققة فالمستويات غير متقاطعة.

2) وضع نسبي لمستويين ودراسته مع الثالث:
نختار مستويين وليكن P_1 و P_2 وندرس وضعهما النسبي نميز 3 حالات:

* P_1, P_2 متوازيين $\Leftarrow$ جملة المعادلات مستحيلة الحل وتقاطعها مجموعة خالية.
* P_1, P_2 منطبقين $\Leftarrow$ ندرس الوضع النسبي لأحدهما مع المستوي P_3
* P_1, P_2 متقاطعين $\Leftarrow$ نوجد التمثيل الوسيطي لفصلهما المشترك وندرس تقاطعه مع المستوي P_3 ونميز 3 حالات:
  - معادلة محققة $\Leftarrow$ المستويات تتقاطع في مستقيم (فصل مشترك)
  - معادلة غير محققة $\Leftarrow$ المستويات غير متقاطعة
  - عدد $= t \Leftarrow$ المستويات تتقاطع في نقطة.

ملاحظات هامة لغاوس:
* مفتاح الحل في غاوس هي المعادلة التي يكون فيها أمثال الـ x يساوي الواحد (نضعها أول معادلة)
* نحذف المجاهيل بطابق الأمثال ثم نجمع أو نطرح والمعادلة التي نعتمد عليها في المطابقة تبقى ثابتة أي في الخطوة الأولى نثبت المعادلة الأولى والخطوة الثانية نثبت المعادلة الثانية

__مثال:__ حل جملة المعادلات الخطية وبين إذا المستويات تشترك في نقطة أو مستقيم أو لا تشترك بأي نقطة:

$P_1: x-y-z=0$ $\quad P_2: 3x-y-2z=1$ $\quad P_3: x-y+z=1$

نحل بطريقتين: $\vec{n_1}(1,-1,1)$ $\vec{n_2}(3,-1,-2)$ $\vec{n_3}(1,-1,1)$

ط1: $\vec{n_1}, \vec{n_3}$ غير مرتبطين خطياً فالمستويين P_1, P_3 متقاطعين
نحل معادلتهما حل مشترك:

$x-y-z=0$ --- ①
$3x-y-2z=1$ --- ②
$x-y+z=1$ --- ③

بطرح 3 من 1: $-2z=-1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}$

نعوض في ①: $x-y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=y+\frac{1}{2}$

نفرض $y=t$ يكون التمثيل الوسيطي:
$$d: \begin{cases} x=t+\frac{1}{2} \\ y=t \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة P_2:
$3(t+\frac{1}{2})-t-1=1 \Rightarrow 3t+\frac{3}{2}-t-1=1 \Rightarrow t=\frac{1}{4}$

فالمستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة إحداثياتها:
$x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$
$\Longrightarrow (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ط2:

$x-y-z=0 \quad (L_1)$
$3x-y-2z=1 \quad (L_2)$
$x-y+z=1 \quad (L_3)$

$L_1-L_3=L_3'$ $\quad 3L_1-L_2=L_2'$

$x-y-z=0$ --- (L_1)
$-2y-z=-1$ --- (L_2')
$-2z=-1$ --- (L_3')

من (L_3') نجد: $z=\frac{1}{2}$ نعوض في (L_2'):
$-2y-\frac{1}{2}=-1 \Rightarrow y=+\frac{1}{4}$

نعوض في (L_1):
$x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$

فالمستويات P_1, P_2, P_3 تتقاطع في النقطة $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

وظيفة: ليكن لدينا $P_1 : x + 2y - 2z = 3$ ، $P_2 : x - y + 2z = 6$

1- اثبت أن المستويين P_1 ، P_2 متقاطعين ثم أوجد تمثيلاً وسيطياً لـ d فصلهما المشترك

2- ليكن لدينا المستوي P_3 المعطى بالعلاقة : $P_3 : 2x - y - 4z = 3$
ادرس تقاطع المستويات P_1 ، P_2 ، P_3 .

معادلة الأسطوانة

3 حالات

محورها منطبق على محور الفواصل $(O, \vec{i})$

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

حيث: x_1 ، x_2 هما فاصلتي مركزي القاعدتين

محورها منطبق على محور التراتيب $(O, \vec{j})$

$$x^2 + z^2 = r^2$$

$$y_1 \leq y \leq y_2$$

حيث: y_1 ، y_2 هما ترتيبي مركزي القاعدتين

محورها منطبق على محور الرواقم $(O, \vec{k})$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z_1 \leq z \leq z_2$$

حيث: z_1 ، z_2 هما راقمي مركزي القاعدتين

مثال: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(O, \vec{j})$ ومركزي قاعدتيها $A(0,3,0)$ و $B(0,6,0)$ ونصف قطرها يساوي 3

$$x^2 + z^2 = 9 \qquad 3 \leq y \leq 6$$

معادلة المخروط :

محورها منطبق على محور الفواصل $(O, \vec{i})$

$$y^2 + z^2 - \frac{r^2}{x_1^2} \cdot x^2 = 0$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

حيث: r نصف القطر

x_1 : فاصلة مركز القاعدة

x_0 : " رأس المخروط

محورها منطبق على محور التراتيب $(O, \vec{j})$

$$x^2 + z^2 - \frac{r^2}{y_1^2} \cdot y^2 = 0$$

$$y_0 \leq y \leq y_1$$

حيث: r " "

y_1 : ترتيب " "

y_0 : " " "

محورها منطبق على محور الرواقم $(O, \vec{k})$

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{z_1^2} \cdot z^2 = 0$$

$$z_0 \leq z \leq z_1$$

حيث: r " "

z_1 : راقم " "

z_0 : راقم " "

حجم رباعي الوجوه ....

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

حيث S مساحة القاعدة

اذا كان مثلث قائم يكون S

$$S = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$$

مثلث غير قائم

$$S = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

بالنسبة لـ h فيقتضي انه ارتفاع وهي بعد نقطة عن مستوي

أي بعد رأس رباعي الوجوه عن القاعدة

$h = dist(\text{رأس}, \text{المستوي})$

إيجاد $\cos(x)$ أول شي لازم احفظ هذا القانون

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}$$

مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ:

لنقطتين: يكون G (م.أ.م) للنقطتين (A,α) ، (B,β) اذا تحقق:

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$
$$\alpha + \beta \neq 0$$

اذا كانت G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) يكون $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB}$ علاقة الأنشاء

لثلاث نقاط: يكون G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) اذا تحقق:

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$
$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

اذا كانت G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) يكون:

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \vec{AC}$$

لأربع نقاط: يكون G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ) اذا تحقق:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$$
$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \delta \vec{GD} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

* اذا كانت M نقطة من الفراغ:

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} + \delta \vec{MD} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta) \vec{MG}$$

«تفيد في تحديد مجموعة النقاط من الشكل $\| \quad \| = \| \quad \|$»

قاعدة: إيجاد التمثيلات من علاقة شعاعية:

في عناصر النقطتين والتي شعاعين:

ط1: نُدخل مركز الأبعاد في كل شعاع لا يحتويه حتى نصل إلى العلاقة العامة لمركز الأبعاد المناسبة

ط2: نعتمد على العلاقات السابقة.

مثال: عيّن α و β و γ لتكون M (م.أ.م) (A,α)، (B,β)، (C,γ):

$$\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$$

الحل: ط1:

$$\vec{AM} = 2\vec{AM} = 2\vec{MB} - \vec{AM} - \vec{MC}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} - 2\vec{AM} - 2\vec{MB} + \vec{AM} + \vec{MC} = \vec{0}$$

$$0\vec{AM} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 0$$

$$(A,0) \quad (B,-2) \quad (C,1)$$

ومنه M (م.أ.م) النقاط $\gamma = 1$ ، $\beta = -2$ ، $\alpha = 0$

ط2:

$$\vec{AM} = 2\vec{AB} - 1\vec{AC}$$

$$\beta = 2 \quad \gamma = -1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha + 2 - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

الخاصة التجميعية:

إذا كانت G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) وكانت H (م.أ.م) للنقطتين (A,α) و (B,β) فإن:

G هو (م.أ.م) للنقطتين $(H, \alpha+\beta)$ ، (C,γ)

إذا كانت G (م.أ.م) للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) ، (D,δ) وكانت H (م.أ.م) للنقطتين (A,α) و (B,β) وكانت F (م.أ.م) للنقطتين (C,γ) (D,δ) ، فإن G هو (م.أ.م) للنقطتين: $(H,\alpha+\beta)$ $(F,\gamma+\delta)$

---

* تحديد مجموعة النقاط من الفراغ M : *

- لتحديد مجموعة نقاط من الفراغ في الشكل || || = || ||.

1- نفرض (م.أ.م) للنقاط في حال لم يرد ذلك في طلبات سابقة.

2- يجب الانتباه إلى أن أحد الطرفين قد لا يقبل مركز أبعاد (في حال كان مجموع التثقيلات يساوي الصفر) وهنا يجب القيام بعمليات شعاعية لاختزاله.

3- نطبق علاقة مركز الأبعاد بالنسبة لنقطة خارجية لنحصل على أحد الأشكال التالية:

$\|\vec{MA}\| = r \Leftarrow$ مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها r

$\|\vec{MA}\| = \|\vec{AB}\| \Leftarrow$ " " " " " A " [AB]

$\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\| \Leftarrow$ " " " " مستوي محوري للقطعة المستقيمة [AB]

مثال: ليكن H (م.أ.م) للنقاط $(A,2)$ $(B,-1)$ $(C,2)$

ما طبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \sqrt{12}$

الحل: بما أن H (م.أ.م) للنقاط $(A,2)$ $(B,-1)$ $(C,2)$ فإن:

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|3\vec{MH}\|$$

$$\Rightarrow \|3\vec{MH}\| = \sqrt{12} \Rightarrow \|\vec{MH}\| = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

ومنه مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة H بعداً ثابتاً $\frac{\sqrt{12}}{3}$ فهي تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{12}}{3}$

11

مثال: ليكن I منتصف $[BC]$ ما طبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\|$$

الحل: نفرض G (م.ا.م) للنقاط $(A,2)$ $(B,1)$ $(C,-1)$ فيكون

$$l_1 = \|2\vec{MG}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$$

بما أن I منتصف $[BC]$ فهو (م.ا.م) للنقطتين $(B,-1)$ $(C,-1)$

$$-\vec{MB}-\vec{MC} = -2\vec{MI}$$

ومنه: $l_2 = \|2\vec{MA}-2\vec{MI}\| = \|2\vec{IA}\|$

تكون العلاقة النهائية:

$$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{IA}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{IA}\|$$

(1) مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة G بعداً ثابتاً $[IA]$ فهي تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $[IA]$

مثال: ما طبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي يحقق:

$$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|$$

نفرض G (م.ا.م) للنقاط $(A,2)$ $(B,1)$ $(C,-1)$ فيكون:

$$l_1 = \|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$$

نفرض G' (م.ا.م) للنقاط $(A,2)$ $(B,-1)$ $(C,1)$ فيكون:

$$l_2 = \|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\| = \|2\vec{MG'}\|$$

تكون العلاقة النهائية:

$$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{MG'}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{MG'}\|$$

مجموعة النقاط M متساوية البعد بين G و G' فهي تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

اثبات صحة علاقة وتعيين موضع نقطة:

- خطوات التفكير في اثبات صحة علاقة شعاعية

1- ننطلق من احد الطرفين حتى نصل الى الطرف الآخر

2- نرتب أفكارنا كالتالي: أ- جمع وطرح الأشعة

ب- تبديل الأشعة

ج- التوزيع

- خطوات التفكير في تعيين موضع نقطة:

1- نرتب أفكارنا كما في السابق

2- يجب ان تكون بداية الشعاع الثاني نفس بداية الأول الذي يحوي النقطة المراد تعيينها

وهيك منكون خلصنا الأشعة بكافة أفكارها لازم تدرب على كلشي تمارين ذكرناهم اولاً لأن بيعطي طريقة تبخص علاقة الأشعة

واهم شي يوصلك تابعي قناة التلغرام من خلال البحث عن @math 662

واذا عندك شي سؤال الجبلي واتس اب على رقمي 0992932502

واذا عندك فيس وكم تضو ملاوقت عليه ضيفني واسألني شي مضيف عليه Amjad Zapean

وختاماً بتمنالكم التوفيق وتدعولي دعوة من قلبكن

ماتنسى تحل اختبارات اخر الكتاب + الدورات.