

# مقدمة في ميكانيكا الكم

تأليف

بى . تى . ماثيوز

ترجمة

الدكتور / أسامة زيد إبراهيم ناجى

دكتورة فى الفيزياء الذرية والجزيئية النظرية  
كلية التربية - قسم الطبيعة والكيمياء  
جامعة طنطا - كفر الشيخ



الدار الدولية للنشر والتوزيع

مصر - القاهرة

## مقدمة للمترجم

الحمد لله، وصلى اللهم على سيدنا محمد، وعلى آله وصحبه وسلم. يعد هذا الكتاب من أبرز الكتب التي قدمت لدارسى ميكانيكا الكم، حيث عرضت مواضيعه بطريقة لا يحتاج فيها الدارس إلى معلومات سابقة. كما تابع المؤلف تكرار الإشارة إلى المعلومات الجديدة المبني عليها هذا العلم حتى يصل المبتدئ إلى الألفة معها.

بمجرد الانتهاء من دراسة الباب الثالث يكون الطالب قد اكتسب فهما عاما لفيزياء الكم واستوعب جميع الأسس المبنية عليها، ولا يبقى له إلا بعض الإضافات البسيطة التي تدور في نفس المحيط.

فضلا عن أن الكتاب يشمل منهجا متكاملا في ميكانيكا الكم صالح للتدريس لطلاب السنوات الثالثة والرابعة بكليات العلوم والتربية وما يناظرها، فإنه يحتوى على أجزاء أخرى تعتبر مناهج كاملة في الفيزياء الذرية والفيزياء النووية، حيث يتجلى مواطن تطبيق هذا العلم.

نلفت انتباه القارئ بتدريس هذا المنهج إلى أن حلول المسائل الواردة بالكتاب تطلب من المترجم إذا دعت الضرورة لذلك.

أرجو من الله أن يكون هذا العمل خالصا لوجهه، وابتغاء لمرضاته. عن أنس رضى الله عنه قال: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم، ألا أخبركم عن الأجود؟ الله الأجود، وأنا أجود ولد آدم، وأجودكم من بعدى رجل علم علما فانتشر علمه، يُبْعَث يوم القيامة أمة وحده، ورجل جاد بنفسه فى سبيل الله حتى يقتل.

المترجم

د. أسامة زيد إبراهيم ناجى

## الحروف اللاتينية

Greek name	Greek letter		Greek name	Greek letter	
	Lower case	Capital		Lower case	Capital
Alpha	α	Α	Nu	ν	Ν
Beta	β	Β	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omicron	ο	Ο
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ε	Ε	Rho	ρ	Ρ
Zeta	ζ	Ζ	Sigma	σ	Σ
Eta	η	Η	Tau	τ	Τ
Theta	θ	Θ	Upsilon	υ	Υ
Iota	ι	Ι	Phi	φ	Φ
Kappa	κ	Κ	Chi	χ	Χ
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	Μ	Omega	ω	Ω

المحتويات  
الجزء الأول  
الصياغة الأساسية

١٥	.....	مقدمة	الباب الأول
١٥	.....	الفيزياء الكلاسيكية	١-١
١٥	.....	( أ ) ميكانيكا نيوتن	
١٦	.....	(ب) النظرية الكهرومغناطيسية	
١٨	.....	فشل التصورات الكلاسيكية-نظرية الكم القديمة	٢-١
١٨	.....	( أ ) الصورة الجسيمية للإشعاع وفرض بلانك	
٢٢	.....	(ب) الصورة الموجية للمادة وفرض دي برولي	
٢٤	.....	(ج) المستويات المنقطعة وفرض بوهر	
٢٧	.....	ملخص	٣-١
٢٨	.....	مسائل ١	
٣١	.....	المؤثرات	الباب الثاني
٣١	.....	تعريف ومعادلات المؤثرات	١-٢
٣٣	.....	معادلة القيمة المناسبة	٢-٢
٣٤	.....	علاقات المبادلة	٣-٢
٣٥	.....	ملخص	٤-٢
٣٦	.....	مسائل ٢	

٣٧	.....	الباب الثالث ميكانيكا الكم	
٣٧	.....	عملية الملاحظة (القياس)	١-٣
٤٠	.....	المؤثرات والملاحظات: الفروض التفسيرية	٢-٣
٤٢	.....	الفروض الفيزيائية	٣-٣
٤٣	.....	(أ) مبدأ التناظر	
٤٤	.....	(ب) مبدأ التناظر	→
٤٦	.....	معادلة شرودنجر ومستويات الطاقة المتقطعة	٤-٣
٥٢	.....	دوال الحالة وتكامل التطابق	٥-٣
٥٦	.....	مبدأ عدم التحديد	٦-٣
٦٤	.....	ملخص	٧-٣
٦٦	.....	مسائل ٣	

٦٩	.....	الحركة في بعد واحد	الباب الرابع
٦٩	.....	خطوة الجهد	١-٤
٧٠	.....	(أ) $E_0 > V$ (كلاسيكيا)	
٧٠	.....	(ب) $E_0 < V$ (كلاسيكيا)	
٧٢	.....	الحالة (أ) $E_0 > V$ (كميا)	
٧٥	.....	الحالة (ب) $E_0 < V$ (كميا)	
٧٨	.....	النديية	٢-٤
٧٩	.....	الحالات المقيدة	٣-٤
٨٤	.....	مسائل ٤	

٨٧	الباب الخامس المهتز التوافقي	٨٧
٨٧	١-٥ النظرية الكلاسيكية	٨٧
٨٨	٢-٥ النظرية الكمية-القيم المناسبة	٨٨
٩٢	٣-٥ دوال القيم المناسبة-مؤثرات الإفناء والتوليد	٩٢
٩٤	٤-٥ ملخص	٩٤
٩٤	مسائل ٥	٩٤

## الجزء الثانى

### الفيزياء الذرية

٩٩	الباب السادس كمية الحركة الزاوية	٩٩
٩٩	١-٦ مؤثرات كمية الحركة الزاوية	٩٩
١٠٠	٢-٦ المركبة-z	١٠٠
١٠٢	٣-٦ كمية الحركة الزاوية الكلية-القيم المناسبة	١٠٢
١٠٩	٤-٦ الدوال المناسبة والرسم الاتجاهى	١٠٩
١١٢	٥-٦ الندية	١١٢
١١٤	٦-٦ ملخص	١١٤
١١٤	مسائل ٦	١١٤

١١٧	الباب السابع طاقة الوضع المركزية: ذرة الهيدروجين	١١٧
١١٧	١-٧ الحركة فى مجال طاقة وضع مركزية	١١٧
١٢٠	٢-٧ ذرة الهيدروجين	١٢٠
١٢٤	٣-٧ الأعداد الكمية	١٢٤

١٢٥	الدوال المناسبة	٤-٧
١٢٧	حركة مركز الكتلة	٥-٧
١٣٠	ملاحظات عامة	٦-٧
١٣١	مسائل ٧	

### الباب الثامن المغزلية والإحصاء

١٣٣	تأثير زيمان	١-٨
١٣٦	المؤثرات المصفوفة	٢-٨
١٣٩	المغزلية	٣-٨
١٤٥	الإحصاء ومبدأ الاستبعاد	٤-٨
١٤٩	التركيب الذري	٥-٨
١٥١	عرض للتطورات الإضافية	٦-٨
١٥٥	مسائل ٨	

### الجزء الثالث

#### الفيزياء النووية

### الباب التاسع استطارة رذرفورد وتحلل-ألفا

١٥٩	استطارة رذرفورد	١-٩
١٦٢	التفاعلات النووية	٢-٩
١٦٤	تحلل-ألفا	٣-٩
١٧٢	ملخص	٤-٩
١٧٣	مسائل ٩	

## الباب العاشر نظرية الاستطارة

- ١٧٥ ..... ١-١٠ مقدمة
- ١٧٦ ..... ٢-١٠ نظرية الاستطارة الكلاسيكية
- ١٧٩ ..... ( أ ) الاستطارة الكلاسيكية الناشئة عن كرة صلبة
- ١٨١ ..... (ب) الاستطارة الكولومية
- ١٨٣ ..... ٣-١٠ نظرية الاستطارة الكمية
- ١٨٦ ..... ٤-١٠ تحليل إزاحة الطور
- ١٩٢ ..... ٥-١٠ النظام المعملى ونظام مركز الكتلة
- ١٩٦ ..... ٦-١٠ ملخص
- ١٩٧ ..... ١٠ مسائل

## الباب الحادى عشر تفاعل النيوكلون-نيوكلون

- ١٩٩ ..... ١-١١ الديوترون
- ٢٠٤ ..... ٢-١١ استطارة النيوترون-بروتون
- ٢٠٨ ..... ٣-١١ التفاعلات المعتمدة على المغزلية
- ٢١٢ ..... ٤-١١ عرض للتطورات الإضافية

## الجزء الرابع

### النظرية العامة والفيزياء النووية-الجزئية

## الباب الثانى عشر المؤثرات ومتجهات الحالة

- ٢٢٣ ..... ١-١٢ رموز ديراك



٢٢٨	..... مؤثرات الملاحظة-المعامدية	٢-١٢
٢٣٣	..... التتام	٤-١٢
٢٤٠	..... وسائل استخدام المؤثرات	٥-١٢
٢٤٠	..... ( أ ) المهتر التوافقى	
٢٤٣	..... (ب) كمية الحركة الزاوية	
٢٤٨	..... ملخص	٦-١٢
٢٥٠	..... مسائل ١٢	

### الباب الثالث عشر معادلات الحركة

٢٥٨	..... معادلة شرودنجر للحركة	١-١٣
٢٥٨	..... معادلة الحركة لهيزنبرج	٢-١٣
٢٦٣	..... ثوابت الحركة-النديية	٣-١٣
٢٦٧	..... قوانين الحفظ وعدم التغير	٤-١٣
٢٧٣	..... ملخص	٥-١٣
٢٧٤	..... مسائل ١٣	

### الباب الرابع عشر القاعدة الذهبية

٢٧٥	..... نظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن	١-١٤
٢٨٤	..... استطارة طاقة الوضع	٢-١٤
٢٩١	..... الانتقالات الإشعاعية	٣-١٤
٢٩٨	..... تحلل-بيتا	٤-١٤
٣٠٤	..... ملخص	٥-١٤

مسائل ١٤ ..... ٣٥٠

### الباب الخامس عشر التماثل الوحدى والفيزياء النووية-الجزئية

- ١-١٥ التفاعلات القوية والشحنة الكهربائية والشحنة الباريونية  
والشحنة الفوقية ..... ٣٠٧
- ٢-١٥ المغزلية النظائرية والمجموعة  $SU(2)$  ..... ٣١٣
- ٣-١٥ طريقة الثمانى والمجموعة  $SU(3)$  ..... ٣٢٠
- ٤-١٥ ملخص ..... ٣٢٩

ملحق ..... ٣٣١

**الجزء الأول**  
**الصباغة الأساسية**

# الباب الأول

## مقدمة

تعد ميكانيكا الكم أنها النظرية التي نتعامل بها مع الأنظمة الذرية والنووية. تطورت هذه النظرية من خلال الميكانيكا الكلاسيكية وعلى وجه الخصوص ميكانيكا نيوتن<sup>(1)</sup> والنظرية الكهرومغناطيسية لماكسويل<sup>(2)</sup>. نبدأ دراستنا بعرض تصورات النظرية الكلاسيكية<sup>(3)</sup>، ثم بعدها نوضح عدم كفاية هذه التصورات كلية لوصف الأنظمة الذرية، وسوف نستعرض الفروض التي أدخلها كل من بلانك<sup>(4)</sup> وبوهر<sup>(5)</sup> ودي برولي<sup>(6)</sup> على النظرية الكلاسيكية لتأسيس مايسمى بميكانيكا الكم القديمة<sup>(7)</sup>. تلك الفروض أمدتنا بوصف فلسفي، غير مقنع ولكنه ناجح جزئياً، للظواهر الذرية مما أدى إلى إعادة الصياغة الأساسية للنظرية الفيزيائية الخاصة بالأنظمة الميكروسكوبية<sup>(8)</sup>، وهذا ماسوف نقدمه في الأبواب التالية.

### ١-١ الفيزياء الكلاسيكية

#### (أ) ميكانيكا نيوتن

ينظر إلى المادة، من الوجة الكلاسيكية، على أنها تتكون من جسيمات نقطية تتحرك تحت تأثير قوى التفاعل المتبادلة فيما بينها طبقاً لقوانين نيوتن. أهم هذه القوانين هو قانون الحركة

$$\text{القوة} = \text{الكتلة} \times \text{العجلة}$$

- 
- (1) Newtonian mechanics (2) Maxwell's electromagnetic theory  
(3) classical theory (4) Plank (5) Bohr (6) De Broglie  
(7) old quantum mechanics (8) microscopic systems

بالاشتراك مع قانون الجاذبية.

نجحت هذه النظرية فى وصف حركة الكواكب، كما أمدتنا بوجه عام بوصف مقنع لحركة الأنظمة الماكروسكوبية<sup>(1)</sup> المتعادلة كهربيا. جوهر ميكانيكا نيوتن يكمن فى أننا نتعامل مع المادة فى صورة جسيمات بكتلة محددة، كما أن حركة أى جسيم حر<sup>(2)</sup> تعرف تعريفا تاما بدلالة طاقته E وكمية حركته P .

### (ب) النظرية الكهرومغناطيسية

يهتم الشق الثانى من الفيزياء الكلاسيكية بدراسة الظواهر الكهربائية والمغناطيسية، حيث نجد أن أفضل وصف لها يتم بدلالة المجالين الكهربى  $E(x)$  والمغناطيسى  $B(x)$ . يرتبط هذان المجالان بكثافة الشحنة<sup>(3)</sup> وكثافة التيار<sup>(4)</sup> من خلال معادلات ماكسويل المعروفة (يمكن الرجوع لهذه المعادلات فى أى كتاب آخر، وذلك لعدم احتياجنا لتلك المعادلات على وجه الخصوص فى دراستنا الحالية). غاية مافى الأمر أننا نستخلص من هذه المعادلات (فى الفراغ الحر<sup>(5)</sup>) أن كلا من المجال الكهربى والمجال المغناطيسى يحقق المعادلة:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \begin{bmatrix} E(x) \\ B(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (1-1)$$

هذا ينص على أن هذين المجالين ينتشران فى الفراغ على شكل موجات<sup>(6)</sup> بسرعة ثابتة c. وقد كان من تخمين ماكسويل أن هذه الموجات وبترددات

(1) macroscopic systems (2) free particle

(3) charge density (4) current density (5) free space (6) waves

مناسبة هي التي تميز الإشعاع أو الضوء المرئي<sup>(1)</sup>. مألوف لنا الآن الأشكال الأخرى لمثل هذا الإشعاع، ابتداءً من مدى الترددات المنخفضة للغاية المستخدمة في الرادار<sup>(2)</sup> وعلم الفلك الإشعاعي<sup>(3)</sup>، مروراً بالمدى المرئي للإشعاع حتى نصل إلى الإشعاعات ذات الترددات العالية جداً مثل الأشعة السينية<sup>(4)</sup> وإشعاعات جاما<sup>(5)</sup>.

ندرك في علم الضوء الهندسي<sup>(6)</sup> وجود العديد من الظواهر التي تفسر دون الرجوع إلى التصور الموجي للإشعاع. إلا أن حالتى التداخل والحيود<sup>(7)</sup> لا تفسر تفسيراً مقنعاً إلا تحت شرط التصور الموجي للإشعاع.

يعبر عن الموجة النموذجية على النحو:

$$\exp[-i(\omega t - k \cdot x)] \quad (2-1)$$

حيث تميز الموجة بكل من التردد الزاوي<sup>(8)</sup>  $\omega$  و متجه الانتشار<sup>(9)</sup>  $k$  (يرتبط التردد  $\nu$  والطول الموجي  $\lambda$  بكل من  $\omega$  ،  $k$  بالعلاقتين

$$|k| = 2\pi/\lambda; \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\omega = |k|c \quad (3-1)$$

يمكن الجمع بين هذين الشقين، الميكانيكا والكهرومغناطيسية، باستخدام قانون لورنتز<sup>(10)</sup>، الذى ينص على أنه إذا تحرك جسيم شحنته  $e$  بسرعة  $v$  تحت تأثير مجال كهربى ومجال مغناطيسى فسوف يتأثر بقوة مقدارها

$$F(x) = e \left( E(x) + \frac{1}{c} v \wedge B(x) \right) \quad (4-1)$$

من ناحية المبدأ، استطاع هذا التصور الكلاسيكى للعالم (وهو اعتبار

- 
- (1) visible light (2) radar (3) radio astronomy (4) X-rays  
(5)  $\gamma$ -rays (6) geometrical optics (7) interference and diffraction  
(8) angular frequency (9) propagation vector (10) Lorentz law

أن المادة تتكون من جسيمات نقطية والإشعاع يتكون من موجات) أن يمدنا بالصياغة الأساسية اللازمة لوصف كل الظواهر الفيزيائية؛ يكون الجسيمات النقطية هي البروتونات والإلكترونات ( حيث كل منهما يميز بكتلة معينة ويحمل وحدة الشحنة الكهربائية) التي يتم التفاعل فيما بينها تبعا للقوى الكهرومغناطيسية وقوى الجاذبية الأساسية.

إلا أنه، وحتى قبل اكتشاف البروتون، برهنت التصورات الكلاسيكية على عدم كفايتها تماما لوصف حركة الإلكترون أو كيفية تفاعله مع الإشعاع.

## ٢-١ فشل التصورات الكلاسيكية-نظرية الكم القديمة

### ( أ ) الصورة الجسيمية للإشعاع<sup>(١)</sup> وفرض بلانك

من الناحية التاريخية، ظهر أول دليل على فشل التصورات الكلاسيكية من دراسة ظاهرة إشعاع الجسم الأسود<sup>(٢)</sup> ، التي انصببت الدراسة فيها على ديناميكية تبادل الطاقة بين الإشعاع والمادة. كلاسيكيا فقد افترض أن هذا التبادل يتم بصورة متصلة<sup>(٣)</sup> ، بمعنى أن أى إشعاع بتردد زاوى  $\omega$  يمكن أن يعطى أى مقدار من الطاقة عند الامتصاص<sup>(٤)</sup>. هذا المقدار يعتمد بالتحديد، لأى حالة خاصة، على شدة الطاقة<sup>(٥)</sup> فى الإشعاع. أظهر بلانك إمكانية الحصول على معادلة ديناميكية صحيحة لوصف إشعاع الجسم الأسود وذلك فقط على فرض أن تبادل الطاقة بين المادة والإشعاع يتم بصورة متقطعة<sup>(٦)</sup>. وعلى وجه التحديد افترض بلانك أن أى إشعاع بتردد زاوى  $\omega$

---

(1) particle aspects of radiation (2) black body radiation  
(3) continuous (4) absorption (5) energy intensity (6) discrete

يقوم بتبادل الطاقة مع المادة بوحدات  $\hbar\omega$  فقط، حيث  $\hbar$  ثابت عام؛ يرتبط بثابت بلانك بالعلاقة:

$$h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-27} \text{ cgs} \quad (5-1)$$

بطريقة أخرى، يمكن القول أن فرض بلانك ينص على أن أى إشعاع بتردد  $\omega$  يتصرف كما لو كان عبارة عن تيار من الجسيمات (سميت هذه الجسيمات فيما بعد بالفوتونات<sup>(1)</sup>)، وكل جسيم يحمل طاقة مقدارها

$$E = \hbar\omega \quad (6-1)$$

وأن هذه الطاقة يمكن أن تتبعث أو تمتص بواسطة المادة. نظرا لانبعث الفوتونات بسرعة مساوية لسرعة الضوء، فإنه طبقا للنظرية النسبية الخاصة تكون كتلة سكونها<sup>(2)</sup> مساوية للصفر. تكتب العلاقة النسبية بين الطاقة  $E$  وكمية الحركة الخطية  $P$  على النحو

$$\frac{E^2}{c^2} = P^2 + m^2c^2 \quad (7-1)$$

وحيث أنه للفوتونات  $m = 0$ ، يكون

$$P = \frac{E}{c} \quad (8-1)$$

بحذف  $c$  من المعادلتين (1-3)، (1-8) وإعادة كتابة المعادلة (1-6) مرة أخرى، نجد

$$\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ P = \hbar k \end{array} \quad (9-1)$$

هذه المعادلة تظهر بوضوح العلاقة بين البارامترات الجسيمية  $(E, P)$ ، أى التى تميز الجسيمات، والبارامترات  $(\omega, k)$  للموجة المناظرة.

(1) photons (2) rest mass



تتجلى بوضوح الصورة الجسيمية للإشعاع فى ظاهرة التأثير الكهروضوئى<sup>(1)</sup>. فعند سقوط حزمة من الأشعة، وحيدة الطول الموجى<sup>(2)</sup>، التى ترددها الزاوى  $\omega$ ، على سطح معدن ينبعث من هذا المعدن عدد من الإلكترونات. إذا كان  $\hbar\omega$  أصغر من مقدار محدد  $W$  (تتعمد على طبيعة المعدن) لا ينبعث أى إلكترونات من سطح المعدن مهما تغيرت شدة الإشعاع الساقط. أما إذا كان  $\hbar\omega < W$  فينبعث إلكترونات بطاقة حركة  $T$ ، حيث

$$\hbar\omega = W + T \quad (10-1)$$

من الملاحظ أنه حتى فى حالة انبعاث إلكترونات فإن طاقة حركتها  $T$  لاتتعمد على شدة الإشعاع الساقط ولكن تتعمد على تردده فقط. هذا مالايمكن فهمه على أساس المفهوم الكلاسيكى لتبادل الطاقة بين المادة والإشعاع بصورة متصلة. إلا أنه من السهل فهم ظاهرة التأثير الكهروضوئى على أساس فرض فوتونات بلانك، وذلك كما يلى:

$W$  هو مقدار الشغل اللازم لتحرير إلكترون واحد من طاقة الوضع الجاذبة بسطح المعدن. الطاقة  $\hbar\omega$  تنتقل بواسطة الفوتونات إلى الإلكترون الموجود بسطح المعدن. فإذا كان طاقة الفوتون أقل من  $W$  لاينبعث أى إلكترونات. أما إذا كان طاقة الفوتون أكبر من  $W$  وأعطى الفوتون كل طاقته،  $\hbar\omega$ ، لإلكترون ما فإن هذا الإلكترون يتحرر حاملا طاقة حركة تعطى بالمعادلة (10-1).

يعتبر التأثير الكهروضوئى تأكيدا مباشرا على فرض بلانك، حيث يعتمد فقط على ميكانيكية تبادل الطاقة بين الإشعاع والمادة (الإلكترونات)

(1) photoelectric effect    (2) monochromatic light

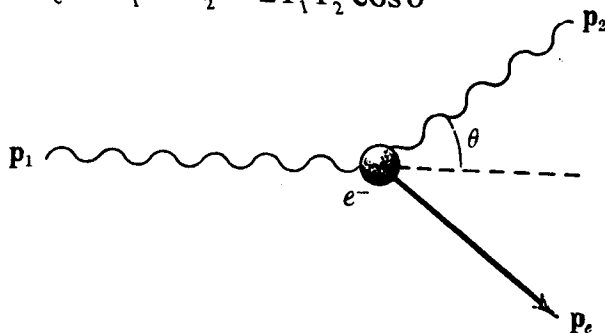
ولا يدخل في هذه الظاهرة أى تأثيرات فيزيائية أخرى.  
 التأثير الكهروضوئى وإشعاع الجسم الأسود يوضحان فقط أن تبادل  
 الطاقة يتم بوحدات  $\hbar\omega$ . أما الطبيعة الجسيمية للإشعاع نفسه فتتجلى عند  
 دراسة استطارة الأشعة السينية بواسطة الإلكترونات (تأثير كومتون<sup>(1)</sup>).  
 نعتبر اصطدام فوتون كمية حركته  $P_1$  (طاقته  $P_1c$ ) مع إلكترون ساكن كتلته  
 $m$ . بعد التصادم تصبح كمية حركة الفوتون  $P_2$  (طاقته  $P_2c$ )، وكمية حركة  
 الإلكترون  $P_e$ .

من قانون حفظ كمية الحركة، نجد

$$P_1 = P_2 + P_e \quad (11-1)$$

ومنه

$$P_e^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos \theta \quad (12-1)$$



شكل ١-١ رسم يوضح تصادم فوتون كمية حركته  $P_1$  مع  
 إلكترون ساكن. بعد التصادم ينبعث فوتون بكمية حركة  $P_2$   
 ويرتد الإلكترون بكمية حركة  $P_e$ .

باستخدام قانون حفظ الطاقة المستنتج من النظرية النسبية الخاصة (انظر

(1) Compton effect

المعادلة ((٧-١)) ، نحصل على

$$P_1 + mc = P_2 + (P_e^2 + m^2 c^2)^{1/2} \quad (١٣-١)$$

بحذف  $P_e^2$  من المعادلتين ((١٢-١)) ، ((١٣-١)) نجد

$$mc(P_1 - P_2) = 2P_1 P_2 \sin^2 \theta / 2 \quad (١٤-١)$$

بالقسمة على  $P_1 P_2$  والتعبير عن الناتج في صورة الطول الموجى الذى يعطى من المعادلة ((٩-١)) بالعلاقة

$$\lambda = \hbar / p \quad (١٥-١)$$

نحصل على

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_e \sin^2 \theta / 2 \quad (١٦-١)$$

حيث  $\lambda_e$  هو طول موجة كومتون للإلكترون<sup>(١)</sup> ، ويساوى

$$\lambda_e = \hbar / mc \approx 4 \times 10^{-11} \text{ cm} \quad (١٧-١)$$

كيفية التغير فى الطول الموجى، المعادلة ((١٦-١))، الذى يعتمد على زاوية استقطار الفوتون فقط، ولا يعتمد على تردد الإشعاع الساقط، هو ما لوحظ عمليا بالفعل.

حصلنا على هذا البرهان النظرى على أساس معاملة الفوتون كجسيم، أى على أساس التصور الجسيمي للإشعاع. الجدير بالذكر أنه لا يمكن الحصول على معادلة نظرية تتفق مع الملاحظ تجريبيا تحت فرض التصور الموجى للإشعاع.

(ب) الصورة الموجية للمادة<sup>(٢)</sup> وفرض دى برولى

(1) electron Compton wave-length (2) wave aspects of matter

جاءت تجارب دافيسون وجرمر<sup>(1)</sup> لتتم التأثيرات السابقة التي تجلت فيها الصورة الجسيمية للإشعاع. بينت هذه التجارب أنه عند انعكاس حزمة من الإلكترونات من على سطح بلورة النيكل فإن الإلكترونات المنعكسة تكون نموذجا للحيود<sup>(2)</sup> مشابهها تماما لنموذج حيود الضوء بواسطة المحزوز. ظهر أيضا أن نموذج حيود الإلكترونات لا يخفى حتى لو كانت كثافة الإلكترونات صغيرة بدرجة كافية لمرور إلكترون واحد فقط بالجهاز عند كل لحظة زمنية. وبما أن الحيود يعد من الظواهر الموجية فإن تجلى هذه الظاهرة تحت هذه الظروف يدل على أن موجة بشكلها العام، المعادلة (1-2)، يجب أن تصاحب بطريقة ما حركة الإلكترون المفرد، الذى عادة ما يعبر عنه بالبارامترات (E, P).

حتى قبل تجارب دافيسون وجرمر فقد خمن دى برولى أن المعادلة (1-9)، التى تربط بين الشكل الجسمى والموجى للإشعاع، يجب أن تطبق أيضا على الإلكترونات. هذا يعنى أن أى إلكترون طاقته E وكمية حركته P يصاحبه بطريقة ما موجة دى برولى،

$$\exp[-i(Et - P \cdot x)/\hbar] \quad (1-18)$$

تلك العلاقة التى تجمع بين البارامترات الجسيمية والموجية، مع قيمة  $\hbar$  التى عينت من قبل بواسطة التأثيرات الإشعاعية، تمدنا بالمعادلة التجريبية الصحيحة التى تربط بين عرض مناطق الحيود<sup>(3)</sup> و طاقة الإلكترونات (انظر المسألة 1-5).

(1) Davisson and Germer

(2) diffraction pattern

(3) diffraction bands

### (ج) المستويات المتقطعة<sup>(1)</sup> وفرض بوهر

ظهر فشل النظرية الكلاسيكية أكثر وضوحا عند تطبيقها على حركة الإلكترون بذرة الهيدروجين. برهنت تجارب رذرفورد<sup>(2)</sup> على إمكانية النظر للذرة على أنها عبارة عن إلكترونات سالبة الشحنة (إلكترون واحد فى حالة الهيدروجين) تدور حول نواة موجبة الشحنة وثقيلة نسبيا (بروتون<sup>(3)</sup> واحد فى حالة الهيدروجين). بإهمال الإشعاع فإن هذا النظام يشبه تماما حركة أى كوكب حول الشمس، مع استبدال قوى الجاذبية بين الكتل بالتجاذب الكولومى<sup>(4)</sup> بين الشحنات.

من غير المعقول (رغم النجاح العظيم لقوانين نيوتن للجذب بين الكتل) اعتقاد أن التشابه الكهربى سوف يمدنا بدفعة قوية للنظرية الكلاسيكية. سبب ذلك يرجع بالطبع إلى أننا لانستطيع إهمال الإشعاع. فالإلكترون الدوار عبارة عن شحنة سريعة التعجيل وعليه يعمل، طبقا لنظرية ماكسويل، كمصدر لطاقة مشعة. وتبعا للنظرية الكلاسيكية ففى حوالى  $10^{-10}$  ثانية سوف يتجه الإلكترون حلزونيا ليتحد مع البروتون معطيا طاقته الميكانيكية على شكل ومضة قصيرة من الضوء.

يرتبط تردد الإشعاع الصادر بتردد الإلكترون فى مداره. وعليه فعندما يشع الإلكترون طاقة فإن تردده، كلاسيكيا، سوف يتغير بسرعة وبصورة متصلة وبالتالي يتولد إشعاع على مدى متصل من الترددات.

مما سبق نستنتج أن النظرية الكلاسيكية لذرة رذرفورد تملى علينا الخاصيتين الآتيتين:

(1) discrete levels (2) Rutherford (3) proton  
(4) Coulomb attraction

١- يجب أن تكون الذرة غير مستقرة على الإطلاق.

٢- يجب أن تشع طاقة على مدى متصل من الترددات.

هاتان الخاصيتان في تناقض تام مع الواقع الفعلى. واضح أن الخاصية الأولى غير متحققة، حيث أن الذرات تعتبر من أكثر الأشياء التي نعرفها استقراراً. أما تناقض الخاصية الثانية مع الواقع التجريبي فقد ظهر من الدراسة المفصلة للإشعاع الصادر من ذرة الهيدروجين، التي أجراها بالمر<sup>(١)</sup> سنة ١٨٨٥، حيث تحقق من أن الترددات المنبعثة تكون متقطعة، وأن بعض الخطوط الملاحظة تحقق المعادلة الاختيارية:

$$\omega = N \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) , \quad n = 3,4,5, \dots \quad (19-1)$$

يعد ظهور هذه الفئة المتقطعة من القيم الممكنة للترددات أنها من السمات الوصفية الجديدة للذرة. كلاسيكياً، التردد الزاوى  $\omega$  يتغير بصورة متصلة. اقترح بوهر بعض القواعد، لاستخلاص النتائج الملاحظة بالتجربة من النظرية شبه الكلاسيكية. وتبسيط الإجراءات الرياضية سنذكر ذلك للمسارات الدائرية فقط.

وضع بوهر القواعد التالية:

(أ) قيمة كمية الحركة الزاوية  $\ell$  للإلكترون تمثل بعدد صحيح مضروباً

فى  $\hbar$

$$\ell = n\hbar , \quad n = 1,2,3, \dots \quad (20-1)$$

هذا يعنى أن كمية الحركة الزاوية تأخذ قيماً متقطعة فقط، وهذا بدوره يؤدي إلى أن القيم المتاحة للطاقة  $E$  تكون متقطعة هي الأخرى.

(1) Palmer

(ب) ينبعث إشعاع عندما يُحدث الإلكترون إنتقالات متقطعة من مدار طاقته  $E_n$  إلى آخر طاقته  $E_{n'}$ ، مثلا. والتردد الزاوى الناشئ يعين من العلاقة

$$\hbar\omega_{nn'} = |E_n - E_{n'}| \quad (21-1)$$

بتطبيق هذه القواعد على ذرة الهيدروجين التى فيها يدور الإلكترون الذى كتلته  $m$  بسرعة زاوية  $\omega$  حول نواة (ثابتة) مُحدِّثا مسارا دائريا نصف قطره  $a$  (لاحظ أن  $\omega$  هى السرعة الزاوية للإلكترون فى مساره الدائرى، أما  $\omega_{nn'}$  فهو التردد الزاوى للإشعاع الصادر نتيجة لانقال الإلكترون بين المستويين  $n, n'$ ). حينئذ تكون معادلة الحركة التى تربط التجاذب الكولومى

$$\begin{aligned} & (e_M^2 \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0)) \text{ على النحو} \\ & \frac{e_M^2}{a^2} = m a \omega^2 \end{aligned} \quad (22-1)$$

أما القاعدة الأولى لبوهر فتعطى

$$m a^2 \omega = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23-1)$$

بحل هاتان المعادلتان نحصل على فئة من أنصاف أقطار المسارات المتقطعة الممكنة

$$a_n = \left( \frac{\hbar^2}{m e_M^2} \right) n^2 = a_0 n^2 \quad (24-1)$$

والسرعات الزاوية المناظرة

$$\omega = \frac{m e_M^4}{\hbar^3} \frac{1}{n^3} \quad (25-1)$$

تعطى الطاقة الكلية من طاقتى الحركة والوضع. لذلك فإن قيم المستويات المتقطعة للطاقة تساوى

$$E_n = \frac{m}{2} a_n^2 \omega^2 - \frac{e_M^2}{a_n} = -\frac{me_M^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$= \left( -\frac{1}{2} \frac{e_M^2}{a_0} \right) \frac{1}{n^2} \quad (26-1)$$

المسافة الأساسية  $a_0$ ، المعرفة بالمعادلة (24-1)، هي نصف قطر أدنى مستوى طاقة لبوهر. ومن المعادلة (21-1) فإن الترددات الزاوية الممكنة للإشعاع هي

$$\omega_{nn'} = \frac{e_M^2}{2\hbar a_0} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (27-1)$$

الفئة التي فيها  $n=2$ ،  $n'=3,4,5$  عبارة عن ثلاثة خطوط تقع في المنطقة المرئية من الضوء، وتكون جزء من مجموعة بالمر سألقة الذكر. ذرة بوهر مستقرة، حيث لا يوجد إمكانية لانبعثات أى طاقة إشعاعية بمجرد أن يصل الإلكترون إلى أدنى مستوى طاقة  $E_1$ ، المعطى بالمعادلة (26-1).

### ٣-١ ملخص

عمليات تفسير الظواهر الذرية كلاسيكياً، بإدخال علاقات اختيارية إضافية، تمت لحالات غير التي أشرنا إليها من قبل. ولكن لا يوجد سبب هنا للإسهاب أكثر من ذلك. من غير المقنع التعامل مع كل من الإشعاع والمادة فى بعض الأحيان باعتبارها موجات، وفى أحيان أخرى باعتبارها جسيمات، وذلك بطريقة اختيارية ظاهرة. كما أننا حصلنا أيضاً على المستويات المتقطعة لذرة الهيدروجين بتطبيق قواعد أدخلت بالتخمين، وهذا يخالف فحوى الميكانيكا الكلاسيكية. ما نتطلبه هو صياغة أساسية لنظرية



جديدة تبقى التصورات الكلاسيكية صحيحة، وفي نفس الوقت تطفو قواعد بلانك و بوهر ودى برولى كنتيجة طبيعية لتكوين مترابط. هذا هو جوهر ميكانيكا الكم التى سنؤسس مبادئها بالباب الثالث. لهذا تدخل القواعد السابقة كمرشد هام فى بناء هذه النظرية.

من هنا نرى أن السمات الأساسية، الغير كلاسيكية، التى يستلزم ظهورها بطريقة طبيعية فى النظرية الجديدة هى

١- الصورة الجسيمية للإشعاع-الفوتونات---(بلانك)؛

٢- الصورة الموجية للجسيمات---(دى برولى)؛

٣- ظهور بعض المتغيرات الفيزيائية فى صورة فئة متقطعة (بدلا

من المدى المتصل) من القيم الممكنة-وعلى وجه الخصوص مستويات

طاقة ذرة الهيدروجين---(بوهر).

## مسائل ١

(للحصول على قيم الثوابت راجع الملحق)

١-١ التردد الزاوى  $\omega$  للضوء المرئى يساوى حوالى  $10^{16} \text{ sec}^{-1}$ . يمكن

مساواة هذا التردد بانتقال بوهر القياسى، المعادلة (١-٢٧). بمعلومية كل

من  $m, e$  وضح أن هذا يؤدى إلى قيمة للمقدار  $\hbar$  متفقة تقريبا مع القيمة

التى حصل عليها بلانك (قيمة بلانك:  $\hbar \approx 10^{-34} \text{ mks}$ ).

١-٢ ماهو نصف قطر أدنى مستوى طاقة لبوهر، بالسنتيمتر؟ ماهى طاقة

الحالة الأرضية بالإرج وبالإلكترون فولت؟ برهن على أن طاقة الحركة فى

أى مدار كولومى دائرى تساوى الطاقة الكلية فى المقدار وتختلف معها فى

الإشارة. ومن ثم وضع أن كمية الحركة المماسية في أدنى مدار لبوهر تساوى حوالى  $2 \times 10^{-24}$  mks .

٣-١ أوجد الزمن اللازم لعمل دورة كاملة، بأدنى مدار لبوهر، بدلالة كل من  $e, \hbar, m$ . ثم أوجد قيمة هذا الزمن بالثوانى.

٤-١ وضع أن السرعة  $v$  للإلكترون، في أدنى مدار لبوهر، تساوى  $e^2_M/\hbar$ . ثم عبر عن هذه السرعة في صورة جزء من سرعة الضوء  $c$ . (هذه النسبة هي  $v/c = e^2_M/\hbar c$ ، وتعرف بثابت التركيب الدقيق<sup>(١)</sup>). أنظر المعادلة (٦٠-٨).

هل من المعقول، كتقريب من الرتبة الأولى، إهمال التأثيرات النسبية في النظرية عند تطبيقها على ذرة الهيدروجين؟

٥-١ وضع أن الطول الموجى  $\lambda$  المصاحب لإلكترون طاقة حركته  $T$  يكتب، طبقاً لعلاقة دي برولى (٩-١)، كما يلى:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}}$$

تبعاً للمعادلة القياسية لمحزوز الحيود فإن الأطوال الموجية، التى تتداخل تداخلاً بناءً فى حالة انحراف الإلكترونات بزواوية  $\vartheta$  بواسطة بلورة المسافات بين الذرية لها  $d$ ، تعطى بالعلاقة

$$n\lambda = d \sin \vartheta$$

بوضع

$$n = 1 ; \sin \vartheta \cong 1 ; d \cong a_0$$

نحصل على

(1) fine structure constant

$$\lambda \cong a_0$$

بمساواة العلاقتان المعبرتان عن  $\lambda$  ببعضهما، نحصل على  $\hbar$  بدلالة طاقة حركة الإلكترونات في تجربة للحيود.

$$2\pi\hbar = \sqrt{2mT}a_0$$

بين أنه عندما يكون  $T \cong 50 \text{ eV}$  (تلك هي القيمة المستخدمة في تجربة دافيسون وجرمر) فإن هذا يؤدي إلى قيمة للثابت  $\hbar$  متفقة مع التي حصل عليها بلانك، وكذلك مع القيمة المستنتجة من علاقة بوهر.

## الباب الثانى

### المؤثرات<sup>(1)</sup>

#### ١-٢ تعريف ومعادلات المؤثرات<sup>(2)</sup>

قبل البدء فى وضع أسس ميكانيكا الكم يجب تقديم ذلك الجزء من النظرية الحسابية، ألا وهو المؤثرات. حيث أنه يلعب دورا حيويا فيما سيأتى من دراسة.

باختصار نقول أن المؤثر، الذى نرسم له بالرمز  $\hat{A}$ ، يمثل أى عملية حسابية تطبق على أى دالة فى  $x$ ، مثلا، وتحولها إلى دالة أخرى. من أبسط الأمثلة على المؤثرات، هو اعتبار أن المؤثر  $\hat{A}$  نفسه دالة فى  $x$ ، أى  $\hat{A}(x)$ ، واعتبار العملية الحسابية أنها عملية الضرب. لذلك فإننا نضع،

$$\hat{A}(x) = x$$

حينئذ، المؤثر  $x$  يؤثر على أى دالة  $\psi(x)$  ويحولها إلى دالة جديدة  $x\psi(x)$ .

مثال آخر أقل سهولة هو اعتبار العملية الحسابية أنها عملية التفاضل. أى وضع المؤثر  $\hat{A}$  فى صورة أى دالة فى  $\partial/\partial x$ ، أى أن

$$\hat{A} = \hat{A}(\partial/\partial x)$$

$$\hat{A} = \partial^2/\partial x^2 \quad \text{مثلا}$$

للحصول على مؤثر أكثر عمومية نعتبر أنه دالة فى  $\partial/\partial x$ ، معا، أى أن

$$\hat{A} = \hat{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

---

(1) operators (2) operator equations

نحن الآن بصدد إدخال فكرة معادلة المؤثر. نعتبر المؤثر

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} x \quad (1-2)$$

لهذا، فإنه لأي دالة  $\psi(x)$  يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)\psi(x) = \psi(x) + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2-2)$$

$$= \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \quad (3-2)$$

للحصول على المتساوية الأولى (2-2) استخدمنا القاعدة العادية لتفاضل حاصل الضرب  $x\psi(x)$ . وهي نفسها الفكرة العادية لأن المشتقة  $\partial/\partial x$  تؤثر فقط على أي دالة تتواجد على يمينها.

نظرا لأن المتساوية الأخيرة (3-2) متحققة لأي دالة  $\psi(x)$  فيمكن ملاحظة المعامل  $\psi(x)$  الموجود على يمين الطرفين، ونكتب معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1 + x \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-2)$$

وعلى وجه العموم، فلأي معادلة مؤثر مكتوبة على النحو

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \hat{B}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \quad (5-2)$$

فإنها تعنى أن

$$\left[\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) = \left[\hat{B}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x, \frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) \quad (6-2)$$

وذلك لأي دالة  $\psi(x)$ .

نحن الآن بصدد إدخال فكرة معادلة المؤثر. نعتبر المؤثر

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} x \quad (1-2)$$

لهذا، فإنه لأي دالة  $\psi(x)$  يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)\psi(x) = \psi(x) + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2-2)$$

$$= \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \quad (3-2)$$

للحصول على المتساوية الأولى (2-2) استخدمنا القاعدة العادية لتفاضل حاصل الضرب  $x\psi(x)$ . وهي نفسها الفكرة العادية لأن المشتقة  $\partial/\partial x$  تؤثر فقط على أي دالة تتواجد على يمينها.

نظرا لأن المتساوية الأخيرة (3-2) متحققة لأي دالة  $\psi(x)$  فيمكن ملاحظة المعامل  $\psi(x)$  الموجود على يمين الطرفين، ونكتب معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1 + x \frac{\partial}{\partial x} \quad (4-2)$$

وعلى وجه العموم، فلأي معادلة مؤثر مكتوبة على النحو

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \hat{B}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \quad (5-2)$$

فإنها تعنى أن

$$\left[\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) = \left[\hat{B}(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x, \frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) \quad (6-2)$$

وذلك لأي دالة  $\psi(x)$ .

## ٢-٢ معادلة القيمة المناسبة<sup>(١)</sup>

ينتمي إلى كل مؤثر  $\hat{A}(x, \partial/\partial x)$  فئة من الأعداد  $a_n$  وفئة من الدوال  $u_n(x)$  المعرفة بالمعادلة

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})u_n(x) = a_n u_n(x) \quad (٧-٢)$$

حيث  $a_n$  هي القيمة المناسبة<sup>(٢)</sup>، أو القدر المناسب.  $u_n(x)$  هي الدالة المناسبة<sup>(٣)</sup> لهذا القدر المناسب.

حينئذ، تكون الدوال المناسبة لأي مؤثر هي تلك الدوال الخاصة<sup>(٤)</sup> التي تبقى بدون تغيير عند التأثير عليها بالمؤثر، بغض النظر عن ضربها في القيمة المناسبة.

العلاقة (٧-٢) تسمى معادلة القيمة المناسبة للمؤثر  $\hat{A}$ . لفهم ذلك نضع

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = -\iota \frac{\partial}{\partial x} \quad (٨-٢)$$

واعتبار أن  $u_n(x)$  دالة دورية<sup>(٥)</sup> في المدى  $L$ ، كشرط للحدود<sup>(٦)</sup>. على

ذلك، تصبح معادلة القيمة المناسبة (٧-٢) في الصورة

$$-\iota \frac{\partial}{\partial x} u_n(x) = a_n u_n(x) \quad (٩-٢)$$

ولهذا

$$u_n(x) = e^{\iota a_n x} \quad (١٠-٢)$$

حيث، من شرط الحدود،  $a_n$  تُكوّن فئة متقطعة،

$$a_n = \frac{2n\pi}{L} \quad (١١-٢)$$

(1) the eigenvalue equation (2) eigenvalue (3) eigenfunction  
(4) special functions (5) periodic (6) boundary condition

عندما  $L \rightarrow \infty$ ، تؤول الفجوة بين القيم المناسبة المتتالية إلى الصفر، أى تصبح القيم المناسبة متصلة وليست متقطعة. بالعودة إلى المعادلة (٢-٩) يمكن رؤية أن الدوال المناسبة لهذا الوضع تأخذ الشكل

$$u_a(x) = e^{ax} \quad (٢-١٢)$$

حيث تكون القيمة المناسبة  $a$  عبارة عن متغير متصل يأخذ أى مقدار. من الأهمية بمكان ملاحظة أن القيم المناسبة تعتمد على شرط الحدود الموضوع على حلول معادلة القدر المناسب (٢-٧). ولذلك تُعرّف القيم المناسبة تعريفا جيدا<sup>(١)</sup> عند إعطاء شرط للحدود.

### ٢-٣ علاقات المبادلة<sup>(٢)</sup>

أخيرا، نعتبر العملية المتتالية لمؤثرين. نعرّف المبدّل<sup>(٣)</sup> لمؤثرين

$\hat{A}, \hat{B}$  بالتعريف الآتى:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (٢-١٣)$$

وهذا عبارة عن الفرق بين التأثير أولا بالمؤثر  $\hat{B}$  يليه  $\hat{A}$ ، والتأثير أولا بالمؤثر  $\hat{A}$  يليه  $\hat{B}$ . بوجه عام قيمة هذا المبدل لاتساوى صفرا،

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \quad (٢-١٤)$$

لتوضيح ذلك نعتبر الحالة البسيطة التالية:

$$\hat{A} = x \quad ; \quad \hat{B} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (٢-١٥)$$

ومنه فإلى دالة  $\psi(x)$  يكون

(1) well defined (2) commutation relations (3) commutator



$$\left[ x, \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x) = \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \psi(x) \quad (16-2)$$

$$= \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 - x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x)$$

حيث الواحد الذى بين القوسين يأتى نتيجة للتأثير بالمؤثر  $\partial/\partial x$  على الدالة  $\psi(x)$ ، كما هو الحال فى المعادلة (2-3). نظرا لأن هذا يتحقق لأى دالة  $\psi(x)$  فإننا نحصل على معادلة المؤثر

$$\left[ x, \frac{\partial}{\partial x} \right] = -1 \quad (17-2)$$

المعادلة التى تعين قيمة المبدل لمؤثرين تسمى علاقة المبادلة. الحالة الخاصة التى فيها قيمة المبدل لمؤثرين عبارة عن عدد، كما هو الحال فى المعادلة (2-17)، تلعب دورا هاما فى النظرية التى نحن بصدد تأسيسها.

## ٢-٤ ملخص

قدمنا سويا الآلة الحسابية التى سنحتاجها فى الباب القادم. هذه الآلة تتكون من قليل من التعريفات. لم نجد فى قيامنا بذلك عمليات حسابية أكثر تعقيدا من تفاضل حاصل ضرب دالتين. إلا أننا واجهنا هنا بعض الأفكار الجديدة. قبل البدء فى الباب الثالث (الذى يحتوى على كل التصورات الفيزيائية الجديدة اللازمة لتأسيس النظرية الأساسية الصالحة لوصف الأنظمة الذرية) ننصح القارئ بالتمشى مع الأفكار الحسابية التى أدخلناها فى هذا الباب.

نذكر هنا، وباختصار، الخواص الرئيسية للمؤثرات.

١- يصاحب كل مؤثر فئة من الأعداد، المسماة بالقيم المناسبة، التي تُعرَّف بواسطة معادلة القيمة المناسبة (٧-٢).

٢- بوجه عام قيمة المبدل لمؤثرين لا تساوى الصفر،  

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

مسائل ٢

١-٢ حقق صحة معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x} x^n = n x^{n-1} + x^n \frac{\partial}{\partial x}$$

ومنه وضح أن

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, x^n \right] = n x^{n-1}$$

٢-٢ أوجد قيمة

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right]$$

٣-٢ أثبت أن  $u(x) = e^{-(1/2)x^2}$  هي الدالة المناسبة للمؤثر

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \right)$$

وأوجد القيمة المناسبة المناظرة.

٤-٢ حقق صحة معادلات المؤثرات الآتية:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + x \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - x \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - x \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + x \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 + 1$$

## الباب الثالث

### ميكانيكا الكم

٣-١ عمليات الملاحظة<sup>(١)</sup> (القياس)

أدرنا مما سبق فشل الميكانيكا الكلاسيكية عند تطبيقها على الأنظمة، بشرط أن تكون هذه الأنظمة صغيرة بدرجة كافية. تطبق الميكانيكا الكلاسيكية بنجاح لوصف حركة الكواكب والنجوم في مداراتها، وأيضاً لوصف حركة كرة الجولف، مثلاً، أو ماشابه ذلك. ولكنها تفشل تماماً عند تطبيقها على الذرات. سوف يتضح فيما بعد عند دراسة الأنظمة الذرية أن كلمة الصغر ترمى إلى المعنى المطلق للصغر، وليس مجرد صغر نسبي. فهم فحوى الصغر المطلق هو اللبنة الأساسية لفهم ميكانيكا الكم.

في فيزياء الأنظمة الكلاسيكية- أى الأنظمة التى تطبق فيها التصورات الكلاسيكية بنجاح- يفترض أن عملية الملاحظة لاتُحدِث اضطراباً لحركة هذه الأنظمة. على سبيل المثال، عند تطبيق معادلات ماكسويل لحساب التيارات والمجالات فى مسألة ما يفترض عدم تأثر القيم المحسوبة بعملية القياس، ولاحتى تؤثر عملية القياس على كيفية نمو هذه التيارات والمجالات. وعلى وجه الدقة، نفرض أن الاضطراب الناتج من عملية القياس (مثل التغير فى قيمة التيار نتيجة لتوصيل فولتميتر) يمكن تصحيحه بدقة، ذلك على الأقل من ناحية المبدأ.

من أبسط أنواع الملاحظة هو النظر إلى شيء معين . هذا يتطلب

(1) operations of observation

إسقاط أشعة ضوئية عليه، وهذا يعنى أننا نصدم الجسم المراد ملاحظته بالفوتونات. إذا كان المراد هو قياس موضع الجسم بدقة فهذا يستلزم أن يكون الطول الموجى للأشعة الساقطة صغيرا بدرجة كافية. وبالتالي يصبح تردد الفوتون، أو كمية حركته، أكبر من حد معين. أى صدمة بهذا الفوتون للنظام الملاحظ تُحدث له اضطرابا إذا كان صغيرا بدرجة كافية. من الممكن تصور أن هذه الاضطرابات نستطيع أيضا تصحيحها، إن لم يكن هذا هو الحال فإننا نجد أنفسنا أمام المعنى المطلق للحيز<sup>(1)</sup>.

عبر ديراك<sup>(2)</sup> عن هذه الفكرة بدقة، حيث قال: يوجد على وجه العموم حد للدقة فى قدرتنا على ملاحظة نظام ما وصغر الاضطراب المصاحب لتلك الملاحظة - هذا الحد ملازم لطبيعة الأشياء ولا يمكن تجاوزه بتطور أساليب القياس.

إذا كان النظام كبيرا بدرجة كافية لإهمال هذه الاضطرابات، عندها تطبق فروض الفيزياء الكلاسيكية ونتوقع أن يتبع النظام القوانين الكلاسيكية. من الناحية الأخرى، إذا كان قيمة الاضطراب الحادث فى النظام لا يمكن إهمالها فإننا نقول أن هذا النظام صغير بمعناه المطلق، ومطلوب منا وضع نظرية جديدة للتعامل معه.

يبدو الدارس لميكانيكا الكم، إن لم نقل كالثور فى دكان للزجاجيات، فهو كرجل معصوب العينين، يسير فى دكان للزجاجيات، معرضا لتحطيم أى شىء يلمسه فى محاولاته للتعرف بوضوح على طبيعة الأشياء الحساسة المحيطة به.

مشكلتنا الآن تكمن فى تأسيس نظرية فيزيائية جديدة من المعلومات المتجمعة، بواسطة طرق غير محددة بدقة. الشىء المدهش هنا هو حقا

(1) size (2) Dirac

إمكانية عمل ذلك كلية، وليس اختلاف تلك النظرية في جوهرها عن النظرية الكلاسيكية.

من أولى النقاط التي يجب اعتبارها هي خاصية تأثير عمليات الملاحظة على النظام الفيزيائي، وعليه توقع تجلي هذا التأثير بوضوح في النظرية الجديدة.

تتمتع عمليات الملاحظة بالخاصيتين الآتيتين:

١- ينتمي لكل نوع من أنواع الملاحظة (كقياس الطاقة، كمية الحركة، الموضوع، مثلا) فئة من الأعداد-النتائج الممكنة للملاحظة. نعلم مسبقا، من مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين، أن هذه الأعداد ربما تقع في مدى متصل، كما في النظرية الكلاسيكية، أو تُكوّن فئة من القيم المتقطعة.

٢- نفرض نوعين من عمليات الملاحظة  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  (مثلا  $\hat{A}$  تعنى قياس الموضوع،  $\hat{B}$  تعنى قياس كمية الحركة). نرمز للملاحظة  $\hat{B}$  المتبوعة بالملاحظة  $\hat{A}$  بالرمز  $\hat{A}\hat{B}$ . وعليه فإن الرمز  $\hat{B}\hat{A}$  يعنى نفس النوع من الملاحظة، ولكن بالترتيب العكسي.

نظرا لأن كل عملية قياس تسبب اضطرابا ما في النظام الفيزيائي وبالتالي تؤثر على عملية القياس الأخرى، فإن العمليتين  $\hat{A}\hat{B}$ ،  $\hat{B}\hat{A}$  تظهران نتائج مختلفة. يعبر عن ذلك رياضيا كما يلي:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

قيمة التعبير السابق لا بد أن يكون له علاقة بقيمة الاضطراب (الذي لا يمكن تجنبه) الحادث.

عند هذه النقطة، وبهذا التحليل، نتوقع أن يدخل فى النظرية، التى نحن بصدددها، ثابت ما جديد وذلك حتى نتمكن من إعطاء معنى كميًا<sup>(1)</sup> بدلا من المعنى الوصفي<sup>(2)</sup> للصغر المطلق. من خبرتنا بميكانيكا الكم القديمة نستطيع الجزم بأن هذا الثابت الجديد هو ثابت بلانك المختصر  $\hbar$ .

### ٣-٢ المؤثرات والملاحظات: الفروض التفسيرية<sup>(3)</sup>

يجب أن يلاحظ القارئ أن الخواص الفيزيائية لعمليات الملاحظة تناظر بالضبط الخواص الحسابية للمؤثرات التى قدمناها بالباب الثانى. فينتمى لكل منهما فئة من الأعداد، وكذلك فإن نتيجة التأثير بأى زوج من المؤثرات يجب أن تعتمد على ترتيب تطبيقها. لهذا فإننا نضع الفرض العام، وهو أن عمليات الملاحظة تمثل بالمؤثرات  $\hat{A}$ ، حيث يوجد مؤثر واحد فقط لكل كمية نلاحظها (أى يوجد مؤثر للطاقة، وآخر للمكان، ... إلخ).

الدوال التى تعمل عليها المؤثرات تمثل حالة النظام وتعرف باسم دوال الحالة<sup>(4)</sup> (أو الدوال الموجية<sup>(5)</sup>). عندما تكون دالة الحالة هى دالة القيمة المناسبة فإننا نطلق عليها اسم حالة القيمة المناسبة<sup>(6)</sup>.

إذا التزمنا جانب الدقة فإننا نضع الفروض التفسيرية (التى سنناقشها فيما

---

(1) quantitative (2) qualitative (3) interpretive postulates  
(4) state functions (5) wave functions (6) eigenstate

بعد) الآتية:

ت(١): النتائج الممكنة لعملية الملاحظة  $\hat{A}$  هي القيم المناسبة  $a_n$ .

ت(٢): عملية الملاحظة  $\hat{A}$  على نظام في حالة القيمة المناسبة  $u_n(x)$

تؤدي بالتأكيد إلى النتيجة  $a_n$ .

ت(٣): القيمة المتوسطة<sup>(١)</sup> لتكرار الملاحظة  $\hat{A}$  على فئة من الأنظمة،

كل نظام في حالة اختيارية  $\psi(x)$ ، هي:

$$\bar{a}_\psi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x)} \quad (1-3)$$

حيث  $\psi^*(x)$  هي الدالة المركبة المصاحبة للدالة  $\psi(x)$ .

أول هذه الفروض لا يمكن الاستغناء عنه، وذلك لأنه يجب أن نحدد بوضوح الأعداد المصاحبة للعملية  $A$ . هذه الأعداد تسمى ناتج عملية الملاحظة،

وهي تناظر أيضا الأعداد المصاحبة للمؤثر المناظر  $\hat{A}$ .

أما من ناحية الفرض الثاني، فيوجد تناظر بين تكوين معادلة القدر المناسب (٧-٢) وبين عملية الملاحظة الفيزيائية المثالية. حيث نجد أن

ناتج التأثير بالمؤثر  $\hat{A}$  على نظام في الحالة  $u_n$  هو أن تبقى الحالة  $u_n$  بدون تغيير مع تولد عدد  $a_n$  يمثل ناتج عملية الملاحظة.

في الفرض الثالث نتعامل مع وضع أكثر صعوبة. إذا كان النظام في حالة

عامة  $\psi(x)$  فطبقا للفرض الأول يكون نتيجة أى ملاحظة  $\hat{A}$  هو ظهور

أحد القيم المناسبة للمؤثر  $\hat{A}$ . تكرار الملاحظة  $\hat{A}$  على فئة من الأنظمة

(1) average value

$\psi(x)$  ينتج عنه توزيع إحصائي<sup>(1)</sup> للقيم المناسبة المختلفة. ومن هنا فإن  
الفرض الثالث يحدد القيمة المتوسطة لهذا التوزيع الإحصائي. لابد أن  
يكون المتوسط عبارة عن عدد ما ناتج من التأثير بالمؤثر  $\hat{A}$ . زيادة على  
ذلك يجب أن يتوافق هذا المتوسط مع الفرض الثاني. ففي الحالة الخاصة  
التي فيها

$$\psi(x) = u_n(x)$$

وباستخدام المعادلة (٢-٢)، نحصل على

$$\bar{a}_{u_n} = \frac{\int u_n^*(x) \hat{A}(x, \partial/\partial x) u_n(x) dx}{\int u_n^*(x) u_n(x) dx} \quad (٢-٣)$$

$$= \frac{\int u_n^*(x) a_n u_n(x) dx}{\int u_n^*(x) u_n(x) dx} = a_n \quad (٣-٣)$$

وهذا هو المطلوب، نظرا لأن تكرار الملاحظات سوف يعطى دائما نفس  
النتيجة  $a_n$ . التعبير المعطى في الفرض الثالث، المعادلة (١-٣)، يعد من  
أبسط التعبيرات التي تفي بمتطلبات التوافق بين الفرض الثاني والثالث.

### ٣-٣ الفروض الفيزيائية<sup>(2)</sup>

الفروض التفسيرية، المعطاة في البند السابق، تضع الأساس لآلية  
التمثيل الحسابي للملاحظات الكمية- أي الملاحظات التي يلزمها  
اضطراب لا يمكن تجنبه. أما الآن فنضع فرضين لكل منهما مضمون  
فيزيائي مباشر.

(1) statistical distribution (2) physical postulates



## (أ) مبدأ التناظر<sup>(1)</sup>

من الواضح وجود شرط يجب على ميكانيكا الكم أن تستوفيه. فعند الحد الذى يصبح فيه النظام الملاحظ كبيرا وتتلاشى قيمة الاضطراب الحادث، يجب أن تؤول ميكانيكا الكم إلى الميكانيكا الكلاسيكية. لضمان تحقق ذلك نضع الفرض الفيزيائى الأول:

ف(1): العلاقات الأساسية المحددة التى تربط المتغيرات الفيزيائية فى الميكانيكا الكلاسيكية، ولاحتوى على تفاضلات، تتحقق أيضا للمؤثرات الكمية المناظرة.

لهذا إذا كان  $\hat{p}, \hat{x}$  هما مؤثرى الموضع وكمية الحركة الخطية، حينئذ يكون مؤثر المركبة-z لكمية الحركة الزاوية<sup>(2)</sup>، مثلا، هو

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \quad (3-4)$$

ولجسيم بكتلة محددة m واقع تحت تأثير طاقة وضع كلاسيكية  $V(x)$  يكون مؤثر الطاقة<sup>(3)</sup> (المسمى بالهاميلتونى<sup>(4)</sup>)، المعبر عنه بدلالة مؤثرى المكان وكمية الحركة الخطية، هو مجموع الحدود المعبرة عن طاقتى الحركة والموضع،

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (3-5)$$

وعلى وجه الخصوص فإن الهاميلتونى لمهتز توافقى كمي<sup>(5)</sup> تردده الزاوى

(1) correspondence principle (2) z-component of angular momentum operator (3) energy operator (4) Hamiltonian (5) quantum harmonic oscillator

هو،  $\omega$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{x}^2 \quad (٦-٣)$$

(ب) مبدأ التتام<sup>(١)</sup>

نعود الآن إلى الاعتبارات العامة المطروحة في نهاية البند ٣-١ و نتداولها بطريقة أكثر دقة. إذا كان كل من  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  يمثلان عمليات معينة من الممكن ملاحظتها. فإن الغير متساوية (٢-١٤) تعنى، من الناحية الفيزيائية، وجود اضطراب متبادل بين عمليتي الملاحظة  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ . الغير متساوية (٢-١٤) يجب أن تستبدل بمتساوية لأنواع معينة من الملاحظات. فكرة الفوتون في نظرية الكم القديمة والمفاهيم المعطاة بالبند ٣-١، تقترح علينا وجود ارتباط مباشر بين الاضطرابات المتبادلة عند قياس كل من الموضع وكمية الحركة، وأن هذا يجب أن يكون له علاقة بالمقدار الثابت  $\hbar$ . لهذا فإننا نفترض أن

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \alpha \hbar \quad (٧-٣)$$

حيث  $\alpha$  مجرد عدد مطلوب تعيينه.

أبسط تمثيل للمؤثر  $\hat{x}$  هو وضعه في صورة متغير جبرى عادى (هذا ليس بالتمثيل الوحيد) وعليه نستبدل  $\hat{x}$  بالكمية  $x$

$$\hat{x} \rightarrow x \quad (١٨-٣)$$

من المعادلة (٢-١٧)، بالضرب في  $-\alpha \hbar$ ، نجد

$$\left[ x, -\alpha \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] = \alpha \hbar \quad (٩-٣)$$

(1) complementarity principle

وعليه فعند تمثيل  $\hat{x}$  بالمعادلة (٣-٨ أ) فإن المعادلة (٣-٧) تستوجب أن يكون

$$\hat{p} \rightarrow -\alpha \hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (٣-٨ ب)$$

وعندئذ تكون معادلة القدر المناسب (٣-٧) (مؤثر كمية الحركة  $\hat{p}$  ينتمي إليه القيمة المناسبة  $p$ ) فى الصورة

$$\hat{p} u_p(x) = \left( -\alpha \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) u_p(x) = p u_p(x) \quad (٣-١٠)$$

وعليه تصبح دوال القيم المناسبة على النحو

$$u_p = \exp \left[ -\frac{px}{\alpha \hbar} \right] \quad (٣-١١)$$

بوضع

$$\alpha = i \quad (٣-١٢)$$

نحصل على الجزء الفراغى<sup>(١)</sup> لمعادلة دى برولى (١-١٨)، حيث تظهر هذه المعادلة الآن تلقائيا كدالة حالة لجسيم يحمل كمية حركة محددة. تلك هى بالضبط نوع العلاقة الجوهرية المطلوبة التى تربط بين الجسيم والموجة.

عند هذا الحد نستطيع أن نُدخل الفرض الفيزيائى الثانى.

ف(٢):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \hbar \quad (٣-١٣)$$

وهذا يؤدى مباشرة (من المعادلتين (٣-٨ أ)، (٣-٨ ب)) إلى التمثيل الهام

(1) space part

لهذه المؤثرات كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{x} &\rightarrow x \\ \hat{p} &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (14-3)$$

وهو ما يطلق عليه اسم تمثيل شرودنجر<sup>(1)</sup>.

لوضع الفرض الثانى فى صورة أكثر عمومية فإننا نقول أن أى ملاحظة للموضع  $\hat{x}$  وكمية الحركة المناظرة  $\hat{p}$  يطلق عليها أنها متتامة، ويفترض فى المؤثرات المناظرة أن تحقق علاقة مبادلة شبيهة بالعلاقة (13-3).

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

3-4 معادلة شرودنجر ومستويات الطاقة المتقطعة<sup>(2)</sup>

باعتبار كل من مبدأ التتام، ف(2)، ومبدأ التناظر، ف(1)، والفرض التفسيري الأول، ت(1)، (الذى ينص على أن القيم الممكنة لأى عملية ملاحظة تعطى بواسطة معادلة القدر المناسب) فإننا نصل إلى المعادلة التى تحدد القيم الممكنة لطاقة أى نظام. باستخدام تمثيل شرودنجر، نكتب مؤثر الطاقة كالاتى:

$$H(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{H}\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (15-3)$$

وعليه تظهر معادلة القدر المناسب للطاقة على الصورة

(1) Schrodinger representation (2) Schrodinger equation and discrete energy levels

$$\hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u_E(x) = E u_E(x) \quad (16-3)$$

وتلك هي معادلة شرودنجر.

لجسيم يتحرك على امتداد المحور  $x$  تحت تأثير طاقة الوضع  $V(x)$ ،

تُختصر المعادلة (16-3) إلى (أنظر المعادلة (3-5)):

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) u_E(x) = E u_E(x) \quad (17-3)$$

التي تؤول، في الأبعاد الثلاثة، إلى الشكل

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) u_E(x, y, z) = E u_E(x, y, z) \quad (18-3)$$

يجب حل هذه المعادلة طبقاً لشرط الحدود- وهو أن الدالة  $u_E(x)$  محدودة

في الفراغ الكلي، وعلى وجه الخصوص محدودة عند ما لانهاية. سنتناول

شرط الحدود هذا بوضوح أكثر وكذلك معناه الفيزيائي في الجزء الذي يلي

المعادلة (3-38).

الحالة الخاصة، في المعادلة (3-18)، التي لها أهميتها هي تلك التي

تُحدّد فيها قيم الطاقات المتاحة في ذرة الهيدروجين. نعتبر أن البروتون

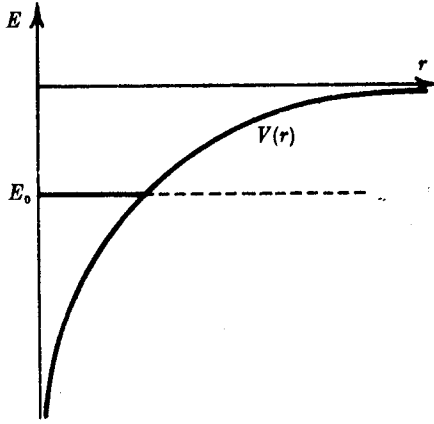
ثابت في مكانه، وباستخدام الإحداثيات القطبية الكروية<sup>(1)</sup> والتعويض عن  $V$

بطاقة الوضع الكولومية، تصبح المعادلة (3-18) في الصورة

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} \right) u_E(r, \vartheta, \varphi) = E u_E(r, \vartheta, \varphi) \quad (19-3)$$

(1) spherical polar coordinates

الاختبار الذي له أهمية قصوى لهذه النظرية يكمن في أن المعادلة (٣-١٩) يجب أن تؤدي إلى مستويات الطاقات المتقطعة الملاحظة عمليا في ذرة الهيدروجين. (هذه المسألة شبيهة بحركة الكواكب في الميكانيكا الكلاسيكية). برهان ذلك يحتاج إجراءات حسابية صعبة، وسوف نؤجلها إلى الباب السابع. أما الآن فسوف نعتبر فقط نمودجا مبسطا للمسألة.



شكل ١-٣ منحنى طاقة الوضع الكولومية. المواضع المتاحة فيزيائيا لحركة جسم كلاسيكي تقع فوق المنحنى  $V(r)$ ، حيث المواضع أسفل المنحنى تناظر طاقة حركة سالبة.

منحنى الطاقة لذرة الهيدروجين موضح بشكل ١-٣. إذا كانت طاقة الحركة هي  $T$  والطاقة الكلية  $E_0$ ، نجد

$$E_0 = T + V \quad (٢٠-٣)$$

ولكن، كلاسيكيا  $T \geq 0$  ، وعليه فإن الجسيم الذى طاقته  $E_0$  يتواجد فقط فى المناطق التى فيها قيم  $r$  تحقق شرط وقوع الخط المستقيم الذى معادلته  $E = E_0$  أعلى المنحنى  $E = V(r)$ . الخط المتقطع يناظر قيم سالبة لطاقة الحركة، أى المواضع الغير متاحة فيزيائيا.

عندما يكون  $E_0 > 0$  ممكن للإلكترون أن يصل إلى مالانهاية. أما إذا كان  $E_0 < 0$  يكون الإلكترون مقيدا فى حركته. للقيم الكبيرة السالبة للطاقة،  $E_0$ ، تصبح حركة الإلكترون مقيدة بمنطقة ضيقة ويتأثر الإلكترون بطاقة وضع سريعة التزايد.

لدراسة السمات الوصفية لمثل هذا النظام نحاول إيجاد قيم الطاقات الكمية لجسيم حركته محصورة فى بعد واحد داخل بئر جهد مربع لانهاية<sup>(1)</sup> مُعرّف بالمعادلة.

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad |x| \leq a \\ V(x) &= \infty, \quad |x| \geq a \end{aligned} \quad (21-3)$$

على ذلك فإن (كلاسيكيا تنحصر حركة الجسيم فى المنطقة  $|x| \leq a$  مهما كانت قيمة طاقته) الجسيم يصدم جدران بئر الجهد ويرتد فى الاتجاه العكسى، وهكذا، ...

معادلة شرودنجر لهذا النظام هى المعادلة (3-17) مع التعويض عن  $V$  من المعادلة (3-21).

فى المنطقة  $|x| \leq a$ ، نحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x) = E_n u_n(x) \quad (22-3)$$

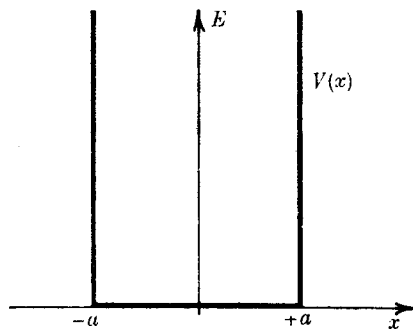
(1) infinite square well

أما في المنطقة  $|x| \geq a$  تؤول  $V$  إلى مالانهاية، أى تكون  $V$  عبارة عن كمية غير محددة، ولكن يبقى بمعادلة شرودنجر كميات أخرى محددة. عند هذه المرحلة نُدخل شرط الحدود الآتى:

$$u_n(x) = 0, \quad |x| \geq a \quad (23-3)$$

بوضع

$$k_n^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (24-3)$$



شكل ٢-٣ منحنى الطاقة لبئر جهد مربع لانهاى فى بعد واحد. الجسم حركته محصورة فى المنطقة  $|x| \leq a$ .

تصبح المعادلة (٢٢-٣) على النحو

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_n^2 \right) u_n(x) = 0 \quad (25-3)$$

وحلولها التى تحقق شرط الحدود عند  $x = a$  هى:

الحل



$$u_{2n}(x) = A \sin k_{2n} x \quad (26-3)$$

حيث

$$a k_{2n} = 2n(\pi/2) , \quad n = 1, 2, \dots \quad (27-3)$$

والحل

$$u_{2n+1}(x) = B \cos k_{2n+1} x \quad (28-3)$$

حيث

$$a k_{2n+1} = (2n+1)(\pi/2) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29-3)$$

من المعادلتين (27-3)، (29-3)، بالاستنباط الرياضى، نجد

$$k_n = \frac{\pi}{2a} n , \quad n = 1, 2, \dots$$

وباستخدام المعادلة (3-24)، نجد أن مستويات الطاقة المتاحة هي

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi^2}{4a^2} \right) n^2 \quad (30-3)$$

هذه المعادلة تعنى أن السمات الأساسية لأطياف الطاقات المنقطعة قد ظهرت بصورة تلقائية فى هذه الصياغة. يجب علينا مقارنة النتيجة الحاصلين عليها مع معادلة بوهر المحددة لمستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين، وهى

$$E_n^{(H)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a_0^2} \frac{1}{n^2} \quad (31-3)$$

مع بدائية النموذج المستخدم للحصول على المعادلة (3-30) فإن التشابه بين المعادلتين يدعو للدهشة. فعدم الاتفاق فى المعامل  $\pi$  نشأ من تقريب المسألة إلى بعد واحد بدلا من الثلاث أبعاد. أما الاختلاف فى الإشارة فقد نتج من حقيقة أننا فى حالة الهيدروجين نقيس المستويات من قمة بئر الجهد إلى أسفل، أما لبئر الجهد المربع فإننا نقيس من القاع إلى القمة.

بهذا نكون قد أعدنا صياغة نظرية الأنظمة الذرية، التي بنيت فيزيائيا على أساس فكرة بلانك عن الفوتونات ومضمون الحد الأدنى للاضطرابات المصاحبة لعمليات الملاحظة. ظهر أيضا على السطح موجات دي برولى بوصفها دوال مناسبة للجسيمات المتحركة بكمية حركة محددة. فى صياغتنا هذه لم نتوصل بشكل صريح إلى مستويات بوهر لذرة الهيدروجين، إلا أنه بالتطبيق المباشر للنظرية الجديدة محتسبين النموذج البدائى (بئر الجهد المربع اللانهائى) أظهرنا السمات الرئيسية التى تصف أطيف ذرة الهيدروجين، وكان أهم مافى الأمر بالطبع هو الصورة المتقطعة للطيف.

### ٣-٥ دوال الحالة وتكامل التطابق<sup>(١)</sup> $\psi(x)$

نعود الآن إلى دوال الحالة ومعناها الفيزيائى. أول مانلاحظه هو أن الخواص الفيزيائية المذكورة حتى الآن (الفروض التفسيرية ت(١)، ت(٢)، ت(٣)) لاتتغير من جراء ضرب دالة الحالة المعطاة فى أى مقدار ثابت. لتحديد اختيار هذا الثابت وجد أنه من الأنسب إدخال شرط التسوية<sup>(٢)</sup>

$$\int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \quad (٣-٣٢)$$

حيث يجرى التكامل على كل القيم المتاحة للمتغير  $x$ . لذلك إذا كانت دالة الحالة لجسيم، كمية حركته  $p$ ، هى موجة دي برولى

$$u_p(x) = Ce^{ipx/\hbar}$$

(1) overlap integral (2) normalization condition

وكانت حركة الجسيم محصورة في المنطقة

$$0 \leq x \leq L$$

فإن شرط التسوية يصبح

$$\int_0^L |C e^{ipx/\hbar}|^2 dx = 1$$

ومنه

$$|C|^2 = L^{-1}$$

وتبدو دالة الحالة المسواة<sup>(1)</sup> في الشكل

$$u_p(x) = \frac{1}{L^{1/2}} e^{ipx/\hbar} \quad (33-3)$$

لدوال الحالة المسواة يؤول التعبير (3-1)، الذي يحدد القيمة المتوسطة

لتكرار الملاحظات  $\hat{A}$ ، إلى الصورة المبسطة

$$\bar{a}_\psi = \int \psi^*(x) \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) dx \quad (34-3)$$

ومنه فإن القيمة المتوسطة لكمية الحركة الملاحظة، مثلا، تساوى

$$\bar{p}_\psi = \int \psi^*(x) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx \quad (35-3)$$

بتطبيق المعادلة (3-34) على الحالة الخاصة التي فيها

$$\hat{A} = \hat{x} \quad (36-3)$$

نحصل على القيمة المتوسطة للموضع، وهي

$$\hat{x} = \int dx x |\psi(x)|^2 \quad (37-3)$$

---

(1) normalized state function

نظرا لأن الكمية  $|\psi(x)|^2$  تمثل معامل وزن<sup>(1)</sup> (إحصائي) ملائم للموضع  $x$  عند حساب المتوسط فهذا يعنى أنه عند إجراء القياس مره واحدة فقط لموضع جسيم فى الحالة  $\psi(x)$  فإن احتمال أن تكون نتيجة عملية القياس هى القيمة  $x$  نفسها يساوى

$$P_{\psi}(x) = |\psi(x)|^2 \quad (3-38)$$

وعليه فإن التفسير الفيزيائى المباشر لدالة الحالة هو أن مربع قيمتها المطلقة يعطى الكثافة الاحتمالية<sup>(2)</sup> للجسيم فى الفراغ. شرط التسوية يؤكد أن الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فى الفراغ الكلى لابد أن يساوى الواحد الصحيح، وأن النظرة الأكثر عمومية لشرط الحدود الموضوع على أى دالة حالة هو لضمان تحقق تسوية هذه الدالة.

يجب ملاحظة أن الاحتمال النسبى<sup>(3)</sup> لتواجد جسيم عند موضعين مختلفين لايعتمد على ثابت التسوية، حيث يختصر هذا الثابت عند أخذ النسبة. فى كثير من الأوضاع الفيزيائية، كدراسة مبدأ عدم التحديد، مثلا، الذى سيأتى ذكره فى البند التالى، تكون الاحتمالات النسبية هى التى لها أهميتها فقط ولذلك لاتستدعى الضرورة وضع ثابت تسوية الدالة الموجية.

السؤال الذى يطرح نفسه الآن هو: بمعلومية دالة الحالة العامة  $\psi(x)$ ، ما هو احتمال أن يتمخض عن عملية الملاحظة  $\hat{A}(x, \partial/\partial x)$  النتيجة  $a_n$  فى حقيقة الأمر هذا السؤال نستطيع إجابته من الفروض التى وضعناها من قبل، وهذا ما قمنا به بالفعل فى الباب الثانى عشر. سنكتفى هنا بذكر النتيجة فقط وجعلها مقبولة فيزيائيا.

(1) weighting factor (2) probability density (3) relative probability

لو حدث أن كانت دالة الحالة  $\psi(x)$  هي دالة الحالة المناسبة المنتمية للقيمة المناسبة  $a_n$ ، أى أن

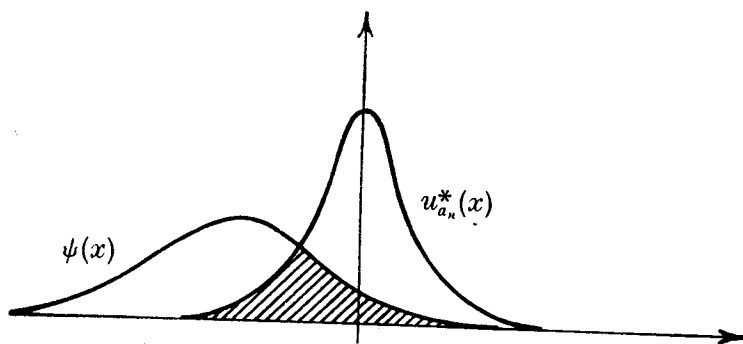
$$\psi(x) = u_{a_n}(x)$$

فإن الاحتمال، حينئذ، يساوى الوحدة. بوجه عام يجب أن يكون لقيمة الاحتمال علاقة بمدى التشابه بين دالة الحالة العامة  $\psi(x)$  ودالة القيمة المناسبة  $u_{a_n}(x)$ . نعبر عن هذا التشابه رياضيا بالتكامل

$$\int dx u_{a_n}^*(x) \psi(x)$$

وهذا هو تكامل التطابق. تمثل قيمة هذا التكامل بعدد، وهذا العدد يساوى الواحد الصحيح فى الحالة الخاصة السابقة. تقترب قيمة العدد من الوحدة عندما تكون الدالتان  $\psi(x), u_{a_n}(x)$  متشابهتين تقريبا (تطابق كبير). يصبح هذا العدد صغيرا جدا فى حالة ما يكون التطابق بين الدالتين صغيرا جدا هو الآخر (انظر شكل ٣-٣).

يجب أن يكون الاحتمال الذى نبحث عنه حقيقيا، وهذا يتحقق بأخذ مربع



شكل ٣-٣ تكامل تطابق الدالتان  $\psi(x), u_{a_n}(x)$  يأتى من المنطقة المظلمة التى فيها كلا المعاملين لايساوى الصفر.

القيمة المطلقة لتكامل التطابق. إذا الاحتمال المطلوب هو

$$P_{\psi}(a_n) = \left| \int dx u_{a_n}^*(x) \psi(x) \right|^2 \quad (3-39)$$

تحتوى دالة الحالة  $\psi(x)$  على كل المعلومات الممكن معرفتها عن النظام تحت الدراسة بالتوافق مع الاضطرابات المتبادلة نتيجة لعمليات الملاحظة. نظرا للتأثير العشوائى لهذه الاضطرابات فإن بعض هذه المعلومات تُقَيَّم بطرق إحصائية. فى حالة عدم إجراء أى قياسات (ملاحظات) على الأنظمة فلا يحدث لها أى اضطراب عشوائى، وبالتالي تنمو الأنظمة مع مرور الزمن طبقا لمعادلات حركة تفاضلية، وسوف نتعرض لمثل هذه الأحوال فى الباب الثالث عشر.

من المعتاد حصر تفكيرنا فى دوال الحالة على أنها واصفة للأنظمة الفيزيائية الفعلية. وفى بعض الأحيان من المهم تذكر أن هذه الدوال تصف بالتحديد حالة مثالية من المعلومات عن النظام تحت الدراسة. لذلك إذا قمنا، مثلا، بقياس طاقة نظام فى الحالة  $\psi(x)$  فإن ناتج عملية القياس يجب أن تكون إحدى القيم المناسبة  $E_n$ . ينتج عن عملية القياس تغيرا فجائيا فى الحالة التى تحدد معلوماتنا عن النظام، ومع ذلك يوصف النظام، بطريقة مثالية، بواسطة دالة الحالة المناسبة  $u_{E_n}(x)$  المناظرة للقيمة المناسبة  $E_n$ .

### ٦-٣ مبدأ عدم التحديد<sup>(1)</sup>

آخر النقاط التى سنتناولها فى هذا الباب الأساسى هو الوضع القائم فى نهاية البند ٣-٣ ، ألا وهو علاقة المبادلة (٣-١٣) . حيث عدم مساواة

(1) uncertainty principle

$[\hat{x}, \hat{p}]$  بالصفر يؤكد وجود الاضطرابات المتبادلة بين هذين النوعين من الملاحظات.

لتوضيح ذلك، نعتبر دالة الحالة

$$\psi(x) = \exp[-x^2/2\Delta_x^2] \quad (٤٠-٣)$$

(هذه الدالة ليست مسواة وعملية التسوية لن تؤثر على النتائج المطلوبة، كما ذكرنا سابقا.)

من المعادلة (٣٨-٣)، دالة الكثافة الاحتمالية النسبية تساوى

$$P_\psi(x) = |\psi(x)|^2 = \exp[-x^2/\Delta_x^2] \quad (٤١-٣)$$

وهي تمثل تحذب جاوسى<sup>(١)</sup> نصف عرضه يساوى  $\Delta_x$ ، انظر شكل ٤-٣.

لهذا فإن  $\psi(x)$  تعبر عن جسيم غالبا مايتواجد بالتحديد داخل مسافة  $\Delta_x$  مقاسة من نقطة الأصل.

عند القيام بعملية قياس كمية الحركة فإن احتمال الحصول على النتيجة

$p$  يعطى بدلالة تكامل التطابق (٣٩-٣). نرمز لهذا التكامل بالرمز  $\phi(p)$ ،

إذا

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_p^*(x) \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (٤٢-٣)$$

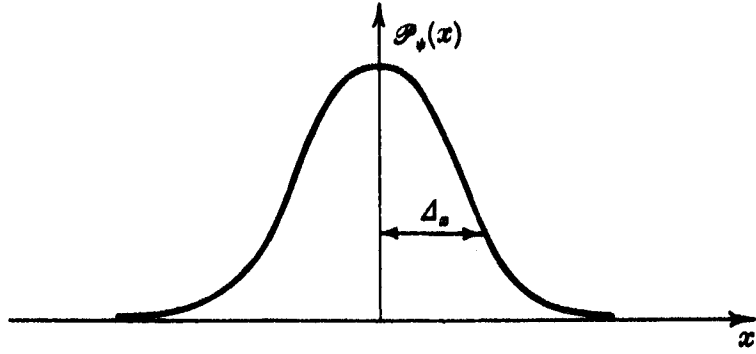
وا احتمال أن تساوى كمية الحركة المقدار  $p$ ، هو

$$P_\psi(p) = |\phi(p)|^2 \quad (٤٣-٣)$$

نظرا للتشابه بين المعادلتين (٤٣-٣)، (٣٨-٣) فإننا نسمى  $\phi(p)$  بدالة

(1) Gaussian hump

الحالة في فراغ كمية الحركة<sup>(1)</sup>. بالتعويض عن  $\psi(x)$  من المعادلة (٤٠-٣) في المعادلة (٤٢-٣) نحصل على



شكل ٤-٣ التوزيع الاحتمالي المناظر لدالة الحالة (٤٠-٣). غالبا مايتواجد الجسيم بالتحديد داخل مسافة  $\Delta_x$  مقاسة من نقطة الأصل.

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{ipx}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right] dx \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta_x} + \frac{ip\Delta_x}{\hbar}\right)^2\right] dx \right\} \exp\left[-\frac{p^2\Delta_x^2}{2\hbar^2}\right] \end{aligned}$$

بوضع

$$y = \frac{x}{\Delta_x} + \frac{ip\Delta_x}{\hbar} \quad (٤٤-٣)$$

فإن التكامل يصبح

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

(1) momentum space



من المعلوم أن هذا التكامل يؤول إلى مقدار ثابت. من الأنسب احتواء هذا المقدار الثابت (ناتج إجراء التكامل) أثناء عملية تسوية الدالة الموجية، أى احتوائه داخل ثابت التسوية، ونكتب  $\phi(p)$  كما يلي:

$$\phi(p) = \exp[-p^2 \Delta_x^2 / 2\hbar^2] \quad (٤٥-٣)$$

عند تعريف  $\Delta_p$  بالعلاقة

$$\Delta_x \Delta_p = \hbar \quad (٤٦-٣)$$

تؤول  $\phi(p)$  إلى

$$\phi(p) = \exp[-p^2 / 2\Delta_p^2] \quad (٤٧-٣)$$

هذه الدالة توضح (بالتشابه الدقيق مع  $\psi(x)$ ) أن الجسيم غالباً ما يحمل بالتحديد كمية حركة تختلف عن الصفر بما لايزيد عن المقدار  $\Delta_p$ .

العلاقة (٤٦-٣) التى تربط بين عدم التحديد فى قياس الموضع،  $\Delta_x$ ، وعدم التحديد فى قياس كمية الحركة  $\Delta_p$ ، تعد نتيجة مباشرة لعلاقة المبادلة (المعادلة (٣-١٣)) بين  $\hat{p}$ ،  $\hat{x}$ . وضع التساوى بالمعادلة (٤٦-٣) يرتبط بالشكل الجاوسى المختار لدالة الحالة، وذلك لتسهيل الحسابات. الصورة العامة (التي تطبق على أى دالة حالة) التى نعين منها موضع الجسيم فى الحدود  $\Delta_x$  وكمية حركته فى الحدود  $\Delta_p$  هى

$$\Delta_x \Delta_p \geq \hbar \quad (٤٨-٣)$$

هذه العلاقة تعرف بمبدأ عدم التحديد. وهى تعبر بدقة أكبر عن الاضطرابات بين المتغيرات المتتامة. لقيم صغيرة للكمية  $\Delta_x$  تصبح الدقة فى قياس الموضع كبيرة، وفى نفس الوقت يكبر الاضطراب الحادث فى كمية الحركة  $p$  وهذا بدوره يؤدي إلى كبر مدى عدم التحديد  $\Delta_p$ . أما النهاية الصغرى لحاصل ضرب الكميتين  $\Delta_x$ ،  $\Delta_p$  فإنها تحدد بثابت بلانك.

مر علينا من قبل أحد الحالات القصوى لهذا المبدأ التي سوف نذكرها الآن بشيء من التفصيل. المعادلة (٣-٣٣) تعين دالة الحالة (موجة دي برولى) لجسيم كمية حركته  $p$ . هذه الدالة مسواة بالطريقة التي تجعل الجسيم متواجد على امتداد طول (كبير)  $L$ . هذا يعنى أن  $p$  تكون معروفة بالضبط، وبطريقة أخرى نقول أن

$$\Delta_p = 0 \quad (٤٩-٣)$$

الكثافة الاحتمالية للموضع تساوى

$$P_{u_p}(x) = |u_p(x)|^2 = \frac{1}{L} \quad (٥٠-٣)$$

نظرا لأن الاحتمال لايعتمد على قيمة  $x$  فهذا يدل على تساوى احتمالات تواجد الجسيم عند شتى المواضع. وعندما تؤول  $L$  إلى مالانهاية، نجد أن

$$\Delta_x \rightarrow \infty \quad (٥١-٣)$$

متفقا مع مبدأ عدم التحديد.

من المعتاد توجيه قدر كبير من الأهمية نحو مبدأ عدم التحديد، إلا أن هذا المبدأ يعد من البنود السلبية نظرا لأنه يعبر عن القيود المفروضة على مدى معرفتنا للمعلومات عن نظام معين. ذلك بالطبع بسبب الاضطرابات المتبادلة الناشئة عن عمليات الملاحظة. بوجه عام، إذا كان هناك نوعان من الملاحظات  $\hat{A}, \hat{B}$ ، وكان

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \quad (٥٢-٣)$$

فإن الاضطرابات المتبادلة تمنعنا من الحصول على معلومات دقيقة للملاحظتين في آن واحد. أما إذا كان

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (٥٣-٣)$$

فهذا يعنى عدم وجود اضطرابات متبادلة بين الملاحظتين، وأنه يمكن الحصول على نتائج دقيقة للملاحظتين فى آن واحد.

مثلا، نفرض أننا نريد معرفة كمية الحركة والطاقة لجسيم حر حينئذ يكون

$$\hat{A} = \hat{p} \rightarrow -i\hbar \partial / \partial x \quad (٥٤-٣)$$

$$\hat{B} = \hat{H} \rightarrow \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \partial^2 / \partial x^2 \quad (٥٥-٣)$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} [\hat{p}, \hat{H}] &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{i\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (٥٦-٣)$$

هذه المعادلة عبارة عن معادلة مؤثر، وكما نرى نجد فيها أن المؤثر التفاضلى داخل القوسين يعطى قيمة مساوية للصفر عند التأثير به على أى دالة حالة  $\psi(x)$ . وعليه يمكن معرفة قيم دقيقة عن الطاقة وكمية الحركة لجسيم حر فى آن واحد. لتوضيح ذلك، رياضيا، معلوم لدينا أن دالة الحالة

المناسبة لأى كمية حركة معطاة  $p$  هى موجة دى برولى

$$u_p = e^{ipx/\hbar} \quad (٥٧-٣)$$

إذا

$$\hat{H} u_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ipx/\hbar} = \frac{p^2}{2m} u_p \quad (٥٨-٣)$$

$$= E u_p$$

معنى ذلك أن  $u_p$  هى أيضا دالة قيمة مناسبة للطاقة، وينتمى إليها القيمة

المناسبة  $E$

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (3-59)$$

يجب ملاحظة أنه لا يمكن معرفة كل من الطاقة وكمية الحركة، في آن واحد، لجسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع  $V(x)$ . لهذا الوضع يكون

$$[\hat{H}, \hat{p}] \neq 0$$

نظرا لأن

$$[V(\hat{x}), \hat{p}] \neq 0$$

ولذلك إذا علمنا قيمة الطاقة بالضبط، لتلك الحالة، فلا يمكن تحديد قيمة كمية الحركة، ولكن نعين فقط القيمة المتوسطة لها باستخدام الفرض التفسيري ت(3). العكس أيضا صحيح، بمعنى أنه إذا علمنا كمية الحركة بالضبط فإننا نستطيع فقط معرفة القيمة المتوسطة للطاقة.

عندما يكون النظام كبيرا لدرجة تمكنا من إهمال  $\hbar$  تصبح كل المؤثرات متبادلة مع بعضها البعض. وعندها نستطيع إجراء كل القياسات دون حدوث اضطرابات متبادلة. ومن ثم تمثل كل المؤثرات بمتغيرات جبرية عادية. في تلك الحال يضمن لنا مبدأ التناظر أن العلاقات المحددة بين هذه المتغيرات، كالعلاقة بين الطاقة وكمية الحركة، ...، إلخ، تؤول إلى نفس العلاقات الميكانيكية الكلاسيكية. (سنرى في الباب الثالث عشر أن هذا هو الحال أيضا بين العلاقات التي تحتوى على تفاضلات بالنسبة للزمن.)

الفكرة الأخيرة التي نود تأكيدها في نهاية هذا الباب هي أنه في كل المناقشات السابقة كان التمييز بين الأنظمة الصغيرة والأنظمة الكبيرة (الأنظمة الكمية والأنظمة الكلاسيكية) لا يتم على أساس الامتداد الفراغى

فقط، ولكن أيضا يتم على أساس وحدات  $\hbar$ . الكمية  $\hbar$  لها وحدات الفعل<sup>(1)</sup>  
(ML<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>) ، أى أن  $\hbar$  تكافىء

$$(\text{طول}) \times (\text{كمية حركة خطية})$$

أو

$$(\text{زمن}) \times (\text{طاقة})$$

وأنه بدلالة الفعل النموذجي<sup>(2)</sup> نتعرف على النظام صغيرا كان أم كبيرا.  
على سبيل المثال، لإلكترون داخل ذرة ما يكون الفعل النموذجي هو حاصل  
ضرب نصف قطر بوهر ويساوى  $\sim 10^{-8}$  cm فى كمية الحركة الخطية  
للإلكترون بهذا المدار (=  $10^{-19}$  cgs) (انظر المسألة ١-٢). فى هذا  
الوضع حاصل الضرب يتقارب من مقدار  $\hbar$  وعليه يكون تطبيق ميكانيكا  
الكم ضروريا فى دراسة هذه المسألة.

من الناحية الأخرى، نرى أن كثيرا من المواضيع فى علم الإلكترونيات  
تكون المسافات فيها فى حدود المقدار  $10^{-2}$  cm والجهود حوالى عدة  
عشرات فولت، أى أن كميات الحركة فى الحدود  $10^{-21}$  cgs  $\approx 10$  eV/c،  
وبالتالى تتقارب قيمة الفعل من المقدار  $10^{-23}$  cgs. هذا يعنى إمكانية دراسة  
هذه المسائل كلاسيكيا دون افتقاد الدقة المطلوبة. يوجد فى علم  
الإلكترونيات بعض الحالات الشاذة التى فيها لا يمكن إهمال قيمة  $\hbar$ ، وعليه  
يكون للتأثيرات الكمية أهمية كبيرة فى تقييم الظواهر. تعد ظاهرة ثنائى  
النفق<sup>(3)</sup> خير مثال على ذلك، حيث تخترق الإلكترونات حواجز جهد أكبر  
من قيمة الطاقة الحاملة لها ولاستطيع تفسير ذلك إلا بطريقة كمية بحتة.  
سوف نتعرض لهذه الفكرة فى نهاية البند ٤-١، بالبواب الرابع.

(1) action (2) typical action (3) tunnel diode

بهذا نكون قد أكمنا تأسيس النظرية الميكانيكية الكمية. ماسبق من بنود يحتوى على عدد كبير من التصورات الجديدة التى تبدو لأول وهلة محيرة. الطريقة الوحيدة للتغلب على هذه الحيرة هى مداومة استخدامنا لهذه الصياغة الجديدة حتى نصل إلى الألفة معها.

كما ذكرنا فى بداية هذا الباب، فإننا قدمنا نظرية لنوع جديد تماما من المعلومات. الفرض الذى نفهمه ضمنا فى الفيزياء الكلاسيكية (وهو ملاحظة الأشياء دون إحداث اضطراب لها) يعد من المفاهيم السائدة فى حياتنا اليومية، وعلى وجه الخصوص فى حالة المعلومات التى ندركها بالعين المجردة. فعقولنا تعودت على التعامل مع المعلومات المتجمعة بهذه الطريقة. تعتبر القفزة الفكرية المطلوبة لتدريب أنفسنا على التعامل مع هذا النوع الجديد من المعلومات الكمية هى الصعوبة الرئيسية للوصول إلى فهم مبدئى لميكانيكا الكم.

فيما يلى نضع باختصار الخطوات فى هذا الاتجاه:

- ١- فكرة الفوتون تؤدي إلى اضطرابات، لايمكن تجنبها، تصاحب عمليات الملاحظة. الأنظمة الكمية هى التى تتأثر بعملية الملاحظة.
- ٢- يجب أن تظهر بوضوح عمليات الملاحظة فى النظرية. الملاحظات الكلاسيكية مثل ملاحظة الطاقة،  $H$ ، وكمية الحركة،  $p$ ، والموضع،  $x$ ، تستبدل بالمؤثرات الكمية  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{H}$ . تتشابه العلاقات المحددة بين هذه المتغيرات فى الميكانيكا الكلاسيكية والكمية (مبدأ التناظر، ف(١)).

٣- القيم الممكنة لملاحظة  $\hat{A}$  هي القيم المناسبة  $a$  التي تعطى من

معادلة القيمة المناسبة

$$\hat{A} u_a(x) = a u_a(x)$$

التي تعنى أن عملية القياس على نظام فى الحالة المناسبة  $u_a(x)$  تؤدي بالتحديد إلى النتيجة  $a$  (ت(١)، ت(٢)). تُحل معادلة القدر المناسب مرتبطة بشرط الحدود. شرط الحدود يعنى أن دالة الحالة يمكن تسويتها على النحو

$$\int |u(x)|^2 dx = 1$$

٤- القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظات  $\hat{A}$  على نظام فى حالة

اختيارية  $\psi(x)$  (الدالة مساواة) هي، (ت(٣):

$$\bar{a}_\psi = \int \psi^*(x) \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) dx$$

عند تطبيق ذلك على عملية قياس الموضع يؤدي إلى أن احتمال أن يكون الجسيم عند الموضع  $x$  يساوى

$$P_\psi(x) = |\psi(x)|^2$$

عملية التسوية تضمن أن الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فى منطقة معينة يساوى الوحدة.

٥- احتمال أن يكون نتيجة الملاحظة  $\hat{A}$  على نظام فى الحالة  $\psi(x)$

هي القيمة  $a$  يساوى

$$P_\psi(a) = \left| \int u_a^*(x) \psi(x) dx \right|^2$$

والتكامل بالداخل يطلق عليه اسم تكامل التطابق.

٦- يقاس الاضطراب المتبادل بين ملاحظات المتغيرات المتتامة

بثابت بلانك،  $\hbar$ ، ويعبر عن ذلك بالعلاقة (ف(٢):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

هذا يؤدي مباشرة إلى تمثيل شرودنجر لتلك المؤثرات على النحو:

$$\hat{x} \rightarrow x$$

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن الحالة المناسبة الواصفة لجسيم يحمل كمية حركة محددة،  $p$ ، هي موجة دي برولي،

$$u_p(x) = e^{ipx/\hbar}$$

٧- باستبدال كل من  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  بتمثيل شرودنجر لها والتعويض في معادلة

القيمة المناسبة للطاقة،  $H(\hat{x}, \hat{p})$ ، نحصل على معادلة شرودنجر لمستويات الطاقات الممكنة لنظام معين،

$$\hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u_E(x) = E u_E(x)$$

بتطبيق ذلك على ذرة الهيدروجين يتولد بنجاح مستويات بوهر للطاقة.

٨- علاقة المبادلة بين مؤثرين،  $[\hat{x}, \hat{p}]$ ، في الفقرة السادسة تؤدي إلى

علاقة عدم التحديد بين الموضع وكمية الحركة، وهي

$$\Delta_x \Delta_p \geq \hbar$$

### مسائل ٣

٣-١ يتحرك جسيم داخل بئر جهد مربع لانهاى تحت تأثير طاقة الوضع

المعطاة بالمعادلة (٣-٢١). وعدم التحديد في قياس موضعه يساوى

$$\Delta_x = 2a$$



يجب أن تكون قيمة كمية الحركة مساوية على الأقل لعدم التحديد في قياسها. وضح أن تقدير طاقة الحالة الأرضية، على أساس مبدأ عدم التحديد، يعطى بالمعادلة

$$E_1 \approx \frac{\hbar^2}{8 m a^2}$$

قارن هذه النتيجة بالقيمة المضبوطة الحاصلين عليها من معادلة القدر المناسب.

٣-٢ باستخدام تمثيل شرودنجر للمؤثرات (٣-١٤)، وضح أن

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial V(\hat{x})}{\partial \hat{x}}$$

( هذا بمثابة تعميم مباشر للفكرة التي أدت إلى المعادلة (٢-١٧) )

٣-٣ معلومية

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 a} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

إستنتج المعادلة (٣-٤٥) من المعادلة (٣-٤٠)، مع الوضع في الاعتبار لثوابت التسوية.

٣-٤ تعطى دالة الحالة (الغير مساواة) لجسيم يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم بالمعادلة

$$\psi(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2} + i\frac{px}{\hbar}\right]$$

وضح أن القيمة المتوسطة لقياس كمية الحركة تساوى  $p$ ، وأن عدم التحديد في قياس موضع الجسيم يقع في حدود المقدار  $\Delta$ . باعتبار دالة الحالة في

فراغ كمية الحركة، وضح أن قيمة كمية الحركة لا تختلف عن المقدار  $p$  بأكثر من القدر  $\hbar / \Delta$ .

٣-٥ يتحرك جسيم داخل بئر جهد مربع لانتهائي تحت تأثير طاقة الوضع المعطاة بالمعادلة (٣-٢١). إذا كانت حالة الجسيم تعطى بالدوال

$$\psi(x) = x, \quad |x| \leq a$$

$$\psi(x) = 0, \quad |x| > a$$

أوجد الاحتمال النسبي لكون قياس الطاقة يعطى النتيجة  $E_2, E_4$ .

٣-٦ جسيم كمى يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم، ودالة حالته هي

$$\psi(x) = (1/2a)^{1/2}, \quad |x| \leq a$$

$$\psi(x) = 0, \quad |x| > a$$

أوجد احتمال (عملية التسوية اختيارية) أن يتواجد الجسيم حاملا كمية حركة مقدارها  $p$ . إرسم رسما تقريبا للتوزيع الاحتمالي لكمية الحركة ثم ناقش هذا بالربط بين التوزيع الفراغى المناظر ومبدأ عدم التحديد.

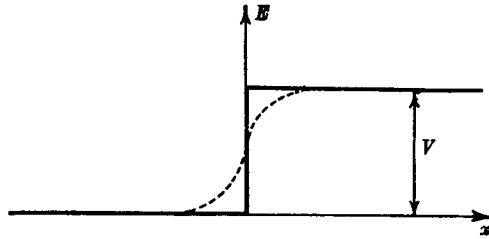
وضح أن الاحتمال النسبي لتواجد الجسيم حاملا كميتى حركة مساوية  $\pi \hbar / 2a$ ، صفر يساوى  $4/\pi^2$ .

## الباب الرابع

### الحركة فى بعد واحد<sup>(1)</sup>

#### ١-٤ خطوة الجهد<sup>(2)</sup>

قبل دراسة النظرية الكمية للمهتز التوافقى<sup>(3)</sup> ولذرة الهيدروجين يجدر بنا البدء بالمقارنة بين الاقتراحات الكلاسيكية والكمية لنماذج بسيطة فى بعد واحد.



شكل ١-٤ منحنى الطاقة لخطوة الجهد. المنحنى المتقطع يمثل الوضع الحقيقى. الخط المتصل يمثل الوضع المثالى بغرض تسهيل الحسابات.

من أبسط الأنظمة حركة جسيم تحت تأثير طاقة الوضع الممثلة بالخط المتقطع، شكل ١-٤. نظرا لأن القوة  $F(x)$  تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (1-4)$$

فإن الجسيم سوف يتحرك بحرية فى كل مكان ، ماعدا بالقرب من نقطة

(1) one dimensional motion (2) potential step (3) harmonic oscillator

الأصل حيث في هذه المنطقة يتعرض لقوة تتجه ناحية اليسار. على فرض أن الطاقة الكلية للجسيم هي  $E_0$  وطاقة حركته  $T$ ، فإننا نجد

$$E_0 = T(x) + V(x) \quad (٢-٤)$$

من الأنسب البدء بدراسة الحالتين الآتيتين من الواجهة الكلاسيكية:

$$(أ) \quad E_0 > V \quad (\text{كلاسيكيا})$$

الجسيمات القادمة من جهة اليسار تقترب من حاجز الجهد حاملة طاقة

حركة  $T_0$  وكمية حركة  $p_0$  مرتبطة بالعلاقة

$$T_0 = E_0 = \frac{p_0^2}{2m}$$

أثناء تخطي الجسيمات لحاجز الجهد تعمل القوة  $F(x)$  على إبطاء حركتها، وبالتالي يتحول جزء من طاقة حركة الجسيمات إلى طاقة وضع. وحيث أن

الطاقة الكلية للجسيمات أكبر من حاجز الجهد فإن جزءاً من هذه الطاقة، مساوٍ لحاجز الجهد، يستنفذ في التغلب على القوة العكسية الناشئة من حاجز

الجهد وتخرج الجسيمات حاملة طاقة حركة  $T_1$  تعطى بالمقدار

$$T_1 = \frac{p_1^2}{2m} = E_0 - V \quad (٣-٤)$$

وهذا يعنى النفاذ الكلى للجسيمات.

$$(ب) \quad E_0 < V \quad (\text{كلاسيكيا})$$

في هذا الوضع تستنفذ كل طاقة الجسيمات القادمة من جهة اليسار

بداخل حاجز الجهد وتتوقف عند النقطة  $x'$ ، مثلاً، حيث

$$V(x') = E_0 \quad ; \quad [T(x') = 0] \quad (٤-٤)$$

عند هذه النقطة تعكس الجسيمات اتجاه حركتها تحت تأثير القوى العكسية،  
وعليه يحدث انعكاس تام للجسيمات.

يجب ملاحظة أن السمات الوصفية للحركة الكلاسيكية لا تتغير  
باستبدال حاجز الجهد الممثل بالخط المتقطع بخطوة الجهد المفاجئة الممثلة  
بالخط المتصل، شكل ٤-١. تعد هذه المسألة من أبسط الأنظمة التي

نتداولها من وجهة النظر الكمية

تعيين الحركة الميكانيكية الكمية بمعادلة القدر المناسب

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) u_E = E_0 u_E \quad (٥-٤)$$

حيث

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad x < 0, \\ V(x) &= V, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (٦-٤)$$

باستخدام تمثيل شرودنجر تبدو المعادلة (٥-٤) على النحو

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) u_E(x) = E_0 u_E(x) \quad (٧-٤)$$

شرط الحدود العام ينص على أن  $u(x)$  دالة محدودة في الفراغ الكلي. لا بد

أن نأخذ بعين الاعتبار أيضا عدم الاتصال<sup>(1)</sup> عند النقطة  $x = 0$ .

نظرا لأن التغير المفاجيء في  $V(x)$  تغيرا محدودا والدالة  $u(0)$  محدودة،

فمن المعادلة (٧-٤) تكون قيمة المشتقة الثانية للدالة  $u(x)$  عند  $x = 0$

$[u''(0)]$  محدودة هي الأخرى. هذا يعنى أن الدالة  $u(x)$  والمشتقة الأولى لها

$u'(x)$  متصلتان عند  $x = 0$ . بهذا نكون في وضع يسمح لنا بالتمييز بين

الحالتين تحت الدراسة.

(1) discontinuity

الحالة (أ)  $E_0 > V$  (كمياً)

باستخدام التعويض

$$k_0^2 = \frac{2mE_0}{\hbar^2}, \quad (٨-٤)$$

$$k_1^2 = \frac{2m(E_0 - V)}{\hbar^2} \quad (٩-٤)$$

تؤول المعادلة (٧-٤) إلى

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right) u_L(x) = 0, \quad x < 0; \quad (١٠-٤)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1^2 \right) u_R(x) = 0, \quad x > 0; \quad (١١-٤)$$

المعاملان R, L يشيران إلى الحلول على شمال ويمين صفر الإحداثيات. حلول المعادلتان السابقتان عبارة عن تراكب خطى<sup>(١)</sup> من الدوال الأسية:

$$u_L(x) = e^{\pm i k_0 x} \quad (١٢-٤)$$

$$u_R(x) = e^{\pm i k_1 x} \quad (١٣-٤)$$

هذه الدوال الأسية ماهى إلا موجات دى برولى المناظرة لكميتى الحركة  $P_1, P_0$  فى المعاملة الكلاسيكية. سنهتم هنا بالوضع الذى يقترب فيه الجسم من جهة اليسار ويعانى انعكاساً أو نفاذاً. ومن هنا فإننا نبحث عن الحلول التى لها الشكل

$$u_L(x) = e^{i k_0 x} + A e^{-i k_0 x} \quad (١٤-٤)$$

(موجة منعكسة) + (موجة ساقطة)

$$u_R(x) = B e^{i k_1 x} \quad (١٥-٤)$$

(موجة نافذة)

(1) linear combination

فى المعادلة (٤-١٤) قمنا أثناء عملية التسوية بضبط معامل الموجة الساقطة ليصبح مساويا للوحدة. كل مانود معرفته الآن هو قيم الطاقات المتاحة  $E_0$  لهذا النظام، وكذلك شدتى الموجة المنعكسة والنافذة بدلالة  $B, A$ ، على الترتيب.

من شروط الاتصال عند  $x = 0$  نحصل على

$$1 + A = B \quad (\text{من اتصال } u) \quad (٤-١٦)$$

$$k_0(1 - A) = k_1 B \quad (\text{من اتصال } u')$$

يمكن حل هاتين المعادلتين لأى قيمة من قيم الطاقة  $E_0$ ، ليكون

$$A = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} ; B = \frac{2k_0}{k_0 + k_1} \quad (٤-١٨)$$

على ذلك فإن النظام (بشروط أن يكون  $E_0 > V$ ) ممكن أن يحمل أى مقدار من الطاقة (أى لا يوجد شرط يقيد قيم الطاقات المتاحة) كما هو الحال فى الوضع الكلاسيكى. إلا أن الحركة المتاحة كليا تختلف اختلافا جوهريا عن نظيرها الكلاسيكى، وبيان ذلك كما يلى:

الاحتمال النسبى لتواجد جسيم عند نقطة  $x$ ، مثلا، حيث  $x < 0$ ، يساوى

$$P_u(x) = |e^{k_0 x} + A e^{-k_0 x}|^2 \quad (٤-١٩)$$

$$= 1 + |A|^2 + 2A \cos 2k_0 x$$

الحد التذبذبى الأخير بهذه المعادلة ليس له أهمية فيزيائية كبيرة، ويمكن التخلص منه بأخذ متوسط الاحتمال النسبى فى منطقة كبيرة بالنسبة للمقدار  $2\pi/k_0$ . الحدان الآخران يتولدان مباشرة من الموجتين الساقطة والمنعكسة ويمكن وصفهما على أساس أنهما يمثلان الشدتان النسبيتان لهاتين الموجتين. باتباع نفس المنوال يتسنى لنا القول أن  $|B|^2$  تمثل الشدة النسبية للموجة النافذة.

السمة الوصفية الجديدة والمهمة فى المعاملة الكمية لهذا الوضع هى عدم تلاشى الموجة المنعكسة، حيث نجد

$$|A|^2 \neq 0 \quad (20-4)$$

هناك وضعان لهما أهمية خاصة. نعلم من قبل أن المعاملة الميكانيكية الكمية لنظام تصبح ضرورية إذا كان

$$\hbar \leq (\text{كمية الحركة القياسية}) \times (\text{الطول القياسى})$$

فى وضعنا الحالى الطول القياسى هو المسافة التى تتغير خلالها طاقة الوضع، أما كمية الحركة القياسية فهى كمية حركة الحزمة الساقطة. لهذا فإننا نصل إلى الحد الكلاسيكى عند قيم كبيرة لكميات الحركة، أى عندما يكون

$$E_0 \gg V \quad (21-4)$$

وفى تلك الحالة، وباستخدام المعادلتين (4-8)، (4-9) نحصل على

$$k_0 \cong k_1$$

ومنه، باستخدام المعادلة (4-18)، نجد

$$A \cong 0 ; B \cong 1 \quad (22-4)$$

وهذا هو الحد الكلاسيكى الصحيح لحدوث النفاذ الكلى.

أما الحد الكمى للغاية<sup>(1)</sup> فينشأ عندما يكون

$$E_0 \ll |V| \quad (23-4)$$

والحالة التى تتمتع بأهمية كبيرة يكون فيها  $V$  كبيرة فى المقدار ولكن سالبة الإشارة، أى حدوث انخفاض فجائى كبير فى طاقة الوضع. كلاسيكيا سوف يخترق الجسيم طاقة الوضع هذه مع زيادة كبيرة فى طاقة حركته . أما من

(1) the extreme quantum limit



الوجهة الكمية، فمن المعادلتين (٨-٤)، (٩-٤) نجد أن

$$k_0 \ll k_1 \quad (٢٤-٤)$$

ومنه، باستخدام المعادلة (١٨-٤)، يكون

$$A \cong -1 ; B \cong 0 \quad (٢٥-٤)$$

هذا يعنى، كميًا، حدوث انعكاس كلى على العكس تماما مع الوصف الكلاسيكى.

يلاحظ هذا التأثير الكمي فى الفيزياء النووية عند سقوط نيوترون، مثلا، طاقته صغيرة على نواة ما. يشاهد عندئذ انعكاس للنيوترون عند اقترابه من سطح النواة، نتيجة لطاقة الوضع الكبيرة الجاذبة (سالبة الإشارة) للنواة.

الحالة (ب)  $E_0 < V$  (كميًّا)

الحلول عند  $x < 0$  تبقى كما هى دون تغيير. أما بالنسبة للحلول

$u_R(x)$  فإننا نضع التعويض الجديد

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E_0) \quad (٢٦-٤)$$

حينئذ يكون

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K^2 \right) u_R(x) = 0, \quad x > 0 \quad (٢٧-٤)$$

مرة ثانية، بتمثيل الحالة بحزمة ساقطة من جهة اليسار شدتها مساوية

للوحدة، نرى أن الحلول تأخذ الشكل

$$u_L(x) = e^{ik_0x} + A e^{-ik_0x} \quad (٢٨-٤)$$

$$u_R(x) = C e^{-Kx} + D e^{+Kx} \quad (٢٩-٤)$$

وحتى تكون  $u$  قابلة للتسوية فإن  $u_R$  يجب أن تؤول إلى الصفر عند مالانهاية، أى أن

$$D = 0$$

ومن شرط الاتصال عند النقطة  $x = 0$  نجد الآتى:

$$1 + A = C \quad (٣٠-٤)$$

$$ik_0(1 - A) = -KC \quad (٣١-٤)$$

بحل هاتان المعادلتان نحصل على (لأى قيمة من قيم  $E_0$ ):

$$A = \frac{k_0 - iK}{k_0 + iK} ; C = \frac{2k_0}{k_0 + iK} \quad (٣٢-٤)$$

هذا يعنى عدم وجود أى قيود على القيم المتاحة للطاقة. زيادة على ذلك فإن

$$|A|^2 = 1 \quad (٣٣-٤)$$

أى أنه لأى قيمة للطاقة، فى هذا المدى، فإننا نحصل على انعكاس كلى كما كان الحال فى الوضع الكلاسيكى. إلا أن الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم فى المنطقة  $x > 0$ ، الغير متاحة كلاسيكيا، يساوى

$$P_{u_R}(x) = |Ce^{-Kx}|^2 \quad (٣٤-٤)$$

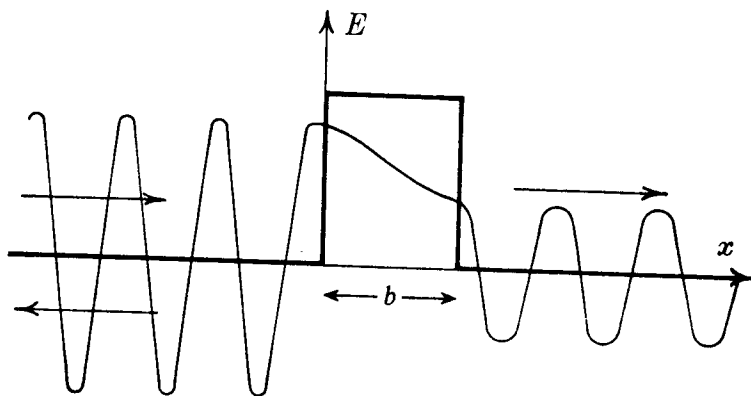
$$= \frac{4k_0^2}{k_0^2 + K^2} e^{-2Kx}$$

لهذا الاحتمال قيمة صغيرة بالقرب من حافة حاجز الجهد ويتناقص

أسيا<sup>(١)</sup> حتى يصل إلى قيمة مهملة عند المسافات الكبيرة بالنسبة إلى  $1/K$ . هذه الحالة لها أهميتها الخاصة عند اعتبار سقوط موجة على حاجز جهد سمكه محدد  $b$ ، شكل ٤-٢. فى هذا التأثير نحصل على احتمال معتبر

(1) exponentially

لتواجد الجسيم عند الحافة الأخرى لحاجز الجهد، حيث يستمر الجسيم في الحركة بحرية إلى جهة اليمين بعد عبوره لحاجز الجهد.



الموجة النافذة

الموجة الساقطة والمنعكسة

شكل ٤-٢ منحنى الطاقة لحاجز جهد محدود، موضحين الموجتين

الساقطة والنافذة.

من المعادلة (٤-٣٤) نرى أن الاحتمال النسبي لتواجد الجسيم عند

$x = 0, x = b$  يساوى

$$T = \exp[-2Kb]$$

$$= \exp\left[-2\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (V - E_0)^{1/2} b\right] \quad (٤-٣٥)$$

وهذا بمثابة تعبير تقريبي (صالح لقيم كبيرة للمسافة  $b$ ) لاحتمال نفاذ جسيم طاقته  $E_0$  من حاجز جهد ارتفاعه  $V$  وعرضه  $b$ . (في حقيقة الأمر، الطول داخل حاجز الجهد عبارة عن خليط من دوال أسية تزايدية وتناقصية،  $e^{\pm Kx}$ . ولحاجز جهد اتساعه صغير يكون تأثير الدالة الأسية التزايدية،  $e^{+Kx}$ ، له قيمة معتبرة (أنظر المسألة ٤-٤)).

تلك الإمكانية الكمية للنفوذ من حواجز الجهد التي تُوقِف الأجسام الكلاسيكية  
تعد الأساس لفهم النشاط الإشعاعي للنواة، الذي سيأتى ذكره فى الباب  
التاسع.

#### ٢-٤ الندبية<sup>(1)</sup>

من الملائم، قبل دراسة تأثير طاقات وضع أخرى، إدخال بعض  
الاعتبارات العامة عن دوال الحالة الواصفة للأنظمة التى طاقة وضعها  
تتبع المعادلة:

$$V(x) = V(-x) \quad (٣٦-٤)$$

طاقات الوضع هذه متماثلة<sup>(2)</sup> حول نقطة الأصل.

لأى حل  $u_E(x)$  يكون

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) u_E(x) = E u_E(x) \quad (٣٧-٤)$$

وبتغيير  $x$  إلى  $-x$ ، واستخدام المعادلة (٣٦-٤) يمكن ببساطة توضيح أن  
الدالة  $u_E(-x)$  هى أيضا حل للمعادلة.

على فرض وجود حل واحد فقط مستقل خطيا<sup>(3)</sup> للمعادلة (٣٧-٤) عند أى  
قيمة مناسبة للطاقة  $E$  فإن الحلين سوف يختلفان عن بعضهما بمقدار ثابت  
فقط، أى أن

$$u_E(x) = \varepsilon u_E(-x) \quad (٣٨-٤)$$

وعند تغيير  $x$  إلى  $-x$  نحصل على

$$u_E(-x) = \varepsilon u_E(x) \quad (٣٩-٤)$$

(1) parity (2) symmetric (3) linearly independent

بالتعويض من المعادلة (٤-٣٩) في المعادلة (٤-٣٨) نجد

$$\varepsilon^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon = \pm 1 \quad (٤-٤٠)$$

الثابت  $\varepsilon$  يعرف بندية الحالة<sup>(١)</sup>.

الحالات التي نديتها موجبة<sup>(٢)</sup> ( $\varepsilon = +1$ ) يكون فيها الدالة  $u_E(x)$  متماثلة حول نقطة الأصل. أما الحالات التي نديتها سالبة<sup>(٣)</sup> ( $\varepsilon = -1$ ) فالدالة  $u_E(x)$  لها تكون متماثلة ضديديا<sup>(٤)</sup>.

عند وجود أكثر من حل ليس له ندية محددة فإنه بالإمكان دائما تكوين

حلول من الدوال  $u_E(x)$  ،  $u_E(-x)$  على النحو

$$u_e(x) = \frac{1}{2}[u_E(x) + u_E(-x)] \quad (٤-٤١)$$

$$u_o(x) = \frac{1}{2}[u_E(x) - u_E(-x)]$$

التي لكل منها ندية محددة. لذلك بالإمكان دائما تكوين حلول إما متماثلة أو متماثلة ضديديا.

#### ٤-٣ الحالات المقيدة<sup>(٥)</sup>

درسنا حتى الآن طاقات الوضع التي يتحرك فيها الجسيمات بحرية. بمعنى أنه كلاسيكيا وكما أيضا يمكن للجسيمات أن تصل إلى مالانهاية، ولو في اتجاه واحد على الأقل. سنوجه اهتمامنا حاليا إلى الأنظمة المقيدة التي فيها لا تستطيع الجسيمات الوصول إلى مالانهاية. مرة أخرى، من أبسط طاقات الوضع التي ستتصب عليها دراستنا هي بئر الجهد المربع.

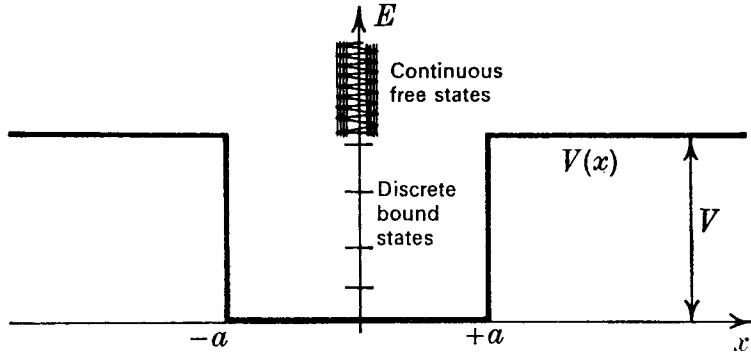
---

(1) parity of the state (2) positive parity (3) negative parity  
(4) anti-symmetric (5) bound states

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 ; |x| \leq a \\ V(x) &= V ; |x| > a \end{aligned} \quad (٤٢-٤)$$

نعتبر الحال الذي فيه  $E_0 < V$ .

كلاسيكيا، يتحرك الجسم بحرية في المدى  $|x| \leq a$  نتيجة لوجود حاجز جهد على حدود هذه المنطقة. (في البند ٣-٤ درسنا الوضع الذي فيه  $V \rightarrow \infty$ ). من الملاحظ أن طاقة الوضع متماثلة حول صفر الإحداثيات ومحاولاتنا لمعرفة ما إذا كانت دوال القيم المناسبة متماثلة أيضا أو متماثلة ضديديا يساعد كثيرا في إيجاد الحلول المطلوبة.



شكل ٣-٤ منحنى الطاقة لبئر جهد مربع.

بدون تكرار لما سبق، نرى أن معادلة القدر المناسب للطاقة لهذا الوضع تتمثل في المعادلة (٧-٤) وتؤول عندئذ إلى المعادلة (١٠-٤) في المدى  $|x| \leq a$ . أما في المدى  $|x| > a$  فإنها تؤول إلى المعادلة (٢٧-٤).

باعتبار الحلول في المنطقة الداخلية،  $|x| \leq a$ ، فإننا نجد

$$u_i(x) = \cos k_0 x, \quad \sin k_0 x \quad (٤٣-٤)$$

في هذه الحلول استبدلنا متعديين الدوال الأسية المبسطة بدوال زوجية وفردية.

أما الحل فى المنطقة الخارجىة من جهة اليمين،  $x > a$ ، فىكتب كما يلى  
 بالمثل كما كان بالمعادلة (٤-٢٩):

$$u_R(x) = Ce^{-kx} \quad (٤-٤٤)$$

الحل الآخر الذى يناظر الدالة الأسىة التزايدىة غير مسموح به لكى تؤول  
 $u(x)$  إلى الصفر عند مالانهاىة، وبالتالى يصبح فى الإمكان تسوىة الدالة  
 الموجىة. من متطلبات الندىة، نرى أن الحل فى المنطقة الخارجىة من جهة  
 اليسار يكتب كما يلى:

$$u_L(x) = \pm Ce^{-k|x|} \quad (٤-٤٥)$$

لهذا يوجد نوعان من الحلول وهما الحلون المتماثلة (ندىة موجىة)

$$u_i(x) = \cos k_0 x$$

$$u_R(x) = Ce^{-kx} ; u_L(x) = Ce^{-k|x|} \quad (٤-٤٦)$$

والحلون المتماثلة ضدىديا (ندىة سالىة)

$$u_i(x) = \sin k_0 x$$

$$u_R(x) = C'e^{-kx} ; u_L(x) = -C'e^{-k|x|} \quad (٤-٤٧)$$

فى هذين الحلىن ضبطنا المعامل فى المنطقة الداخلىة لىصبح مساويا  
 للوحدة. عملىة التسوىة الصعىة التى تتم طبقا للمعادلة (٣-٣٢) يمكن  
 دائما الوصول إليها بضرب الدالة المعبرة عن الحل الكلى فى ثابت مناسب.  
 لكل حل من هذه الحلون يجب أن يتحقق شرطان للاتصال عند  $|x| = a$ .  
 إلا أننا نلاحظ وجود ثابت حر واحد فقط، بسبب تلاثى معامل الدالة الأسىة  
 التزايدىة. وهذا يخالف الوضع فى الحالة الغير مقيدة. معنى ذلك أنه يجب  
 النظر إلى الطاقة  $E_0$ ، هى الأخرى، كبارامتر ضبط حتى تتحقق شروط  
 الاتصال. لقيم مقطعة فقط من الطاقة  $E_n$ ، يمكن لشروط الاتصال أن  
 تتحقق.

للحلول الزوجية، نجد أن

$$\cos k_0 a = C e^{-k a} \quad (٤٨-٤)$$

$$k_0 \sin k_0 a = K C e^{-k a}$$

التي تتحقق فقط بشرط أن يكون

$$k_0 \tan k_0 a = K \quad (٤٩-٤)$$

بالتعويض من المعادلتين (٨-٤)، (٢٦-٤) عن  $k_0$ ، فإن المعادلة (٤-٤)

(٢٩) تعين قيم  $E_n$  المناظرة للحلول التي نديتها موجبة. وبالمثل، للحلول

التي نديتها سالبة نحصل على

$$k_0 \cos k_0 a = -K \quad (٥٠-٤)$$

يمكن حل هذه المعادلات بيانيا للحصول على قيم  $E_n$ .

ليس من المهم كثيرا هنا الحصول على حلول خاصة ولكن الأكثر أهمية

الحصول على الحل العام في مدى الطاقات التي تؤدي كلاسيكيا إلى

الحالات المقيدة، ومن الوجهة الكمية تؤدي إلى الطيف المتقطع للطاقة.

نستطيع وضع بعض الملاحظات العامة حول شكل دوال القيم

المناسبة. طبقا للمعادلة (٢٧-٤) نجد أنه في المنطقة الخارجية يكون

$$u''/u > 0 \quad (٥١-٤)$$

هذا يعنى أنه للقيم الموجبة للدالة  $u$  فإن المنحنى يتميز بنهاية صغرى،

وللقيم السالبة يتميز المنحنى بنهاية عظمى. يعبر إجمالا عن هاتين

الخاصيتين كالاتى: دالة الحالة في المنطقة الخارجية تتحنى مبتعدة عن

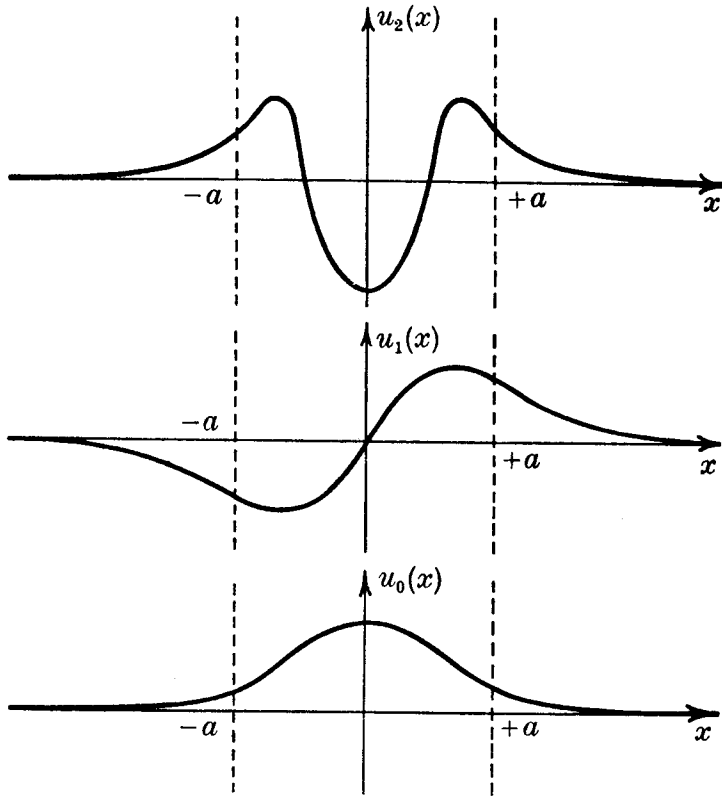
المحور (تتحدب). بالمثل فإن دالة الحالة تتحنى مقترية من المحور (تتقعّر)

في المنطقة الداخلية. زيادة على ذلك فإن النسبة  $u''/u$  تحدد الانحناء، وطبقا

لمعادلة القدر المناسب فإن قيمة هذا الانحناء تزداد مع زيادة  $E$ . القيم



المناسبة  $E_n$  هي تلك القيم التي تتناسق عندها دالة الحالة فى الأجزاء  
 المحدبة الخارجية مع الأجزاء المقعرة الداخلية، من حيث الميل والمقدار.



شكل ٤-٤ الشكل النموذجى للدوال المناسبة للطاقة للثلاث مستويات  
 المقيدة الأولى، موضحين الندية وعدد التقاطعات.

الحالة الأرضية  $u_0(x)$  هي تلك الحالة (الدالة) الزوجية التى فيها يكون  
 الانحناء فى نهايته الصغرى مع عدم وجود أى تقاطعات مع المحور. الحالة  
 التى تليها،  $u_1(x)$ ، فردية وتقطع المحور مرة واحدة فقط. أما  $u_2(x)$  فهى

حالة زوجية وتقطع المحور مرتين، انظر شكل ٤-٤. بوجه عام الحالة التي ترتيبها  $n$  نديتها تساوى  $(-1)^n$  وتقطع المحور عدد  $n$  من المرات. لتلخيص ماسبق نقول:

١- فى مدى الطاقات المناظرة كلاسيكيا لحالات حرة فى النظام الكمى يتمتع بنفس المدى المتصل من الطاقات.

٢- توصف الجسيمات، التى تتحرك تحت تأثير طاقات وضع متماثلة، بدوال مناسبة للطاقة إما متماثلة (ندية زوجية) أو متماثلة ضدديدا (ندية سالبة) حول نقطة الأصل.

٣- فى مدى الطاقات المناظرة كلاسيكيا لحالات مقيدة يتمتع النظام الكمى بمستويات طاقة متقطعة.

٤- مستوى الطاقة الذى ترتيبه  $n$  تكون ندية الدالة الواصفة له مساوية  $(-1)^n$ ، وتقطع الدالة المحور عدد  $n$  من المرات.

#### مسائل ٤

٤-١ ارسم منحنيات تقريبية للدوال المناسبة للطاقة فى حالة بئر جهد مربع لانهاى، وبين أنها تحقق الشروط ٢، ٣، ٤ المذكورة بالملخص عند نهاية هذا الباب.

٤-٢ بين أن الحلول المناسبة للطاقة فى حالة بئر جهد مربع متماثل يمكن أن تتواجد عند أى قيمة للطاقة بشرط أن يكون  $E > V$ .

٤-٣ جسيم كتلته  $m$  يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم مقتربا من حاجز الجهد

$$V(x) = 0, \quad x < 0 \quad \text{or} \quad x > a$$

$$V(x) = V, \quad 0 \leq x \leq a,$$

وقادما من  $x = -\infty$ . فإذا كانت طاقته  $E$  أقل من  $V$ ، وكان

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} ,$$

$$K^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

أوجد نسبة شدة الحزمتين النافذة والمنعكسة عندما يكون

$$Ka \ll 1$$

وإذا كانت الحزمة تقترب من منتصف حاجز جهد رفيع جدا بحيث يكون

$$k \approx K , ka \ll 1$$

فبين أن الحزمة غالبا ما يحدث لها نفاذ تام.

من الناحية الأخرى، إذا كانت الحزمة تقترب من قمة حاجز جهد مرتفع

بحيث يكون

$$k \gg K , ka \gg 1$$

فبين أن الحزمة غالبا ما يحدث لها انعكاس تام.

(عبر عن دالة الحالة في المنطقة  $x > a$  في الصورة  $u(x) = De^{ik(x-a)}$ ،

واستخدم المفكوك  $e^{Ka} = 1 + ka$ ، إلخ)

٤-٤ جسيم كتلته  $m$  يتحرك تحت تأثير طاقة الوضع

$$V(x) = \infty , x \leq 0$$

$$V(x) = 0 , 0 < x < a$$

$$V(x) = V(> 0) , a \leq x \leq b$$

$$V(x) = 0 , x > b$$

إذا آلت  $b$  إلى مالانهاية فوضح أن القيم المتاحة للطاقة، عندما يكون  $E < V$ ،

تحقق العلاقة

$$k \cot ka + K = 0$$

حيث  $K, k$  معرفان في المسألة ٤-٣.

إذا كانت الطاقة لها مثل هذه القيمة وكانت  $b$  محدودة فوضح أن الشدة النسبية عند  $x = a, x = b$  تساوى

$$T = e^{-2K(b-a)}$$

في المنطقة  $x > b$  بين أن شدتي الحزمة المتجهة جهتي اليمين واليسار متساوية. بذلك يكون هذا النظام مُمثلاً لمخزن للجسيمات المأسورة بواسطة طاقة الوضع بالقرب من نقطة الأصل، وعند طاقة مساوية للقيمة المناسبة الممكنة عندما تؤول  $b$  إلى مالانهاية. للقيم المحدودة  $b$  تتسرب الجسيمات باستمرار من خلال حاجز الجهد ولكن يمكن استعواضها أيضا بمصدر للجسيمات عند مالانهاية. هذا النظام قريب الشبه جدا بنواة مشعة (انظر البند ٩-٣).

(في المنطقة  $0 < x < a$  استخدم دالة الحالة المساوية  $\sin kx$ ، لأن  $u(0) = 0$ )

لهذا الوضع. وفي المناطق الأخرى استخدم الدوال

$$\left( \begin{array}{l} u(x) = A e^{-K(x-a)} + B e^{K(x-a)} \quad a \leq x \leq b \\ u(x) = C e^{-ik(x-b)} + D e^{+ik(x-b)} \quad b < x \end{array} \right.$$

## الباب الخامس المهتز التوافقي

### ١-٥ النظرية الكلاسيكية

طبقا للنظرية الكلاسيكية، ننظر إلى المهتز التوافقي على أنه جسيم

كتلته  $m$  يتحرك تحت تأثير القوة

$$F = -m\omega^2x \quad (1-5)$$

ويخضع لمعادلة الحركة

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2-5)$$

التي حلها

$$x = a \cos \omega t \quad (3-5)$$

هذا الحل يصف حركة اهتزازية ترددها الزاوي  $\omega$  وسعتها  $a$ .

ترتبط دائما طاقة الوضع مع القوة بالعلاقة

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ومنه، باستخدام المعادلة (١-٥) وإجراء التكامل، يكون

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (4-5)$$

تعطى طاقة الاهتزازة (٣-٥) من المعادلة (٤-٥) بوضع  $x = a$ . أى أن

طاقة الاهتزازة هي طاقة الجسيم المهتز عندما يكون عند أقصى مسافة،

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \quad (5-5)$$

## ٥-٢ النظرية الكمية - القيم المناسبة

نتداول الآن النظرية الكمية لهذا النظام المهتز. نظرا لأن الحركة الكلاسيكية مقيدة لجميع قيم الطاقات فإن الأطياف الكمية الكلية للطاقات تظهر بصورة متقطعة (راجع الباب السابق). المعادلة (٣-١٦) هي معادلة القدر المناسب لهذا النظام مع استبدال  $\hat{H}$  بالمؤثر

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 \quad (٥-٦)$$

وعند استخدام تمثيل شرودنجر تأخذ المعادلة (٣-١٦) الصورة

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right] u_n(x) = E_n u_n(x) \quad (٥-٧)$$

بضرب طرفي المعادلة في  $2/\hbar\omega$  نجد أن

$$\left[ -\frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right] u_n(x) = \frac{2E_n}{\hbar\omega} u_n(x) \quad (٥-٨)$$

وبوضع

$$y = \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x, \quad (٥-٩)$$

$$\varepsilon_n = E_n / \hbar\omega \quad (٥-١٠)$$

تؤول المعادلة (٥-٨) إلى الصورة المبسطة

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) u_n(y) = -2\varepsilon_n u_n(y) \quad (٥-١١)$$

نستطيع حل هذه المعادلة بطرق قياسية معروفة. سوف نستخدم هذه الطرق فيما بعد لإيجاد الحلول الخاصة بكمية الحركة الزاوية وحلول ذرة الهيدروجين. بدلا من الدخول في تفاصيل هذه الحلول الآن، فإننا

نستخدم طريقة التحليل إلى عوامل<sup>(1)</sup> لحل المعادلة. ذلك لأن هذه الطريقة سوف تمدنا بنوع جديد من المؤثرات التي تلعب دورا هاما للغاية فى النظرية الكمية.

نظرا لأن (راجع الباب الثانى)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 - 1\right)u_n(y)$$

فإن المعادلة (١١-٥) نستطيع إعادة كتابتها كما يلى:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) = [-2\varepsilon_n - 1]u_n(y) \quad (١١-٥)$$

يمكن أيضا كتابتها فى الصورة

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)u_n(y) = [-2\varepsilon_n + 1]u_n(y) \quad (١١-٥)$$

بضرب المعادلة (١١-٥) فى  $\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)$  نجد

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) = \\ [-2\varepsilon_n - 1]\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) \end{aligned} \quad (١٢-٥)$$

وعليه فإما أن يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) = 0 \quad (١٣-٥)$$

أو يكون

(1) factorization method

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)u_n(y) = u_{n+1}(y) \quad (14-5)$$

وعليه تؤول المعادلة (12-5) إلى

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)u_{n+1}(y) = [-2(\varepsilon_n + 1) + 1]u_{n+1}(y) \quad (15-5)$$

هذه المعادلة ماهى إلا المعادلة (1-5) للدالة  $u_{n+1}$  على شرط أن يكون

$$\varepsilon_n + 1 = \varepsilon_{n+1} \quad (16-5)$$

الحل الوحيد للمعادلة (13-5) هو

$$u(y) = e^{+(1/2)y^2}$$

تقيم كبيرة للمتغير  $y$  يتباعد<sup>(1)</sup> هذا الحل، وبالتالي ليس هو الحل المطلوب. على ذلك فلاى حالة  $u_n$  ينتمى إليها القيمة المناسبة  $\varepsilon_n$  يصبح من الممكن دائما توليد حالة أخرى  $u_{n+1}$  ينتمى إليها القيمة المناسبة  $\varepsilon_{n+1}$ .

بضرب المعادلة (1-5) فى  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)$  واتباع نفس المنوال

السابق، نحصل على

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)u_n(y) = \\ [-2\varepsilon_n + 1]\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)u_n(y) \end{aligned} \quad (17-5)$$

---

(1) diverge



الآن إما أن يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_n(y) = 0 \quad (18-5)$$

أو يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_n(y) = u_{n-1}(y) \quad (19-5)$$

وللحالة الأخيرة، تؤول المعادلة (17-5) إلى

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) u_{n-1}(y) = [-2(\varepsilon_n - 1) - 1] u_{n-1}(y) \quad (20-5)$$

وهي ذاتها المعادلة (11-5) بشرط تحقق العلاقة

$$\varepsilon_n - 1 = \varepsilon_{n-1} \quad (21-5)$$

وهذا يعنى أنه لأى حالة  $u_n$  ينتمى إليها القيمة المناسبة  $\varepsilon_n$  يمكن توليد حالة أخرى  $u_{n-1}(y)$  بطاقة أقل. هذه الحالة الجديدة (الحل الجديد) تعين من المعادلة (19-5) والقيمة المناسبة للطاقة المنتمية إليها تساوى  $\varepsilon_{n-1}$ ، وذلك إن لم يكن الحالة الابتدائية  $u_n$  هي الحالة الأرضية  $u_0$ . فى هذا الوضع دالة الحالة الأرضية لابد أن تحقق المعادلة (18-5)، أى أن

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_0(y) = 0 \quad (22-5)$$

هذه المعادلة تمدنا بدالة القيمة المناسبة للحالة الأرضية، لتصبح مساوية

$$u_0(y) = e^{-(1/2)y^2} \quad (23-5)$$

فضلا عن ذلك، من المعادلتين (22-5)، (11-5)، طاقة الحالة

الأرضية تحقق المعادلة

$$2\varepsilon_0 - 1 = 0 \quad (24-5)$$

باستخدام المعادلتين (١٦-٥)، (٢٤-٥) نجد أن القيم المناسبة للطاقة تساوى

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = \frac{1}{2} + 1, \dots, \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}, \dots$$

من المعادلة (١٠-٥) نستخلص العلاقة

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (٢٥-٥)$$

أى أن قيم الطاقات، بالاتفاق مع المفهوم السابق، تكون فئة متقطعة.

التعبير الذى يعين قيم مستويات الطاقة يعد من أكثر الأشياء أهمية فى ميكانيكا الكم. هذا التعبير، المعادلة (٢٥-٥)، يتفق مع تفسير بلانك لكيفية تفاعل الإشعاع مع المادة، بشرط اعتبار المادة أنها عبارة عن تجمع للعديد من المهتزازات (المتذبذبات) التوافقية، وكل مهتزاز يبعث أو يمتص إشعاع تردده مساوى لتردد المهتزاز التوافقى. من ذلك فإن تبادل الطاقة يتحدد من القيم المناسبة المتاحة للمهتزاز التوافقى، أى من المعادلة (٢٥-٥). إلا أن هذه المعادلة تتغير بوحدات  $\hbar \omega$  وهذا هو بالضبط الفرض الكمى لبلانك.

### ٣-٥ دوال القيم المناسبة - مؤثرات الإفناء والتوليد<sup>(١)</sup>

يمكن توليد دوال القيم المناسبة المتتابعة من الدالة  $u_0(y)$  وذلك بتكرار تطبيق المعادلة (١٤-٥). على سبيل المثال

(1) annihilation and creation operators

$$\begin{aligned}
 u_1(y) &= \left( \frac{\partial}{\partial y} - y \right) u_0(y) \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial y} - y \right) e^{-(1/2)y^2} \\
 &= -2y e^{-(1/2)y^2}
 \end{aligned} \tag{26-5}$$

دالة الحالة الأرضية،  $u_0(y)$ ، دالة زوجية في  $y$  ولا تقطع المحور. أما دالة الحالة المثارة الأولى،  $u_1(y)$ ، فهي دالة فردية وتقطع المحور مرة واحدة فقط. من السهل، بتكرار تطبيق المعادلة (5-14)، إثبات أن دوال القيم المناسبة المتتابعة تتميز بنفس السمات العامة المستنتجة بالباب السابق. تُعرف الدوال المستنتجة بهذه الطريقة باسم متعددات حدود هرميت<sup>(1)</sup>.

في الحقيقة، دالة القيمة المناسبة للحالة الأرضية عبارة عن دالة ذات تحذب جاوسى مشابه لما تم دراسته في مبدأ عدم التحديد بالبند 3-6.

من المعادلتين (5-23)، (5-9) نلاحظ أن عرض التحذب الجاوسى يساوى

$$\Delta_x = \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \tag{27-5}$$

ومن المعادلة (5-5) نجد أن  $\Delta_x$  هي بالضبط قيمة سعة المهتر الكلاسيكى الذى له نفس طاقة الحالة الأرضية.

المؤثران

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} - y \right), \left( \frac{\partial}{\partial y} + y \right) \tag{28-5}$$

يتمتعان بأهمية خاصة، نظرا لاختلاف نوعيهما عما تم دراسته من قبل.

(1) Hermite polynomials

نعلم مسبقاً أن المؤثرات تعبر عن عمليات من الممكن ملاحظتها، أى تعبر عن عمليات القياس. المثال التوضيحي النموذجي على ذلك هو المؤثر الذى نعين به طاقة المهتز التوافقي

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( y^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (29-5)$$

تبعاً للمعادلتين (5-14)، (5-19)، هذا المؤثر يمثل عملية إزاحة فيزيائية للمهتز (لأعلى أو لأسفل) من مستوى طاقة ما إلى المستوى الذى يليه. ونظراً لأن الطاقة تتولد أو تختفى أثناء تلك العملية بوحدات  $\hbar\omega$  فإن المؤثرين، المعادلة (5-28)، يطلق عليهما اسم مؤثرى التوليد والإفناء. هذان المؤثران يلعبان دوراً هاماً للغاية عند دراسة النظرية الكمية لتفاعل الإشعاع مع المادة (المادة متمثلة فى الإلكترونات).

#### 5-4 ملخص

القيم المناسبة لطاقة المهتز التوافقي الكمي الذى تردده الزاوى  $\omega$

تساوى

$$E_n = \left( \frac{1}{2} + n \right) \hbar\omega \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

#### مسائل

5-1 استخدم مؤثر التوليد لاستنتاج الحالة المناسبة  $u_2(x)$ .

5-2 جسيم فى الحالة  $u_0(x)$ . استخدم المعادلة (3-39) للتحقق من عدم

إمكانية الحصول على النتيجة  $E_1$  أو  $E_2$  عند قياس الطاقة.

5-3 عين القيمة المتوسطة لكمية الحركة

$$|\rho| = \left| -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right|$$

لمهتز توافقى فى الحالة الأرضية  $u_0(x)$  . (بالنسبة لتكامل التسوية انظر  
المسألة ٣-٣)

٤-٥ بمعلومية مؤثرى الإفناء والتوليد المُسويان

$$\hat{a} = \left( \frac{\hbar\omega}{2} \right)^{1/2} \left( y + \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{a}^+ = \left( \frac{\hbar\omega}{2} \right)^{1/2} \left( y - \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

وضح أن

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar\omega ,$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega ,$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega .$$

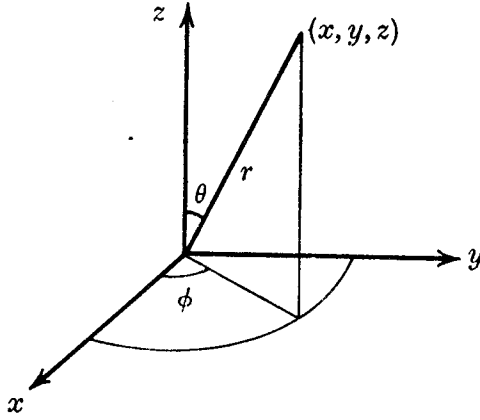
**الجزء الثانى**  
**الفيزياء الذرية**

## الباب السادس

### كمية الحركة الزاوية

#### ١-٦ مؤثرات كمية الحركة الزاوية

من الضروري قبل دراسة ذرة الهيدروجين التعرف على النظرية الكمية لكمية الحركة الزاوية. لعمل ذلك يستحسن استخدام الإحداثيات القطبية الكروية  $(r, \vartheta, \phi)$  التي ترتبط بالإحداثيات الكارتيذية  $(x, y, z)$  بالعلاقات، انظر شكل ١-٦.



شكل ١-٦ النقطة  $(x, y, z)$  تعين في الإحداثيات القطبية الكروية بالإحداثيات  $(r, \vartheta, \phi)$ .

$$x = r \sin \vartheta \cos \phi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \phi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

(١-٦)

بتطبيق مبدأ التناظر، ف(١)، يمكن كتابة المؤثرات، المعبرة عن مركبات كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل، بدلالة الموضع وكمية الحركة

الخطية، التي بدورها تكتب (استخدم المعادلة (٣-١٤) طبقا لتمثيل شرودنجر كما يلي:

$$\begin{aligned}\hat{l}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \rightarrow -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{l}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \rightarrow -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \hat{l}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \rightarrow -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad (٢-٦)$$

ولكن

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

التي نستطيع تقييمها باستخدام المعادلة (٦-١). في الإمكان أيضا استنتاج العلاقات المشابهة للتفاضلات الأخرى  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ . بهذه الطريقة يتسنى لنا التعبير عن مؤثرات كمية الحركة الزاوية بدلالة المتغيرات الزاوية، أي أن

$$\begin{aligned}\hat{l}_x &\rightarrow i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right), \\ \hat{l}_y &\rightarrow i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right), \\ \hat{l}_z &\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\quad (٣-٦)$$

### ٢-٦ المركبة Z

نحصل على الشكل الخاص بالمؤثر  $\hat{l}_z$  من التطبيق المباشر للصورة العامة لمبدأ التمام المذكور عند نهاية البند ٣-٣. نظرا لأن  $\hat{l}_z$  هي كمية



الحركة الزاوية المناظرة لعملية الملاحظة  $\hat{\varphi}$  فإن علاقة المبادلة بين هذين المؤثرين هي

$$[\hat{\varphi}, \hat{\ell}_z] = i\hbar$$

وبتمثيل المؤثر  $\hat{\varphi}$  بالمتغير الجبرى  $\varphi$  فإن مؤثر كمية الحركة الزاوية المناظر يصبح مساويا

$$\hat{\ell}_z (= \hat{\ell}_\varphi) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4-6)$$

وذلك لى تتحقق علاقة المبادلة. لاحظ أن المعادلة السابقة تشبه تماما المعادلة (3-14).

نعين القيم الممكنة (المتاحة) لكمية الحركة الزاوية من معادلة القدر المناسب الخاصة بالمؤثر  $\hat{\ell}_z$ ، وهى

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} u_m(\varphi) = \hbar m u_m(\varphi) \quad (5-6)$$

حيث  $\hbar m$  هي القيم المناسبة.

نظرا لأننا نعود مرة أخرى إلى نفس الوضع الفيزيائى عند الدوران بزواوية مقدارها  $2n\pi$  (لقيم  $n$  الصحيحة) فيجب علينا إدخال شرط للحدود على الدالة

$u_m(\varphi)$ ، وهو أنها دالة دورية. بذلك يصبح حل المعادلة (5-6) كالتالى:

$$u_m = e^{im\varphi} \quad (6-6)$$

ومن شرط الحدود، تأخذ  $m$  القيم

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

من الملاحظ أن هذا يعبر بالضبط عن قاعدة بوهر (1-20) التى

أدخلها بطريق المحاولة على النظرية الكلاسيكية، للحصول على الأطياف

المتقطعة لذرة الهيدروجين. أما الآن فقد ظهرت هذه القاعدة نتيجة لتطبيق النظرية الكمية.

### ٦-٣ كمية الحركة الزاوية الكلية - القيم المناسبة

يمكن بسهولة التأكد من عدم تبادل المؤثر  $\hat{l}_z$  مع المؤثرين  $\hat{l}_x, \hat{l}_y$ ، أى التأكد من صحة العلاقات

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_z] \neq 0, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] \neq 0 \quad (٧-٦)$$

هذا يعنى، على وجه العموم، أن دالة الحالة المناسبة لأى من هذه المركبات ليست دالة حالة مناسبة أيضا للمركبات الأخرى. وبالتالي لانستطيع التعرف بدقة تامة على أكثر من مركبة واحدة فقط من مركبات كمية الحركة الزاوية، وهذا بالطبع نتيجة للاضطرابات المتبادلة الناشئة عن عمليات الملاحظة. هناك حالة خاصة عندها تكون كمية الحركة الزاوية مساوية للصفر. لتلك الحالة المركبات الثلاثة لكمية الحركة الزاوية تساوى صفر، كلا على حده، أى يمكن معرفة المركبات الثلاثة بدقة تامة، وسوف نوضح ذلك فى المناقشة التى تلى المعادلة (٦-٤٦).

بتطبيق مبدأ التناظر نستطيع تكوين المؤثر الخاص بمربع كمية

الحركة الزاوية

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$$

$$\rightarrow -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (٨-٦)$$

من المعادلتين (٦-٤)، (٦-٨) نستطيع التحقق من صحة العلاقة

$$[\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0$$

التي تعنى إمكانية معرفة قيمة كمية الحركة الزاوية بالإضافة إلى أحد مركباتها بالضبط، في آن واحد. ومن هنا يجب أن يتواجد دالة حالة مناسبة،  $Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi)$ ، لكلا المؤثرين  $\hat{\ell}_z, \hat{\ell}^2$  وتحقق معادلتى القدر المناسب

$$\hat{\ell}_z Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi) = \hbar m Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi) \quad (9-6)$$

$$\hat{\ell}^2 Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 \beta Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi) \quad (10-6)$$

نظرا لاعتماد المؤثر  $\hat{\ell}_z$  على  $\varphi$  فقط فإن دوال الحالات المناسبة تكتب في الصورة

$$Y_{\beta m}(\vartheta, \varphi) = P_{\beta m}(\vartheta) e^{im\varphi} \quad (11-6)$$

التي بالتأكيد تحقق المعادلة (9-6).

بالتعويض من المعادلة (11-6) في المعادلة (10-6) واستخدام المعادلة

(8-6) نحصل على المعادلة (بعد اختصار الأجزاء المعتمدة على  $\varphi$ )

$$\left[ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} \right] P_{\beta m}(\vartheta) = -\beta P_{\beta m}(\vartheta) \quad (12-6)$$

التي يُنظر إليها على أنها معادلة القدر المناسب، بالنسبة إلى  $\beta$ ، ومنها نعين القيم الممكنة المنتمية للمؤثر  $\hat{\ell}^2$  عندما يكون القيم الممكنة للمؤثر  $\hat{\ell}_z$  مساوية  $\hbar m$ .

يجب علينا حل هذه المعادلة مرتبطة بشرط الحدود الفيزيائي الضروري،

وهو أن  $P_{\beta m}(\vartheta)$  تظل محدودة في المدى الفيزيائي  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ .

بإدخال المتغير

$$\omega = \cos\vartheta \quad (13-6)$$

نجد أن

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} = -\frac{d}{d\omega} \quad (14-6)$$

والمعادلة (١٢-٦) تصبح

$$\frac{d}{d\omega}(1-\omega^2)\frac{dP}{d\omega} + \left(\beta - \frac{m^2}{1-\omega^2}\right)P = 0 \quad (١٥-٦)$$

حيث  $P(\omega)$  لابد أن تكون محدودة في المدى

$$-1 \leq \omega \leq 1 \quad (١٦-٦)$$

(لاحظ أننا أهملنا كتابة المعامل  $\beta m$  المصاحب للدالة  $P$ )

من السهولة بمكان إعادة صياغة المعادلة (١٥-٦) لتأخذ الشكل

$$\frac{d^2P}{d\omega^2} - \frac{2\omega}{1-\omega^2} \frac{dP}{d\omega} + \left(\frac{\beta}{1-\omega^2} - \frac{m^2}{(1-\omega^2)^2}\right)P = 0 \quad (١٧-٦)$$

من الملاحظ أنه عندما يكون  $\omega = \pm 1$  تصبح معاملات المعادلة السابقة

غير محدودة وتكون الدالة  $P$  غير محدودة هي الأخرى مما يناقض متطلبات شرط الحدود.

نعتبر أولاً الحل بالقرب من  $\omega = 1$ . يمكن كتابة

$$\frac{2\omega}{1-\omega^2} = \frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega} \approx \frac{1}{1-\omega}, \quad (١٨-٦)$$

وكذلك

$$\frac{1}{(1-\omega^2)^2} = \frac{1}{(1-\omega)^2(1+\omega)^2} \approx \frac{1}{4(1-\omega)^2} \quad (١٩-٦)$$

حيث علامتى التساوى التقريبية،  $\approx$ ، بالمعادلتين تتحقق عندما يكون  $\omega \approx 1$ .

عندما  $\omega \approx 1$  يمكن إهمال الحد المحتوى على  $\beta$  بالمقارنة بالحد المحتوى

على  $m^2$ ، لتؤول المعادلة (١٧-٦) إلى الصورة التقريبية

$$\frac{d^2P}{d\omega^2} - \frac{1}{1-\omega} \frac{dP}{d\omega} - \frac{m^2}{4(1-\omega)^2}P = 0 \quad (٢٠-٦)$$

يبدو حل هذه المعادلة على النحو

$$P = (1-\omega)^\alpha [a_0 + a_1(1-\omega) + a_2(1-\omega)^2 + \dots] \quad (21-6)$$

مع افتراض أن (دون التأثير على عمومية الحل)

$$a_0 \neq 0 \quad (22-6)$$

بالتعويض من المعادلة (21-6) في المعادلة (20-6) نجد أن مجموع

معاملات القوى المختلفة للكمية  $(1-\omega)$  يجب أن تتلاشى، وعلى وجه

الخصوص مجموع معاملات  $(1-\omega)^{\alpha-2}$  التي تعطي

$$a_0 \left[ \alpha(\alpha-1) + \alpha - \frac{m^2}{4} \right] = 0 \quad (23-6)$$

نظرا لأن  $a_0 \neq 0$  فإننا نحصل على

$$\alpha = \pm \frac{|m|}{2} \quad (24-6)$$

ومنه نحصل على الحلين المستقلين

$$P_0^{(1)} = (1-\omega)^{|m|/2} [a_0 + \dots] \quad (25-6)$$

$$P_\infty^{(1)} = (1-\omega)^{-|m|/2} [a'_0 + \dots] \quad (26-6)$$

هاتان المعادلتان تؤولان إلى الصفر وما لانهاية، على الترتيب، عندما

$\omega = 1$ ، وعليه عندما  $\omega = 1$  يتحقق شرط الحدود للدالة  $P_0^{(1)}$  فقط.

باتباع نفس المنوال في الجوار القريب من  $\omega = -1$  نستطيع البرهنة

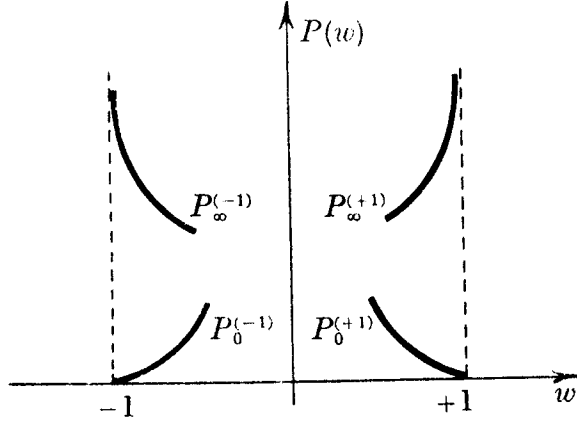
على وجود الحلان المستقلان

$$P_0^{(-1)} = (1+\omega)^{|m|/2} [b_0 + b_1(1+\omega) + \dots] \quad (27-6)$$

$$P_\infty^{(-1)} = (1+\omega)^{-|m|/2} [b'_0 + b'_1(1+\omega) + \dots] \quad (28-6)$$

حيث يتحقق شرط الحدود عند  $\omega = -1$  للدالة  $P_0^{(-1)}$  فقط. شكل 2-6 يوضح

سلوك هذه الدوال.



شكل ٢-٦ رسم تخطيطي لحلول المعادلة (١٧-٦) موضحين  
الحلول المحدودة والغير محدودة عند  $\omega = \pm 1$ .

بوجه عام نستطيع تكوين الحل  $P_0^{(-1)}$  من التراكب الخطى للحلين  $P_0^{(+1)}$  عند  $\omega = 1$ ,

$$P_0^{(-1)} = a P_0^{(+1)} + b P_{\infty}^{(+1)} \quad (٢٩-٦)$$

الأطياف المطلوبة المناظرة للقيم المتاحة للكمية  $\beta$  هي بالضبط تلك القيم التي عندها يتصل بسلسلة الحل  $P_0^{(-1)}$  مع الحل  $P_0^{(+1)}$ ، مع تلاشى أى مركبة للحل  $P_{\infty}^{(+1)}$ ، وبالتالي يتحقق شرط الحدود عند النقطتين  $\omega = \pm 1$ . (هذا يشبه من الناحية الحسابية عملية تقييم أطيايف طاقات الحالات المقيدة فى حالة بئر الجهد المربع، بالبواب الرابع. حيث كانت القيم المتاحة للطاقة  $E_n$  هي بالضبط تلك القيم التي عندها تتحقق شروط الاتصال عند حدود بئر الجهد، وقد تم ذلك دون إدخال أى مركبة للحل المحتوى على الدالة الأسية التزايدية.)

لتعيين  $\beta$  نستخدم المعادلتين (٢٥-٦)، (٢٧-٦) حتى نستطيع كتابة

الصورة العامة للحل كالآتي:

$$P_{\beta m}(\omega) = (1 - \omega^2)^{|m|/2} Z(\omega) \quad (٣٠-٦)$$

بالتعويض من المعادلة (٣٠-٦) فى المعادلة (١٧-٦) نحصل على

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 Z}{d\omega^2} - 2(|m| + 1)\omega \frac{dZ}{d\omega} + [\beta - |m|(|m| + 1)]Z = 0 \quad (٣١-٦)$$

بوضع

$$Z(\omega) = \sum_0^{\infty} a_k \omega^k \quad (٣٢-٦)$$

وبمساواة مجموع معاملات قوى  $\omega$  المختلفة بالصفر، وعلى وجه الخصوص معاملات  $\omega^k$  نجد

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)a_{k+2} &= \\ & [k(k-1) + 2k(|m|+1) + |m|(|m|+1) - \beta] a_k \quad (٣٣-٦) \\ & = [(k+|m|)(k+|m|+1) - \beta] a_k \end{aligned}$$

المعادلة السابقة تعين معاملات القوى الزوجية للمتوالية  $Z$  بدلالة  $a_0$ ، ومعاملات القوى الفردية بدلالة  $a_1$ . إذا كانت المتوالية  $Z(\omega)$  غير منتهية، بالنسبة للقيم الكبيرة للعدد  $k$ ، فإن المعادلة (٣٣-٦) تؤدي إلى

$$a_{k+2} \cong a_k$$

ومنه للقيم الكبيرة للعدد  $k$  يكون

$$Z(\omega) \sim (1 - \omega)^{-1}$$

وعندها تتباعد الدالة  $P_{\beta m}$  لبعض قيم  $|m|$ . لتحقيق شرط الحدود لابد أن تكون المتوالية منتهية، وبالتالي يجب أن تكون  $Z(\omega)$  كثيرة حدود وليس

متوالية قوى<sup>(1)</sup>. من المعادلة (٦-٣٣) تصبح متوالية المعاملات منتهية عند الحد  $k$  إذا كان

$$\beta = \ell(\ell+1) \quad (٦-٣٤)$$

حيث

$$\ell = k + |m| \quad (٦-٣٥)$$

عندما يكون المقدار

$$k = \ell - |m|$$

مساويا لعدد فردي، وكان  $a_0 = 0$ ، يصبح الحل المناظر  $P_\ell^m(\omega)$  عبارة عن كثيرة حدود بقوى فردية. أما إذا كان  $k$  عدد زوجي، وكان  $a_1 = 0$ ، فإن  $P_\ell^m(\omega)$  تكون عبارة عن كثيرة حدود بقوى زوجية. عديدة الحدود  $P_\ell^m(\omega)$  معروفة باسم عديدة حدود لاجندر المصاحبة<sup>(2)</sup>. باستخدام دوال الحالة المناسبة هذه تتحقق شروط الحدود، وتُعين القيم المناسبة  $\beta$  من المعادلة (٦-٣٤).

عندئذ نكتب القيم المناسبة للمؤثر  $\hat{L}^2$  على النحو

$$\hbar^2 \beta = \hbar^2 \ell(\ell+1) , \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (٦-٣٦)$$

حيث من المعادلة (٦-٣٥)  $\ell$  أكبر من أو تساوى  $|m|$ .

(الحالات  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  يشار إليها بالرموز S, P, D, F, G, ... على الترتيب.)

لأى قيمة معطاة  $\ell$  فإن القيم المناسبة للمؤثر  $\hat{L}_z$  تساوى

$$\ell_z = \hbar m , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell \quad (٦-٣٧)$$

(1) power series (2) associated Legendre polynomial



وهذا يعنى أن عدد القيم المتاحة يساوى  $(2l+1)$ .

## ٦-٤ الدوال المناسبة والرسم الاتجاهى

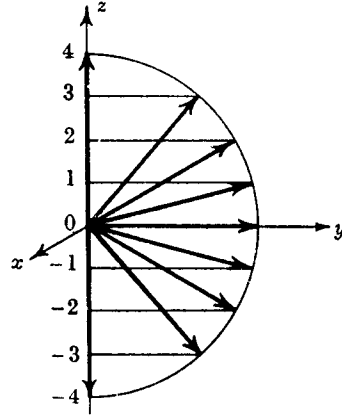
مانوده الآن مقارنة كمية الحركة الزاوية الكمية بنظيرها الكلاسيكى. عند قياس كمية الحركة الزاوية نجد أن القيم المناسبة الكمية تساوى  $\sqrt{l(l+1)}$  ، مقاسة بوحدات  $\hbar$ . هذا المقدار يناظر بالتقريب كمية حركة زاوية كلاسيكية مساوية  $l$ .

من الوجهة الكلاسيكية، ممكن لمتجه كمية الحركة الزاوية أن يأخذ أى اتجاه يحدد بالزاويتين  $\vartheta$  ،  $\varphi$ . أيضا، لاتعتمد المركبة  $z$ - لكمية الحركة الزاوية الكلاسيكية على الزاوية  $\varphi$ ، ولكن تعتمد على  $\vartheta$  فقط. كما أن قيمة المركبة  $z$ - تأخذ نهاية عظمى عندما يكون  $\vartheta = 0$ ، وتساوى حينئذ  $l$ ، وتكون فى نهايتها الصغرى المساوية  $-l$  عندما يكون  $\vartheta = \pi$ . فضلا عن ذلك فإن المركبة  $z$ - ممكن أن تأخذ أى قيمة بين النهايتين العظمى والصغرى لها، وتعتمد هذه القيمة على الزاوية  $\vartheta$ .

من الناحية الكمية، تتشابه كمية الحركة الزاوية وصفيها مع نظيرتها الكلاسيكية، إلا أن القيم المتاحة للمركبة  $z$ - لكمية الحركة الزاوية الكمية تأخذ فقط القيم المناظرة للأعداد الصحيحة الواقعة بين النهايتين العظمى والصغرى  $l \pm$ .

يمكن تمثيل كمية الحركة الزاوية اتجاهيا، كما بشكل ٦-٣، حيث نرى بالشكل أن القيم المتاحة للكمية  $l_z$  تحدد بالاتجاهات المتاحة لمتجه كمية الحركة الزاوية. يجب التعامل بحذر مع هذا التمثيل الاتجاهى، نظرا لأن الحالات التى قيمة كمية حركتها الزاوية محددة يصاحبها عدم تحديد فى

قياس الاتجاه نتيجة لتتام هذان المتغيران (وهما قيمة كمية الحركة الزاوية واتجاهها).



شكل ٦-٣ التمثيل الاتجاهى لكمية الحركة الزاوية. من الوجهة الكلاسيكية ممكن أن يأخذ متجه كمية الحركة الزاوية أى توجيه. أما من الناحية الكمية يقيد التوجيه بالقيم التى تجعل المركبة  $z$ - مساوية لعدد صحيح مضروباً فى  $\hbar$ .

إذا كان النظام الفيزيائى عبارة عن جسيم يتحرك حول صفر الإحداثيات تحت تأثير طاقة وضع مركزية فإن مربع القيمة المطلقة<sup>(1)</sup> لدوال الحالة المناسبة لكمية الحركة الزاوية تُعطى التوزيع الاحتمالى لاتجاه الجسيم. من الممكن كتابة الدوال المناسبة لأى كمية حركة زاوية فى صورة الدوال  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  المعروفة باسم التوافقات الكروية<sup>(2)</sup>. عند تسوية دالة الحالة المناسبة ليكون الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فى اتجاه ما مساوياً للواحد الصحيح نجد أن التوافقات الكروية تأخذ الشكل

(1) square modulus (2) spherical harmonics

$$Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \quad (38-6)$$

ولبعض الحالات البسيطة تؤول المعادلة (38-6) إلى الصور المبسطة بالجدول 1-6.

جدول 1-6 الحالات المناسبة لكمية الحركة الزاوية للموجتين P, S.

$\ell$	$m=1$	$m=0$	$m=-1$
0		$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	
1	$Y_1^1 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}$	$Y_1^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\vartheta$	$Y_1^{-1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}$

من الملاحظ أن  $Y_0^0$  تساوى قيمة ثابتة، وهي في الحقيقة دالة حالة مناسبة للمؤثرين  $\hat{l}_x, \hat{l}_y$  أيضا، وتلك هي الحالة الخاصة المذكورة بالبند 3-6.

عندما  $m=0$  نحصل على العلاقات

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(\omega) P_\ell(\omega) d\omega = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (39-6)$$

$$P_\ell(1) = 1 \quad , \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \quad (40-6)$$

للحالات التي تعين بالكميات  $m, \ell$  نجد أن احتمال أن يأخذ الجسيم

الاتجاه  $\varphi, \vartheta$  مساويا

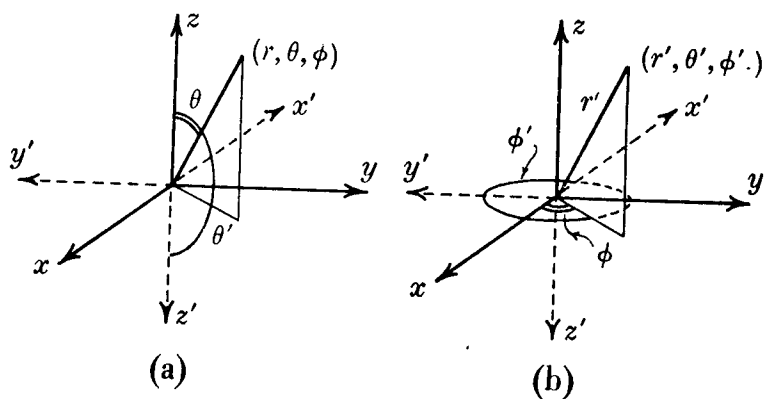
$$P_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) = |Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)|^2 \quad (41-6)$$

واضح من الجدول ٦-١ أننا نحصل على القيمة الأكثر احتمالا للزاوية  $\vartheta$  (أى التى عندها قيمة الاحتمال السابق أكبر مايمكن) للحالتين  $\ell=1, m = \pm 1$  بوضع  $\vartheta = \pi/2$ . على ذلك يميل مسار الجسيم ليقع فى المستوى  $x-y$ ، وبالتالي يصبح التوجيه الأكثر احتمالا لمتجه كمية الحركة الزاوية إلى أعلى أو أسفل المحور  $z$ . أما للحالة  $\ell=1, m = 0$  نجد أن القيم المستحبة للزاوية  $\vartheta$  تكون عند  $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$ . هذا يعنى أن مسار الجسيم يميل للوقوع عموديا على المستوى  $x-y$ ، والاتجاه الأكثر احتمالا لمتجه كمية الحركة الزاوية يصبح عندها فى المستوى  $x-y$ . فى هذا الوضع يتلاشى أى اعتماد فيزيائى على الزاوية  $\varphi$ . ومن هنا ندرك المعنى الذى يجب أن نفهم به مغزى التمثيل الاتجاهى الشبه كلاسيكى (شكل ٦-٣) فى محيط الصياغة الميكانيكية الكمية للمسألة.

عند الحد الكلاسيكى تصبح المقادير  $m, \ell$  كبيرة جدا، ويصبح الفرق بين الكميتين  $\ell, [\ell(\ell+1)]^{1/2}$  صغيرا جدا لدرجة إهماله. وكذلك يكون أيضا الفرق بين الأطياف المستمرة والمنقطعة المتاحة لقيم  $m$ ، ومن ثم ننقل بسلاسة إلى التصورات الكلاسيكية المعتادة.

## ٦-٥ الندية

فى دراستنا للحالات المقيدة لنظام يتحرك فى بعد واحد تحت تأثير طاقة وضع متماثلة (الباب الرابع) كان من الملائم إدخال فكرة الندية. أما فى وقتنا الحالى من الأنسب تعميم هذه الفكرة لتشمل الأبعاد الثلاثة واستخدام الإحداثيات القطبية الكروية.



شكل ٤-٦ الإحداثيات القطبية الكروية للنقطة  $(r, \vartheta, \varphi)$  في محاور إحداثيات منعكسة.  $r', \vartheta', \varphi'$  معرفة بالطريقة العادية ولكن بالنسبة إلى الإحداثيات  $x', y', z'$ .

نفرض أن موضع الجسم يعين بالنسبة إلى المتغيرات القطبية العادية بالإحداثيات  $(r, \vartheta, \varphi)$ . عند انعكاس المحاور إلى  $(x', y', z')$  وتعريف  $r', \vartheta', \varphi'$  بالطريقة العادية ولكن منسوبة إلى الإحداثيات  $x', y', z'$  (استعن بالشكل ٤-٦)

نجد

$$\begin{aligned} r' &= r \\ \vartheta' &= \pi - \vartheta \\ \varphi' &= \pi + \varphi \end{aligned} \quad (٤٢-٦)$$

وعليه إذا كان الجسم في الحالة الزاوية  $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ ، فإسنادا للمحاور المنعكسة يكون في الحالة

$$\begin{aligned} Y_\ell^m(\vartheta', \varphi') &= \text{const. } P_\ell^m(\cos \vartheta') e^{im\varphi'} \\ &= \text{const. } P_\ell^m[\cos(\pi - \vartheta)] e^{im(\pi + \varphi)} \\ &= \text{const. } P_\ell^m(-\cos \vartheta) e^{im\varphi} (-1)^{|m|} \\ &= \text{const. } (-1)^{\ell - |m|} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} (-1)^{|m|} \end{aligned} \quad (٤٣-٦)$$

للولوصول لهذه المعادلة استخدمنا المعادلة (٤٢-٦)، وللولوصول إلى المتساوية الأخيرة أخذنا في الاعتبار الملاحظات التي تلي المعادلة (٣٥-٦).

بإعادة تجميع المعادلة (٤٣-٦) نصل إلى النتيجة التالية:

$$Y_\ell^m(\vartheta', \varphi') = (-1)^\ell Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \quad (٤٤-٦)$$

نظرا لأن (باستخدام المعادلة (٤٢-٦)) اعتماد أى دالة حالة على  $r$  لا يتغير بالانعكاس، فإن ندية أى حالة كمية حركتها الزاوية محددة  $m, \ell$  تعين بمعلومية  $\ell$  فقط، وتساوى حينئذ  $\ell(-1)$ .

## ٦-٦ ملخص

القيم المناسبة لمربع كمية الحركة الزاوية  $\hat{\ell}^2$  تساوى

$$\hbar^2 \ell(\ell+1), \ell = 0, 1, 2, \dots$$

والمركبة  $z$ ،  $\hat{\ell}_z$ ، تساوى

$$m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

## ٦ مسائل

٦-١ استخدم التمثيلات (٢-٦) لتحقيق معادلة المؤثر

$$[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = i\hbar \hat{\ell}_z$$

(هذه المسألة يترتب عليها نتائج مهمة، وعلى وجه الخصوص بالنسبة إلى المغزلية، البند ٨-٣).

٦-٢ نظام متماسك يدور بحرية حول المحور z بعزم قصور مقداره I. بالتعبير عن طاقة النظام بدلالة كمية الحركة الزاوية  $\hat{l}_z$  وضح أن مستويات الطاقة الممكنة للنظام والدوال المناسبة تعطى بالمعادلتين الآتيتين:

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} , \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_m(\varphi) = e^{\pm i m \varphi}$$

حيث  $\varphi$  هي الزاوية التي تعين توجيه النظام في المستوى x-y. ٦-٣ نحصل على طاقة الدوران لجزيء ثنائي الذرة بالنظر إلى الجزيء على اعتبار أنه نظام متماسك مكون من جسيمين نقطيين يفصلهما مسافة ثابتة، ويدور النظام بحرية حول محور الجذب. بالتعبير عن الطاقة الكلية بدلالة عزم القصور I وكمية الحركة الزاوية وضح أن مستويات الطاقة الدورانية تعطى بالعلاقة

$$E_\ell = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} \ell(\ell+1) , \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

وكذلك وضح أن المستوى المحدد بقيمة  $\ell$  يصاحبه عدد  $(2\ell+1)$  من الحالات المناسبة المختلفة المناظرة للقيم الممكنة للمركبة z لكمية الحركة الزاوية

$$l_z = m \hbar , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

٦-٤ إذا كان نظام المسألة ٦-٣ واقع في الحالة

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\vartheta, \varphi)$$

وضح أن طاقة هذه الحالة تساوي  $E_1$ ، إلا أن (بعد أخذ المجموع على كل القيم الممكنة للزاوية  $\varphi$ ) التوزيع الاحتمالي للتوجية  $\vartheta$  يكون هو نفسه لجسيم في الحالة الأرضية

$$u_{0,0}(\vartheta, \varphi) = Y_0^0(\vartheta, \varphi)$$

(لاحظ أن احتمال تواجد نظام موجه بزاوية مجسمة  $d\Omega(\vartheta, \varphi)$  يساوى

$$(|\psi(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega(\vartheta, \varphi) = |\psi(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$



## الباب السابع

### طاقة الوضع المركزية<sup>(1)</sup>

### ذرة الهيدروجين

٧-١ الحركة في مجال طاقة وضع مركزية

يكتب مؤثر الطاقة، المسمى بالهاميلتونى، لجسيم كتلته  $m_e$  يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية اختيارية  $V(r)$  على النحو

$$\hat{H} \rightarrow \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V(r) \right] \quad (٧-١)$$

ومعادلة القدر المناسب لهذا النظام، طبقاً للمعادلة (٣-٨)، هي

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V(r) \right] u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi) = E_n u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi) \quad (٧-٢)$$

بالتعويض عن  $\nabla^2$ ، بدلالة الإحداثيات القطبية الكروية، تؤول المعادلة (٧-

٢) إلى

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} + V(r) \right] u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi) = E_n u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (٧-٣)$$

من شكل المؤثر  $\hat{\ell}^2$ ، المعادلة (٦-٨)، نستطيع إعادة صياغة المعادلة

السابقة لتبدو فى الصورة

(1) central potential

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\ell}^2(\vartheta, \varphi)}{2m_e r^2} + V(r) \right] u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi) \quad (4-7)$$

$$= E_n u_{E_n}(r, \vartheta, \varphi)$$

بهذا الشكل المبسط يمكن التأكد بسهولة من صحة العلاقة

$$[\hat{H}, \hat{\ell}^2] = 0 \quad (5-7)$$

وكذلك صحة العلاقة، استخدم المعادلة (4-6)،

$$[\hat{H}, \hat{\ell}_z] = 0 \quad (6-7)$$

هذا يعنى إمكانية أن نعرف، فى آن واحد، كلا من الطاقة وكمية الحركة الزاوية ومركبتها فى اتجاه المحور-z لجسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية. بالإشارة إلى كمية الحركة الزاوية ومركبتها فى اتجاه المحور-z بالرمزين  $m, \ell$ ، على الترتيب، كما كان الحال فى الباب السادس، حينئذ يمكن الإشارة إلى دالة الحالة المناسبة المناظرة بالرمز  $u_{n\ell m}$ . ونظرا لأن اعتماد المؤثر  $\hat{H}$  على  $\vartheta, \varphi$  يظهر فقط فى الحد المحتوى على  $\hat{\ell}^2$  فيمكن

إذا كتابة

$$u_{n,\ell,m}(r, \vartheta, \varphi) = u_{n,\ell}(r) Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi) \quad (7-7)$$

بالتعويض من المعادلة (7-7) فى المعادلة (4-7) يتضح لنا أن  $\hat{\ell}^2$  سوف يؤثر فقط على الدالة  $Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)$ ، وأن ناتج هذا التأثير هو القيم المناسبة  $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ . وعندها يمكن اختصار  $Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)$  من طرفى المعادلة، ولايتبقى

أى اعتماد آخر على الزاويتين  $\vartheta, \varphi$ ، ونحصل على المعادلة

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} + V(r) \right] u_{n,\ell}(r) = E_n u_{n,\ell}(r) \quad (8-7)$$

بإجراء التعويض

$$u_{n,\ell}(r) = \frac{\chi_{n,\ell}(r)}{r} \quad (9-7)$$

في المعادلة (٨-٧) نجد

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) \right] \chi_{n,\ell}(r) = E_n \chi_{n,\ell}(r)$$

(١٠-٧)

بكتابة معادلة شرودنجر في تلك الصورة يصبح من السهل تفسير معناها

الفيزيائي.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rightarrow \frac{p_r^2}{2m_e}$$

(١١-٧)

معنى ذلك أن هذا الحد يناظر طاقة الحركة الناشئة من القوة المحورية،

حيث  $p_r$  هي كمية الحركة المحورية.

وإذا كان الرمز  $p_t$  يشير إلى كمية الحركة المستعرضة، فإن مربع كمية

الحركة الزاوية يساوي

$$\hbar^2 \ell(\ell+1) = (p_t r)^2$$

(١٢-٧)

ولهذا يكون

$$\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} = \frac{p_t^2}{2m_e}$$

(١٣-٧)

أي أن هذا الحد يناظر طاقة الوضع الناشئة من قوى الطرد المركزي،

الناشئة عن الحركة الدائرية.

ومن هنا نكتب الهاميلتونى ككل في الشكل المختصر

$$H = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{p_t^2}{2m_e} + V(r)$$

(١٤-٧)

## ٧-٢ ذرة الهيدروجين

لدراسة مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين نستخدم معادلة القدر المناسب في صورتها المعطاة بالمعادلة (٧-١)، مع التعويض عن  $V(r)$  بطاقة الوضع الكولومية

$$V(r) = -\frac{Ze_M^2}{r} \quad (٧-١٥)$$

حيث  $Ze$ ، هي شحنة النواة  $e_M^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$ .

ومنه

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{Ze_M^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m_e r^2} \right] u_{n,\ell}(r) = E_n u_{n,\ell}(r)$$

(٧-١٦)

طريقة حل هذه المعادلة معقدة بعض الشيء، إلا أن النتيجة التي تتمخض عنها لها أهمية قصوى. ولذلك سوف نلتقط فقط الخطوات الرئيسية للحل. طريقة الحل هذه تشبه عملية إيجاد القيم المناسبة للمؤثر  $\hat{\ell}^2$ ، بالباب السادس. نظرا لأن اهتمامنا ينصب على الحالات المقيدة بذرة الهيدروجين، فإننا

نضع

$$E_n = -|E_n|$$

وبإدخال المتغيرات

$$\alpha_n^2 = \frac{8m_e |E_n|}{\hbar^2}, \quad \rho = \alpha_n r, \quad \lambda_n = \frac{Ze_M^2}{\hbar} \left( \frac{m}{2|E_n|} \right)^{1/2} \quad (٧-١٧)$$

تصبح المعادلة (٧-١٦) في الصورة

$$\left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\lambda_n}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] u_{n,\ell}(\rho) = 0 \quad (٧-١٨)$$

هذه المعادلة غير محدودة عند النقطتين  $\rho = 0$ ،  $\rho = \infty$ . يجب حل هذه المعادلة للحصول على قيم مناسبة  $\lambda_n$  منتمية إلى دوال حالة محدودة في كل الفراغ، وعلى وجه الخصوص عند  $\rho = 0$ ،  $\rho = \infty$ .  
 نعتبر أولا الحل عندما تكون قيمة  $\rho$  كبيرة. في هذا الوضع نهمل الحدود المحتوية على  $\rho$ ،  $\rho^2$  في مقام المعادلة (٧-١٨) نظرا لصغرها بالنسبة للحدود الأخرى، وبالتالي تؤول المعادلة إلى

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\right)u(\rho) = 0 \quad (٧-١٩)$$

وعليه لهذه المعادلة حلان مستقلان، وهما

$$u(\rho) \approx \rho^s e^{+p/2} \quad (٧-٢٠)$$

وحتى يتحقق شرط الحدود نعتبر فقط الحل المحتوى على الدالة الأسية التناقصية.

لدراسة خواص الحل بالقرب من نقطة الأصل (أى لقيم  $\rho$  الصغيرة) نعتبر الحل الذى على الصورة

$$u_{n\ell}(\rho) = \rho^s e^{-\rho/2} L_{n\ell}(\rho) \quad (٧-٢١)$$

وعندئذ نعوض من المعادلة (٧-٢١) فى المعادلة (٧-١٨) لنحصل على

(نهمل لبعض الوقت المعاملان  $n, \ell$  المصاحبان للرمز  $L$ )

$$\left[ \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \{2(s+1) - \rho\} \frac{d}{d\rho} + \{\rho(\lambda_n - s - 1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)\} \right] L(\rho) = 0 \quad (٧-٢٢)$$

وبوضع  $\rho = 0$ ، فإن

$$s(s+1) = \ell(\ell+1) \quad (٧-٢٣)$$

وعليه فإما أن يكون

$$s = l \quad (٢٤-٧)$$

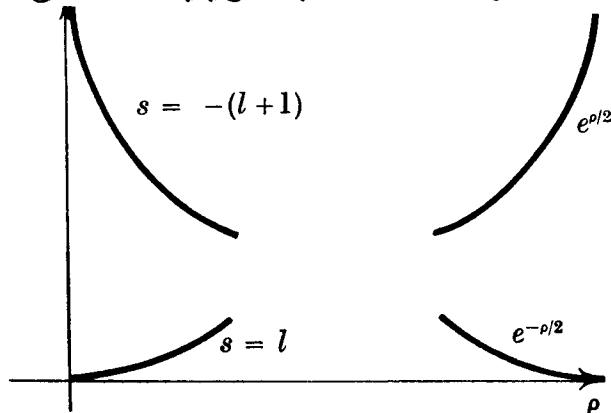
أو يكون

$$s = -(l+1) \quad (٢٥-٧)$$

أى أننا هنا أيضا حصلنا عند نقطة الأصل على حلين مستقلين. الحل المناظر للمعادلة (٢٤-٧) هو المطلوب فقط، أما الحل الآخر فلا يحقق شرط الحدود.

حلول المعادلة (١٨-٧) موضحة بشكل ٧-١، وهى مماثلة تماما للحلول المناظرة للقيم المناسبة للمؤثر  $\hat{l}^2$  التى قدمناها بالباب السابق.

على وجه العموم، الحل المناظر للوضع  $s=l$  يتصل بسلسلة مع التراكب الخطى للحلين  $e^{-\rho/2}, e^{\rho/2}$ . القيم المناسبة  $\lambda_n$  (ومنه قيم  $E_n$ ) هى تلك القيم التى تختفى عندها أى مركبة للدالة الأسية التزايدية  $e^{\rho/2}$  من الحل.



شكل ٧-١ رسم تخطيطى لحلول المعادلة (١٨-٧) موضحين الحلول

المحدودة والغير محدودة عند النقطتين  $\rho = 0, \rho = \infty$ .

لإيجاد تلك القيم،  $E_n$ ، نعتبر المعادلة (٢٢-٧) عندما يكون  $s = l$

$$\left[ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \{2(\ell+1) - \rho\} \frac{d}{d\rho} + \{(\lambda_n - \ell - 1)\} \right] L(\rho) = 0 \quad (26-7)$$

بالتعويض عن  $L(\rho)$  في صورة متسلسلة القوى

$$L(\rho) = \sum_v a_v \rho^v \quad (27-7)$$

وبمساواة مجموع معاملات  $\rho^v$  بالصفر، نحصل على

$$(v+1)[v+2(\ell+1)]a_{v+1} = [v+(\ell+1-\lambda_n)]a_v \quad (28-7)$$

إذا كانت المتسلسلة غير منتهية فإنه للقيم الكبيرة للكمية  $v$  نجد

$$a_{v+1} \cong \frac{1}{v} a_v \quad (29-7)$$

ليصبح

$$L(\rho) = e^\rho \quad (30-7)$$

ومن ثم

$$u(\rho) \cong e^\rho e^{-\rho/2} \quad (31-7)$$

وهذا الحل غير مسموح به لعدم تحقيقه لشرط الحدود.

لتحقيق شرط الحدود لابد أن تكون المتسلسلة منتهية، وهذا ممكن حدوثه إذا

كان  $\lambda_n$  بالمعادلة عبارة عن عدد صحيح

$$\lambda_n = n (> \ell) \quad (32-7)$$

وحينئذ، باستخدام المعادلة (17-7)، نجد

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e_M^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e_M^2}{a_0} \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad (33-7)$$

حيث  $a_0$  هو نصف قطر بوهر، كما عرفناه بالمعادلة (1-24).

بوضع  $Z=1$  تؤول المعادلة الأخيرة إلى العلاقة الصحيحة المعبرة عن

مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين.

### ٣-٧ الأعداد الكمية<sup>(١)</sup>

تُعيّن مستويات الطاقة بكاملها في ذرة الهيدروجين بواسطة عدد كمي واحد، وهو العدد الكمي الرئيسي<sup>(٢)</sup>

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

كما هو الحال في الميكانيكا الكلاسيكية، لكل طاقة محددة بقيمة  $n$  يوجد مدى من القيم المتاحة لكمية الحركة الزاوية. كلاسيكيا تتغير كمية الحركة الزاوية في هذا المدى تغيرا مستمرا، ابتداء من الصفر (للمدار البيضاوي الغير مركزي تماما الذي يمكن اختصاره إلى اهتزازة خطية) حتى القيمة التي تناظر مسار دائري نصف قطره محدد بقيمة الطاقة. في ميكانيكا الكم يبقى المدى كما هو، ولكن يتاح فقط قيم منقطعة معينة لكمية الحركة الزاوية. هذه القيم تحدد بالعدد الكمي المداري<sup>(٣)</sup>  $\ell$ ، حيث من المعادلة (٣٢-٧) نجد أن

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

لكل قيمة  $\ell$  يتواجد فئة من القيم المنقطعة للمركبة- $z$  لكمية الحركة الزاوية، وهذه المركبة هي التي تحدد توجيه متجه كمية الحركة الزاوية بالطريقة المبينة بالباب السابق. هذا التوجيه يعين من العدد الكمي المغناطيسي<sup>(٤)</sup>

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

وهذا يعني أن عدد هذه المركبات يساوي  $(2\ell+1)$ ، كما أن قيمة كل مركبة تساوي

(1) quantum numbers (2) principal quantum number  
(3) orbital quantum number (4) magnetic quantum number



$$l_z = \hbar m$$

وقد أطلق على  $m$  اسم العدد الكمي المغناطيسي، نظرا لنتيجة تأثير القيم المختلفة للعدد  $m$  عند تطبيق مجال مغناطيسي خارجي، حيث نرى انقسام للحزمة الذرية التي كمية حركتها الزاوية محددة بالعدد  $l$  إلى عدد  $(2l+1)$  من الحزم. سنتعرض لدراسة هذه الظاهرة في البند ٨-١، بالباب الثامن.

الأعداد الكمية الثلاث  $n, l, m$  تعين دالة حالة مناسبة مستقلة لكل مستوى طاقة معين لوجود عدد معين من دوال الحالة المناسبة المستقلة لكل مستوى طاقة معين فإننا نطلق على هذه المستويات بأنها متفسخة<sup>(١)</sup>. أي أن كل مستوى طاقة يتركب من عدد معين من المستويات. درجة التفسخ هي عدد الحالات المناسبة المنتمية إلى هذا المستوى. فمثلا، لمستوى  $n$  درجة التفسخ تساوي

$$D_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

العلاقات المميزة للأعداد الكمية  $n, l, m$ ، بالإشتراك مع فكرة اللف الذاتي<sup>(٢)</sup> (المغزلية) تُكوّن الأساس الفيزيائي لوصف الجدول الدوري للعناصر، الذي سيأتي ذكره في البند ٨-٥.

#### ٧-٤ الدوال المناسبة

تكتب دوال الحالة المناسبة المساوية والمحددة بقيم  $n, l, m$ ، كما يلي:

$$u_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = N_{nl} u_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (٧-٣٤)$$

حيث  $N_{nl}$  هو معامل التسوية.

تبدو الدالة  $u_{nl}(r)$  بدلالة  $\rho$  في الصورة

(1) degenerate (2) intrinsic spin

$$u_{n,\ell}(r) = e^{-\rho/2} \rho^\ell L_{n,\ell}(\rho) \quad (35-7)$$

عديدات الحدود  $L$  معروفة باسم دوال لاجندر المصاحبة، وعادة ماتكتب في الشكل

$$L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$$

في المعادلة (35-7) يأتي معظم الاعتماد المحورى من المعامل الأسى.

بالتعويض من المعادلة (33-7) في المعادلة (17-7) نجد

$$\alpha_n = \frac{2Z}{a_0 n}, \quad \rho = \alpha_n r \quad (36-7)$$

وعليه تؤول الدالة المحورية إلى الشكل التقريبي (بإهمال المعامل  $o$  فى  $a_0$ )

$$u_n(r) \approx e^{-\rho/2} = \exp\left[-\frac{Zr}{an}\right] \quad (37-7)$$

فى الحالة الأرضية بذرة الهيدروجين ( $n=1; Z=1$ ) تُعطى المعادلة السابقة الدالة الأسية التناقصية،  $e^{-r/a}$  التى يعزو إليها انحصار الجسيم، بالتقريب، فى المنطقة المتاحة كلاسيكيا،  $r < a$  (انظر شكل 3-1). بذلك يحدث تخلل معتبر لحاجز الجهد بواسطة ذيل التوزيع الأسى<sup>(1)</sup>. بزيادة إثارة الجسيم يزداد معها قيمة  $n$  ويشيع تواجد الجسيم فى مدى أكبر على طول المسافة  $r$ . هذا يتفق مع اتساع مدى طاقة الوضع ومن ثم اتساع المنطقة المتاحة كلاسيكيا مع زيادة الطاقة.

بزيادة  $Z$  تُقيد حركة الجسيم فى مدى أصغر، كما يجب أن نتوقع. نظرا لأن  $a$  تتناسب عكسيا مع  $m_e$  (كتلة الجسيم المقيد) فإن الجسيم الأكبر ثقلا تُقيد حركته فى مدى أصغر. لذلك عند استبدال الإلكترون بميزون-<sup>(2)</sup>  $\mu$

(1) tail of the exponential distribution (2)  $\mu$ -meson

(انظر الجدول ١١-١) فإن مقياس النظام ككل يقل بقدر النسبة بين كتلة الإلكترون والميزون- $\mu$ . هذه النسبة تساوى حوالى 200 .

من الأمثلة البسيطة على دوال الحالة المساواة الدالتان

$$u_{100} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{Zr}{a} \right] \quad (٣٨-٧)$$

$$u_{200} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left( \frac{Z}{2a} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{Zr}{2a} \right) \exp \left[ -\frac{Zr}{2a} \right] \quad (٣٩-٧)$$

لهاتين الدالتين يتغير احتمال تواجد الجسيم عند نقطة الأصل بمقدار  $a^{-3}$  أو بمقدار  $m_e^3$  (a تتناسب عكسيا مع  $m_e$ ) ، حيث  $m_e$  هى كتلة الجسيم المقيد.

### ٧-٥ حركة مركز الكتلة<sup>(١)</sup>

حتى الآن تم التعامل مع النواة كجسيم ثابت فى مكانه ويتحرك حوله الإلكترون. فى حقيقة الأمر يوجد تفاعل متبادل بين النواة والإلكترون، ونتيجة لهذا التفاعل يتحرك النظام ككل بحرية.

كلاسيكيا، يمكن اختصار حركة تلك النظام إلى الحركة الحرة للكتلة الكلية للنظام، الممركزة عند مركز الكتلة، بالإضافة إلى الحركة النسبية<sup>(٢)</sup> المكافئة لحركة جسيم بكتلة مختصرة<sup>(٣)</sup> تحت تأثير طاقة وضع ثابتة. سوف نوضح الآن أن هذا التصور يسرى أيضا على الأنظمة الكمية.

نعتبر جسيمان إحداثيات كل منهما  $(x_1, y_1, z_1)$ ،  $(x_2, y_2, z_2)$ ، وكتلتيهما  $m_1, m_2$ ، على الترتيب. نفرض أن الجسيمين يتحركان تحت تأثير طاقة وضع تعتمد فقط على المسافة بينهما. يكتب الهاميلتونى لهذا النظام فى الصورة

(1) centre of mass motion (2) relative motion (3) reduced mass

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_{(1)}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_{(2)}^2 + V(x_1 - x_2) \quad (40-7)$$

والمعادلة التي تعطى مستويات الطاقة هي

$$\hat{H}(x_1, x_2)U(x_1, x_2) = E''U(x_1, x_2) \quad (41-7)$$

بإدخال المتغيرات

$$M = m_1 + m_2, \quad (42-7)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = M X, \dots, \text{ إلخ}, \quad (43-7)$$

$$x_1 - x_2 = x, \dots, \text{ إلخ}, \quad (44-7)$$

حيث  $(X, Y, Z)$  هي إحداثيات مركز الكتلة،  $(x, y, z)$  هي الإحداثيات النسبية.

حينئذ يكون

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} \quad (45-7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial X} \quad (46-7)$$

وبالمثل

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial X} \quad (47-7)$$

وعليه من السهل توضيح أن

$$\frac{1}{m_1} \nabla_{(1)}^2 - \frac{1}{m_2} \nabla_{(2)}^2 = \frac{1}{\mu} \nabla_x^2 + \frac{1}{M} \nabla_X^2 \quad (48-7)$$

حيث  $\mu$  هنا هي الكتلة المختصرة،

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (49-7)$$

باستخدام المتغيرات الجديدة تؤول معادلة شرودنجر إلى

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_X^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_x^2 + V(x) \right] U(x, X) = E''U(x, X) \quad (50-7)$$

ونظرا لأنه لا يوجد بداخل القوسين المربعين أى حد يعتمد على كل من  $X, x$  معا، فإننا نعتبر الحلول التى على الصورة

$$U(x, X) = u(x)w(X) \quad (٥١-٧)$$

بالتعويض من المعادلة (٥١-٧) فى المعادلة (٥٠-٧) والقسمة على  $u(x)w(X)$ ، نحصل على

$$\frac{1}{w(X)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_X^2 \right] w(X) + \frac{1}{u(x)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_x^2 + V(x) \right] u(x) = E'' \quad (٥٢-٧)$$

يجب أن يتغير الحدان الموجودان على يسار المعادلة مع تغير  $X$  أو  $x$ ، على الترتيب. وعليه لابد أن يساوى كل حد منهما مقدارا ثابتا، أى أن المعادلة تنجز إلى

$$\frac{1}{w(X)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_X^2 \right] w(X) = E'' - E = E' \quad (٥٣-٧)$$

$$\frac{1}{u(x)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_x^2 + V(x) \right] u(x) = E \quad (٥٤-٧)$$

مر علينا من قبل هاتين المعادلتين. فالمعادلة (٥٣-٧) هى ببساطة معادلة القدر المناسب للطاقة لجسيم كتلته  $M$  يتحرك بحرية. واضح هنا أن أطيايف الطاقة تظهر بصورة متصلة، كما فى الوضع الكلاسيكى، وذلك حتى يتحرك مركز الكتلة بحرية حاملا أى مقدار من الطاقة. أما المعادلة (٥٤-٧) فهى معادلة القدر المناسب للطاقة الخاصة بالحركة النسبية. كما فى الوضع الكلاسيكى فهى تكافىء معادلة القدر المناسب لجسيم بكتلة مساوية للكتلة المختصرة  $\mu$ ، ويتحرك تحت تأثير طاقة وضع ثابتة.

عند استبدال  $V$  بطاقة الوضع الكولومية فإن القيم المناسبة للطاقة، المعينة بالمعادلة (٥٤-٧)، تُعبر عن مستويات الطاقة الفعلية (نتيجة لأخذ

حركة النواة في الاعتبار) في ذرة الهيدروجين. نحصل على حل هذه المعادلة ببساطة من المعادلة (٧-٣٣) باستبدال  $m_e$  بالكمية

$$m_e \rightarrow \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

حيث  $m_p$  هي كتلة البروتون. هذا التصحيح صغير لدرجة أنه يدخل في نطاق الأخطاء التجريبية (انظر البند ٨-٦).

عملية تحليل المسألة بتلك الصورة، أى إلى حركة مركز الكتلة وحركة نسبية، له أهمية مطلقة عند دراسة عمليات التصادم (الاستطارة) التي سيرد ذكرها في الباب العاشر. من التعريف (٧-٤٩) يظهر جليا أن الكتلة المختصرة  $\mu$  تساوى إحدى كتلتى الجسيمين، وليكن مثلا تساوى  $m_1$ ، فى حالة ماتكون كتلة الجسيم الآخر  $m_2$  مساوية مالاانهاية. وعلى وجه العموم فإن تقربنا للمسألة على اعتبار أن أحد الجسيمين ثابت فى مكانه يعد من التقريبات الجيدة مادامت كتلة أحد الجسيمين (الهدف) كبيرة جدا بالنسبة للجسيم الآخر (المقذوف).

## ٦-٧ ملاحظات عامة

يعد استنتاجنا للمعادلة (٧-٣٣)، للحصول على مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين، خير برهان على صحة الصياغة التى قدمناها للتعامل مع ميكانيكا الأنظمة الكمية.

من الأهمية بمكان تكرار أن تصور بوهر غير متوافق تماما نظرا لأنه بنى على أساس إدخال بعض القواعد المبهمة على النظرية الميكانيكية الكلاسيكية. هذه القواعد لاتتفق على الإطلاق مع فحوى الفيزياء الكلاسيكية. أما الآن فقد وضعنا صياغتنا على أساس فيزيائى ثابت الدعائم،

طبقا لنظرية متوافقة تماما، حتى يتسنى لنا دراسة الأنظمة الصغيرة التي يتولد فيها اضطراب معتبر من جراء عمليات القياس.

بإعادة استنتاج هذه الصياغة الكمية على هذا الأساس نكون فى وضع يسمح لنا بتطبيق ميكانيكا الكم بمنتهى الثقة فى أى مجال يستحيل فيه إهمال قيمة ثابت بلانك. هذه المجالات تشمل علم الأطياف الذرية، والكيمياء ككل من ناحية المبدأ، وأيضا التركيب التفصيلى للمواد الصلبة شاملين خواصها الكهربائية والمغناطيسية، وحتى فى العمل الداخلى لأنوية الذرات كما سيأتى لاحقا.

## مسائل ٧

٧-١ دالة توزيع الاحتمال النسبى لقيمة كمية الحركة الخطية لذرة الهيدروجين فى حالتها الأرضية هى

$$P_{u_{100}}(p) = |\phi(p)|^2$$

حيث من المعادلتين (٣٩-٣)، (٣٨-٧)

$$\phi(p) = \iiint \exp[-i p \cdot r / \hbar] \exp[-r/a] r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

وضح أن

$$\phi(p) \approx \frac{1}{[p^2 + (\hbar/a)^2]^2}$$

(لتقييم التكامل اعتبر المحور z المناظر للمتجه r فى نفس اتجاه p. بذلك يكون التكامل على الزاويتين  $\varphi, \vartheta$  مماثل للتكامل الذى تم إجراؤه فى استنتاج المعادلة (٣١-١٠)، بالباب العاشر. يمكن إجراء التكامل على r المتبقى بالتجزئى ٠٤)

## الباب الثامن

### المغزلية والإحصاء<sup>(1)</sup>

#### ٨-١ تأثير زيمان<sup>(2)</sup>

نعتبر الحالة التي نضع فيها ذرة الهيدروجين بداخل مجال مغناطيسي ثابت وضعيف  $B$ . لدراسة التأثيرات الكمية لمثل هذا المجال يجب أن نضيف إلى مؤثر الطاقة (المسمى بالهاميلتونى) حدا يعبر عن طاقة التفاعل بين الذرة والمجال المغناطيسي. طبقا لمبدأ التناظر، ف(١)، (البند ٣-٣)، يعبر عن هذا الحد الجديد بنفس شكله الكلاسيكى.

للوصول إلى التعبير الذى يصف هذا الحد الجديد نفرض أن النواة ثابتة فى مكانها ويدور حولها الإلكترون فى مسار كلاسيكى دائرى. يُنظر إلى حركة الإلكترون الدائرية حول النواة كمسار مغلق للتيار. المسار المغلق للتيار يكافئ ثنائى قطب مغناطيسى<sup>(3)</sup> عزمه المغناطيسى  $\mu$  ( $\mu$  متجه عمودى على المستوى المغلق).

طاقة التفاعل تساوى

$$V_B = \mu \cdot B \quad (1-8)$$

إذا كان نصف قطر المسار الدائرى هو  $r$ ، وكمية حركة الإلكترون هى  $p$ ، فإن سرعة الإلكترون فى مداره تصبح مساوية  $p/m_e$ . وحيث أن شدة التيار الكهربى تعين بقيمة الشحنة التى تمر فى الثانية الواحدة على نقطة ثابتة فى المسار، فإن شدة التيار تساوى

(1) spin and statistics (2) Zeeman effect (3) magnetic dipole



$$j = \frac{e(p/m_e)}{2\pi r} \quad (2-8)$$

نحصل على العزم المغناطيسى الناتج عن الحركة الدائرية للشحنة من حاصل ضرب التيار فى المساحة التى يرسمها المسار المغلق، أى أن

$$|\mu| = \pi r^2 j \quad (3-8)$$

$$= \frac{e r p}{2 m_e} \quad (4-8)$$

ومنه

$$\mu = \frac{e}{2 m_e} r \wedge p = \frac{e}{2 m_e} \ell \quad (5-8)$$

حيث  $\ell$  هى كمية الحركة الزاوية. المعادلة (5-8) نتيجة عامة ليست مقيدة على المسارات الدائرية فقط. عندئذ تؤول طاقة التفاعل إلى

$$V_B = \frac{e}{2 m_e} B \cdot \ell \quad (6-8)$$

باستبدال  $\ell$  بالمؤثر الميكانيكى الكمى المناظر تصبح المعادلة (6-8) هى المعبرة عن طاقة التفاعل المطلوبة.

بأخذ المحور-z فى نفس اتجاه المجال المغناطيسى B فإن الهاميلتونى يساوى

$$\hat{H}_B = \hat{H} + \frac{e}{2 m_e} B \hat{\ell}_z \quad (7-8)$$

حيث  $\hat{H}$  هو الهاميلتونى للذرة الغير مضطربة المعطى بالمعادلة (7-16). فى وجود مجال مغناطيسى خارجى B، تعين مستويات الطاقة فى الذرة باستخدام الهاميلتونى الجديد (7-8)

$$\hat{H}_B u_n(r, \vartheta, \varphi) = E_n^B u_n(r, \vartheta, \varphi) \quad (8-1)$$

من الملاحظ أن الحد الإضافي بالهاميلتونى  $\hat{H}_B$  يحتوى فقط على المؤثر  $\hat{\ell}_z$ ، ونعلم من قبل أن دوال الحالات المناسبة للمؤثر  $\hat{H}$  هي أيضا دوال حالات مناسبة للمؤثر  $\hat{\ell}_z$ . هذا يعنى أن دوال الحالات المناسبة،  $u_n$ ، للمؤثر  $\hat{H}_B$  هي أيضا دوال حالات مناسبة للمؤثر  $\hat{H}$ . أطلقنا على هذه الدوال الرمز  $u_{n\ell m}$  بالبند ٧-٤. لهذا يكون

$$\begin{aligned} \hat{H}_B u_{n\ell m}(r, \vartheta, \varphi) &= \left[ \hat{H} + \frac{e}{2m_e} B \hat{\ell}_z \right] u_{n\ell m}(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \left( E_n + \frac{e}{2m_e} B \hbar m \right) u_{n\ell m}(r, \vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (9-8)$$

حيث  $E_n$  هي قيم مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين الغير مضطربة، المعادلة (٧-٣٣).

المعادلة (٩-٨) تعنى أنه لأى قيم معطاة  $n, \ell$  يوجد عدد  $2\ell+1$  من الحالات المختلفة. بطريقة أخرى نقول أن المستوى  $E_n$  قد انقسم الآن إلى عدد  $2\ell+1$  من المستويات المنفصلة. فرق الطاقة بين أى مستويين متتاليين يساوى

$$\Delta E = \frac{e \hbar B}{2m_e} \quad (10-8)$$

لوحظ هذا التأثير عمليا عند تطبيق مجال مغناطيسى خارجى. ومن هنا ندرك سبب إطلاق اسم العدد الكمى المغناطيسى على  $m$  بالبند ٧-٣.

طبقا للمعادلة (٩-٨) لانتوقع حدوث انقسام لمستوى طاقة الحالة الأرضية في ذرة الهيدروجين ( $n=1, \ell=0, m=0$ ). ومع ذلك فقد لوحظ عمليا انقسام هذا المستوى إلى اثنين من المستويات. إذا حاولنا تفسير هذا الانقسام

بنفس الأسلوب السابق فلا بد أن يكون الانقسام قد نشأ من كمية حركة زاوية  $z$ ، مثلاً، تحقق العلاقة

$$2z + 1 = 2$$

ومنه

$$z = 1/2 \quad (11-8)$$

إلا أننا قد بينا بالبواب السادس بوجه عام أن القيم المتاحة لكمية الحركة الزاوية المدارية تأخذ فقط أعداداً صحيحة، مما يناقض النتيجة السابقة. هذا يفرض علينا ضرورة إجراء بعض التعميم على صياغتنا الحالية. السبيل إلى ذلك هو إدخال نوع جديد من المؤثرات، ألا وهو المؤثرات المصفوفة<sup>(1)</sup>.

#### ٨-٢ المؤثرات المصفوفة

المصفوفة هي ترتيب لعدد  $(n \times m)$  من العناصر.  $n, m$  ممكن أن يأخذا أى مقادير. سنتعامل هنا بوضوح مع أبسط الحالات، وهى التى فيها  $n = m = 2$  لهذا

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{A}|1\rangle & \langle 1|\hat{A}|2\rangle \\ \langle 2|\hat{A}|1\rangle & \langle 2|\hat{A}|2\rangle \end{pmatrix} \quad (12-8)$$

الأعداد

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

تسمى عناصر المصفوفة<sup>(2)</sup>.

(1) matrix operators (2) matrix elements

الرمز  $|i\rangle$  يشير إلى الصف والرمز  $|z\rangle$  يشير إلى العمود الذي يظهر فيهما العنصر.

المؤثر المصفوف  $\hat{A}$  يؤثر على متجه عبارة عن عمود به  $n$  من الأعداد (المركبات). عندما  $n=2$  نكتب المتجه كالتالي:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|\psi\rangle \\ \langle 2|\psi\rangle \end{pmatrix} \quad (13-8)$$

بالتأثير بالمؤثر المصفوف  $\hat{A}$  على المتجه  $|\psi\rangle$  ينتج متجه جديد  $|\phi\rangle$

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle \quad (14-8)$$

تحدد مركبات المتجه  $|\phi\rangle$  من العلاقة

$$\sum_{j=1}^n \langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\psi\rangle = \langle i|\phi\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15-8)$$

تُعرَّف القيم المناسبة للمؤثر المصفوف  $\hat{A}$  (بطريقة تشبه تماما

المعادلة (7-2) بواسطة المعادلة

$$\hat{A}|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \quad (16-8)$$

حيث  $a_n, u_n$  هي القيم المناسبة والمتجهات المناسبة للمؤثر المصفوف  $\hat{A}$ ، على الترتيب.

إذا كان  $\hat{A}$  مصفوف قطري<sup>(1)</sup>

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (17-8)$$

من السهل، بالتعويض في المعادلة (16-8)، التأكد من أن  $a_1, a_2$  هي القيم

المناسبة المنتمية للمتجهات المناسبة

(1) diagonal matrix

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18-8)$$

حاصل ضرب أى مصفوف  $\hat{A}$  فى عدد  $c$  يولد مصفوفاً جديداً، كل عنصر فيه عبارة عن العنصر المناظر فى المصفوف  $\hat{A}$  مضروباً فى  $c$ ،

$$\langle i|c\hat{A}|j\rangle = c\langle i|\hat{A}|j\rangle \quad (19-8)$$

حاصل ضرب مصفوفان  $\hat{A}$  ،  $\hat{B}$  على النظم ( $n \times n$ ) عبارة عن مصفوف على النظم ( $n \times n$ ) أيضاً

$$\hat{A} \hat{B} = \hat{C} \quad (20-8)$$

حيث عناصر المصفوف  $C$  هى

$$\langle i|\hat{C}|j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle i|\hat{A}|k\rangle \langle k|\hat{B}|j\rangle \quad (21-8)$$

من خواص المصفوفات نرى، كما فى المؤثرات التفاضلية (انظر

المعادلتين (2-13)، (2-14))، أنه بوجه عام يكون

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0 \quad (22-8)$$

يتميز مصفوف الوحدة  $I$  بأن كل عناصره تساوى الصفر، ماعدا

العناصر القطرية فكل منها يساوى الواحد الصحيح،

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23-8)$$

مرة ثانية، من السهل التأكد، مستخدمين المعادلة (8-12)، أنه لأى

مصفوف  $\hat{A}$  يكون

$$\hat{A} \hat{I} = \hat{I} \hat{A} = \hat{A} \quad (24-8)$$

يعد هذا مثالا على معادلة المؤثر المصفوف، المشابهة للمعادلة (2-17)،

التي تطبق مباشرة على المؤثرات ولا تعتمد على شكل المتجه الذى تؤثر

عليه.

لكل متجه  $|\psi\rangle$  يوجد متجه مصاحب<sup>(1)</sup>  $\langle\psi|$  ، الذى له المركبات

$$\langle\psi|i\rangle \equiv \langle i|\psi\rangle^* \quad (25-8)$$

حاصل الضرب القياسى لمتجهين هو

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^n \langle\phi|i\rangle \langle i|\psi\rangle \quad (26-8)$$

يقال أن متجهين متعامدان<sup>(2)</sup>، إذا كان

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0 \quad (27-8)$$

ويقال أن المتجه مُسَوَّى عندما يكون

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^n \langle\psi|i\rangle \langle i|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^n |\langle i|\psi\rangle|^2 = 1 \quad (28-7)$$

واضح أن المؤثرات المصفوفة تتمتع بكل الخواص العامة للمؤثرات التفاضلية ، المذكورة بالباب الثانى، ويمكن استخدامها لوصف عمليات الملاحظة بالطريقة المقدمة بالباب الثالث. على وجه الخصوص نستطيع تطبيق البند ٢-٣ بكامله، دون أدنى تغيير، ماعدا المعادلة (١-٣) التى نكتبها الآن على النحو

$$\bar{a}_\psi = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle\psi|i\rangle \langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\psi\rangle}{\sum_{i=1}^n \langle\psi|i\rangle \langle i|\psi\rangle} \quad (29-8)$$

وهذا يعد تعميما واضحا، وخصوصا فى ضوء المعادلة (٢٥-٨).

### ٣-٨ المغزلية

من التعريفات الخاصة بمؤثرات كمية الحركة الزاوية، المعطاة بالبند

(1) adjoint vector (2) orthogonal

٦-١، نجد أن علاقات المبادلة تؤول إلى

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar; [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{y}] = 0; \dots, \text{ إلخ } \quad (٣٠-٨)$$

ومنه (المسألة ٦-١)

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar \hat{l}_z; [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hbar \hat{l}_x; [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hbar \hat{l}_y \quad (٣١-٨)$$

علاقات المبادلة هذه هي الخاصية المُعرّفة لأي كمية حركة زاوية.

نعتبر الآن المصفوفات

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (٣٢-٨)$$

المسماة بمصفوفات اللف لباولي<sup>(١)</sup>. باستخدام تعريفات الباب السابق يمكن

التأكد من أن المصفوفات

$$\hat{l}_x = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x; \hat{l}_y = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_y; \hat{l}_z = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_z \quad (٣٣-٨)$$

تحقق علاقات المبادلة (٣١-٨)، كما يمكن التأكد مباشرة من صحة العلاقة

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (٣٤-٨)$$

وكذلك من صحة العلاقات

$$[\hat{l}_x, \hat{l}^2] = [\hat{l}_y, \hat{l}^2] = [\hat{l}_z, \hat{l}^2] = 0 \quad (٣٥-٨)$$

من المعادلتين (١٧-٨)، (١٨-٨) نجد أن القيم المناسبة للمؤثر المصفوف

هي  $\hat{l}_z$

$$\pm \frac{1}{2} \hbar \quad (٣٦-٨)$$

التي تنتمي إلى متجهات الحالات المناسبة

(1) Pauli spin matrices

$$|u_{+1/2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_{-1/2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37-8)$$

وهما أيضا متجهان مناسبان للمؤثر  $\hat{L}^2$ . عند التأثير بهذا المؤثر على أى من هذين المتجهين نحصل على النتيجة

$$\hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \quad (38-8)$$

العلاقتان (36-8)، (38-8) هما على وجه التحديد العلاقتان (36-6)، (37-6) التى حددنا فيها الأعداد الكمية لكمية الحركة الزاوية بالباب السادس. إلا أننا عند دراستنا لكمية الحركة الزاوية المدارية قيدنا القيم المتاحة للأعداد الكمية  $m, \ell$  على الأعداد الصحيحة فقط.

أخذين فى الاعتبار علاقات المبادلة (31-8) كخاصية مُعرِّفة لكميات الحركة الزاوية، والسماح بتمثيل المؤثرات بمصفوفات نلاحظ أننا لانستطيع تغطية إتاحة أن تأخذ الأعداد الكمية  $m, \ell$  القيم

$$\ell = 1/2; \quad m = \pm 1/2 \quad (39-8)$$

نظرا لأن أنصاف القيم الصحيحة لاتصاحب الحركة الزاوية المدارية فلا بد أنها تصاحب حركة زاوية أخرى نطلق عليها اسم الحركة الزاوية الذاتية (المغزلية) للجسيمات نفسها. وعلى وجه الخصوص فإن الإلكترون يجب أن تكون مغزليته مساوية  $\frac{1}{2} \hbar$  (عندما نقول أن مغزلية الإلكترون هى  $s \hbar$  فهذا يعنى أن كمية حركته الزاوية المغزلية تساوى  $\sqrt{s(s+1)} \hbar$  أى

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} \hbar \right) \text{ تساوى لإلكترون واحد}$$



على ذلك فبالإضافة إلى المعامل  $\psi(r, \theta, \varphi)$  الذى نعين بواسطته التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ يجب على دالة حالة الإلكترون أن تحتوى أيضا على المعامل

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (٤٠-٨)$$

المعبر عن حركة الإلكترون الذاتية. ومن هنا يصبح احتمالى أن تأخذ المركبة z لكمية الحركة الزاوية الذاتية القيمتين  $S_z = \pm 1/2 \hbar$  مساويان (بتعميم المعادلة (٣٩-٣))

$$P_\psi(+1/2) = \left| \sum_{i=1}^2 \langle u_{+1/2} | i \rangle \langle i | \psi \rangle \right|^2 \quad (٤١-٨)$$

$$= a^2$$

$$P_\psi(-1/2) = b^2 \quad (٤٢-٨)$$

وشرط التسوية هو

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \psi | i \rangle \langle i | \psi \rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (٤٣-٨)$$

هذا يؤكد أن مجموع الاحتمالين الممكنين للحركة المغزلية يساوى الواحد الصحيح، كما يجب أن يكون.

عند هذه المرحلة من الأنسب تعديل بعض الرموز التى أدخلناها من قبل، وذلك بغرض التبسيط. فبدلا من  $|u_{\pm 1/2}\rangle$  نكتب  $|\pm 1/2\rangle$  للإشارة إلى المتجهين المناسبين للمغزلية الذى ينتمى إليهما القيم المناسبة للمصفوف القطرى  $\hat{l}_z$  (أو  $1/2 \hat{\sigma}_z$ ). لهذا فإن معادلة القدر المناسب تصبح كما يلى:

$$1/2 \hat{\sigma}_z |\pm 1/2\rangle = \pm 1/2 |\pm 1/2\rangle \quad (٤٤-٨)$$

زيادة على ذلك فإننا نستخدم الرمزين  $\pm 1/2$  للإشارة إلى الصفوف أو الأعمدة التي تظهر بها كقيم مناسبة، أي أن

$$\langle 1|\psi\rangle \equiv \langle +1/2|\psi\rangle \quad (٤٥-٨)$$

$$\langle 2|\psi\rangle \equiv \langle -1/2|\psi\rangle$$

على ضوء الرموز سالفة الذكر نكتب المعادلة (٤١-٨) كالتالي:

$$P_{\psi}(+1/2) = |\langle +1/2|\psi\rangle|^2 \quad (٤٦-٨)$$

لتصبح قريبة الشبه بالمعادلة (٣٨-٣).

هذه الرموز متوافقة تماما مع الرموز القديمة. فعلى سبيل المثال

المعادلة

$$\langle +1/2|-1/2\rangle = 0 \quad (٤٧-٨)$$

تؤدي طبقا للرموز القديمة إلى تلاشي المركبة الأولى للمتجه  $|u_{-1/2}\rangle$

$$\langle 1|u_{-1/2}\rangle = 0 \quad (٤٨-٨)$$

وتؤدي أيضا إلى أن حاصل الضرب القياسي للمتجهين  $|u_{+1/2}\rangle$ ،  $|u_{-1/2}\rangle$

يساوى صفرا

$$\langle u_{+1/2}|u_{-1/2}\rangle = 0 \quad (٤٩-٨)$$

وهاتان النتيجةتان صحيحتان.

والآن نكتب المركبة-z لكمية الحركة الزاوية الكلية<sup>(1)</sup>، لإلكترون في

ذرة ما، على النحو

$$\hat{j}_z = \hat{\ell}_z + \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z \quad (٥٠-٨)$$

(1) total angular momentum

حيث  $\hat{l}_z$ ،  $1/2 \hbar \hat{\sigma}_z$  هما المساهمة من الحركتين المدارية والمغزلية، على الترتيب. على أية حال فإن الوضع الجديد لا يؤثر على حساب مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين، وذلك لأن الهاميلتوني لا يعتمد على المؤثرات الخاصة بالحركة المغزلية. ومع ذلك يوجد اثنان من دوال الحالة المناظرة للحالة الأرضية  $E_1$ ، وهما

$$u_{100}(r)|+1/2\rangle ; u_{100}(r)|-1/2\rangle \quad (٥١-٨)$$

تمدنا الحركة المغزلية بالأساس لفهم انقسام زيمان<sup>(١)</sup> للحالة الأرضية في ذرة الهيدروجين. لتمام التوافق مع النتائج المعملية لا بد من استبدال الهاميلتوني (٧-٨) بالهاميلتوني الجديد

$$\hat{H}_\sigma = \hat{H} + \frac{e}{2m_e} B (\hat{l}_z + \hbar \hat{\sigma}_z) \quad (٥٢-٨)$$

دالتا الحالة المناسبان (٥١-٨) هما أيضا دالتان مناسبتان للنظام الجديد (الهاميلتوني (٥٢-٨)) وذلك لأن متجهي المغزلية  $|u_{\pm 1/2}\rangle$  يعتبران متجهي حالة مناسبان للمؤثر  $\hat{\sigma}_z$ .

لهذا النظام الجديد تبدو مستويات الطاقة المناظرة في الصورة

$$E_1^\sigma = E_1 \pm \frac{e\hbar}{2m_e} B \quad (٥٣-٨)$$

الحد الإضافي  $\pm \frac{e\hbar}{2m_e} B$  نشأ نتيجة للتأثير بالمؤثر

$$\frac{e\hbar}{2m_e} B \hat{\sigma}_z$$

(1) Zeeman splitting

على متجهى الحالة المغزلية المناسبين  $\langle \pm 1/2 \rangle$ . هذا يمدنا بالانقسام المطلوب للحالة الأرضية إلى اثنين من المستويات التى فرق الطاقة بينهما يساوى

$$\Delta E = \frac{e\hbar B}{m_e} \quad (٥٤-٨)$$

متوافقا مع النتائج التجريبية.

من المهم ملاحظة أنه للحصول على توافق عددى مع القياسات التجريبية لم نقم باستبدال المؤثر  $\hat{l}_z$  المتواجد فى المعادلة (٧-٨) بالمؤثر  $\hat{j}_z$  المعطى بالمعادلة (٥٠-٨). لا يحتوى الحد المعبر عن المغزلية بالمعادلة (٥٢-٨) على المعامل  $1/2$ ، وهذا ما يعرف بالشذوذ المغناطيسى للمغزلية<sup>(١)</sup>. نظرا لأن الكمية  $e\hbar/(2m_e)$  (المسماة ماجنيتون بوهر<sup>(٢)</sup>) تضرب فى المجال B للحصول على التغير الملحوظ فى الطاقة، فهذا يعنى أنها تشير إلى العزم المغناطيسى للإلكترون

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (٥٥-٨)$$

#### ٨-٤ الإحصاء ومبدأ الاستبعاد

عند دراسة ميكانيكية شينين متماثلين<sup>(٣)</sup>، كلاسيكيا، ككرتى بلياردو، يفترض دائما أنه يمكن الإشارة لهذين الشينين، على سبيل المثال، بالطريقة التى يمكن بها التمييز بين الحالة الفيزيائية التى فيها "الكرة الأولى هنا والثانية هناك" والحالة التى فيها "الكرة الثانية هنا والأولى هناك". أما فى ميكانيكا الكم فيفترض أنه للجسيمات الكمية، كالإلكترونات، لا يمكن إجراء هذا التمييز.

(1) magnetic anomaly of the spin (2) Bohr magneton (3) two identical objects

نظرا لعدم إمكانية التمييز بين الجسيمات فى عملية قياس الطاقة فلا بد أن يكون الهاميلتونى متماثلا بالنسبة لعملية تبادل<sup>(1)</sup> أى جسيمين لموضعيهما. كذلك، بمعلومية دالة الحالة لاثنين من الإلكترونات يمكن معرفة احتمال أن يكون، مثلا، إلكترون هنا وآخر هناك، إلا أننا لانستطيع معرفة لأى من هذين الإلكترونين هذا الاحتمال. بطريقة أخرى لا يمكن معرفة أيهما كان هنا والآخر هناك. لهذا فإن الكثافة الاحتمالية لا تتغير أيضا عند تبادل اثنين من الجسيمات لموضعيهما.

على فرض أن  $x_1$  هى الإحداثيات العامة لأحد الجسيمين (يجب أن تشمل هذه الإحداثيات عملية اللف الذاتى)،  $x_2$  هى الإحداثيات العامة للجسيم الآخر نرى أن، من المفاهيم السابقة، دالة الحالة تحقق العلاقة

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = |\Psi(x_2, x_1)|^2 \quad (٥٦-٨)$$

ومنه

$$\Psi(x_1, x_2) = \pm \Psi(x_2, x_1) \quad (٥٧-٨)$$

اختيار الإشارة السالبة أو الموجبة يتوقف على نوع الجسيمات. للإلكترونات تكون الإشارة دائما سالبة. هذا يعنى أن دالة الحالة الواصفة لاثنين من الإلكترونات متماثلة ضديدا مع دالة الحالة الواصفة لهما بعد تبادل موضعيهما. وعندئذ يقال أن الإلكترونات تحقق إحصاء فيرمى-ديراك<sup>(2)</sup>. من الناحية الأخرى، دالة الحالة الواصفة لاثنين من الفوتونات تكون إشارتها دائما موجبة، أى أن الدالة متماثلة بالنسبة لعملية تبادل المواضع. ويقال حينئذ أن الفوتونات تحقق إحصاء بوز-أينشتين<sup>(3)</sup>.

(1) exchange (2) Fermi-Dirac statistics (3) Bose-Einstein statistics

نتعرف على نوع تماثل الحالات التي تصف أكثر من اثنين من الجسيمات بطرق معقدة بعض الشيء، وقد وجد أن هذه الحالات تكون إما متماثلة أو متماثلة ضديديا عند تبادل أى جسيمين لموضعيهما.

نفرض أن دالة الحالة لنظام من الإلكترونات يمكن تكوينها من حاصل ضرب دوال الحالة التي تصف كل إلكترون على حده. نظرا لتماثل الهاميلتونى فإن فئة دوال الحالة الممكنة

$$\psi_{\alpha}(x), \psi_{\beta}(x), \dots$$

يجب أن تتشابه لجميع الجسيمات. لاثنتين فقط من الإلكترونات فإن دالة الحالة يجب أن تساوى

$$\Psi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} [\psi_{\alpha}(x_1)\psi_{\beta}(x_2) - \psi_{\beta}(x_1)\psi_{\alpha}(x_2)] \quad (58-8)$$

ولعدد n من الإلكترونات تظهر دالة الحالة على شكل محددة

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(x_1) & \psi_{\beta}(x_1) & \dots & \psi_{\gamma}(x_1) \\ \psi_{\alpha}(x_2) & \psi_{\beta}(x_2) & \dots & \psi_{\gamma}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{\alpha}(x_n) & \psi_{\beta}(x_n) & \dots & \psi_{\gamma}(x_n) \end{vmatrix} \quad (59-8)$$

دالتا الحالة (58-8)، (59-8) لهما نفس التماثل الضديدي المطلوب. ذلك لأن تبادل أى زوج من الجسيمات لموضعيهما يكافىء تبادل صفين من المحددة، وهذا بدوره يؤدي إلى تغيير إشارتها.

من النتائج المهمة لما سبق ذكره عدم إمكانية تواجد إلكترونين بنفس الحالة، ( $\Psi_{\alpha} \neq \Psi_{\beta}$ )، وإن لم يكن هذا هو الحال تكون دالة الحالة  $\Psi$  مساوية

للصفر. هذا واضح في المعادلة (٨-٥٨)، ومتحقق أيضا في المحددة (٨-٥٩) نظرا لأن تساوى حالتان يعنى تساوى عمودان مما يجعل قيمة المحددة مساوية للصفر. تُعرف القاعدة التي تنص على عدم وجود إلكترونين بنفس الحالة بمبدأ الاستبعاد لباولي.

للفوتونات أو لأي جسيمات أخرى تتبع إحصاء بوز-أينشتين (أى دوال حالاتها متماثلة) نحصل على نفس تراكب المعاملات تماما كما في المعادلة (٨-٥٩)، إلا أن جميع الإشارات تكون موجبة. فى مثل هذه الأحوال يمكن لأى عدد من الجسيمات أن تتواجد بنفس الحالة.

كلاسيكيا، يمكن النظر إلى الحالات  $\Psi_\alpha$  المختلفة على أنها هي المحددة للمسارات الممكنة للجسيمات. لهذا الحال نجد أن كل حد من التعبيرات السابقة يعبر عن وضع ممكن تمييزه كلاسيكيا. تعرف عملية حساب عدد الحالات المختلفة هذه لنظام معين باسم الإحصاء الكلاسيكى<sup>(1)</sup>، أو إحصاء بولتزمان<sup>(2)</sup>.

الطرق المتعددة لحساب عدد الحالات التي يمكن تمييزها، فى الأنظمة عديدة الجسيمات، تتمخض عن نتائج لها أهمية كبيرة فى الميكانيكا الإحصائية. نستطيع توضيح ذلك باعتبار نظام بسيط مكون من جسيمين 2,1 فى الحالتين  $\Psi_\alpha, \Psi_\beta$ .

الحالات التي يمكن تمييزها هي:

أ - طبقا للإحصاء الكلاسيكى

(1) classical statistics (2) Boltzman statistics

$$\begin{aligned} & \psi_{\alpha}(1)\psi_{\alpha}(2) \\ & \psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2) \\ & \psi_{\beta}(1)\psi_{\alpha}(2) \\ & \psi_{\beta}(1)\psi_{\beta}(2) \end{aligned} \quad \text{(أربع حالات)}$$

ب - طبقاً لإحصاء فيرمي

$$\psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2) - \psi_{\beta}(1)\psi_{\alpha}(2) \quad \text{(حالة واحدة)}$$

ج - طبقاً لإحصاء بوز

$$\begin{aligned} & \psi_{\alpha}(1)\psi_{\alpha}(2) \\ & \psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2) + \psi_{\beta}(1)\psi_{\alpha}(2) \\ & \psi_{\beta}(1)\psi_{\beta}(2) \end{aligned} \quad \text{(ثلاث حالات)}$$

عند درجات الحرارة العالية تتساوى احتمالات تواجد كل الحالات الممكنة لكل نوع من هذه الإحصاءات.

في إحصاء فيرمي لا يوجد أي إمكانية لتواجد الجسيمات في نفس الحالة (مبدأ الاستبعاد). أما في إحصاء بوز فإن احتمال تواجد جسيमान بنفس الحالة يساوي  $2/3$ ، وللإحصاء الكلاسيكي هذا الاحتمال يساوي  $1/2$ . لهذا فإن إحصاء فيرمي يمنع الجسيمات من التواجد في نفس الحالة، أي يجعلها متباعدة بعضها عن بعض. نظراً لأن إحصاء بوز يرفع احتمال تواجد الجسيمات بنفس الحالة بالمقارنة بالإحصاء الكلاسيكي فإنه إذا يحافظ على الجسيمات مجتمعة (أي مقتربة بعضها من بعض).

٨-٥ التركيب الذري<sup>(1)</sup>

(1) atomic structure



من أهم النتائج المترتبة على كل من مبدأ الاستبعاد، وشكل مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين، وفكرة المغزلية الإلكترونية، هو تفسير الجدول الدوري للعناصر<sup>(1)</sup> الذي يعتبر الأساس في دراسة الكيمياء. نعتبر التركيب الذري لذرة شحنة نواتها  $Z$ ، أى تحتوى على عدد  $Z$  من الإلكترونات. تبعا لمبدأ الاستبعاد لايتواجد اثنين من الإلكترونات بنفس الحالة. إلا أنه في الحالة  $u_{nlm}$  يوجد اتجاهان للمغزلية،  $|\pm 1/2\rangle$ ، وعليه يمكن أن يتواجد اثنين من الإلكترونات في الحالة المحددة بالأعداد الكمية  $n, l, m$ .

نظرا لأن الإلكترونات في حالاتها المثارة تبعث إشعاعا، فإنه بمرور الوقت تنتقل الإلكترونات إلى مستويات أقل في الطاقة حتى تشغل كل الحالات المتاحة لهذه المستويات. تظهر فكرة الجدول الدوري نتيجة لأن العناصر التى تحتوى على عدد كاف من الإلكترونات لشغل كل الحالات المتاحة لمستوى الطاقة  $n$ ، مثلا، تُكوّن غلافا مغلقا<sup>(2)</sup>، ويطلق على هذه العناصر كيميائيا أنها أنظمة خاملة (الغازات الخاملة). إتاحة اتحاد أى عنصر بآخر يتحدد منه الخواص الكيميائية لهذا العنصر، وهذا يرتبط مباشرة بعدد الإلكترونات التى تزيد أو تقل عن عدد الإلكترونات بالغلاف المغلق. لذلك فإن العناصر التى بها إلكترون واحد فقط خارج الغلاف المغلق تسمى بالعناصر القلوية<sup>(3)</sup> كالليثيوم والصوديوم. هذه العناصر نشطة جدا عند التفاعل وتتحد بسهولة مع الهالوجينات<sup>(4)</sup>، على وجه الخصوص ، وتكوّن

(1) periodic table of the elements (2) closed shell

(3) alkali metals (4) halogens

على سبيل المثال كلوريد الصوديوم. الهالوجينات هي العناصر التي يقل فيها عدد الإلكترونات بمقدار إلكترون واحد عن العدد المتاح بالغلاف المغلق.

الصورة المثالية التي عرضناها هنا تتعدّد عندما نأخذ في الاعتبار التناظر الكولومي بين الإلكترونات المختلفة. التفاصيل النظرية للتركيب الذري والكيمياء الفيزيائية الكمية من المواضيع التي تتسم بمجالاتها المتسعة ولن نذكر عنها هنا أكثر من ذلك. غير أن هذه المواضيع لا تشمل على أي مبادئ أساسية أكثر مما درسناه حتى الآن.

#### ٨-٦ عرض للتطورات الإضافية

نشأت كل التطورات الإضافية التي ظهرت في نظرية التركيب الذري نتيجة للدراسات التفصيلية لمستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين. سنلقى هنا إشارة فقط على هذه التطورات.

في الجزء الأول من الكتاب طورنا الأساليب لصياغة نظرية ميكانيكية كمية من النظرية الكلاسيكية المعروفة. أصبحت المتغيرات الكلاسيكية مؤثرات كمية تُعَيّن من علاقات المبادلة فيما بينها، وقد طبق هذا السلوك على الأنظمة الميكانيكية. نستطيع أيضا تطبيق هذا السلوك على نظرية ماكسويل للإشعاع المذكورة بالبند ١-١. النظرية الكمية للإشعاع تؤكد فرض بلانك الذي من خلاله ننظر إلى طاقة الإشعاع على أنها تجمع لجسيمات (فوتونات) كتلتها مساوية للصفر، كما أن الطاقة ترتبط بالتردد عن طريق المعادلة (١-٩).

عند تفاعل الإشعاع مع الإلكترونات يتم انبعاث أو امتصاص فوتونات.  
احتمال الانبعاث، الذى يعد مقياسا لشدة التفاعل<sup>(1)</sup>، يتناسب مع ثابت  
التركيب الدقيق  $\alpha$ ،

$$\alpha \equiv \frac{e_M^2}{\hbar c} = 1/137 \quad (60-8)$$

هذا الثابت عبارة عن كمية ليس لها أبعاد ويتكون كما نرى من الثوابت  
الفيزيائية الأساسية  $e, \hbar, c$ .  
نظرا لأن نظرية ماكسويل تستوفى متطلبات النظرية النسبية الخاصة<sup>(2)</sup>،  
فإن نظرية الإشعاع المذكورة تعد نظرية كمية نسبية.

الخطوة المنطقية التى تلى ذلك هى عملية تعديل معادلة شرودنجر  
لذرة الهيدروجين لى تتوافق مع النظرية النسبية الخاصة، وقد تم ذلك  
بواسطة ديراك<sup>(3)</sup> سنة ١٩٢٨. تبين لنا معادلة ديراك أن متطلبات النسبية  
التى ندخلها على النظرية الكمية لذرة الهيدروجين لها النتائج التالية:

أ - للإلكترون مغزلية ذاتية مساوية  $1/2 \hbar$ .

ب - تعطى طاقة التفاعل مع مجال مغناطيسى خارجى بالهاميلتونى (٨-  
٥٢) (وهذا يفسر الشذوذ المغناطيسى للمغزلية).

ج - نتيجة للتركيب الدقيق تُدخَل تصحيحات على معادلة بوهر التى تعطى  
مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين. المستوى الذى كنا نرسم له بالرمز  $n$   
ينقسم طبقا لهذا التصحيح إلى عدد  $n$  من المستويات المختلفة، التى يشار  
إليها بالمعادلة

(1) strength of the interaction (2) special theory of relativity (3) Dirac

$$E_{n,j} = E_n \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (61-8)$$

حيث كمية الحركة الزاوية الكلية ز يمكن أن تأخذ القيم

$$j + \frac{1}{2} = 0, 1, 2, \dots, n \quad (62-8)$$

وكمية الحركة الزاوية المدارية تساوى

$$l = j \pm \frac{1}{2} \quad (63-8)$$

د - يوجد قرين موجب الشحنة للإلكترون، وهو المسمى بضديد الإلكترون<sup>(1)</sup> أو البوزيترون<sup>(2)</sup>.

النتيجتان أ، ب معلومتان من قبل ولكن أدخلتا على النظرية الغير نسبية ليتم التوافق مع النتائج التجريبية. معادلة ديراك توضح أن هاتين النتيجتين ضروريتان لأسباب جوهرية.

معادلة التركيب الدقيق (61-8) تتفق مع التجارب العملية. استنتج سمرفيد<sup>(3)</sup> تلك المعادلة سنة ١٩١٨ مستخدماً النظرية الكمية القديمة، وقد فُسرَت الأعداد الكمية بهذه المعادلة وقتذاك تفسيراً خاطئاً.

كانت النتيجة د مجرد اقتراح ثم تحقق بعد ذلك بالعديد من التجارب العملية.

ينشأ التأثير الكهرومغناطيسى الوحيد فى معادلتى ديراك وشروندجر لذرة الهيدروجين من طاقة التفاعل الكولومى بين البروتون والإلكترون. إلا أن حركه الإلكترون معجلة فى مداره، وبالتالي فهو مصدر للإشعاع الذى

(1) anti-electron (2) positron (3) Sommerfeld

يتفاعل بدوره مع الإلكترون نفسه. هذا يؤدي إلى انقسام إضافي لمستويات الطاقة المتحللة من قبل طبقاً لمعادلة التركيب الدقيق (٨-٦١). كان لامب<sup>(١)</sup> أول من قام بقياس هذا النوع من الانقسام سنة ١٩٤٧، وهذا ما يعرف بإزاحة لامب<sup>(٢)</sup>.

ظهر تأثير مشابه لما سبق عند تحريك إلكترون في مجال مغناطيسى. مرة ثانية، يتفاعل الإشعاع الصادر من الإلكترون مع الإلكترون نفسه مما يحتم إدخال تصحيح للعزم المغناطيسى للإلكترون، كما ذكرنا بالمعادلة (٨-٥٥). حسبت هذه التصحيحات حتى الرتبة  $\alpha^2$  وقد ظهر أنها متفقة تماماً مع النتائج التجريبية.

نقدم هنا التصحيحات المختلفة لمعادلة بوهر. حسبت هذه التصحيحات بدقة كبيرة جداً، وهى معطاة نسبة إلى طاقة ربط الحالة الأرضية بذرة الهيدروجين.

١- التصحيح المناظر لارتداد البروتون (انظر البند ٧-٥)

$$\frac{\Delta E_{\text{recoil}}}{|E_1|} \cong \frac{m_e}{m_p} \cong 10^{-3}$$

٢- التصحيح المناظر للتركيب الدقيق، المُعرّف بالمعادلة (٨-٦١)

$$\frac{\Delta E_{\text{fs}}}{|E_1|} \cong \alpha^2 \cong 10^{-4}$$

٣- التصحيح المناظر لإزاحة لامب

$$\frac{\Delta E_L}{|E_1|} \cong \alpha^3 \cong 10^{-6}$$

حيث طاقة ربط الحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين تساوى

(1) Lamb (2) Lamb shift

$$|E_1| = 13.605 \text{ eV}$$

وفى صورة التردد هذا المقدار يساوى واحد ريدبرج<sup>(1)</sup> (الريدبرج وحدة لقياس الطاقة)

$$R_{\infty} = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar} = 3.28985 \times 10^{15} \text{ cycles/sec}$$

$$= 3.28985 \times 10^9 \text{ Mc/sec}$$

الانقسام، المناظر للتركيب الدقيق، بين المستويين  $2P_{1/2}(n=2, \ell=1, j=1/2)$ ؛  $2P_{3/2}(n=2, \ell=1, j=3/2)$  (تتحلل المستويات تبعا للمعادلة (٦١-٨) )

$$\Delta E_{\beta} (2P_{1/2} - 2P_{3/2}) = 1.10 \times 10^4 \text{ Mc/sec}$$

وإزاحة لامب بين المستويين  $2S_{1/2}$ ؛  $2P_{1/2}$ ، التى تتحلل تبعا للمعادلة (٨-٦١)، تساوى

$$\Delta E_L (2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 1.057 \times 10^3 \text{ Mc/sec}$$

نظرا لأن دقة هذا المقدار تبلغ حتى جزء واحد من الميجاسيكل، فإن القياسات العملية والحسابات النظرية تتوافق حتى جزء من بليون من طاقة ربط الحالة الأرضية.

## ٨ مسائل

٨-١ وضح أن مصفوفات اللف لباولى، المعادلة (٨-٣٢)، تحقق العلاقات

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z ,$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x ,$$

$$\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y .$$

(1) Rydberg

٢-٨ المعاملان الزاوى والمغزلى فى دالة حالة إلكترون ما هما

$$\psi(\vartheta, \varphi) | \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0 \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1 \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

بين أن التوزيع الزاوى، بعد الجمع على كلا اتجاهى المغزلية، يكون موحد الخواص<sup>(1)</sup> فى جميع الاتجاهات (أى أن التوزيع الزاوى يكون متماثلاً).

---

(1) isotropic

**الجزء الثالث**  
**الفيزياء النووية**

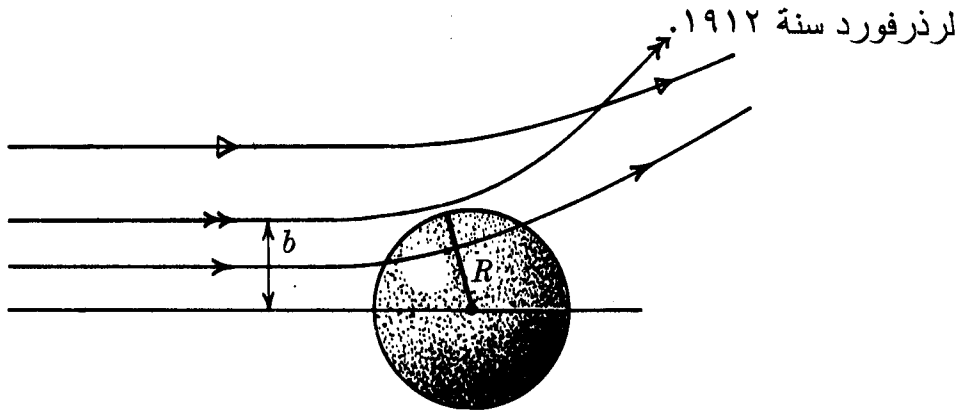


## الباب التاسع

### استطارة رذرفورد وتحلل-ألفا<sup>(1)</sup>

#### ١-٩ استطارة رذرفورد

دعنا نوجه اهتمامنا الآن إلى أنوية<sup>(2)</sup> الذرات. من أول الأشياء التي نود معرفتها عنها هو حجمها، وقد تم ذلك من خلال التجربة الكلاسيكية



شكل ١-٩ توضيح الانحراف الناتج عن توزيع شحنة ممتدة نصف قطرها  $R$ ، ولمسارات متعددة ومختلفة في قيمة بارامتر الصدمة لها  $b$ . أكبر انحراف يحدث للمسار الذي يمس تقريبا حافة توزيع الشحنة، أي عندما يكون  $R \cong b$ .

تهدف التجربة إلى دراسة الانحرافات الناشئة في مسارات جسيمات ألفا عند مرورها خلال رقيقة رقيقة من الذهب. يفترض في هذه التجربة أن أكبر الانحرافات تنشأ بسبب التناثر الكولومي بين جسيمات ألفا (بشحنة  $Z_{\alpha}=2$ ) ونواة الذهب ( $Z=79$ ). نفرض أن نصف قطر نواة الذهب هو  $R$ .

(1) Rutherford scattering and  $\alpha$ -decay (2) nuclei

شكل ٩-١ يوضح ثلاث مسارات لجسيمات ألفا. تميز هذه المسارات ببارامترات الصدمة<sup>(1)</sup> لها  $b$ .

لقيم  $R < b$  نجد أنه عند تناقص  $b$  يقترب جسيم ألفا من النواة وتزداد قوى التناثر الكولومى مما يؤدي إلى كبر الانحراف الحادث. أما إذا كان  $R > b$  فإن جسيمات ألفا تبدأ فى التخلل داخل مركز توزيع الشحنة. فى حالة ما يكون الجسيم داخل النواة تكبر القوى المسببة للانحراف، ولكن فى نفس الوقت يكون جزء من شحنة النواة فى الجهة الأخرى لمسار الجسيم مما يجعل تأثيرها فى الاتجاه العكسى، وعليه يقل تأثير النواة فى إحداث الانحراف. يحدث أكبر انحراف عندما يكون الجسيم ملامسا بالضبط لسطح النواة ويكون نصف قطر توزيع الشحنة فى تلك الحالة مساويا تقريبا لبارامتر الصدمة المناظر لأكبر انحراف.

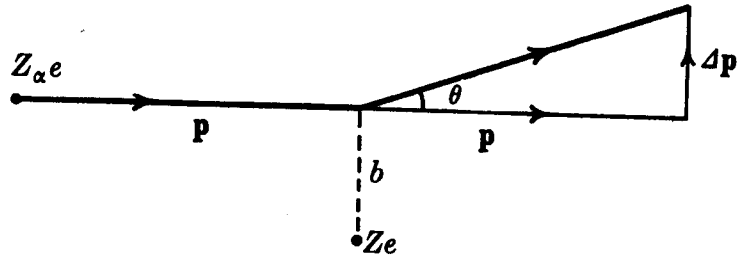
يمكن لنا التعبير عن هذا المفهوم بصورة تقديرية باستخدام أفكار كلاسيكية بحتة.

نعتبر مسارا لجسيم حدث له انحراف صغير. على امتداد الخط الأصلى للمسار تقل سرعة الجسيم وهو فى طريقه إلى النواة وتزداد عندما يبتعد عنها، وعليه فإن محصلة هذا التأثير متلاشية مما يجعلنا نهمل القوى الطولية<sup>(2)</sup>. يحدث الانحراف الأساسى أثناء مرور الجسيم بالنواة. فى هذه المنطقة نكتب قوى التناثر الكولومى فى شكلها التقريبي

$$F = \frac{Z_{\alpha} Z_e e^2}{b^2} \quad (1-9)$$

(1) impact parameters (2) longitudinal forces

هذه القوى تؤثر في اتجاه عمودي على الاتجاه الأصلي وعلى امتداد المسافة  $b$ . إذا كانت سرعة الجسيم هي  $v$  فإن زمن تأثير القوة يساوي  $\Delta t = b/v$  أى ينشأ، طبقاً لقانون نيوتن، كمية حركة مستعرضة<sup>(1)</sup>  $\Delta p$ ، حيث



شكل ٢-٩ رسم مسار جسيم ببارامتر صدمة  $b$ ، وزاوية انحراف صغيرة  $\vartheta$ .

$$\Delta p = F \Delta t$$

$$= \frac{Z_{\alpha} Z e_M^2}{b^2} \cdot \frac{b}{v} \quad (٢-٩)$$

والانحراف الحادث هو (انظر شكل ٢-٩)

$$\vartheta \approx \frac{\Delta p}{p} = \left( \frac{Z_{\alpha} Z e_M^2}{b v} \right) / (m v) \quad (٣-٩)$$

حيث  $m$  هي كتلة جسيم ألفا.

ومن هنا فإن العلاقة التقريبية بين الانحراف الحادث وبارامتر الصدمة هي

$$b = \frac{Z_{\alpha} Z e_M^2}{m v^2 \vartheta} \quad (٤-٩)$$

كان أكبر الانحرافات التي لاحظها رذرفورد في حدود زاوية واحدة نصف قطرية. وكما بينا من قبل هذا الانحراف يناظر بارامتر صدمة مساوي لنصف قطر النواة ( $\vartheta=1, b=R$ ).

(1) transverse momentum

من المعادلة (٤-٩) نحصل على

$$R \cong \frac{Z_\alpha Z_M e^2}{m v^2} \quad (٥-٩)$$

قيمة  $m$  تساوى

$$m = 6 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (٦-٩)$$

أما سرعة جسيمات ألفا فكانت أصغر قليلا من سرعة الضوء

$$v \cong 10^7 \text{ m/sec} \quad (٧-٩)$$

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٥-٩) نجد

$$R \cong 10^{-14} \text{ m} \quad (٨-٩)$$

وهي مسافة صغيرة جدا حتى لو قورنت بالمقياس الذري<sup>(١)</sup> للمسافات، فهي تختلف عن نصف قطر بوهر الوارد في المعادلة (١-٢٤) بمعامل قدره  $10^4$ .

## ٢-٩ التفاعلات النووية

تُحمل شحنة النواة بواسطة البروتونات. كل بروتون يحمل شحنة مساوية لشحنة الإلكترون، ولكن بالطبع بإشارة مخالفة. كتلة البروتون تساوى

$$\begin{aligned} m_p &= 1.6 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 1839 m_e \\ &= 938 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

بوجه عام، كتلة النواة تساوى تقريبا ضعف مجموع كتل البروتونات

---

(1) atomic scale

اللازمة لتأسيس الشحنة الكلية للنواة. تتولد هذه الزيادة فى الكتلة بسبب وجود النيوترونات. النيوترونات جسيمات متعادلة كهربيا، وكل منها له كتلة مساوية تقريبا لكتلة البروتون ( $m_n=939 \text{ MeV}/c^2$ ). سنقوم فيما بعد باستخدام المصطلح نيوكلون<sup>(1)</sup> للإشارة إلى النيوترون أو البروتون.

فى محيط علمى الكيمياء والفيزياء الذرية يُنظر إلى النواة على أنها من الأشياء شديدة الاستقرار، فهى تبقى بدون تغيير أثناء التفاعلات الكيميائية القوية جدا. السؤال الذى يطرح نفسه الآن هو: ماهى القوى التى تحافظ على مكونات النواة مجتمعة فى استقرار شديد؟

القوى المعروفة للفيزياء الكلاسيكية والذرية هى قوى الجاذبية والقوى المغناطيسية (وعلى وجه الخصوص قوى كولوم بين الجسيمات المشحونة). وحيث أن المسافات داخل النواة أصغر من المسافات الذرية بالمعامل  $10^4$  فإن التنافر الكولومى بين البروتونات داخل النواة يزيد عن التجاذب الكولومى بين النواة والإلكترونات بالذرة بمقدار  $10^8$  من المرات. على ذلك فإن قوى كولوم تميل دائما إلى نسف مكونات النواة بعيدا. أما قوى الجاذبية بين الكتل فتميل دائما لجعل الجسيمات متقاربة، إلا أن هذه القوى صغيرة جدا إذا قورنت بقوى التنافر الكولومى. النسبة بين قوى الجاذبية وقوى التنافر الكولومى بين اثنين من البروتونات تساوى

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{\gamma m_p^2}{e_M^2} \quad (10-9)$$

حيث  $\gamma$  هو ثابت الجذب العام، ويساوى  $6.6 \times 10^{-11} \text{ mks}$ . هذا يعنى أن هذه

(1) nucleon

النسبة تساوى 10-36، أى أن قوى الجاذبية مهمة تماما داخل النواة- وهى أيضا كذلك داخل الذرة (خارج النواة)- وتحافظ على هذه الخاصية أيضا فى التفاعلات الكيميائية بين الذرات، كما فرضنا فى الجزء الثانى من الكتاب.

نستخلص من كل ماسبق أنه يوجد بداخل النواة، أى فى مدى حوالى 10-14 m، تفاعلات نووية معينة بين النيوكلونات، وأن هذه التفاعلات قوية بدرجة كافية للتغلب على قوى التنافر الكولومى بين البروتونات المختلفة المتقاربة جدا من بعضها. نظرا لأن هذه التفاعلات النووية لاتلعب أى دور فى التركيب الإلكتروني للذرات فهى إذا تنشأ عن قوى قصيرة<sup>(1)</sup> المدى تؤثر فقط فى حدود مسافة مساوية 10-14 m.

من أول مشاكل الفيزياء النووية هو الوصول إلى الفهم التفصيلى لهذه القوى القصيرة المدى بنفس الطريقة التى ن فكر بها لفهم التفاعلات الناتجة عن قوى الجاذبية بين الكتل وكذلك التفاعلات الناتجة عن قوى كولوم بين الجسيمات المشحونة.

### ٩-٣ تحلل- ألفا

من الأهمية بمكان، قبل الدخول فى مشاكل التفاعلات النووية، التأكيد من أن ميكانيكا الكم التى أسسناها لدراسة الأنظمة الذرية تبقى أيضا صالحة، دون إجراء أى تعديل جوهرى، لوصف مايجرى داخل النواة. الدليل القوى على حفاظ ميكانيكا الكم على صلاحيتها لوصف حالة النواة

(1) short range forces

يتجلى من خلال دراسة تحلل-ألفا. فى هذه العملية تتحلل النواة الأم<sup>(1)</sup> A إلى جسيم ألفا والنواة الابنة<sup>(2)</sup> D.



جسيم ألفا هو نواة ذرة الهليوم، أى يتكون من اثنين من البروتونات واثنين من النيوترونات.

فى دراسة تحلل-ألفا الناشئ عن نواة أم ثقيلة، كنواة الراديوم<sup>(3)</sup> مثلا، يمكن النظر إلى جسيم ألفا على أنه جسيم مفرد، والنظر إلى النواة الابنة على أنها ساكنة فى مكانها (راجع المناقشة المعطاة فى نهاية البند ٧-٥).

تكلما فى البند السابق عن القوى النووية وبات من المؤكد أن الأنوية ليست من الأنظمة الكلاسيكية، وقد رأينا أن فكرة القوة تلعب دورا غير مباشر فى ميكانيكا الكم. على ذلك فسوف نستبدل القوة بطاقة وضع التفاعل<sup>(4)</sup> حتى يصبح المعنى أقرب إلى الفهم.

عند مسافات كبيرة بالنسبة للمقدار  $10^{-14}$  m يكون التفاعل الوحيد ناشئا عن طاقة الوضع الكولومية التى تسبب حدوث تنافر بين جسيم ألفا (بشحنة  $Z\alpha$ ) والنواة الابنة (بشحنة Z). أما عند مسافات أقل من المقدار السابق يجب أن تسود طاقة الوضع النووية الشديدة الجاذبية<sup>(5)</sup>. محصلة هذا التأثير لا بد أن تبدو مشابهة بعض الشيء للشكل العام لطاقة وضع التفاعل الموضحة بشكل ٩-٣.

من الملائم تعريف طاقة الوضع كما يلى:

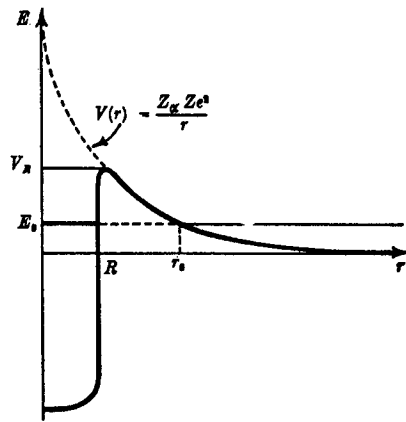
$$V_R = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{R} \quad (12-9)$$

(1) parent nucleus (2) daughter nucleus (3) radium (4) interaction potential (5) strongly attractive nuclear potential

التي تعد، من شكل ٩-٣، تقديرا مناسباً لأقصى ارتفاع لطاقة الوضع بين جسيم ألفا والنواة الابنة.

سبق أن قدمنا من قبل في الباب الرابع التفسير الوصفي لتحلل ألفا. من الوجهة الكلاسيكية إذا كان هناك جسيم طاقته  $E_0$  بداخل بئر جهد  $V_R$  يتبع العلاقة

$$V_R > E_0 > 0 \quad (٩-١٣)$$



شكل ٩-٣ منحنى الطاقة لطاقة الوضع المتبادلة بين جسيم ألفا والنواة الابنة . عند مسافات كبيرة ( $r \ll 10^{-14} \text{ m}$ ) تكون ببساطة طاقة الوضع عبارة عن تنافر كولومى . عند مسافات صغيرة تسود طاقة الوضع النووية الجاذبة.

فإن الجسيم يكون مقيدا ولا يوجد أى إمكانية لهروب. إلا أن مالموظ عمليا بالفعل هو أنه لأى نواة نشطة إشعاعيا<sup>(١)</sup> يوجد احتمال ثابت لوحدة الزمن،  $1/\tau$ ، لإمكانية تفتتها (تحللها).

(1) radioactive nucleus



لهذا إذا كان  $N(t)$  هو عدد الأنوية عند الزمن  $t$ ، فإن

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} \quad (14-9)$$

وعليه يكون

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau} \quad (15-9)$$

حيث الثابت  $\tau$  يسمى متوسط العمر<sup>(1)</sup> للنواة.

أما بالنسبة لميكانيكا الكم فإن إمكانية النفاذ من حاجز الجهد تمكن جسيم ألفا من الهروب، وبالتالي فإن ميكانيكا الكم تمدنا بميكانيكية تحلل هذا النظام.

نوجه اهتمامنا الآن إلى تقييم هذا التصور مراعين جانب الدقة. تم من قبل حساب المسافة النووية القياسية<sup>(2)</sup>  $R$ ، وعليه فإن الزمن النووي القياسي<sup>(3)</sup>

(محسوبا على أساس أبعاد الثوابت النووية) يساوى

$$\tau_n = \frac{m_p R^2}{\hbar} \cong 10^{-21} \text{ sec} \quad (16-9)$$

ونظرا لأن متوسط الأعمار للأنوية ينحصر في المدى من  $10^{-17}$  sec حتى  $10^{10}$  من السنين، فإن عملية تحلل-ألفا تتم ببطء شديد جدا بالمقارنة بالمقياس الزمني النووي.

كتقريب جيد من المرتبة الأولى نستطيع اعتبار النواة الابنة وجسيم ألفا على أنهما يكونان نظاما مستقرا. نفرض للتبسيط أن كمية الحركة الزاوية الداخلة في الحساب تساوى صفر. عندئذ نحصل على الطاقة  $E_0$  من حل معادلة القدر المناسب للنظام المقيد الذى فيه طاقة الوضع  $V^1(r)$  مشابهة للمبينة بشكل 9-3 عندما يكون  $r < R$ ، ونفرض أيضا أن طاقة الوضع ثابتة في المدى  $r \geq R$ ، أى أن

(1) mean life (2) typical nuclear length (3) typical nuclear time

$$V^1(r) = V_R, \quad r \geq R \quad (17-9)$$

هذه الفروض تستلزم إيجاد قيمة  $E_0$  من حل معادلة القدر المناسب (٧-)  
 (١٠) عندما يكون  $l = 0$  (أى عندما يكون كمية الحركة الزاوية مساوية  
 صفرا)،

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V^1(r) - E_0 \right] \chi(r) = 0 \quad (18-9)$$

حيث  $\mu$  هي الكتلة المختصرة لجسيم ألفا والنواة الابنة.

إلا أن شكل قانون طاقة الوضع  $V^1(r)$  غير معروف تفصيلا، وللغرض  
 الحالى نكتفى بأخذ قيمة  $E_0$  من التجربة العملية مباشرة.

حيث أن طاقة النظام تساوى صفرا، فى حالة ماتكون النواة الابنة  $D$  بعيدة  
 بعدا لانهاثيا عن جسيم ألفا، فإن الطاقة  $E_0$  تكون ببساطة عبارة عن الفرق  
 فى الطاقة بين طاقة السكون للنواة الأم  $A$  وطاقة النواة الابنة وجسيم ألفا  
 معا، أى أن

$$E_0 = m_A c^2 - (m_D + m_\alpha) c^2 \quad (19-9)$$

عند اعتبارنا لمشكلة حقيقية يجب علينا حل المعادلة

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) - E_0 \right] \chi(r) = 0 \quad (20-9)$$

وذلك للحصول على دالة الحالة  $\chi(r)$  المرتبطة بطاقة الوضع الفعلية  $V(r)$ .

نضع التعريف

$$K^2(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - E_0) \quad (21-9)$$

حينئذ تؤول معادلة القدر المناسب (٢٠-٩) إلى

$$\frac{\partial^2 \chi(r)}{\partial r^2} - K^2(r) \chi(r) = 0 \quad (22-9)$$

مربع هذه الكمية هو الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم عند  $r=R, r=r_0$ . وهذا هو معامل النفاذ  $T$  الذى يفسر من الناحية الشبه كلاسيكية على أنه احتمال تخلل الجسيم لحاجز الجهد عندما يصطدم به (انظر المعادلة (٣٥-٤)).

لهذا فإن

$$T = \exp \left[ -2 \int_R^{r_0} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - E_0) \right)^{1/2} dr \right] \quad (28-9)$$

نحصل على الاحتمال لوحدة الزمن لهروب الجسيم من حاجز الجهد من حاصل ضرب  $T$  فى التردد الذى يتذبذب به الجسيم داخل بئر الجهد. هذا التردد يساوى مقلوب الزمن النووى القياسى  $\tau_n$ . أى أن

$$\frac{1}{\tau} = \frac{T}{\tau_n} \quad (29-9)$$

من الممكن وبدون أى صعوبة تقييم التكامل (٢٨-٩)، ولكن لفهم السمات العامة للنظام نعتبر الآن أن الكمية التى بداخل علامة التكامل ثابتة عند القيمة المتوسطة لها. على ذلك يكون

$$T = \exp \left[ -2 \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left( \frac{V_R - E_0}{2} \right)^{1/2} (r_0 - R) \right] \quad (30-9)$$

وهذا هو بالضبط التعبير (٣٥-٤).

يجب التعويض عن  $r_0$ ,  $R$  من المعادلتين (٢٦-٩)، (١٢-٩). وحيث أن كتل الأنوية التى تتحلل باعثة جسيمات ألفا دائما ماتكون أكبر من 200 (مقاسة بوحدات كتلة البروتون)، فإن الكتلة المختصرة تساوى تقريبا كتلة جسيم ألفا نفسه. ولهذا

$$\mu \cong m_\alpha \cong 4 m_p \quad (31-9)$$

عند استخدام المعادلة (٢٦-٩) لحذف  $r_0$  فإن المعادلة (٣٠-٩) تؤول إلى

$$T = \exp \left[ \frac{-4(V_R - E_0)^{3/2}}{E_0 \hbar / (m_p^{1/2} R)} \right] \quad (32-9)$$

الكمية  $\hbar / (m_p^{1/2} R)$  لها وحدات الجذر التربيعي للطاقة وهى تساوى عدديا الواحد الصحيح تقريبا (ذلك إن عبرنا عن هذه الكمية بوحدات  $(\text{MeV})^{1/2}$  ومساواة  $R$  بالمقدار  $10^{-14} \text{ m}$ ).

من ذلك فإن متوسط العمر يكتب، بدلالة الطاقة  $E_0$  المتاحة فى التفاعل، كالاتى:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_n} \exp \left[ -4 \frac{(V_R - E_0)^{3/2}}{E_0} \right] \\ &= 10^{21} \exp \left[ -4 \frac{(25 - E_0)^{3/2}}{E_0} \right] \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (33-9)$$

حيث عبرنا هنا عن  $V_R, E_0$  بوحدات المليون إلكترون فولت (MeV)، وتم حساب قيمة  $V_R$  عندما كان  $Z = 80$ .

أهم مافى هذه المعادلة هو اعتمادها الشديد على  $E_0$  الذى يعزو إليه التباين الهائل فى أزمنة متوسطات الأعمار الملاحظة على الأنوية المتساوية تقريبا فى أنصاف أقطارها ومختلفة فى كتلتها. لذلك إذا كان

$$\begin{aligned} E_0 = 4 \text{ MeV} &\Rightarrow \tau \cong 3 \times 10^{12} \text{ years} \\ E_0 = 8 \text{ MeV} &\Rightarrow \tau \cong 10^{-6} \text{ sec} \end{aligned} \quad (34-9)$$

بينما من الناحية التجريبية نجد أن

$$E_0 = 4.3 \text{ MeV} \Rightarrow \tau = 2 \times 10^{10} \text{ years} \quad (\text{للثوريوم}) \quad (35-9)$$

$$E_0 = 7.83 \text{ MeV} \Rightarrow \tau = 10^{-3} \text{ sec} \quad (\text{للراديوم } C')$$

عند هذا الحد نلاحظ أن النظرية التقريبية التي وضعناها لإيجاد القيم المستتجة نظريا، المعادلة (٩-٣٤)، فى توافق معقول مع القيم الملاحظة تجريبيا، المعادلة (٩-٣٥). الاختلاف البسيط الحادث نتج عن وضعنا لبعض الفروض عند تقييم المعادلة (٩-٢٨).

إذا قمنا بإعادة تقييم المعادلة (٩-٢٨) مراعين جانب الدقة (باستخدام متوسطات الأعمار  $\tau$  والطاقات المتحررة  $E_0$ ) يمكن معرفة أنصاف أقطار الأنوية المشعة التى تبعث جسيمات ألفا. هذه الحسابات الدقيقة بينت لنا أن النيوكلونات تكون مرتبطة (محزومة) بشدة داخل النواة، كما أن كل نيوكلون يشغل حجما كرويا نصف قطره  $1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$ . هذا يعنى أن نصف قطر النواة التى بها عدد  $A$  من النيوكلونات يساوى

$$R = 1.5 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m} \quad (٩-٣٦)$$

تلك النتيجة فى توافق تام مع استنتاجات تجربة رذرفورد (البند ٩-١) المبنية على أساس اعتبارات مختلفة تماما.

#### ٩-٤ ملخص

فى هذا الباب برهنا على أن أنصاف أقطار أنوية الذرات فى حدود المقدار  $10^{-12} \text{ cm}$ . وأن النواة تتكون من نيوترونات وبروتونات (النيوكلونات) متماسكة مع بعضها البعض بواسطة طاقة وضع نووية معينة. طاقة الوضع هذه فعالة للغاية فى المدى القريب القيمة من نصف قطر النواة، حيث تكون كبيرة بدرجة كافية لتغطية قوى التنافر الكولومى الكبيرة بين البروتونات المتقاربة جدا من بعضها داخل النواة. اتضح لنا، من دراسة ظاهرة تحلل-ألفا، أن حركة النيوكلونات تحت تأثير طاقة

الوضع النووي تكون محكومة بقوانين ميكانيكا الكم التي قُدمت أصلاً للتعامل مع ميكانيكا الذرات. مع العلم أن هذه الظاهرة النووية الهامة غير واضحة تماماً إذا عولجت على أساس المفاهيم الميكانيكية الكلاسيكية (أو النظرية الكمية القديمة). إلا أن ماهية طاقة الوضع النووية غير معلومة تماماً وتعد عملية فحص هذه الطاقات أنها المشكلة الكبرى في الفيزياء النووية.

## مسائل ٩

١-٩ عين التكامل الموجود بالمعادلة (٩-٢٨)، ومنه وضح أن التعبير

الأدق للكمية  $T$  هو

$$T = \exp \left[ \frac{-2\sqrt{(2\mu E_0)}}{\hbar} r_0 \left\{ \frac{\pi}{2} - 2 \left( \frac{R}{r_0} \right)^{1/2} \right\} \right]$$

[استخدم التعويض

$$\frac{E_0 r}{Z_\alpha Z e_M^2} \equiv \frac{r}{r_0} = \cos^2 x$$

وعندئذ يسهل تقييم التكامل ليعطى

$$T = \exp \left[ \frac{-2\sqrt{(2\mu E_0)}}{\hbar} r_0 \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{R}{r_0} \right)^{1/2} - \left( \frac{R}{r_0} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{R}{r_0} \right)^{1/2} \right\} \right]$$

وهذا التكامل يمكن فكه في صورة قوى  $[R/r_0]$

٢-٩ استخدم هذا التعبير لاستنتاج قيمة أدق لفترة عمر الراديوم

$$\cdot (A=210, Z=82, E_0 = 7.8 \text{ MeV}), \text{C}$$

## الباب العاشر

### نظرية الاستطارة<sup>(1)</sup>

١-١٠ مقدمة

الوسيلة الوحيدة لفحص طاقات الوضع النووية هي تقريب النيوكلونات من بعضها البعض ثم دراسة ماينشأ بينها من تفاعلات، كما هو الحال عند دراسة القوى المغناطيسية بتقريب المغناطيسات بعضها من بعض ودراسة كيفية تأثير كل منها على الآخر.

لإجراء ذلك يلزمنا حزمة ساقطة من الجسيمات النووية وأنوية أو نيوكلونات كهدف وجهاز كاشف<sup>(2)</sup> يمكننا من معرفة كيفية الانحراف (الاستطارة)، الناتج عن التفاعل النووي، بين جسيمات الحزمة الساقطة وجسيمات الهدف. من الدراسة التفصيلية لكل من التوزيع الزاوي وشدة الجسيمات المستطارة يمكن استنتاج شكل طاقة وضع التفاعل.

نظرا لأن الهدف يتسبب في إحداث استطارة للحزمة الساقطة فإن التجارب التي تقع في هذا الإطار يطلق عليها اسم تجارب الاستطارة ويستخدم في تحليل نتائجها مايسمى بنظرية الاستطارة. وحيث أننا سنتعامل هنا مع أنظمة كمية فالحاجة تحتم علينا الاتجاه إلى نظرية الاستطارة الكمية<sup>(3)</sup>. ولكن لتوضيح الرؤية يفضل البدء أولا بالتجارب التي تتم تحت ظروف كلاسيكية بحتة.

(1) scattering theory (2) detection device (3) quantum scattering theory

## ١٠-٢ نظرية الاستطارة الكلاسيكية<sup>(١)</sup>

نعتبر حزمة من الجسيمات المنتظمة الكثافة، كل جسيم يسير بسرعة ثابتة  $v$ . نعرف الفيض<sup>(٢)</sup>  $F$  لهذه الحزمة بأنه عدد الجسيمات التي تسقط على وحدة المساحات (المساحة عمودية على اتجاه الحزمة) في وحدة الزمن. هذا العدد يساوي عدد الجسيمات الواقعة في حجم محدد بمقطع مستعرض<sup>(٣)</sup> مساحته الوحدة وارتفاع مقداره  $v$ . إذا كانت كثافة الجسيمات هي  $\rho$  فإن الفيض يساوي

$$F = \rho v \quad (1-10)$$

وأبعاده هي

$$[F] = L^{-2}T^{-1} \quad (2-10)$$

نفرض أن صفر الإحداثيات يقع عند موضع الهدف، وأن الحزمة موجهة على امتداد المحور  $z$ ، شكل ١٠-١. نتعرف على شدة واتجاه الاستطارة من حساب المقطع المستعرض التفاضلي<sup>(٤)</sup>  $\sigma(\vartheta, \varphi)$ ، حيث

$$\sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega = \text{عدد الجسيمات التي تستطار داخل الزاوية المجسمة}$$

$$d\Omega(\vartheta, \varphi) \text{ في وحدة الزمن لوحدة الفيض} \quad (3-10)$$

أما أبعاد  $\sigma(\vartheta, \varphi)$  فتساوي

$$[\sigma(\vartheta, \varphi)] = T^{-1}(L^{-2}T^{-1})^{-1} = L^2 \quad (4-10)$$

أى أن المقطع المستعرض التفاضلي يعبر عن مساحة.

نحصل على المقطع المستعرض الكلي<sup>(٥)</sup> للاستطارة  $\sigma$  بتكامل المقطع

المستعرض التفاضلي على كل الزوايا المجسمة

(1) classical scattering theory (2) flux (3) cross section

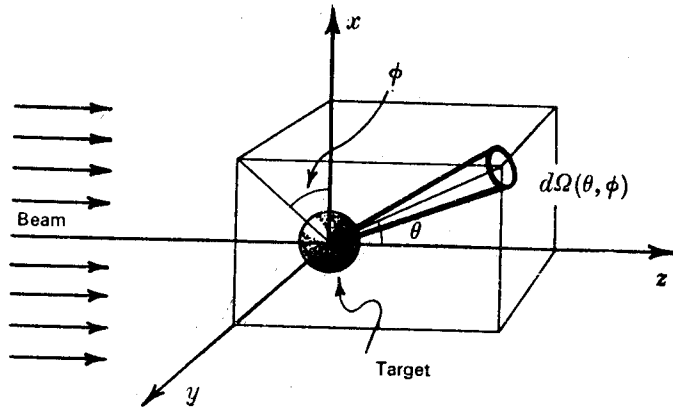
(4) differential cross section (5) total cross section



$$\sigma = \int \sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (5-10)$$

وهو أيضا يعبر عن مساحة.

يتضح لنا من التعاريف سالفة الذكر أن المقطع المستعرض الكلى هو العدد الكلى للجسيمات المنحرفة فى جميع الاتجاهات فى وحدة الزمن لوحدة الفيض. إلا أن الجسيمات المنحرفة هى بالضبط تلك الجسيمات التى تصطدم بالهدف، أما وحدة الفيض فتساوى جسيم واحد لكل وحدة مساحة فى وحدة الزمن. ومن هنا فإن المقطع المستعرض الكلى يمثل مساحة المقطع المستعرض التى يعرضها الهدف أمام اتجاه الحزمة، وهكذا جاءت التسمية.



شكل ١٠-١ الإحداثيات القطبية التى عادة ماتستخدم فى وصف عملية الاستطارة. يعتبر عادة موضع الهدف على أنه صفر الإحداثيات، وأن اتجاه الحزمة على امتداد المحور-z.

بنفس الطريقة نقول أن المقطع المستعرض التفاضلى  $\sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega$  هو تلك المساحة الفعالة<sup>(١)</sup> من الهدف التى تتسبب فى انحراف الجسيمات

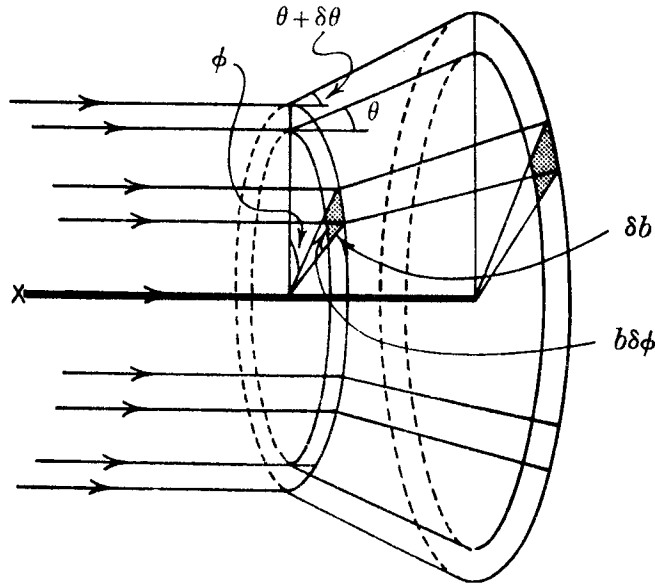
(1) effective area

الساقطة داخل الزاوية المجسمة  $d\Omega(\theta, \phi)$ .

أنصاف الأقطار النووية تتقارب من المقدار  $10^{-12}$  cm، ومنه فإن مساحة الهدف النووي تتقارب من مربع هذه الكمية مما يدفعنا لقياس المقاطع المستعرضة النووية<sup>(1)</sup> بوحدة تسمى البارن<sup>(2)</sup>، حيث

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

نعتبر نظاما تماثله سمتيا<sup>(3)</sup> (أى متماثل حول المحور-z) حتى نضمن عدم اعتماد الانحرافات الحادثة على الزاوية  $\phi$ . تعانى مسارات الجسيمات التى بارامترات الصدمة لها محصورة فى المدى بين  $b(\theta) + \delta b$ ،  $b(\theta)$  انحرافات بزوايا تتغير فى المدى من  $\theta$  إلى  $\theta + \delta\theta$ . لهذا تكون المساحة الفعالة التى تسبب حدوث انحراف داخل الزاوية المجسمة  $d\Omega(\theta, \phi)$  مساوية، انظر شكل ١٠-٢.



شكل ١٠-٢ المساحة الفعالة  $b(\theta)dbd\phi$  للاستطارة داخل الزاوية المجسمة  $d\Omega(\theta, \phi)$ .

(1) nuclear cross sections (2) barn (3) azimuthal symmetry

$$d\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega(\vartheta, \varphi) = b(\vartheta) db d\varphi \quad (6-10)$$

والزاوية المجسمة تساوى

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (7-10)$$

بتدراك عدم اعتماد  $\sigma$  على  $\varphi$  وإجراء التكامل على طرفى المعادلة (10-10)

(6) بالنسبة إلى  $\varphi$  التى تتغير من صفر إلى  $2\pi$ ، نجد أن

$$2\pi\sigma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi b(\vartheta) db \quad (8-10)$$

وعندئذ يكون

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\vartheta) = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \quad (9-10)$$

من الملاحظ أنه بزيادة بارامتر الصدمة  $b$  تقل الزاوية  $\vartheta$ ، وتصبح الكمية  $db/d\vartheta$  دائما سالبة. لتكون قيمة المقطع المستعرض موجبة دائما أخذنا القيمة المطلقة للكمية  $db/d\vartheta$ .

(أ) الاستطارة الكلاسيكية الناشئة عن كرة صلبة<sup>(1)</sup>

نعتبر اصطدام حزمة من الجسيمات، تصادما مرنا، بكرة صلبة نصف

قطرها  $a$ . من شكل 10-3 نجد أن

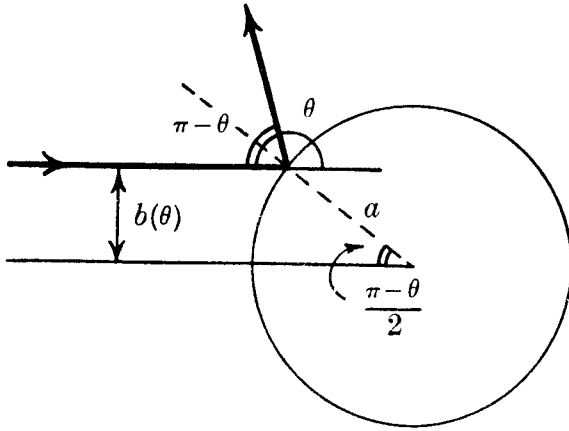
$$\begin{aligned} b(\vartheta) &= a \sin \frac{\pi - \vartheta}{2} \\ &= a \cos(\vartheta/2) \end{aligned} \quad (10-10)$$

ومنه

$$\left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \left( \frac{a}{2} \right) \sin(\vartheta/2) \quad (11-10)$$

(1) hard sphere

بالتعويض من المعادلة (١٠-١١) فى المعادلة (١٠-٩) نجد أن المقطع المستعرض التفاضلى يساوى



شكل ١٠-٣ الاستطارة بواسطة كرة صلبة نصف قطرها  $a$ .  
الشكل يوضح العلاقة بين  $b(\theta)$  وزاوية الاستطارة  $\theta$ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = \frac{a^2}{4} \quad (10-12)$$

وعليه المقطع المستعرض الكلى يأخذ القيمة

$$\sigma = \int \frac{a^2}{4} d\Omega = \pi a^2 \quad (10-13)$$

تعد هذه النتيجة مثالا مبسطا على المعنى العام الذى أطلقناه على المقطع المستعرض الكلى للاستطارة، حيث هنا  $\pi a^2$  هى بالضبط المساحة الكلية للكرة الصلبة المواجهة لاتجاه الحزمة. ومن ثم فإن المقطع المستعرض الكلى (أى العدد الكلى للجسيمات المستطارة) يحدد الحيز الفعال من الهدف. من كل ماسبق يظهر جليا إمكانية استخلاص معلوماتنا عن شكل الهدف من معرفة المقطع المستعرض التفاضلى. ففى حالة الكرة الصلبة نجد أن المقطع المستعرض التفاضلى (أى التوزيع الزاوى للمقطع

المستعرض) يأخذ نفس المقدار فى جميع الاتجاهات وعند أى قيمة من قيم طاقات الحزمة، كما نرى بالمعادلة (١٠-١٢)، مما يؤكد المعنى السابق.

### (ب) الاستطارة الكولومية<sup>(١)</sup>

يتعين علينا الحصول على توزيع زاوى للاستطارة مختلفا تماما عن الحالة السابقة (حالة الكرة الصلبة) عندما تكون الحزمة مكونة من عدد من الجسيمات التى شحنة كل منها  $Z_1$ ، وكان الانحراف يحدث نتيجة للتناثر الكولومى بين جسيمات الحزمة والشحنة  $Z_2$  الموجودة على هدف ثابت (كما فى تجربة رذرفورد).

على ضوء التقريبات المستخدمة فى الباب التاسع نكتب العلاقة بين بارامتر الصدمة والانحراف، المعادلة (٩-٤) كما يلى:

$$b(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2 \theta} \quad (10-14)$$

حيث  $p$  هى كمية حركة جسيمات الحزمة.

بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة إلى  $\theta$  نحصل على

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2 \theta^2} \quad (10-15)$$

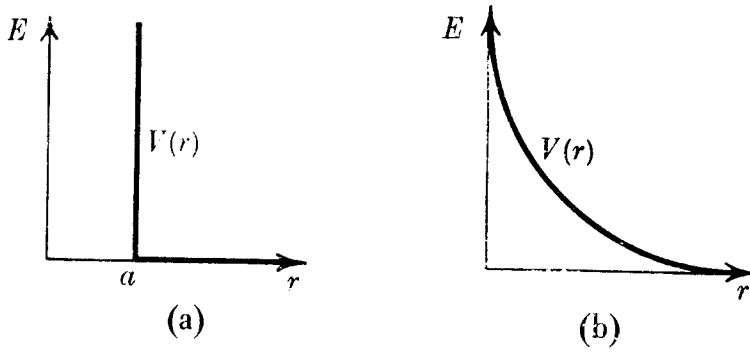
عندما تكون  $\theta$  صغيرة ( $\sin \theta \approx \theta$ )، وباستخدام المعادلة (١٠-٩) نجد

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{p^2} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} \quad (10-16)$$

هذا يعنى أن شكل الجسيمات المستطارة يرسم قمة أمامية حادة جدا على النقيض من التوزيع الزاوى المتماثل لاستطارة الكرة الصلبة.

(1) Coulomb scattering

عند زيادة كمية الحركة  $p$  يجب أن تتناقص قيمة الزاوية  $\theta$  حتى يبقى مقدار  $\sigma(\theta)$  ثابتا. لهذا فإن القمة الأمامية تبدو أكثر وضوحا مع زيادة كمية الحركة، أو بمعنى آخر مع زيادة طاقة جسيمات الحزمة. لمعالجة حالتى الاستطارة السابقتين باستخدام النظرية الكمية نعبر عن التفاعل بين جسيمات الحزمة والهدف بدلالة طاقة وضع التفاعل، شكل ٤-١٠.



شكل ٤-١٠ طاقات وضع التفاعل (أ) الكرة الصلبة (ب) تناافر كولومى.

فى حالة الكرة الصلبة نجد

$$\begin{aligned} V(r) &= 0, \quad r > a \\ V(r) &= \infty, \quad r = a \end{aligned} \quad (17-10)$$

أما فى حالة الاستطارة الكولومية فنعلم أن

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (18-10)$$

المعادلة (١٧-١٠) تعنى أن طاقة الوضع تزداد زيادة فجائية كبيرة جدا مما يودى إلى الظهور المفاجيء لقوى كبيرة للغاية عند اقتراب الجسيمات

من بعضها البعض إلى مسافة معينة. طاقات الوضع هذه تؤدي عادة إلى توزيع متماثل للاستطارة.

على النقيض من ذلك فإن التفاعل الكولومي ينشأ من طاقة وضع صغيرة جدا. طاقة الوضع هذه تناظر قوة تتغير ببطء مع المسافة بين الجسيمات المشحونة المتفاعلة. هذا التأثير الضعيف للقوة يمتد إلى مسافات كبيرة بين الجسيمات. مثل هذه القوة (الطاقة بالتناظر) تتسبب في حدوث استطارة للجسيمات خلال زوايا صغيرة، وتميل زاوية المخروط الأمامي<sup>(1)</sup> الحاوي على معظم الجسيمات المستطارة إلى الصغر مع زيادة طاقة جسيمات الحزمة.

بدراسة كيفية اعتماد المقطع المستعرض للاستطارة على كل من الطاقة وزاوية استطارة الجسيمات النووية نستطيع استنتاج شكل طاقة الوضع المؤثرة على الجسيمات المتفاعلة. وتلك هي الأداة الأساسية للفيزياء النووية.

### ١٠-٣ نظرية الاستطارة الكمية

يظهر تأثير التفاعلات النووية على مسافات في حدود المقدار  $10^{-12}$  cm. كما نجد أن حزم الجسيمات تسير بسرعات في حدود  $10^9$  cm/sec ، أى سرعات قريبة من سرعة الضوء. لذلك فإن زمن العبور (عبور منطقة التفاعل) في التفاعلات النووية يكون في حدود  $10^{-21}$  sec . وحيث أن قيمة  $\hbar$  حوالى  $10^{-27}$  cgs فإن طاقة الحزمة يجب أن تكون أكبر بكثير من  $10^{-5}$  erg (أو بوحدات أخرى أكبر بكثير من 10 MeV) حتى يكون للمفاهيم

(1) forward cone

الكلاسيكية، مثل بارامتر الصدمة للحزمة، شيء من الشرعية. من الواجب علينا الآن استخدام ميكانيكا الكم لتحليل تجارب الاستطارة النووية. يظهر الحد الكمي تماما في تجارب الاستطارة عند الطاقات المنخفضة.

نعتبر استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة هدف مثبت عند صفر الإحداثيات. إذا كانت طاقة وضع التفاعل بين الجسيمات هي  $V(r)$ ، وطاقة الحزمة هي

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (19-10)$$

فإن دالة الحالة لا بد أن تكون دالة مناسبة لمناظرة لمعادلة شرودنجر عند تلك الطاقة.

عندما يكون لطاقة الوضع مدى محدود فإن الحل يظهر في الشكل الذي يؤول عند مسافات كبيرة إلى حزمة مستوية في اتجاه المحور- $z$ ، بالإضافة إلى موجة مستطارة مكونة من موجات كروية خارجة<sup>(1)</sup> فقط. للاختصار نضع

$$k = \frac{p}{\hbar} \quad (20-10)$$

حينئذ يصبح الحل التقريبي عند مسافات كبيرة في الصورة

$$u_k(r) \approx e^{ikz} + f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (21-10)$$

= (موجة مستطارة) + (موجة مستوية)

الكثافة الجسيمية في الموجة المستوية تساوي

$$\rho = |e^{ikz}|^2 = 1 \quad (22-10)$$

وسرعة الجسيمات هي

(1) outgoing spherical waves



$$v = \frac{\hbar k}{m} \quad (23-10)$$

لذلك فإن الفيض، كما عرفناه بالمعادلة (10-1)، يساوى

$$F = \rho v = v \quad (24-10)$$

عدد الجسيمات المستطارة فى الحجم المحصور بين المسافتين  $r$ ،  $r+dr$  وداخل الزاوية المجسمة  $d\Omega(\vartheta, \varphi)$  هو

$$\left| \frac{f(\vartheta, \varphi) e^{ikr}}{r} \right|^2 r^2 d\Omega dr = |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega dr \quad (25-10)$$

والعدد المستطار داخل الزاوية  $d\Omega$  فى وحدة الزمن يساوى

$$|f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega v$$

لذلك فإن مساحة المقطع التفاضلى (عدد الجسيمات المستطارة داخل الزاوية

$d\Omega$  فى وحدة الزمن لوحدته الفيض) تساوى

$$d\sigma = \sigma(\vartheta, \varphi) d\Omega = |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (26-10)$$

ومساحة المقطع الكلى هى

$$\sigma = \int |f(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega$$

فى التجربة نقيس  $|f(\vartheta, \varphi)|^2$ ، التى لها علاقة بالكمية  $V(r)$ ، وذلك لأن

المعادلة (10-21) هى الشكل التقريبى لحل معادلة شرودنجر التى فيها

$V(r)$  تمثل طاقة الوضع. فى كل الحالات التى لها أهمية فيزيائية نلاحظ،

تقريباً، أن  $f(\vartheta, \varphi)$  ومن ثم  $\sigma(\vartheta, \varphi)$  لاتعتمد فى حقيقة الأمر على  $\varphi$ . وهذا

يعنى أنه فى المسألة المذكورة عند نهاية البند السابق يمكن الحصول على

معلومات عن  $V(r)$  من دراسة  $|f(\vartheta)|^2$ .

## ١٠-٤ تحليل إزاحة الطور<sup>(١)</sup>

فى معالجة نظرية الاستطارة كلاسيكيا من المعتاد تحليل الحزمة بدلالة بارامترات الصدمة لمساراتها المختلفة. هذا الإجراء لا يمكن تصوره فى ميكانيكا الكم، وذلك لأن حزمة الجسيمات التى كميات حركاتها محددة يصاحبها عدم تحديد فى تقدير مواضعها وبالتالى مساراتها.

إذا كان كمية حركة الحزمة هى  $p$  وبارامتر الصدمة لها هو  $b$  فإنه كلاسيكيا تكون كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل مساوية

$$pb \cong \hbar l \quad (١٠-٢٧)$$

هذا يقترح علينا تحليل الحزمة بدلالة مركبات كمية حركتها الزاوية. عندما يكون نصف قطر التفاعل مساويا  $R$ ، وافترض أن الاستطارة تحدث فقط عند اصطدام جسيم الحزمة بالهدف، فهذا يعنى أن شرط حدوث الاستطارة هو

$$b \leq R$$

أو من المعادلتين (١٠-٢٠)، (١٠-٢٧) نكتبه كالتالى:

$$l < kR \quad (١٠-٢٨)$$

إذا كانت طاقة الحزمة صغيرة بدرجة كافية لجعل

$$kR < 1 \quad (١٠-٢٩)$$

فإن الاستطارة تحدث فقط عندما يكون  $l = 0$ ، (استطارة الموجة-S).

تم الوصول إلى الشرط (١٠-٢٩) بناء على اعتبارات كلاسيكية

بحته، وينبغى لنا الحصول على نتائج مشابهة باستخدام ميكانيكا الكم.

(1) phase shift analysis

المعادلة (١٠-٢٩) توضح لنا الحد الكمي تماما الذى سوف نتداوله الآن ببعض من التفصيل.

لحزمة مستوية تتحرك فى اتجاه المحور z- حاملة كمية حركة  $p (\hbar k=)$

تبدو دالة حالتها فى الصورة

$$u_k(r, \vartheta, \varphi) = e^{ikz} = e^{ikr \cos \vartheta} \quad (30-10)$$

هذه المعادلة تشتمل على كل مركبات كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل. نحصل على المركبة التى فيها كمية الحركة الزاوية تساوى صفر ( $l=0$ ) من تكامل تطابق المعادلة (٣٠-١٠) مع الدالة المتاحة المناسبة  $Y_0^0(\vartheta, \varphi)$  ومنه يكون

$$\begin{aligned} u_{k,s}(r) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int u_k(r, \vartheta, \varphi) Y_0^0(\vartheta, \varphi) d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{ikr \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

أختيرت عملية التسوية بالطريقة التى لا تتغير معها دالة الحالة  $u(r)$  التى تعد دالة فى  $r$  فقط وعليه فإنها تصف الموجة-S من جراء هذه العملية. من

السهل إجراء التكامل على  $\varphi$ ، أما التكامل على  $\vartheta$  فيتم من خلال التعويض

$$\cos \vartheta = w$$

$$-\sin \vartheta d\vartheta = dw$$

وعليه

$$\begin{aligned} u_{k,s}(r) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{ikr w} dw \\ &= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \end{aligned} \quad (31-10)$$

واضح هنا أن المعادلة الأخيرة تصف تراكبا بين موجات كروية داخلية وخارجية. وهذا بالطبع هو التصور الميكانيكى الكمى للمسألة، الذى يختلف كلية عن التصور الجسيمى الكلاسيكى.

نأخذ فى الاعتبار الآن الجزء المعبر فقط عن الموجة-S فى دالة الحالة العامة للاستطارة، المعادلة (١٠-٢١). بالنسبة للموجة المستوية فالجزء المطلوب (الذى فيه  $l=0$ ) هو بالطبع المعادلة (١٠-٣١). أما بالنسبة للموجة المستطارة فجزء الموجة-S بها هو الذى فيه قيمة الدالة  $f(\theta)$  ثابتة (أى لا تعتمد على  $\theta$ )، وذلك لأن أى دالة فى  $r$  فقط يكون فيها  $l=0$ . وعليه يبدو الشكل التقريبى لجزء الموجة-S فى دالة الحالة على النحو

$$u_s(r) \approx \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + f \frac{e^{ikr}}{r} \quad (١٠-٣٢)$$

(جزء الاستطارة الذى فيه  $l=0$ ) + (جزء الحزمة الذى فيه  $l=0$ )

هذا يعنى أن استطارة الموجة-S، عند طاقة ثابتة، تُعَيَّن بدلالة عدد  $f$ ، الذى ربما يكون مركبا. سنوضح فيما يلى أن الاستطارة يمكن التعبير عنها فى الواقع بدلالة عدد حقيقى مفرد.

عند تلاشى طاقة الوضع يُعطى جزء الموجة-S فى الحزمة المستوية بالمعادلة (١٠-٣١). يكمن تأثير طاقة الوضع فى تغيير الموجة الخارجة فقط، وذلك لأن دالة الاستطارة تتكون بصفة مطلقة من الموجات الخارجة. ومن هنا فإن الدالة الموجية المعبرة عن الاستطارة فقط تكتب فى الصورة

$$u_s(r) \approx \frac{S e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (١٠-٣٣)$$

يتناسب فيض الموجة الكروية الداخلة مع

$$|e^{-ikr}|^2 = 1 \quad (١٠-٣٤)$$

أما فيض الموجة الخارجة، باستخدام نفس الوحدات، يساوى

$$|S e^{ikr}|^2 = |S|^2 \quad (35-10)$$

يجب أن يتساوى هذان الفيضان حتى تكون دالة الحالة معبرة عن وضع منتظم الاتصال بين الحزمة الساقطة والأشياء المستطارة، مع عدم تراكم كثافة احتمالية عند مالا نهاية أو نقطة الأصل. هذا يعنى أن

$$|S|^2 = 1 \quad (36-10)$$

يتسنى لنا حينئذ وضع  $S$  فى صورة بارامتر حقيقى مفرد، وليكن  $\delta$ ، حيث

$$S = e^{2i\delta} \quad (37-10)$$

ومنه

$$u_S(r) \approx \frac{e^{2i\delta} e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (38-10)$$

$$= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + \left( \frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (39-10)$$

بمقارنة المعادلتين (38-10)، (31-10) نجد أن تأثير طاقة الوضع يتجلى فى إزاحة طور الموجة الخارجة بالنسبة إلى الموجة الداخلة (جزء الموجة- $S$  من الحزمة المستوية الأصلية). لهذا السبب يطلق على البارامتر  $\delta$  اسم إزاحة الطور.

وبالعودة إلى المعادلتين (32-10)، (39-10) نحصل على

$$f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta}}{k} \left( \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i} \right) \quad (40-10)$$

$$= (e^{i\delta} \sin \delta) / k$$

وعلى ذلك نستطيع التعبير عن استطارة الموجة- $S$  بدلالة إزاحة الطور،  $\delta$ ، المُمثلة بعدد حقيقى.

المعادلة (26-10) تعطى

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\vartheta) = \frac{\sin^2 \delta}{k^2} \quad (٤١-١٠)$$

أى أن التوزيع الزاوى يكون موحد الخواص فى جميع الاتجاهات.  
مساحة المقطع الكلى للموجة-S تساوى

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2} \\ &= \pi \left( \frac{2 \sin \delta}{k} \right)^2 \end{aligned} \quad (٤٢-١٠)$$

هذا يعنى أن المقدار  $2\sin\delta/k$  يعبر عن نصف القطر الفعال من الهدف.  
ولكن

$$\sin \delta \leq 1$$

هذا يعنى أن

$$\sigma_s \leq \frac{4\pi}{k^2}$$

وعليه فإن النهاية القصوى لاستطارة الموجة-S عند طاقة مناظرة للكمية  $k$  لاتعتمد على ديناميكية التفاعل (أى لاتعتمد على طاقة وضع التفاعل)، وبالتالي فإنها تعتمد على هندسة التفاعل فقط.

يجب ملاحظة أن إمكانية التعبير عن استطارة الموجة-S ( $\ell = 0$ ) بدلالة إزاحة طور مفردة تعتبر حالة عامة تماما ولاتتوقف على الشكل التفصيلى لطاقة الوضع  $V(r)$ ، بشرط أن تتناقص  $V(r)$  عند القيم الكبيرة للمسافة  $r$  بطريقة أسرع من الكمية  $1/r$ .

بمعلومية  $V(r)$  نعين  $\delta$  من حقيقة أن المعادلة (٣٨-١٠) هى الشكل التقريبى لحل معادلة شرودنجر. عند طاقة معينة نحصل على إزاحة الطور  $\delta$  بنفس الطريقة تقريبا التى فيها نجد الشروط الابتدائية تُعَيَّن مستويات الطاقة لنظام مقيد.

توصف الاستطارة الكلية الناشئة عن طاقة وضع معينة  $V(r)$  عند طاقة ما بواسطة فئة من إزاحات الطور  $\delta_l(k)$  (أى إزاحة واحدة للطور لكل كمية حركة زاوية  $l$ ). إلا أن الإزاحات  $\delta_l$  المناظرة للكمية  $l$  وتحقق المعادلة (٢٨-١٠) هي فقط التي سوف تختلف عن الصفر.

الحالة الخاصة البسيطة التي نحصل فيها على قيمة مضبوطة لإزاحة الطور  $\delta$  هي استطارة الموجة-S بواسطة كرة صلبة. تعطى طاقة الوضع بواسطة المعادلة (١٧-١٠). وطبقا للمعادلة (١٠-٧) نضع

$$\chi_s(r) = ru_s(r)$$

لذلك عندما يكون  $r > a$  نجد أن الدالة  $\chi_s$  تحقق المعادلة

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - E \right] \chi_s(r) = 0, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

أو المعادلة

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] \chi_s(r) = 0 \quad (٤٤-١٠)$$

لا بد للحل أن يأخذ شكل المعادلة (٣٨-١٠) (مع استبعاد معامل  $r$ )، ويجب أيضا أن يحقق شرط الحدود الخاص بالكرة الصلبة (انظر المعادلة (٣-٢٣) وهو

$$\chi_s(a) = 0 \quad (٤٥-١٠)$$

ومنه يكون

$$\delta = -ka \quad (٤٦-١٠)$$

وتصبح مساحة المقطع الكلى لاستطارة الموجة-S مساوية

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 ka \quad (٤٧-١٠)$$

عند حد الطاقة المنخفضة للغاية، أى عندما يكون

$$ka \ll 1$$

فإن الاستطارة الناشئة من الموجة-S فقط هى التى تتم بالفعل، انظر المعادلة (١٠-٢٩)، وحينئذ نعتبرها الاستطارة الكلية. وعليه

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (ka)^2 = 4\pi a^2 \quad (١٠-٤٨)$$

واضح أن مقدار هذه الكمية يعادل أربعة أضعاف مساحة المقطع الكلاسيكى الناتجة من استطارة جسيمات نقطية بواسطة كرة صلبة لها نفس نصف القطر، المعادلة (١٠-١٣).

### ١٠-٥ النظام المعلى ونظام مركز الكتلة<sup>(١)</sup>

فى دراستنا السابقة افترضنا استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة مركز استطارة ثابت (هدف ثابت). فى حقيقة الأمر يتمتع الهدف دائما بحرية الحركة ومن الضرورى تصحيح النظرية لتشمل هذه الحركة. فى البند ٧-٥ استعرضنا الوسيلة لعمل ذلك أثناء دراسة ذرة الهيدروجين.

من الممكن دائما التعبير عن حركة جسيمين واقعين تحت تأثير التفاعل المتبادل بينهما بدلالة الحركة الحرة لمركز الثقل<sup>(٢)</sup> والحركة النسبية بينهما. للحركة النسبية أهميتها الفيزيائية، وكما أشرنا بالبند ٧-٥ توصف هذه الحركة بنفس المعادلات المذكورة من قبل، على شرط اعتبار الكتلة  $m$  على أنها الكتلة المختصرة  $\mu$ ،

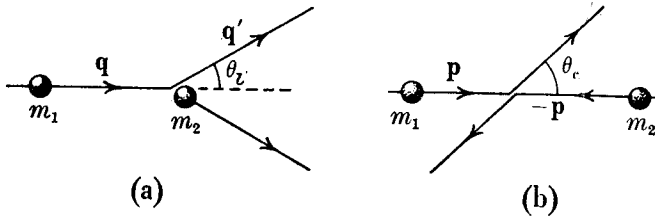
$$\frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (١٠-٤٩)$$

(1) laboratory and centre of mass systems (2) centre of gravity



واعتبار  $p$  على أنها كمية حركة الحزمة فى محاور الإحداثيات التى فيها كمية الحركة الكلية للنظام تساوى صفر. هنا  $m_1$  هى كتلة جسيم الحزمة،  $m_2$  هى كتلة الهدف. نظرا لأن مركز الكتلة يكون ساكنا فى هذا النظام فقد أطلق اسم محاور إسناد مركز الكتلة<sup>(1)</sup> على النظام الإحداثي الذى يحتوى هذا النظام.

فى واقع الأمر تجرى التجارب فى المعمل حيث تكون كمية حركة جسيمات الحزمة مساوية  $q$ ، مثلا، ويكون الهدف ساكنا. يطلق على النظام الإحداثي الحاوى لهذه العملية اسم محاور الإسناد المعملية<sup>(2)</sup>.



شكل ١٠-٥ عملية التصادم موضحين زاوية الاستطارة وكمية الحركة فى (أ) النظام المعملى (ب) نظام مركز الكتلة.

لكى نتمكن من مقارنة التجارب المعملية مع الحسابات النظرية من الضرورى تحويل ما يتم ملاحظته بالفعل فى محاور الإسناد المعملية إلى ما يجب أن نلاحظه فى محاور إسناد مركز الكتلة. ونظرا لأن عملية ملاحظة الفيض المستطار تتم بواسطة أجهزة ماكروسكوبية ( ترى بالعين)

(1) C. M. frame (2) Lab. frame

فإن عملية التحويل هذه تعد مسألة كلاسيكية بحتة، ويمكن حلها باستخدام الأفكار الكلاسيكية العادية.

شكل ٥-١٠ يوضح التصادم كما يبدو في النظامين المعملّي ونظام مركز الكتلة.  $q$  هي كمية الحركة الكلية في محاور الإسناد المعملّي. لذلك فإن سرعة مركز الكتلة  $v$  تساوى

$$v = \frac{q}{m_1 + m_2} \quad (٥٠-١٠)$$

محاور إسناد مركز الكتلة تتحرك في اتجاه الحزمة بسرعة مقدارها  $v$  نسبة إلى محاور الإسناد المعملّي. وعليه فإن العلاقة بين كميات الحركة في النظامين هي

$$p = q - m_1 \left( \frac{q}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2 q}{m_1 + m_2} \quad (٥١-١٠)$$

وحيث أن كمية الحركة الكلية تساوى صفر فهذه القيمة يجب أن تساوى أيضا قيمة كمية الحركة لجسيم الهدف في محاور إسناد مركز الكتلة (هذا يتضح مباشرة من المعادلة (٥٠-١٠)). من قانون حفظ كمية الحركة نرى أن ذلك متحقق أيضا بالنسبة لكميات الحركة بعد التصادم.

إذا كان  $q'$  هي كمية الحركة النهائية لجسيم الحزمة في محاور الإسناد المعملّي فإن المركبة الطولية لكمية الحركة النهائية لجسيم الحزمة تخضع للعلاقة، انظر شكل ٥-١٠

$$\begin{aligned} q' \cos \vartheta_e &= p \cos \vartheta_c + m_1 \left( \frac{q}{m_1 + m_2} \right) \\ &= p \cos \vartheta_c + \frac{m_1}{m_2} p \end{aligned} \quad (٥٢-١٠)$$

أما المركبة المستعرضة لكمية الحركة الخطية فمتساوية في كلا النظامين

$$q' \sin \vartheta_\ell = p \sin \vartheta_c \quad (٥٣-١٠)$$

باستخدام المعادلتان السابقتان نحصل على

$$\tan \vartheta_\ell = \frac{\sin \vartheta_c}{\cos \vartheta_c + (m_1/m_2)} \quad (٥٤-١٠)$$

من الواضح أن زاوية السميت حول اتجاه الحزمة متساوية في كلا النظامين، أى أن

$$\vartheta_\ell = \vartheta_c \quad (٥٥-١٠)$$

نفرض أن  $\vartheta_\ell, \varphi_\ell$  تعينان زاوية مجسمة ما،  $d\Omega(\vartheta_\ell, \varphi_\ell)$ ، فى محاور الإسناد العملية وأن  $\vartheta_c, \varphi_c$  تعينان زاوية مجسمة أيضا،  $d\Omega(\vartheta_c, \varphi_c)$ ، ولكن فى محاور إسناد مركز الكتلة. عند ملاحظة استطارة جسيمات فيزيائية معينة خلال الزاوية  $d\Omega(\vartheta_\ell, \varphi_\ell)$  فى محاور الإسناد العملية أثناء فترة زمنية معينة فإن نفس الجسيمات سوف سوف يتم ملاحظتها خلال الزاوية  $d\Omega(\vartheta_c, \varphi_c)$  فى محاور إسناد مركز الكتلة. ذلك لأن فيض جسيمات الحزمة بالنسبة إلى الهدف لا يتغير بإعطاء سرعة منتظمة للنظام ككل. على ذلك ينبغى أن يكون

$$\sigma(\vartheta_c, \varphi_c) d\Omega(\vartheta_c, \varphi_c) = \sigma(\vartheta_\ell, \varphi_\ell) d\Omega(\vartheta_\ell, \varphi_\ell) \quad (٥٦-١٠)$$

أو يكون

$$\sigma(\vartheta_\ell, \varphi_\ell) = \sigma(\vartheta_c, \varphi_c) \frac{\sin \vartheta_c \, d\vartheta_c \, d\varphi_c}{\sin \vartheta_\ell \, d\vartheta_\ell \, d\varphi_\ell} \quad (٥٧-١٠)$$

لهذا فمن المعادلتين (٥٤-١٠)، (٥٥-١٠) وبعد إجراء بعض الحسابات

الجبرية، نجد أن

$$\sigma(\vartheta_\ell, \varphi_\ell) = \frac{[1 + (m_1/m_2)^2 + 2(m_1/m_2)\cos\vartheta_c]^{3/2}}{[1 + (m_1/m_2)\cos\vartheta_c]} \sigma(\vartheta_c, \varphi_c)$$

(٥٨-١٠)

طاقة حركة النظام فى محاور الإسناد المعملية تساوى

$$T_t = \frac{q^2}{2m_1} \quad (59-10)$$

وفى محاور إسناد مركز الكتلة تساوى

$$T_c = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2\mu} \quad (60-10)$$

ومن المعادلة (51-10) نحصل على

$$T_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_t \quad (61-10)$$

فى كل ماسبق من معادلات واضح لنا أن محاور الإسناد المعملية تكافىء محاور إسناد مركز الكتلة عندما تؤول  $m_2$  إلى مالانهاية، وحينئذ تصبح عملية إهمال ارتداد الهدف من التقريبات المقبولة إذا كان

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1 \quad (62-10)$$

يكون التمييز بين محاور الإسناد المعملية ومحاور إسناد مركز الكتلة له أهميته القصى عندما تكون كتل جسيمات الحزمة والهدف متقاربة، كما فى حالة استطارة البروتون-نيوترون

### ٦-١٠ ملخص

فىما سبق قدمنا النظريتين الميكانيكية الكلاسيكية والكمية لاستطارة حزمة من الجسيمات بواسطة جسيمات الهدف، حيث تمكنا من الحصول على معلومات عن التفاعلات المتبادلة بين الجسيمات. وقد وضحنا ذلك بالبند ٦-١٠ عندما قارنا بين تأثيرات نوعين من طاقات وضع التفاعل.

بالنسبة للنظرية الكمية نجد أن النتائج الأكثر أهمية محتواه في المعادلات من (١٠-٤٠) حتى (١٠-٤٣). هذه المعادلات توضح أن استطارة الموجة-S، عند أى طاقة للجسيمات الساقطة وتحت تأثير أى طاقة وضع، يمكن وصفها بدلالة بارامتر حقيقى مفرد،  $\theta$ ، المسمى بإزاحة الطور.

## مسائل ١٠

١-١٠ بارامتر الصدمة لمسار الانحراف الحادث به  $\theta$  يساوى

$$b(\theta) = a \cos^2(\theta/2)$$

أوجد مساحة المقطع التفاضلى ومساحة المقطع الكلى.

٢-١٠ يتطلب قانون حفظ الاحتمال أن الكمية S المعرفة بالمعادلة (١٠-١٠)

(٣٣) تحقق العلاقة

$$SS^* = 1$$

بالتعبير عن f بدلالة S وضح أن هذا يؤدي إلى النتيجة التالية:

$$f - f^* = 2ikff^*$$

وعليه نحصل فى استطارة الموجة-S على

$$4\pi \text{Im } f = k \sigma_{\text{tot}}$$

## الباب الحادى عشر

### تفاعل النيوكلون - نيوكلون<sup>(1)</sup>

#### ١-١١ الديوترون<sup>(2)</sup>

كما بنينا فهمنا العميق للتركيب الذرى من الدراسة المفصلة لأبسط الذرات، وهى ذرة الهيدروجين، فإن معظم المعلومات المباشرة عن تفاعل النيوكلون-نيوكلون تُستوحى من دراسة نظام مكون من اثنين من النيوكلونات. نستخلص الجزء الأعظم من المعلومات من تجارب استطرارة النيوكلون-نيوكلون، ولحسن الحظ يوجد حالة مقيدة فى نظام النيوترون-بروتون (الديوترون). هذا النظام عبارة عن نواة الهيدروجين الثقيل المسماة بالديوتريوم. باعتبارنا لهذا النظام نحصل على معلومات بالغة الأهمية عن طبيعة طاقة وضع النيوكلون-نيوكلون<sup>(3)</sup>.

رأينا من قبل أن المقياس النووى للمسافة حوالى 10-12 cm، وأن طاقة الوضع النووية عبارة عن تفاعل قصير المدى يؤثر على مسافات لاتزيد عن 10-12 cm. عندما يكون مدى طاقة الوضع النووية كبيرا بدرجة كافية لجعل أزواج عدد A من النيوكلونات تتفاعل مع بعضها البعض فإننا نتوقع لطاقة الربط أن تتغير مع تغير المقدار  $[A(A-1)]/2$ ، وذلك لأن هذا المقدار يمثل عدد الأزواج المتفاعلة. فى واقع الأمر، للأنوية الثقيلة التى تمتاز بتأثيرات سطحية صغيرة نجد أن طاقة ربطها (وكذلك حجمها) تتغير مع تغير A. هذا يقترح علينا أن مدى طاقة الوضع لابد أن يكون صغيرا

(1) nucleon-nucleon interaction (2) deuteron (3) nucleon-nucleon potential

إلى الحد اللازم لجعل كل نيوكلون يتفاعل فقط مع أقرب النيوكلونات إليه.  
هذا المدى يقدر على أساس المعادلة (٩-٣٦) ليساوى

$$a \cong 1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$$

للتبسيط نفرض أن طاقة الوضع مركزية (أى تعتمد فقط على المسافة بين النيوكلونات)، وبذلك تشبه الحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين. كمية الحركة الزاوية للديوترون تساوى صفر، أى أنه واقع فى الحالة-S.

فى دراستنا لذرة الهيدروجين كانت طاقة الوضع معلومة وكانت مشكلتنا هى إيجاد قيم مستويات الطاقات المتاحة. أما فى حالة الديوترون تُؤخذ طاقة الربط من التجارب العملية لتُستخدم فى وضع شروط على شكل طاقة الوضع. طاقة الربط هذه،  $\varepsilon$ ، هى الطاقة اللازمة لفصل اثنين من النيوكلونات. أى أنها تساوى الفرق بين طاقة السكون لكل من البروتون والنيوترون وطاقة السكون للديوترون، أى تساوى

$$\varepsilon = (m_p + m_n)c^2 - m_d c^2 \quad (1-11)$$

وجد تجريبيا أن

$$\varepsilon \cong 2 \text{ MeV} \quad (2-11)$$

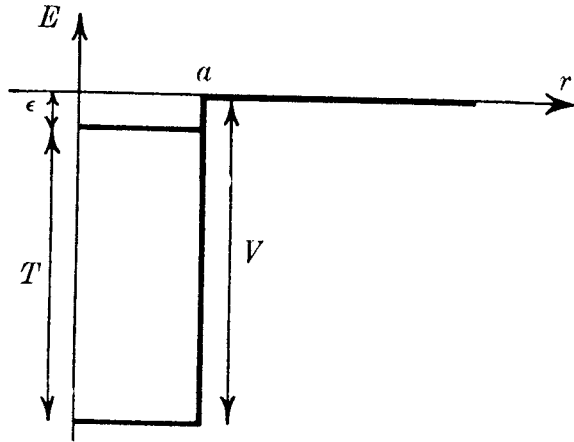
إذا كان كل من البروتون والنيوترون فى الديوترون يرتبطان ببعضهما بواسطة طاقة وضع مداها يساوى  $a$ ، مثلا، فإن المسافة الفاصلة بينهما لا بد أن تكون فى حدود قيمة  $a$ . من مبدأ عدم التحديد هذا يعنى أن كمية حركتهما النسبية يجب أن تكون، على الأقل، فى حدود مقدار ما  $p$ ، حيث  
(انظر الملحق)

$$p \cong \frac{\hbar}{a} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{1.5 \times 10^{-15}} \text{ mks} \quad (3-11)$$

$$\cong 130 \text{ MeV}/c$$

طاقة الحركة المتبادلة<sup>(1)</sup> هي

$$T = \frac{p^2}{2\mu} \quad (4-11)$$



شكل ١-١١ منحنى الطاقة للديوترون في تقريب البئر المربع. لجسيم طاقة ربطه  $\epsilon$  يجب أن تكون طاقة حركته  $T$  ، حيث  $T + \epsilon = V$ . إذا كان  $\epsilon \gg T$  فطبقاً لمبدأ عدم التحديد نجد أن  $\epsilon \gg V$ .

حيث  $\mu$  هي الكتلة المختصرة

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n} \quad (5-11)$$

$$\therefore T \cong 20 \text{ MeV} \quad (6-11)$$

طاقة الربط  $\epsilon$  هي الفرق بين طاقة الوضع السالبة  $V$  (طاقة الوضع الجاذبة التي تربط الجسيمات بعضها ببعض) وطاقة الحركة  $T$  الناتجة من الحركة النسبية للجسيمات. إلا أن  $\epsilon$  أصغر بكثير من  $T$ ، وعليه يتضح أن (انظر شكل ١-١١)

(1) mutual kinetic energy



$$V \cong T \gg \varepsilon \quad (7-11)$$

كتقريب أولى نفرض أن طاقة الوضع عبارة عن بئر مربع نصف قطره  $a$  وعمقه  $V$ ، أى أن

$$\begin{aligned} V(r) &= -V, \quad r \leq a \\ V(r) &= 0, \quad r > a \end{aligned} \quad (8-11)$$

حينئذ يكون  $-\varepsilon$  هي القيمة المناسبة لطاقة الجسيمات المتحركة داخل بئر الجهد والمنتمية للحالة التي فيها  $l=0$ . إذا كانت الدالة المناسبة لوصف هذه الحالة هي  $\chi(r)$  فعندئذ يكون، انظر المعادلة (7-10)،

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) \right] \chi(r) = -\varepsilon \chi(r) \quad (9-11)$$

ولهذا نجد

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - K^2 \right) \chi = 0, \quad r > a \quad (10-11)$$

حيث

$$K^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} \quad (11-11)$$

وكذلك

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \chi = 0, \quad r \leq a \quad (12-11)$$

حيث

$$k^2 = \frac{2\mu(V - \varepsilon)}{\hbar^2} \cong \frac{2\mu V}{\hbar^2} \quad (13-11)$$

لابد للدالة  $\chi$  أن تتوول للصفر عند المانهاية وللدالة  $\chi/r$  أن تكون محدودة

عند نقطة الأصل، وبالتالي يصبح الحل فى الصورة

$$\chi = A \sin kr, \quad r \leq a \quad (14-11)$$

$$\chi = B e^{-Kr} , \quad r > a \quad (10-11)$$

ونظرا لاتصال  $\chi$ ،  $\chi'$  عند النقطة  $r = a$  فإننا نحصل على

$$A \sin ka = B e^{-Ka} \quad (16-11)$$

$$kA \cos ka = -K B e^{-Ka} \quad (17-11)$$

بأخذ النسبة بين هاتين المعادلتين (قارن مع المعادلة (٤-٥٠)) نجد

$$k \cot ka = -K \quad (18-11)$$

التي منها نعين قيمة  $\varepsilon$  بمعلومية كل من  $a, V$ . باستخدام التقريب (١١-١٣)

نحصل على

$$\cot ka = -\frac{K}{k} \approx -\left(\frac{\varepsilon}{V}\right)^{1/2} \quad (19-11)$$

وهي قيمة صغيرة. لهذا

$$ka \approx \pi/2 \quad (20-11)$$

من هذه المعادلة والتعريف (١١-١٣) نجد الآتى:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} = \frac{2\mu V}{\hbar^2} \quad (21-11)$$

أو

$$a^2 V = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4m_n} \quad (22-11)$$

العلاقة الأخيرة التي تربط بين عمق بئر الجهد ونصف قطره هي الشرط الموضوع على طاقة الوضع من الحقيقة التجريبية (وهي أن طاقة ربط الديوترون صغيرة). الصورة الدقيقة للعلاقة تعتمد على الشكل الذى اخترناه لطاقة الوضع، إلا أنه باختيار شكل آخر لطاقة الوضع نحصل على شرط مشابه يوضع على حجم طاقة الوضع،  $a^2 V$ ، التي ينبغى أن نحصل عليها.

فى الإمكان دراسة العلاقة بين  $V, a$  بطريقة أخرى، كما يلى:

تتناقص دالة حالة الديوترون في المنطقة  $r > a$  تبعا للمعامل  $\exp[-rK]$ . لذلك يجب تعريف نصف قطر الديوترون بالمقدار  $1/K$ ، حيث أن هذا المقدار يعد مقياسا لمدى قيم  $r$  التي نحصل عندها على احتمال معتبر لتواجد الجسيمات. من التعريف (١١-١١) نجد

$$\frac{1}{K} = \frac{\hbar}{(m_n \varepsilon)^{1/2}} \quad (٢٣-١١)$$

ولكن من شرط الربط الضعيف (١١-٢٢) يصبح نصف قطر طاقة الوضع مساويا

$$a = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{(m_n V)^{1/2}} \quad (٢٤-١١)$$

لهذا

$$\frac{(1/K)}{a} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (٢٥-١١)$$

وهذا عبارة عن عدد أكبر من الواحد الصحيح.

من المعادلات (١١-٢)، (١١-٦)، (١١-٧) نستخلص أن قيمة هذا العدد في حدود ثلاثة. ومن هنا نرى أن نصف قطر الديوترون أكبر بصورة بينة من نصف قطر طاقة الوضع. إنه حقا تركيب ترابطي ضعيف جدا الذي فيه تقضى الجسيمات معظم وقتها خارج مدى طاقة الوضع الجاذبة التي تربط بين بعضها البعض.

#### ١١-٢ استطارة النيوترون-بروتون<sup>(١)</sup>

نعتبر الآن استطارة حزمة من النيوترونات بواسطة البروتونات عند

(1) neutron-proton scattering

طاقات منخفضة. أي عند الطاقات التي يحدث عندها استتارة للحالة التي فيها  $l=0$ .

سنوضح فيما يلي أنه يمكن التعبير عن ذلك بدلالة طاقة ربط الديوترون.

نضع التعريف

$$U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \quad (26-11)$$

حيث يفترض ثلاثي  $V(r)$  خارج نصف قطر محدد. لهذا الحال إذا كانت طاقة الجسيمات في محاور إسناد مركز الكتلة تساوي  $\hbar^2 k_1^2 / 2\mu$  فإن دالة الحالة  $\chi_1$  تحقق المعادلة (27-11)

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_1^2 - U(r) \right] \chi_1(r) = 0 \quad (27-11)$$

بالمثل عند كمية حركة أخرى نجد

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_2^2 - U(r) \right] \chi_2(r) = 0 \quad (28-11)$$

بضرب المعادلة (27-11) في  $\chi_2$  والمعادلة (28-11) في  $\chi_1$  والطرح، مع ملاحظة أن

$$\chi_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi_1 - \chi_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi_2 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \chi_2 \frac{d\chi_1}{dr} - \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial r} \right) \quad (29-11)$$

نجد

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \chi_2 \frac{d\chi_1}{dr} - \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial r} \right) + \chi_1 \chi_2 (k_1^2 - k_2^2) = 0 \quad (30-11)$$

بتكامل هذه المعادلة في المنطقة بين الصفر وقيمة كبيرة ما لنصف القطر  $R$

نحصل على

$$\left[ \chi_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial r} - \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial r} \right]_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \chi_1 \chi_2 dr \quad (31-11)$$

وإذا كان الشكل التقريبي للدالة  $\chi(r)$  عند مسافات كبيرة  $r$  هو  $\phi(r)$  فبنفس الطريقة نحصل على

$$\left[ \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right]_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \phi_1 \phi_2 dr \quad (32-11)$$

وذلك لأن  $\phi$  تحقق نفس المعادلة التي تحققها  $\chi$ ، ما عدا فقط استبدال  $U(r)$  بالصفر عند مسافات كبيرة. بطرح المعادلة (32-11) من المعادلة (31-11) وتقييم النتائج عندما تؤول  $R$  إلى ما لانهاية نجد الآتي:

تقيم  $R$  الكبيرة نحصل على

$$\phi(R) = \chi(R) ; \chi(0) = 0$$

ولهذا

$$\left[ \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right]_{r=0} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R (\chi_1 \chi_2 - \phi_1 \phi_2) dr \quad (33-11)$$

عندما يكون المقدار  $k_1^2$  موجبا فإن الوضع القائم يعبر عن استطارة، وطبقا للمعادلة (38-10) يكون

$$\phi_{k_1}(r) = \phi_k(r) \approx \left[ \frac{e^{i(kr+\delta)} - e^{-i(kr+\delta)}}{2ik} \right] e^{i\delta} \quad (34-11)$$

$$= \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta} \quad (35-11)$$

حيث من الملائم ضبط عملية التسوية لكي يصبح

$$\phi_k(0) = 1 \quad (36-11)$$

إذا كانت قيمة المقدار  $k_2^2$  سالبة فإننا نحصل على حالة مقيدة.

يمكن وضع

$$k_2^2 = -K \quad (37-11)$$

وهو نفس الرمز المستخدم في البند السابق. وعليه

$$\phi_{k_2} = \phi_K = e^{-Kr} \quad (38-11)$$

التي تُسوى هي الأخرى ليصبح

$$\phi_K(0) = 1 \quad (39-11)$$

نظرا لأن طاقة الوضع من النوع قصير المدى فإن الصور الافتراضية<sup>(1)</sup> للدوال  $\phi$  تساوى دالة الحالة المضبوطة المناظرة، وذلك على معظم مدى التكامل بالمعادلة (33-11). كتقريب من الرتبة الأولى يمكن إهمال الحد المحتوى على هذا التكامل. يتبع هذا التقريب والتعويض من المعادلتين

$$(35-11)، (38-11) \text{ في المعادلة (33-11) نحصل على}$$

$$k \cot \delta = -K \quad (40-11)$$

وحيث أن  $K$  ترتبط مباشرة بطاقة الربط، المعادلة (41-11)، فإن هذه العلاقة تعين إزاحة طور الموجة  $S$ ، وبالتالي تعين إزاحة طور الاستطارة عند الطاقات المنخفضة بدلالة طاقة ربط الديوترون. لقيم  $k$  الصغيرة نجد

$$\delta \approx -k/K \quad (41-11)$$

هذا يوضح (بالمقارنة بالمعادلة (46-10)) أن نصف قطر الديوترون،  $1/K$ ، يعادل نصف قطر الكرة الصلبة المكافئة، وذلك في حالة الاستطارة عند الطاقات المنخفضة للغاية. في محيط هذا التقريب نحصل على

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2} = \frac{4\pi \delta^2}{k^2} \\ &= \frac{4\pi}{K^2} \end{aligned} \quad (42-11)$$

$$= \frac{4\pi \hbar^2}{m_n \varepsilon}$$

(1) asymptotic forms

بالتعويض بالقيم المقاسة تجريبيا فى المعادلة السابقة نحصل على مساحة المقطع المحسوبة نظريا، وهى فى حدود المقدار  $2 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$  ( $2 \text{ barn} =$ ). أما مساحة المقطع المقاسة تجريبيا فتساوى  $50 \text{ barn}$ .

نظرا لأن المبادئ التى تم على أساسها استنتاج المعادلة (١١-٤٢) عامة للغاية (فهى تعتمد فقط على افتراض قصر مدى طاقة الوضع) فيبدو لنا لأول وهلة غرابة التباين الشديد بين القيمتين النظرية والتجريبية لمساحة المقطع. إلا أن تفسير هذا التباين فى غاية السهولة. فالنيوكلونات تشبه الإلكترونات، بمعنى أنه يصابها هى الأخرى حركة مغزلية. بأخذ هذه الحركة فى الاعتبار تعود مرة أخرى الأمور إلى نصابها.

### ١١-٣ التفاعلات المعتمدة على المغزلية

إذا كان لكل من البروتون والنيوترون مغزلية مقدارها  $1/2$  (مقاسة بوحدات  $\hbar$ ) فطبقا للوجهة الكلاسيكية تأخذ المغزلية الكلية لنظام البروتون-نيوترون أى مقدار واقع فى المدى بين الصفر والواحد الصحيح. هذا المقدار سوف يعتمد على التوجيه النسبى لمتجهى المغزلية. نحصل على القيمتين العظمى والصغرى للمغزلية الكلية من التشكيل المتوازى والمتوازى ضديدا، على الترتيب المتجهى المغزلية، أما من الناحية الكمية فنعلم أنه يتاح لنا قيمتان فقط للمغزلية الكلية، وهما الصفر والواحد الصحيح.

لتأكيد المفهوم السابق يكفى حساب عدد الحالات المستقلة للمغزلية. يبقى هذا العدد بدون تغيير عند تعيين الحالات المستقلة للمغزلية بدلالة المغزلية الكلية لجسيمى النظام ككل وتوجيهها، أو بدلالة المغزليات المنفردة لكل جسيم على حده وتوجيهها، وذلك بسبب تكافؤ هاتين الطريقتين.

المغزليات المنفردة للبروتون أو النيوترون تكون إما لأعلى أو لأسفل نسبة إلى اتجاه اختياري معين. ينشأ عن هذا التصنيف الحالات التي أشرنا إليها بالبند السابق بالرموز  $|1/2\rangle, |-1/2\rangle$ . وعليه، يتواجد أربع حالات مستقلة نشير إليها بالرموز

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n, \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n, \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n, \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n$$

إذا أطلقنا على المغزلية الكلية الرمز  $z$  فهذا يعنى وجود عدد  $2z+1$  من الحالات المستقلة للمغزلية (انظر الباب السادس). على ذلك إن وجد ثلاث حالات المغزلية الكلية لكل منها تساوى الواحد الصحيح، بالإضافة إلى حالة واحدة المغزلية الكلية لها تساوى الصفر، فهذا مرة ثانية يعطينا العدد الكلى الصحيح للحالات المستقلة للمغزلية .

بالإشارة إلى الحالة التي مغزليتها الكلية  $z$  والمركبة- $z$  لها  $m$  بالرمز

$|j,m\rangle$  فإن الطريقتين المتبعتين لتعيين حالات المغزلية ترتبطان بالعلاقات

$$|1,+1\rangle = \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n$$

$$|1,0\rangle = (1/2)^{1/2} \left[ \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n + \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n \right] \quad (11-43)$$

$$|1,-1\rangle = \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n$$

$$|0,0\rangle = (1/2)^{1/2} \left[ \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n - \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n \right]$$

نحصل على الحالتين  $|1,+1\rangle, |1,-1\rangle$  بترتيب المغزليتين المنفردتين لكل من البروتون والنيوترون بالطريقة التي تجعل المركبة- $z$  الكلية للنظام ككل مساوية +1 مرة، -1 في المرة الأخرى. يأتي بعد ذلك التشكيل  $|1,0\rangle$  الذى يتمتع أيضا (كما فى التشكيلين السابقين  $|1,+1\rangle, |1,-1\rangle$ ) بخاصية التماثل



تحت عملية الاستبدال  $p \leftrightarrow n$ . أما الحالة  $|0,0\rangle$  فلا بد أن تتكون من تراكب متماثل ضديديا، نظرا لتعامدها مع الحالات الثلاث السابقة.

يصاحب كل من البروتون والنيوترون حركة مغزلية، وبالتالي يجب إدخال مؤثرات المغزلية لباولي  $\hat{\sigma}_n, \hat{\sigma}_p$  (المؤثر  $\hat{\sigma}$  له المركبات  $(\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x)$ ). لا بد لطاقة وضع التفاعل أن تعتمد على هذين المؤثرين، بالضبط كما كان طاقة وضع الإلكترون الواقع تحت تأثير مجال مغناطيسي معتمدة على  $\hat{\sigma} \cdot B$  (انظر المعادلة (٥٢-٨)).

لا بد لطاقة الوضع أن تكون كمية قياسية، وعليه فإن المؤثرات المغزلية، التي تكتب في صورة متجه محوري لا بد أن تظهر مضروبة ضربا قياسييا في متجه محوري آخر. الإمكانية الواضحة لعمل ذلك تتجلى في الكمية  $\hat{\ell} \cdot (\hat{\sigma}_n + \hat{\sigma}_p)$ . مع العلم بأن مركبات  $\hat{\ell}$  هي مؤثرات كمية الحركة الزاوية المدارية، المعادلة (٦-٢). إلا أنه في الحالة التي فيها  $\ell = 0$  لا يضيف هذا المؤثر بالتأكيد أى مساهمة. من أبسط الحدود التي لا تتلاشى في مسألتنا هي طاقة وضع التفاعل المتناسبة مع الكمية القياسية  $\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n$ .

لحساب تأثير هذا المؤثر على الحالات التي مغزليتها الكلية مساوية

$$|j=0, |0\rangle; |j=1, |1\rangle$$

$$\hat{j} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_p + \hat{\sigma}_n) \quad (٤٤-١١)$$

لهذا

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n = 2 \left[ \hat{j}^2 - \left( \frac{1}{2} \hat{\sigma}_p \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \hat{\sigma}_n \right)^2 \right] \quad (٤٥-١١)$$

ومنه بالتأثير على الحالة المناسبة  $|j\rangle$  نجد

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n |j\rangle = 2 \left\{ j(j+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right\} |j\rangle \quad (٤٦-١١)$$

وهذا يتأتى من المعادلة (٤٣-١١) نظرا لأن  $\hat{\sigma}_p$  يؤثر فقط على الحالات المناسبة  $|\pm 1/2\rangle_p$ ،  $\hat{\sigma}_n$  يؤثر فقط على الحالات المناسبة  $|\pm 1/2\rangle_n$ . بعد التعويض عن قيم  $z$  نحصل على

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n |1\rangle = |1\rangle \quad (٤٧-١١)$$

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n |0\rangle = -3|0\rangle \quad (٤٨-١١)$$

نفرض أن طاقة وضع التفاعل بين النيوترون والبروتون تساوي

$$V_c(r) + \hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_p V_s(r) \quad (٤٩-١١)$$

يجب على دالة الحالة أن تحتوى (بالإضافة إلى الجزء الفراغى منها) على معامل يعين مغزلية النيوكلونات. من الأنسب عمل هذه الإضافة بدلالة المغزلية الكلية، وذلك بواسطة أحد متجهات المغزلية  $|z\rangle$ .

للاستطارة التى فيها  $l = 0$  تكتب معادلة شرودنجر المناسبة كالتالى:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_c(r) + \hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_p V_s(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right] \chi_j(r) |j\rangle = 0 \quad (٥٠-١١)$$

عندما يكون  $|z\rangle = |1\rangle$  نحصل على، باستخدام المعادلة (٤٧-١١)

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_c(r) + V_s(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right] \chi_1(r) = 0 \quad (٥١-١١)$$

حيث اختصرنا متجه المغزلية  $|z\rangle$  من دالة الحالة الكلية نظرا لعدم وجود أى مؤثرات بعد تعتمد على المغزلية. بالمثل، باستخدام المعادلة (٤٨-١١)

عندما يكون  $|z\rangle = |0\rangle$  نجد الآتى

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_c(r) - 3V_s(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right] \chi_0(r) = 0 \quad (٥٢-١١)$$

للدوترون مغزلية مساوية للواحد الصحيح، ولذلك دالة حالته حل للحالة المقيدة بالمعادلة (٥١-١١). باتباع نفس المفاهيم المذكورة بالبند

السابق نرى أن هذا الحل يعين استطارة الطاقات المنخفضة،  $\sigma_1$  ( للحالات التي مغزليتها مساوية للواحد الصحيح) تحت تأثير طاقة الوضع الفعالة

$$V_1(r) = V_c(r) + V_s(r) \quad (11-53)$$

تعين استطارة الطاقات المنخفضة،  $\sigma_0$ ، للحالات التي مغزليتها تساوى صفر من طاقة الوضع الفعالة المستقلة تماما الموجودة بالمعادلة (11-52)

$$V_0(r) = V_c(r) - 3V_s(r) \quad (11-54)$$

نظرا لوجود ثلاث حالات بمغزلية مساوية للواحد الصحيح، وحالة واحدة فقط مغزليتها مساوية للصفر، وأيضا لتساوى احتمال تواجد الجسيم فى أى من هذه الحالات الأربعة، فإن مساحة مقطع استطارة النيوترون-بروتون، عند الطاقات المنخفضة، تساوى

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma_0 \quad (11-55)$$

بمعلومية طاقة ربط الديوترون نعين قيمة  $\sigma_1$ ، إلا أنها لاتمدنا بأية معلومات عن قيمة  $\sigma_0$ ، وبذلك يكون قد تم تحليل التباين الظاهرى الوارد بالبند السابق.

أدت التجارب التي استخدم فيها حزم من البروتونات بطاقات أكبر إلى نتائج أكثر أهمية، وسوف نستعرض ذلك فى البند القادم.

#### ١١-٤ عرض للتطورات الإضافية

حتى الآن لم تحل بعد مسألة تعيين طاقة وضع تفاعل النيوكلون-نيوكلون. فيما سبق درسنا نظرية استطارة البروتون-نيوترون. من الصعوبة بمكان إجراء تجربة مباشرة على هذا الموضوع، حيث لايمكن الحصول على هدف يتكون فقط من النيوترونات. يبدو لنا أن تصادم

البروتون-بروتون من الممكن إجراؤه تجريبيا، حيث نستطيع عمليا تعجيل البروتونات وإسقاطها على هدف مكون من الهيدروجين السائل. عند الطاقات المنخفضة للحزمة الساقطة تندفع البروتونات مبتعدة عن بعضها البعض (نتيجة للتنافر الكولومى بين البروتونات الساقطة وبروتونات الهدف) قبل أن تتقارب بمسافة كافية لبدء تأثير التفاعل النووى قصير المدى، وتجربة رذرفورد خير شاهد على ذلك. فى مثل هذه الأحوال يتحكم فى سير التصادمات التأثيرات الكهربائية المعروفة ولانستطيع التوصل إلى معلومات مباشرة عن التفاعل النووى. لذلك دعت الضرورة أن يكون المتطلب التجريبى الأول هو أن يصاحب البروتونات الساقطة طاقات عالية لدرجة تستطيع بها أن تنفذ إلى منطقة التفاعل النووى.

بزيادة طاقة البروتونات الساقطة لم يلاحظ تجريبيا أى ظاهرة ملفتة للانتباه، إلى أن وصلنا إلى طاقة مساوية للمقدار  $300 \text{ MeV}$  (مقاسة فى محاور إسناد المعمل - أى تكافىء طبقا للمعادلة  $(1.0 - 63)$   $150 \text{ MeV}$  فى نظام مركز الكتلة). عند هذه الطاقة يحدث تغيرا وصفيا للتفاعل ، فبدلا من ظهور البروتونات بعد التفاعل، مثل زوج من كرات البلياردو، محافظة على قانون حفظ طاقة الحركة فإنها تظهر بعد التصادم بطيئة تماما ويصاحبها جسيم ثالث وهو الميزون- $\pi$ .

تعد هذه النتيجة مثالا مباشرا على قانون حفظ الطاقة، المطابق لما تم تعديله بواسطة النظرية النسبية بوجود إضافة طاقة السكون للجسيمات فى معادلة اتزان طاقة التصادم. مع العلم أن طاقة الحركة وطاقة السكون يمكن تحويل أى منهما إلى الآخر.

كتلة الميزون-  $\pi$  حوالي  $140 \text{ MeV}/c^2$ ، وعليه فطاقة السكون له تساوى  $140 \text{ MeV}$ . نظرا لأن طاقة الحركة التى تساوى هذا القدر متاحة فى نظام إحدائيات مركز الكتلة فإن هناك إمكانية لتوليد الميزون-  $\pi$  فى تصادم البروتون-بروتون. معظم طاقة الحركة الابتدائية للبروتونين الداخلين فى التفاعل تتحول إلى طاقة سكون للميزون-  $\pi$ .

بالرغم من اكتشاف هذا التفاعل سنة ١٩٤٧ إلا أنه كان متوقعا حدوثه قبل ذلك بسنوات، فى واقع الأمر فقد اقترح هذا التفاعل نظريا سنة ١٩٣٥. يتفاعل الإلكترون والبروتون فى ذرة الهيدروجين من خلال طاقة الوضع الكولومية. بالتعبير عن نظرية الإشعاع بواسطة ميكانيكا الكم نرى أن الإشعاع يظهر على هيئة فوتونات. حينئذ يمكن وصف التفاعل الكولومى كتبادل للفوتونات بين الجسيمين المشحونين. تتفاعل الجسيمات بالضبط مثل لاعبين للكرة، حيث يقذف أحدهما الكرة للآخر. مثل هذا النوع من التفاعل يظهر طبيعيا عند تراكم ميكانيكا الكم مع النظرية النسبية، وقد اقترح يوكاوا<sup>(١)</sup> أن التفاعل النووى يجب أن يكون من مثل هذا النوع من التفاعلات. يرتبط مدى هذه التفاعلات بكتلة الجسيم المتبادل. يمكن للاعبى كرة، مثلا، أن يقذف كرة تنس لمسافة كبيرة ولكن يجب أن يقتربا من بعضهما إذا أرادا تبادل كرة ثقيلة. على ذلك يجب تأسيس مدى التفاعل الذى يصاحبه تبادل جسيم كتلته  $m$  (طبقا للنظرية الكمية النسبية) على أساس أبعاد المسافة الحاصلين عليها من  $m$  والثابت الأخرى  $c, \hbar$ . أى

(1) Yukawa

$$R = \frac{\hbar}{mc}$$

بأخذ

$$R \cong 1.5 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

بالتوافق مع المعادلة (٩-٣٦) فإن طاقة السكون للجسيم تحت الدراسة تساوى

$$mc^2 \cong 130 \text{ MeV}$$

طبقا لفكرة يوكاوا فهذه الجسيمات يمكن إنتاجها فى تصادمات النيوكلون-نيوكلون إذا أُتيح طاقة كافية فى التفاعل. عملية ظهور الميزونات- $\pi$  بطاقة سكون تقترب من هذا المقدار تعتبر خير دليل مباشر على نظرية يوكاوا. إلا أنه بزيادة طاقة تصادم البروتون-بروتون أكثر من ذلك يتولد العديد من الجسيمات النووية-الجزئية<sup>(١)</sup> المسماة بالجسيمات الأولية<sup>(٢)</sup>. كان من غير المتوقع ظهور هذه الجسيمات تماما. عند طاقات أعلى من الحد السابق يبدأ ظهور الجسيمات الضديية المناظرة. تلك الجسيمات تُبدى نفس علاقة الجسيمات كما هو حاصل بين البوزيترونات والإلكترونات. عند تصادم الجسيمات الضديية مع الجسيمات المناظرة تختفى وتتحول كتلتها بسرعة إلى جسيمات أخف بالإضافة إلى طاقة حركة.

من المعروف الآن أن العدد الكلى للجسيمات والجسيمات الضديية قد تجاوز المائة. نعرض فى الجدول ١١-١ الجسيمات والجسيمات الضديية التى تم الكشف عنها حتى حوالى سنة ١٩٦٠. من الملاحظ بالجدول أن

---

(1) sub-nuclear particles (2) elementary particles

معظم هذه الجسيمات غير مستقر وتحلل إلى جسيمات أخرى بمتوسط عمر يتراوح بين  $10^{-6}$  إلى  $10^{-10}$  ثانية. بعض هذه الجسيمات مثل الميونات<sup>(1)</sup>،  $\mu$ ، والنيوترينات<sup>(2)</sup>،  $\nu$ ، لا تُنتج مباشرة في تصادمات النيوكلون-نيوكلون ولكن تظهر فقط من نواتج تحلل الجسيمات الأخرى.

تعد فترة عمر الجسيمات الغير مستقرة طويلة طبقا للمقياس النووى للزمن

$$\left( \frac{\hbar}{m_p c^2} \right) \cong 10^{-24} \text{ sec}$$

ولذلك فإن التفاعلات المتسببة في تحلل هذه الجسيمات الغير مستقرة تكون ضعيفة للغاية. على ذلك يوجد نوعان من التفاعلات النووية قصيرة المدى، وهى

١- **التفاعلات القوية**: وهى التى تربط النيوكلونات بعضها ببعض وينتج عنها الميزونات-  $\pi$  والجسيمات الأخرى المنتجة فى تصادمات النيوكلون-نيوكلون.

٢- **التفاعلات الضعيفة**: وهى التى تتسبب فى تحلل تلك الجسيمات.

ينبغى إضافة هذين النوعين من التفاعلات النووية قصيرة المدى إلى النوعين الآخرين (المعروفين للفيزياء الكلاسيكية) من التفاعلات النووية طويلة المدى وهما التفاعل الكهرومغناطيسى الذى وضع أسسه ماكسويل وتفاعل الجذب العام لنيوتن.

(1) muons (2) neutrinos

جدول ١-١١ الجسيمات الأولية. الرمز العلوى جهة اليمين يشير إلى الشحنة الكهربائية. تظهر الجسيمات فى صورة أزواج من الشحنات المختلفة وتعرف باسم الجسيم والجسيم المضيد. أعطيت الكتل لأقرب  $5 \text{ MeV}/c^2$ . هذا الجدول يلخص الوضع الكائن كما كان معروفا حتى سنة ١٩٦٠. تم مناقشة تطورات حديثة أخرى فى الجزء الرابع من هذا الكتاب.

الجسيم	نواتج التحلل	متوسط العمر (ثانية)	الكتلة ( $\text{MeV}/c^2$ )	المغزلية $\hbar$	الجسيم المضيد	
الباريونات	$\Xi^-$	$\Lambda + \pi^-$	$10^{-10}$	1320	1/2	$\bar{\Xi}^+$
	$\Xi^0$	$\Lambda + \pi^0$	$10^{-10}$	1315	1/2	$\bar{\Xi}^0$
	$\Sigma^\pm$	$n + \pi^+, p^+ + \pi^0$	$10^{-10}$	1190	1/2	$\bar{\Sigma}^\mp$
	$\Sigma^0$	$\Lambda + \gamma$	$10^{-18}$	1190	1/2	$\bar{\Sigma}^0$
	$\Lambda^0$	$p^+ + \pi^-$	$10^{-10}$	1115	1/2	$\bar{\Lambda}^0$
	$n$	$p^+ + e^- + \bar{\nu}$	$10^3$	939	1/2	$\bar{n}$
	$p^+$		مستقر	938	1/2	$\bar{p}^-$
الميزونات	$K^+$	$2\pi, 3\pi; \mu + \nu$	$10^{-8}$	495	0	$\bar{K}^-$
	$K^0$	$2\pi, 3\pi$	$10^{-10}$	500	0	$\bar{K}^0$
	$\eta^0$	$2\gamma, 3\pi$	$10^{-16}$	560	0	$\bar{\eta}^0$
	$\pi^+$	$\mu^+ + \nu$	$10^{-8}$	140	0	$\bar{\pi}^-$
	$\pi^0$	$2\gamma$	$10^{-16}$	135	0	$\bar{\pi}^0$
الفوتون	$\gamma$	مستقر	0	1	$\gamma$	
اللبتونات						
الميون	$\mu^-$	$e^- + \nu + \bar{\nu}$	$10^{-6}$	105	1/2	$\mu^+$
الإلكترون	$e^-$		مستقر	1/2	1/2	$e^+$
النيوترينو	$\nu_e$		مستقر	0	1/2	$\bar{\nu}_e$
النيوترينو	$\nu_\mu$		مستقر	0	1/2	$\bar{\nu}_\mu$



بإدخال الثوابت التي ليس لها أبعاد، مثل ثابت التركيب الدقيق (المعادلة (٦٠-٨))، لتعريف شدة التفاعلات الأربعة الأساسية الموجودة في الطبيعة نحصل على الجدول ١١-٢.

الجدول ١١-١ والجدول ١١-٢ يصفان المادة الأولية للفيزياء كما نعرفها الآن. فالكون ككل من مادة وإشعاع تأسس من واحد وثلاثين جسيما أوليا مبينة بالجدول ١١-١. كل حدث سواء وصف بوسائل فيزيائية أو كيميائية يكون المتسبب فيه أحد الأنواع الأربعة من التفاعلات المذكورة بالجدول ١١-٢.

إنه حقا تخليق جدير بالاعتبار ومعقد بدرجة أكبر بكثير جدا من توقعاتنا، وهناك الكثير من الأشياء التي لم نبتدىء حتى في فهمها بعد. فسبحان الله خالق كل شيء.

جدول ١١-٢ التفاعلات الأساسية في الطبيعة موضحين شدة ومدى كل تفاعل.

التفاعل	الشدة	مدى طاقة الوضع
كهرومغناطيسي	$e_M^2/\hbar c = 1/137$	$\infty$ (يتبع القانون $1/r$ )
جذب	$\gamma m_p^2/\hbar c \approx 10^{-36}$	$\infty$ (يتبع القانون $1/r$ )
قوى (نووى)	$g^2/\hbar c \approx 1$	قصير ( $\sim 10^{-15}$ m)
ضعيف (نووى)	$f^2/\hbar c \approx 10^{-10}$	قصير ( $\sim 10^{-15}$ m)

يبدو لنا الآن أن طاقة وضع النيوكلون-نيوكلون هي صورة من صور التفاعلات النووية القوية. تنشأ كل النماذج المعقدة لتحلل الجسيمات، المبينة بالجدول ١١-١، من التفاعلات الضعيفة. لانملك الآن معلومات تفصيلية عن التفاعلات القوية والضعيفة، إلا أنه قد ظهر حديثا بعض التقدم في

تصنيف الجسيمات التي تتفاعل بقوة، وهذا ماتم عرضه بالباب الخامس  
عشر.

## **الجزء الرابع**

**النظرية العامة والفيزياء النووية - الجزئية**

## الباب الثانى عشر

### المؤثرات ومتجهات الحالة

١٢-١ رموز ديراك

قد بينا لكم بالبواب الثالث ضرورة إدخال المؤثرات لتمثيل عمليات القياس أو الملاحظة على الأنظمة الكمية. كما عرضنا هناك الوسيلة لربط عمليات حساب المؤثرات بالملاحظات على الأنظمة الفيزيائية الكمية. وحتى لا تظهر تلك المفاهيم بصورة غامضة قمنا بالتعليق على عدد من النقاط الرياضية الأساسية التى سنعود إليها مرة أخرى الآن. على وجه الخصوص وضعنا بالبواب الثالث أن المعنى الفيزيائى لتكامل التطابق، الذى أدخل كفرض إضافى بالمعادلة (٣-٣٩)، يمكن استنتاجه من الفروض التفسيرية الأخرى المدونة بالبند ٣-٢.

من العوامل التى تساعدنا كثيرا على فهم التركيب الرياضى الجديد للنظرية الكمية هو إدخال الرموز التى وضعها ديراك. اتضح لنا أثناء دراستنا للبواب الثامن ضرورة (حتى يتسنى لنا وصف الحركة المغزلية) تعميم النظرية الكمية لتشمل إمكانية إدخال المؤثرات المصفوفة فى الاعتبار لتلعب نفس الدور الذى تقوم به المؤثرات التفاضلية ودوال الحالة. وضعت رموز ديراك حتى يستغل هذا التشابه إلى أقصى مدى (التشابه فى الحكم بين المؤثرات المصفوفة وكل من المؤثرات التفاضلية ودوال الحالة). أدخلت هذه الرموز من قبل بالبابين الثامن والحادى عشر لوصف متجهات الحالة المغزلية. أما الآن فسوف نهيء نظرية دوال الحالة فى شكل مشابه.

فيما سبق كتبنا دالة الحالة العامة (أى الدالة الغير مناسبة، لأى عملية ملاحظة) فى الصورة  $\psi(r)$ . باستخدام رموز ديراك تكتب هذه الدالة على النحو

$$\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle \quad (1-12)$$

كما ندخل رمز الدالة المركبة المصاحبة لها كالآتى:

$$\psi^*(x) \equiv \langle \psi | x \rangle \quad (2-12)$$

من الأنسب غالبا عدم ذكر الاعتماد الصريح للدالة على  $x$ ، وعليه نشير إلى الدالة ببساطة بالرمز  $|\psi\rangle$ . باستخدام هذه الرموز الجديدة نرى أنه من دواعى الدقة إطلاق اسم متجه الحالة على  $|\psi\rangle$  عوضا عن دالة الحالة. متجه الحالة يقوم فى الفراغ بدور مشابه تماما للدور الذى تقوم به متجهات المغزلية التى قدمناها بالبند ٨-٢.

لمتجه المغزلية مركبتان هما  $\langle 1 | \psi \rangle, \langle 2 | \psi \rangle$ ، انظر المعادلة (٨-١٣). تكتب هاتان المركبتان فى صورة أخرى (انظر المعادلة (٨-٤٥)) وهى  $\langle +1/2 | \psi \rangle, \langle -1/2 | \psi \rangle$ . يمكن النظر إلى الرمز  $\langle x | \psi \rangle$  بنفس المفهوم السابق، أى أنه المركبة  $x$  لمتجه الحالة  $|\psi\rangle$ . على ذلك يوجد عدد لانهاى من المركبات التى تعين من المتغير  $x$  الذى يتغير لتكوين دالة الحالة

$$\langle x | \psi \rangle \equiv \psi(x)$$

نستطيع الآن كتابة شرط التسوية، المعادلة (٣-٣٢)، كالآتى:

$$\int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = \int |\langle \psi | x \rangle|^2 dx = 1 \quad (3-12)$$

حيث يجرى التكامل كالمعتاد على المدى الفيزيائى الكامل للقيمة المتغيرة بالمعادلة.

يكتب شرط التسوية بدلالة متجهات الحالة فى الصورة

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (٤-١٢)$$

إذا كان هناك دالة عامة أخرى

$$\phi(x) = \langle x | \phi \rangle \quad (٥-١٢)$$

فإن تكامل التطابق بين متجهي الحالة  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  (الوارد بالمعادلة (٣-٣٩)) هو

$$\int \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = \langle \phi | \psi \rangle \quad (٦-١٢)$$

رموز ديراك تبين لنا بوضوح أن تكامل التطابق هو بالضبط تعميم لعملية

الضرب القياسي لمتجهين (لمرتبتين)، المعادلة (٨-٢٦)، لتشمل أيضا

الحالات المعتمدة على متغيرات مستمرة غير محدودة. بلغة المتجهات نقول

أنه إذا كان تكامل التطابق مساويا للصفر، أي أن

$$\langle \phi | \psi \rangle = 0 \quad (٧-١٢)$$

يصبح حينئذ متجها الحالة متعامدين.

من التعاريف (١-١٢)، (٢-١٢)، (٦-١٢) ندرك أن

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* \quad (٨-١٢)$$

فيما سبق أشرنا إلى دالة الحالة المناسبة لمؤثر  $\hat{A}$ ، والمنتمية إلى القيم

المناسبة  $a_n$  بالرمز  $u_{a_n}(x)$ . أما الآن نكتب هذه الدالة في الشكل

$$u_{a_n}(x) = \langle x | a_n \rangle \quad (٩-١٢)$$

إذا كان من غير الضروري الإشارة بوضوح إلى الاعتماد على المتغير  $x$

فإن متجه الحالة المناسب يكتب كما يلي:

$$u_{a_n} = |a_n\rangle \quad (١٠-١٢)$$

وهذا يعتبر مرة أخرى تعميما للرموز المدخلة من قبل للإشارة إلى

متجهات الحالة المغزلية المطروحة بالمعادلة (٨-٤٤). كان من الممكن

كتابة  $|u_{a_n}\rangle$  بدلا عن  $|a_n\rangle$  إلا أن شكل القوس في التعبير الأخير يدل على أننا نتعامل مع متجه حالة، كما أن القيمة المناسبة  $a_n$  تدل على أن هذا المتجه هو المتجه المناسب، بالإضافة إلى أن الرمز  $u$  لا يحمل أى معلومات إضافية أخرى وبالتالي من الأنسب إهماله والتعامل مع الصور المختصرة (١٢-٩)، (١٢-١٠).

تكتب معادلة القدر المناسب (٢-٧) طبقا لرموز ديراك كما يلي:

$$\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | a_n \rangle = a_n \langle x | a_n \rangle \quad (11-12)$$

عند عدم الرغبة في كتابة الاعتماد على المتغير  $x$  صراحة يمكن عندئذ استبدال المعادلة (١٢-١١) بالصورة المختصرة

$$\hat{A} | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle \quad (12-12)$$

التي تعتبر تعميما للمعادلة (٨-١٦) الخاصة بالمغزلية.

باستخدام الرموز سالفة الذكر لايتسنى لنا بالطبع تبسيط الحسابات الفعلية الخاصة بالقيم والدوال المناسبة المشار إليها في الأبواب السابقة. ولكن يبدو من المفيد إعادة ذكر بعض النتائج على ضوء هذه اللغة الجديدة. حينئذ تظهر معادلة القدر المناسب للمركبة  $z$  لكمية الحركة الزاوية، المعادلة (٦-٥)، في الشكل

$$\hat{l}_z(\varphi) \langle \varphi | l_z \rangle = l_z \langle \varphi | l_z \rangle \quad (13-12)$$

أو في الصورة المختصرة

$$\hat{l}_z | l_z \rangle = l_z | l_z \rangle \quad (14-12)$$

أما الدوال المناسبة المسواة، المعادلة (٦-٦)، فتبدو على النحو

$$\langle \varphi | l_z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i l_z \varphi / \hbar} ; \quad l_z = \hbar [0, \pm 1, \pm 2, \dots] \quad (15-12)$$

أما المعادلة المناظرة لكمية الحركة الزاوية ككل، المعادلة (٦-٣١)، هي

$$\hat{l}^2(\vartheta, \varphi) \langle \vartheta, \varphi | \ell^2, \ell_z \rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) \langle \vartheta, \varphi | \ell^2, \ell_z \rangle \quad (12-16)$$

حيث

$$\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (12-17)$$

كما أن المعادلة (٦-٣٨) تؤول إلى الصورة

$$\langle \vartheta, \varphi | \ell^2, \ell_z \rangle = \langle \vartheta, \varphi | \ell, m \rangle = Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \quad (12-18)$$

الرمزان  $\ell^2, \ell_z$  يدلان على أن الحالات المناسبة للمؤثر  $\hat{l}^2$  تكون متفسخة، أى يمكن اعتبارها حالات مناسبة لكل من  $\hat{l}^2, \hat{l}_z$  فى آن واحد، وأن القيم المناسبة لكلا المؤثرين مطلوبة لتعيين دالة حالة وحيدة.

بنفس الطريقة يمكن كتابة الدوال المناسبة للحالات المتقطعة فى ذرة

الهيدروجين، المعادلة (٧-٣٤)، كالتالى:

$$\begin{aligned} u_{n\ell m}(r, \vartheta, \varphi) &= \langle r, \vartheta, \varphi | E_n, \ell^2, \ell_z \rangle \\ &\equiv \langle r, \vartheta, \varphi | n, \ell, m \rangle \end{aligned} \quad (12-19)$$

بواسطة الرموز الجديدة لديراك نستطيع ببساطة تامة كتابة كل ما قدمناه فى الباب الثالث حتى المعادلة (٣-٧). الميزة فى إجراء ذلك تكمن فى أنه بدلالة متجهات الحالة يمكن تطبيق النتائج بالتساوى على المؤثرات التفاضلية أو المؤثرات المصفوفة. وعلى وجه الخصوص تصبح المعادلة (٣-١)، التى تمثل القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظة  $\hat{A}$  على دالة الحالة

المساوية  $|\psi\rangle$ ، فى الصورة

$$\begin{aligned} \bar{a}_\psi &= \int \langle \psi | x \rangle \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \psi \rangle dx \\ &\equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \end{aligned} \quad (12-20)$$



## ١٢-٢ مؤثرات الملاحظة<sup>(1)</sup> - المسعامدية<sup>(2)</sup>

حتى هذه اللحظة لم نجرى أى شىء إضافى أكثر من تغيير الرموز. نقوم الآن، ولأول مرة، بعمل بعض التنقية للنظرية.

واضح أنه للتوافق من الضروري أن تكون قيمة المعادلة (١٢-٢٠) مجرد عدد حقيقى. هذا يفرض علينا بعض القيود على المؤثرات  $\hat{A}$  لتصبح ممثلة لعمليات الملاحظة (وهذا ما كان يجب افتراضه ضمنا فيما سبق). يظهر جليا أن الشرط الضروري هو

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^* \quad (١٢-٢١)$$

وذلك لأى حالة  $|\psi\rangle$ .

لأسباب سندركها بعد قليل ندخل الشرط الآتى الأكثر تقيدا:

" لايمثل المؤثر  $\hat{A}$  عملية ملاحظة فيزيائية مالم يكن

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^* \quad (١٢-٢٢)$$

وذلك لأى حالتين  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  "

بكتابة هذا الشرط فى صورته المفصلة نجد

$$\int \langle \phi | x \rangle \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \psi \rangle dx = [\int \langle \psi | x \rangle \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \phi \rangle dx]^*$$

مثل هذا المؤثر يسمى مؤثر الملاحظة. واضح أن المعادلة (١٢-٢٢) لها

التأثير المرغوب فيه لجعل المعادلة (١٢-٢٠) ممثلة لعدد حقيقى. لهذه

المعادلة اثنان من المتعلقات الرياضية التى تتميز بمعانى فيزيائية هامة.

نوجز هذا فى النظريتين الآتيتين:

**نظرية ١** القيم المناسبة لمؤثر ملاحظة تكون حقيقية.

(1) observable operators (2) orthonormality

البرهان: إذا كانت  $a$  هي أى قيمة مناسبة للمؤثر  $\hat{A}$ ، حينئذ يكون

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

$$\hat{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|a\rangle = a\langle x|a\rangle \quad (12-23)$$

لهذا بالضرب فى  $\langle a|x\rangle$  وإجراء التكامل نجد

$$\int \langle a|x\rangle \hat{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|a\rangle dx = a \int \langle a|x\rangle \langle x|a\rangle dx \quad (12-24)$$

أو

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = a\langle a|a\rangle$$

بالعودة إلى المعادلة (12-22) ندرك أن الطرف الأيسر بالمعادلة السابقة عبارة عن عدد حقيقى. الكمية  $\langle a|a\rangle$  ماهى إلا تكامل التسوية (المعادلة (12-3))، وهى الأخرى عبارة عن عدد حقيقى طبقا لتعريف تكامل التسوية. ومن هنا فإن  $a$  لابد أن يكون عددا حقيقيا.

يتضح حاجتنا للنتيجة السابقة حتى يتم التوافق الفيزيائى مع الفرض التفسيرى الأول، ت(1)، المذكور بالبند 3-2، الذى ينص على أن القيم المناسبة لمؤثر ملاحظة ماهى إلا النتائج الممكنة للملاحظة المناظرة.

**نظرية 2** المتجهات المناسبة المنتمية إلى قيم مناسبة مختلفة لمؤثر

ملاحظة تكون متعامدة (أى أن تكامل التطابق لها متلاشى)

البرهان: نفرض أن  $a_1, a_2$  قيمتين مناسبتين مختلفتين للمؤثر  $\hat{A}$ . إذا

$$\hat{A}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle \quad (12-25)$$

$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle \quad (12-26)$$

وعليه من المعادلة (12-25) بالضرب من جهة الشمال فى  $\langle a_2|$  نجد

$$\langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle = a_1\langle a_2|a_1\rangle \quad (12-27)$$

بالمثل المعادلة (١٢-٢٦) تعطينا

$$\langle a_1 | \hat{A} | a_2 \rangle = a_2 \langle a_1 | a_2 \rangle \quad (١٢-٢٨)$$

باعتبار المعادلة المركبة المصاحبة للمعادلة (١٢-٢٨)، واستخدام

المعادلتين (١٢-٢٢)، (١٢-٨) وكذلك النظرية ١، نحصل على

$$\langle a_2 | \hat{A} | a_1 \rangle = a_1 \langle a_2 | a_1 \rangle \quad (١٢-٢٩)$$

ب طرح المعادلة (١٢-٢٩) من المعادلة (١٢-٢٧) نجد الآتي:

$$(a_1 - a_2) \langle a_2 | a_1 \rangle = 0 \quad (١٢-٣٠)$$

ومنه

$$\langle a_2 | a_1 \rangle = 0 \quad (١٢-٣١)$$

أو بطريقة أخرى نقول:

$$\int \langle a_2 | x \rangle \langle x | a_1 \rangle dx = 0 \quad (١٢-٣٢)$$

وهذا يكمل البرهان.

من الملاحظ أن البرهان يعتمد على المعادلة (١٢-٢٢). الشرط الأقل

قيدا من ذلك، وهو المعادلة (١٢-٢١)، غير كاف للوصول للبرهان

المطلوب.

واضح هنا أن الرموز المختصرة قد استخدمت أثناء البرهان. من المفيد

للقارئ إعادة الخطوات مرة أخرى مع وضع الاعتماد على المتغير  $x$ ،

وكذلك التكمالات، بشكل صريح.

إذا كانت جميع الحالات المناسبة لمؤثر ما مسواة فيمكن لنا إدماج

شرط التسوية مع نتيجة النظرية الثانية لنحصل على شرط المسعامدية

(المسعامدية تعنى أن الحالات مسواة ومتعامدة في نفس الوقت) وهو:

$$\langle a_n | a_n \rangle = \delta_{nn} \quad (١٢-٣٣)$$

حيث

$$\begin{aligned} \delta_{nn'} &= 1, & n &= n' \\ &= 0, & n &\neq n' \end{aligned} \quad (34-12)$$

بدلالة الحالات المناسبة للطاقة فى ذرة الهيدروجين يكتب هذا الشرط على النحو

$$\begin{aligned} &\int U_{n\ell m}^*(r, \vartheta, \varphi) U_{n'\ell' m'}(r, \vartheta, \varphi) r^2 dr d\Omega \\ &= \int \langle n, \ell, m | r, \vartheta, \varphi \rangle \langle r, \vartheta, \varphi | n', \ell', m' \rangle r^2 dr d\Omega \\ &= \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (35-12)$$

١٢-٣ الدالة- $\delta$  لديراك<sup>(١)</sup>

تعتبر الدالة- $\delta$  لديراك تعميما للدالة  $\delta_{nn'}$  لكرونكر<sup>(٢)</sup> حيث نستبدل المتغيرات المتقطعة  $n, n'$  بالمتغيرات المتصلة  $a, a'$ ، مثلا. من التعريف نجد

$$\delta(a - a') = 0, \quad a \neq a' \quad (36-12)$$

ولكن

$$\int \delta(a - a') da = 1 \quad (37-12)$$

على شرط أن يشمل مدى التكامل النقطة  $a = a'$ .

للقيم المناسبة المتصلة يكتب شرط المسعامدية كما يلى:

$$\langle a | a' \rangle = \delta(a - a') \quad (38-12)$$

يبدو أبسط تمثيل للدالة  $\delta$  على النحو

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} dx \quad (39-12)$$

لفهم هذا الاختيار نعتبر

(1) the Dirac  $\delta$ -function (2) Kronecker

$$\phi_g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-g}^g e^{iax} dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin ag}{a}$$

والآن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_g(a) da = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ag}{a} da = 1 \quad (٤٠-١٢)$$

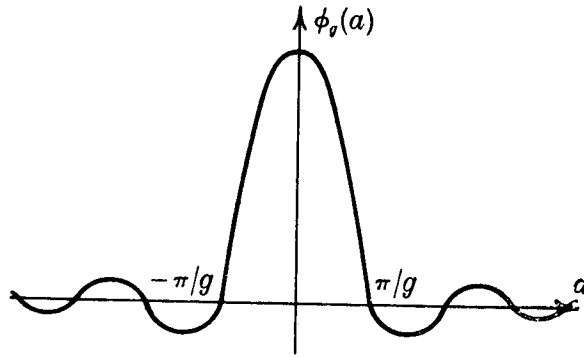
ولكن

$$\phi_g(0) = \frac{g}{\pi}$$

وأیضا

$$\phi_g(\pm\pi/g) = 0$$

وذلك لكي نجعل المساهمة الكلية في التكامل (٤٠-١٢) عندما  $g \rightarrow \infty$  تأتي من النقطة  $a = 0$  (انظر شكل ١-١٢)، وعندها يصبح الشرطان (١٢-١٢)، (٣٦-١٢)، (٣٧-١٢) متحققين. هذا يؤسس فهمنا لاختيار التمثيل (٣٩-١٢).



شكل ١-١٢ رسم الدالة  $\phi_g(a)$ . عند الحد  $g \rightarrow \infty$  تصبح القمة عند نقطة الأصل لانهاية الارتفاع وضيقة ولكن تبقى المعادلة (٤٠-١٢) متحققة. لهذا يكون  $\phi_{g \rightarrow \infty}(a) = \delta(a)$ .

إذا تم تسوية موجات دي برولى، للجسيمات التى تسير فى حجم لانهاى (حاملة كمية حركة خطية محددة، طبقا للمعادلة (١٢-٣٨) فإننا نحصل على (فى بعد واحد فقط):

$$\begin{aligned}\langle x|p\rangle &= c e^{i p x / \hbar} \\ \langle p|p'\rangle &= \int \langle p|x\rangle \langle x|p'\rangle dx \\ &= |c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar} dx \\ &= \delta(p-p')\end{aligned}\quad (٤١-١٢)$$

بمقارنة المعادلة (٤١-١٢) مع المعادلة (١٢-٣٩) نجد أن

$$|c|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad (٤٢-١٢)$$

### ١٢-٤ التتام<sup>(١)</sup>

بالإضافة إلى الشرط (١٢-٢٢) نفرض أنه لكى يمثل مؤثر معين عملية ملاحظة لابد للدوال المناسبة، المنتمية لهذا المؤثر، أن تكون فيما بينها فئة تامة. للمؤثرات المصفوفة التى أبعادها محدودة فإن الشرط (١٢-٢٢) يعنى أن هذه المؤثرات هرميتية، وأن تتام المتجهات المناسبة يأتى كنظرية. هذا يعنى أن أى حالة فيزيائية  $\langle x|\psi\rangle$  يمكن التعبير عنها بالضبط (فى صورة مفكوك خطى<sup>(٢)</sup>) بدلالة الدوال المناسبة لمؤثر  $\hat{A}$ ، وذلك إن كان المؤثر  $\hat{A}$  يعبر عن خاصية ملاحظة على النظام. ومن هنا فإن التتام يعنى إمكانية عمل مفكوك لأى حالة  $\langle x|\psi\rangle$  كالاتى:

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_m \langle x|a_m\rangle F(a_m) \quad (٤٣-١٢)$$

(1) completeness (2) linear expansion

$$\langle \psi | x \rangle = \sum_m F^*(a_m) \langle a_m | x \rangle \quad (٤٤-١٢)$$

حيث  $F(a_m)$  هي معاملات المفكوك.

من المعادلة (١٢-٢) نرى أن المعادلة (٤٤-١٢) هي بالضبط الدالة المركبة المصاحبة للدالة (٤٣-١٢). في الأحوال التي يكون فيها القيم

المناسبة  $a_m$  متصلة نستبدل المجموع بالتكامل

$$\langle x | \psi \rangle = \int \langle x | a \rangle F(a) da \quad (٤٥-١٢)$$

وعليه، إذا كان  $\hat{A}$  هو مؤثر كمية الحركة الخطية، مثلا، فإن (أى دالة حالة

للنظام يمكن فكها بدلالة الدوال المناسبة) لكمية الحركة الخطية

$$\langle x | \psi \rangle = \int \langle x | p \rangle F(p) dp \quad (٤٦-١٢)$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{1/2} \int e^{ipx/\hbar} F(p) dp$$

حيث

$$\langle x | p \rangle = \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{ipx/\hbar} \quad (٤٧-١٢)$$

هي الدالة المناسبة للمؤثر  $\hat{p}$  والمنتمية إلى القيم المناسبة  $p$ . تم تسوية هذه الدالة طبقا للمعادلة (٤٢-١٢).

أما الآن، بالتعويض من المعادلتين (٤٣-١٢)، (٤٤-١٢) في المعادلة المعبرة عن متوسط ناتج تكرار عملية القياس، المعادلة (٢٠-١٢)، نحصل

على

$$\bar{a}_\psi = \int \left( \sum_n F^*(a_n) \langle a_n | x \rangle \right) \hat{A} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \sum_m \langle x | a_m \rangle F(a_m) \right) dx$$

$$= \int \left( \sum_n F^*(a_n) \langle a_n | x \rangle \right) \left( \sum_m a_m \langle x | a_m \rangle F(a_m) \right) dx$$

$$= \sum_n a_n |F(a_n)|^2 \quad (٤٨-١٢)$$

حصلنا هنا على التعبير الثانى بالطرف الأيمن باستخدام معادلة القدر المناسب (١٢-١١). أما التعبير النهائى فهو نتيجة لشرط المسعامدية، المعادلة (١٢-٣٣).

من المعادلة (١٢-٤٨) يتضح لنا أن احتمال الحصول على نتيجة معينة  $a_n$  من جراء عملية ملاحظة واحدة  $\hat{A}$  على نظام فى الحالة  $\langle x|\psi \rangle$  يساوى

$$P_\psi(a_n) = |F(a_n)|^2 \quad (٤٩-١٢)$$

(هذا يشبه تماما ما قدمناه بشأن التوزيع الفراغى المستخدم فى استنتاج المعادلة (٣-٣٨) بالبند ٣-٥).

لإيجاد  $F(a_n)$  نضرب المعادلة (١٢-٤٣) فى  $\langle a_n|x \rangle$  ثم نجرى التكامل بالطرف الأيمن، مستخدمين شرط المسعامدية (١٢-٢٣)، لنحصل على

$$\int \langle a_n|x \rangle \langle x|\psi \rangle dx = \int \langle a_n|x \rangle \sum_m \langle x|a_m \rangle F(a_m) dx \\ = F(a_n)$$

لهذا

$$F(a_n) = \langle a_n|\psi \rangle = \int \langle a_n|x \rangle \langle x|\psi \rangle dx \quad (٥٠-١٢)$$

وهذا هو بالضبط تكامل التطابق بين دالة الحالة العامة  $\langle x|\psi \rangle$  ودالة الحالة المناسبة  $\langle x|a_n \rangle$ . هذا يعنى أن مفكوك أى دالة حالة اختيارية، المعادلة (١٢-٤٣)، يصبح

$$\langle x|\psi \rangle = \sum_{a_n} \langle x|a_n \rangle \langle a_n|\psi \rangle \quad (٥١-١٢)$$



حينئذ يكون احتمال الحصول على النتيجة  $a_n$  من جراء عملية القياس  $\hat{A}$  على نظام في الحالة  $|\psi\rangle$ ، المعادلة (١٢-٤٩)، يساوى

$$P_\psi(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2 \quad (١٢-٥٢)$$

وهذه هي نفس المعادلة (٣-٣٩) ولكن برموز ديراك.

يجب علينا ملاحظة أن هذا يعد تعميما مباشرا للتفسير الفيزيائي النموذجي لدالة الحالة، الذي ينص على أنها تعطي الكثافة الاحتمالية في الفراغ، المعادلة (٣-٣٨). تكتب الكثافة الاحتمالية طبقا لرموز ديراك كالاتي:

$$P_\psi(x) = |\langle x | \psi \rangle|^2$$

شرط التتام محتوى فى المعادلتين (١٢-٤٣)، (١٢-٤٤). يتم تعريف

الشكل التقليدى لشرط التتام الأكثر عمومية كما يلي:

لأى فئة من المتجهات المناسبة  $|a\rangle$  يبدو هذا الشرط فى الصورة

$$S_a \dots |a\rangle \langle a| = \hat{1} \quad (١٢-٥٣)$$

حيث

$$S_a = \sum_{a_n} \dots, a = a_n \quad (a \text{ تأخذ قيمة متقطعة})$$

$$= \int \dots da \quad (a \text{ تأخذ قيمة متصلة})$$

فى كلا الحالىين يؤخذ المجموع على كل القيم المتاحة فيزيائيا.

المعادلة (١٢-٥٣) تعنى أن أى تعبير فى الصورة  $\langle \phi | \psi \rangle$  يمكن تقسيمه

إلى تعبيرين  $\langle \phi |, |\psi \rangle$ ، وأن العملية سالفة الذكر (أى  $S_a \dots |a\rangle \langle a|$ ) يمكن

وضعها بين التعبيرين السابقين دون حدوث أى تغيير فى النتائج العددية

التي نحصل عليها؛ بمعنى أن

$$S_a \langle \phi | a \rangle \langle a | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle \quad (١٢-٥٤)$$

المعادلة (١٢-٥٠) تعتبر مثالا واضحا على هذه الفكرة عند وضع

$$\phi = a_n$$

$$a = x$$

كما أن المعادلة (١٢-٥١) تشير أيضا لهذه الفكرة عند وضع

$$\phi = x$$

هذه الفكرة لها أهمية قصوى، حيث باستخدامها نستطيع اختصار مفكوك أى دالة اختيارية  $\langle x|\psi \rangle$ ، ويتسنى لنا أيضا تقييم الاحتمالات  $P_\psi(a_n)$  بطريقة تلقائية.

من المؤكد أنه قد مر على القارىء، فى مواطن أخرى، مفكوكات من

نوع المعادلة (١٢-٥١). إذا كان

$$\hat{A} = \hat{p} \quad (١٢-٥٥)$$

فإن مفكوك أى دالة معطاه  $\langle x|\psi \rangle$  هو

$$\begin{aligned} \langle x|\psi \rangle &= S_p \langle x|p \rangle \langle p|\psi \rangle \\ &= \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{1/2} \int e^{ipx/\hbar} \langle p|\psi \rangle dp \end{aligned} \quad (١٢-٥٦)$$

ومعاملات هذا المفكوك هى

$$\begin{aligned} \langle p|\psi \rangle &= S_x \langle p|x \rangle \langle x|\psi \rangle \\ &= \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{1/2} \int e^{-ipx/\hbar} \langle x|\psi \rangle dx \end{aligned} \quad (١٢-٥٧)$$

واحتمال أن يكون للنظام كمية حركة خطية مقدارها  $p$  يساوى

$$P_\psi(p) = |\langle p|\psi \rangle|^2 \quad (١٢-٥٨)$$

الدالتان  $\langle x|\psi \rangle$ ،  $\langle p|\psi \rangle$  التى بهما يتعين التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ الكارتيذى وفراغ كمية الحركة الخطية، على الترتيب، تعتبر كل

منهما انتقال فورير للأخرى. تم من قبل، بالبند ٣-٦ عند دراسة مبدأ عدم التحديد، حساب  $\langle p|\psi \rangle$  (التي أسميناها هناك  $\phi(p)$ ) عندما كان

$$\langle x|\psi \rangle = \psi(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right] \quad (12-59)$$

إذا كان الجسيم محصورا داخل بئر مربع لانهاى، طاقة وضعه معرفة بالمعادلة (٣-٢١)، يصبح متجه الحالة  $\langle x|\psi \rangle$  دالة ما اختيارية فى المنطقة  $|x| \leq a$ . نستطيع فك هذا المتجه طبقا للمعادلة (١٢-٥١) بدلالة الدوال المناسبة للطاقة المعينة بالمعادلات من (٣-٢٦) حتى (٣-٢٩)؛

$$\begin{aligned} \langle x|\psi \rangle &= \sum_n \langle x|E_n \rangle \langle E_n|\psi \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a)^{-1/2} \sin \frac{2n\pi x}{2a} \langle E_{2n}|\psi \rangle + \quad (12-60) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (a)^{-1/2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \langle E_{2n+1}|\psi \rangle \end{aligned}$$

هذا هو بالضبط مفكوك متسلسلة فورير. عند التعويض فى المعادلة (١٢-٥٠) للحصول على المعاملات  $\langle E_n|\psi \rangle$  التى تعين احتمال تواجد الجسيم فى حالات الطاقة المختلفة الممكنة فإننا بذلك نحصل مرة ثانية على المعادلة القياسية التى تعين معاملات متسلسلة فورير. التعبيرات المناظرة فى حالة المهتز التوافقى الخطى تكون عبارة عن مفكوكات فى صورة متعددات حدود هرميت التى سبق ذكرها بعد المعادلة (٥-٢٦).

من المهم جعل المفكوك فى صورة فئة من الحالات المعينة بطريقة وحيدة<sup>(١)</sup>. لذلك فالحالة اختيارية للإلكترون فى ذرة الهيدروجين تكتب دالة

(1) uniquely specified set of states

الحالة هذه في الصورة  $\langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle$ . يمكن فك هذه الحالة بدلالة الحالات المناسبة للطاقة، إلا أنه يجب علينا وصف القيم المناسبة لكل من المؤثرين  $\hat{l}_z, \hat{l}^2$  أيضا حتى نعطي فئة معرفة تعريفا جيدا<sup>(1)</sup>. لهذا من المعادلة (١٢-٥١) واستخدام الرموز المذكورة في المعادلة (١٢-٣٥) نحصل على

$$\langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle = \sum_{n, \ell, m} \langle r, \vartheta, \varphi | n, \ell, m \rangle \langle n, \ell, m | \psi \rangle \quad (١٢-٦١)$$

حيث يؤخذ المجموع على كل قيم  $n, \ell, m$  المتوافقة مع القيود المذكورة بالبند ٣-٧.

نحصل على احتمال أن يكون للجسيم القيم المناسبة  $E, \ell^2, \ell_z$  المناظرة للقيم  $n, \ell, m$ ، على الترتيب، من مربع القيمة المطلقة للمعامل

$$\begin{aligned} \langle n, \ell, m | \psi \rangle &= S_{r, \vartheta, \varphi} \langle n, \ell, m | r, \vartheta, \varphi \rangle \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle \\ &= \iint u_{n, \ell, m}^*(r, \vartheta, \varphi) \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle r^2 dr d\Omega \end{aligned} \quad (١٢-٦٢)$$

وهذا عبارة عن عدد (تكامل التطابق) يعتمد على دالة الحالة المعطاة  $\langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle$  ودالة الحالة المناسبة المعروفة

$$u_{n, \ell, m}^*(r, \vartheta, \varphi) \equiv \langle n, \ell, m | r, \vartheta, \varphi \rangle \quad (١٢-٦٣)$$

من الممكن دائما لأي دالة حالة لجسيم، يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية اختيارية، إجراء مفكوك للجزء الزاوي من هذه الدالة بدلالة الحالات المناسبة لكمية الحركة الزاوية. أي أن

$$\begin{aligned} \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle &= \sum_{\ell, m} \langle \vartheta, \varphi | \ell, m \rangle \langle \ell, m, r | \psi \rangle \\ &= \sum_{\ell, m} Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi) \langle \ell, m, r | \psi \rangle \end{aligned} \quad (١٢-٦٤)$$

وعليه باستخدام المعادلة (١٢-٥٠) تبدو المعاملات في الصورة

(1) well defined set

$$\begin{aligned}\langle \ell, m, r | \psi \rangle &= \int_{\vartheta, \varphi} \langle \ell, m | \vartheta, \varphi \rangle \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle \\ &= \int Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)^* \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle d\Omega\end{aligned}\quad (65-12)$$

من الملاحظ أن المعادلة السابقة عبارة عن دالة في  $r$ ، ونكتبها بالرموز القديمة كما يلي:

$$\langle \ell, m, r | \psi \rangle = \psi_{\ell m}(r) \quad (66-12)$$

تم من قبل، في البند ١٠-٤، حساب أول حد في المفكوك (١٢-٦٤) مع المعاملات المعينة بالمعادلة (١٢-٦٥) للحالة الخاصة التي فيها متجه الحالة يعبر عن حزمة من الجسيمات التي كمية حركتها الخطية مساوية  $p$  (انظر المعادلة (١٠-٣٠))

$$\begin{aligned}\langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle &= \langle r, \vartheta, \varphi | p \rangle \\ &= e^{i p r \cos \vartheta / \hbar}\end{aligned}\quad (67-12)$$

## ١٢-٥ وسائل استخدام المؤثرات

### (أ) المهتز التوافقي

يمكن استخدام تلك الوسائل مباشرة في مسألة تعيين مستويات طاقة مهتز توافقي التي درسناها في الباب الخامس. لعمل ذلك نستخدم فقط معادلة القدر المناسب (١٢-١٢) وعلاقات المبادلة. ليس من الضروري عند إجراء الحسابات إدخال المؤثرات في صورتها المفصلة أيا كانت هذه المؤثرات على شكل مصفوفات أو مشتقات. لذلك سيجد القارئ ماسيأتي لاحقاً من جبر المؤثرات في صورته المختصرة.

طبقاً للمعادلة (٥-٦) نكتب الهاميلتوني كما يلي:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 \quad (68-12)$$

نضع التعويض

$$\hat{a} = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \omega \hat{x} + \frac{\hbar}{(2m)^{1/2}} \hat{p} \quad (69-12)$$

$$\hat{a}^+ = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \omega \hat{x} - \frac{\hbar}{(2m)^{1/2}} \hat{p} \quad (70-12)$$

ينظر إلى المعادلتين السابقتين على أنهما تعريفان أكثر عمومية للمؤثرات الواردة بالمسألة ٥-٤.

من علاقة المبادلة  $[\hat{x}, \hat{p}]$  ، المعادلة (٣-١٣) ، نحصل بالتعويض المباشر على

$$\hat{a} \hat{a}^+ = \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (71-12)$$

$$\hat{a}^+ \hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (72-12)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar \omega \quad (73-12)$$

ولكن الحالة المناسبة للطاقة  $E_n$  هي  $|E_n\rangle$  ، ومنه

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (74-12)$$

التي يمكن كتابتها مرة ثانية باستخدام المعادلتين (٧١-١٢) ، (٧٢-١٢) إما في الشكل

$$\hat{a} \hat{a}^+ |E_n\rangle = (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle \quad (75-12)$$

أو الشكل

$$\hat{a}^+ \hat{a} |E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle \quad (76-12)$$

وهما يناظران مباشرة المعادلتان (٥-١١١) ، (٥-١١١ب).

بضرب المعادلة (٧٥-١٢) في  $\hat{a}^+$  نجد

$$\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ |E_n\rangle = (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) \hat{a}^+ |E_n\rangle \quad (77-12)$$

وعليه إما أن يكون

$$\hat{a}^+ |E_n\rangle = 0 \quad (78-12)$$

أو يكون

$$\text{مثلا } \hat{a}^+ |E_n\rangle = |E_{n+1}\rangle, \quad (79-12)$$

وعليه تكتب المعادلة (77-12) على النحو

$$\hat{a} \hat{a}^+ |E_{n+1}\rangle = [ (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) - \frac{1}{2} \hbar \omega ] |E_{n+1}\rangle \quad (80-12)$$

وتلك هي المعادلة (76-12) للحالة  $|E_{n+1}\rangle$  بشرط تحقق المعادلة

$$E_{n+1} = E_n + \hbar \omega \quad (81-12)$$

بذلك إذا كان لدينا أى متجه مناسب  $|E_n\rangle$  فمن الممكن دائما باستخدام المعادلة (79-12) توليد متجه مناسب جديد  $|E_{n+1}\rangle$  ينتمى إلى قيمة مناسبة تعطى بالمعادلة (81-12)، بشرط أن لا تكون  $E_n$  هي طاقة أعلى مستوى. إذا كانت  $E_n$  هي طاقة أعلى مستوى نطبق حينئذ المعادلة (78-12). إلا أن شكل طاقة وضع المهتز التوافقي تدل على عدم وجود مستوى طاقة أعلى من بقية المستويات الأخرى، وبالتالي نستطيع توليد مستويات طاقة أعلى بصفة دائمة.

بالمثل بضرب المعادلة (76-12) فى  $\hat{a}$  نجد

$$\hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} |E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2} \hbar \omega) \hat{a} |E_n\rangle \quad (82-12)$$

والآن إما أن يكون

$$\hat{a} |E_n\rangle = 0 \quad (83-12)$$

أو يكون

$$\text{مثلا} \quad \hat{a}|E_n\rangle = |E_{n-1}\rangle, \quad (١٢-٨٤)$$

للوضع الأخير تكتب المعادلة (١٢-٨٢) كما يلي:

$$\hat{a}\hat{a}^+|E_{n-1}\rangle = \left[ (E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega) + \frac{1}{2}\hbar\omega \right] |E_{n-1}\rangle \quad (١٢-٨٥)$$

وهذه هي المعادلة (١٢-٧٥) للحالة  $|E_{n-1}\rangle$  بشرط أن يكون

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega \quad (١٢-٨٦)$$

على ذلك بمعلومية أى متجه مناسب  $|E_n\rangle$  من الممكن دائماً باستخدام المعادلة (١٢-٨٤) توليد متجه مناسب جديد  $|E_{n-1}\rangle$  وذلك إن لم يكن  $|E_n\rangle$  هي الحالة الأرضية للنظام،  $|E_0\rangle$ . إذا كانت  $|E_n\rangle$  هي الحالة الأرضية عندها نطبق المعادلة (١٢-٨٣).

بوضع  $n=0$  فى المعادلة (١٢-٧٦) نحصل على العلاقة

$$E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0$$

التي تعطى طاقة الحالة الأرضية للنظام. أما المعادلة (١٢-٨١) فتشير بوجه عام إلى أن طاقة أى مستوى تُعطى بالمعادلة

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad n=0,1,2,\dots \quad (١٢-٨٧)$$

التي تتفق مع المعادلة (٥-٢٥).

واضح من المعادلتين (١٢-٧٩)، (١٢-٨٤) أن  $\hat{a}^+$ ،  $\hat{a}$  هي، على الترتيب، مؤثرات الإفناء والتوليد لطاقة النظام. عمليتى الإفناء والتوليد تتم هنا بوحدات  $\hbar\omega$ .

### (ب) كمية الحركة الزاوية

يمكن لنا استخدام وسائل المؤثرات المتبعة فى حالة المهتز التوافقى لبيان إتاحة تكون القيم الصحيحة وأنصاف القيم الصحيحة لكمية الحركة



الزاوية. تم من قبل استعراض ذلك بصورة تفصيلية في البند ٣-٨ في حالة أنصاف القيم الصحيحة. أما في هذا المقام فنقوم بعرض برهان الحالة العامة. السبيل لهذا هو استخدام التعريف الأكثر عمومية لكمية الحركة الزاوية، وذلك باستبدال المؤثر  $\hat{l}$  بالمؤثر  $\hat{j}$ .

نعتبر أن علاقات المبادلة المذكورة بالمعادلة (٨-٣١) هي الخاصية

المعرفة لمؤثرات كمية الحركة الزاوية. هذه العلاقات هي

$$[\hat{j}_x, \hat{j}_y] = i\hbar \hat{j}_z \quad (٨٨-١٢)$$

بالإضافة إلى علاقتين أخريين نحصل عليهما من التباديل الدورية للمعاملات  $x, y, z$ .

نعرض مؤثرين جديدين كما يلي:

$$\hat{j}_+ \equiv \hat{j}_x + i\hat{j}_y \quad (٨٩-١٢)$$

$$\hat{j}_- \equiv \hat{j}_x - i\hat{j}_y \quad (٩٠-١٢)$$

بالتعويض المباشر نجد أن المعادلة (٨٨-١٢) تعطى

$$[\hat{j}_z, \hat{j}_+] = \hbar \hat{j}_+ \quad (٩١-١٢)$$

$$[\hat{j}_z, \hat{j}_-] = -\hbar \hat{j}_- \quad (٩٢-١٢)$$

$$[\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hbar \hat{j}_z \quad (٩٣-١٢)$$

نظرا لأن  $\hat{j}^2$  يتبادل مع  $\hat{j}_z$  (أى أن  $[\hat{j}^2, \hat{j}_z] = 0$ ) فيتسنى لنا إدخال دالة

حالة،  $|\beta, m\rangle$ ، مناسبة لكلا المؤثرين في آن واحد. لهذا نجد

$$\hat{j}^2 |\beta, m\rangle = \hbar^2 \beta |\beta, m\rangle, \quad (٩٤-١٢)$$

$$\hat{j}_z |\beta, m\rangle = \hbar m |\beta, m\rangle \quad (٩٥-١٢)$$

مسألتنا الآن هي عملية إيجاد القيم الممكنة لكل من  $\beta$ ،  $m$  المضمرة في

علاقات المبادلة (٨٨-١٢).

لأى قيمة معطاة من قيم كمية الحركة الزاوية  $\beta$  نعلم أن القيم الممكنة للمركبة  $z$ - لكمية الحركة الزاوية يجب أن تقع فى مدى مقيد. يُحدّد هذا المدى بقيمتين  $m_{\min}$  ،  $m_{\max}$  ، مثلا. هذه الملحوظة لها أهميتها فيما سيرد من مفاهيم.

من المعادلة (٩٥-١٢) نجد

$$\hat{J}_+ \hat{J}_z |\beta, m\rangle = \hbar m \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \quad (٩٦-١٢)$$

ولكن من المعادلة (٩١-١٢) نحصل على

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_z &\equiv \hat{J}_z \hat{J}_+ - [\hat{J}_z, \hat{J}_+] \\ &= \hat{J}_z \hat{J}_+ - \hbar \hat{J}_+ \end{aligned} \quad (٩٧-١٢)$$

بالتعويض فى المعادلة (٩٦-١٢) نجد

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ |\beta, m\rangle = \hbar(m+1) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \quad (٩٨-١٢)$$

ولذلك إما أن يكون

$$\hat{J}_+ |\beta, m\rangle = 0 \quad (٩٩-١٢)$$

أو يكون

$$\text{مثلا } \hat{J}_z |\beta, m\rangle = |\beta, m+1\rangle, \quad (١٠٠-١٢)$$

وعليه نعيد كتابة المعادلة (٩٨-١٢) كما يلى:

$$\hat{J}_z |\beta, m+1\rangle = \hbar(m+1) |\beta, m+1\rangle \quad (١٠١-١٢)$$

بمقارنة المعادلة (١٠١-١٢) مع المعادلة (٩٥-١٢) يتبين لنا أنه لأى حالة مناسبة معطاة  $|\beta, m\rangle$  نستطيع باستخدام المعادلة (١٠٠-١٢) توليد حالة مناسبة جديدة  $|\beta, m+1\rangle$  منتمية إلى قيمة مناسبة مساوية  $m+1$  (مقاسة بوحدات  $\hbar$ )، وذلك إن لم يكن  $m = m_{\max}$  حيث لتلك الوضع نطبق المعادلة (٩٩-١٢). من الملاحظ أن القيم المتاحة للكمية  $m$  تتغير بمقادير صحيحة.

بتطبيق نفس المفهوم السابق على  $\hat{j}_- \hat{j}_- |\beta, m\rangle$  يمكن توضيح أنه إما أن

يكون

$$\hat{j}_- |\beta, m\rangle = 0 \quad (102-12)$$

أو يكون

$$\hat{j}_- |\beta, m\rangle = |\beta, m-1\rangle \quad (103-12)$$

حيث

$$\hat{j}_- |\beta, m-1\rangle = \hbar(m-1) |\beta, m-1\rangle \quad (104-12)$$

على ذلك فلأى حالة مناسبة معطاة  $|\beta, m\rangle$  نستطيع باستخدام المعادلة (12-102)

(103-102) توليد حالة مناسبة جديدة  $|\beta, m-1\rangle$  منتمية إلى القيمة المناسبة

$m-1$  وذلك إن لم يكن  $m = m_{\min}$  حيث لتلك الوضع نطبق المعادلة (12-102)

(102).

والآن

$$\begin{aligned} \hat{j}_- \hat{j}_+ &= (\hat{j}_x - i \hat{j}_y)(\hat{j}_x + i \hat{j}_y) \\ &= \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + i[\hat{j}_x, \hat{j}_y] \\ &= \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 - \hbar \hat{j}_z \end{aligned} \quad (105-12)$$

بالتأثير بهذا المؤثر على  $|\beta, m_{\max}\rangle$  نحصل، باستخدام المعادلة (12-99)،

على

$$(\hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 - \hbar \hat{j}_z) |\beta, m_{\max}\rangle = \hat{j}_- \hat{j}_+ |\beta, m_{\max}\rangle = 0 \quad (106-12)$$

ومنه، باستخدام المعادلتين (12-94)، (12-95)، نجد

$$\begin{aligned} (\beta - m_{\max}^2 - m_{\max}) |\beta, m_{\max}\rangle &= 0 \\ \beta &= m_{\max} (m_{\max} + 1) \end{aligned} \quad \text{أو} \quad (107-12)$$

بالمثل

$$\hat{j}_+ \hat{j}_- = \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 + \hbar \hat{j}_z \quad (108-12)$$

بالتأثير بهذا المؤثر على  $|\beta, m_{\min}\rangle$  واستخدام المعادلة (102-12) نحصل

على

$$(\beta - m_{\min}^2 + m_{\min}) = 0 \quad (109-12)$$

بمساواة التعبيران المعبران عن  $\beta$  في المعادلتين (107-12)، (109-12)

نجد

$$(m_{\min} + m_{\max})(m_{\min} - m_{\max} - 1) = 0 \quad (110-12)$$

ولهذا

$$m_{\min} = -m_{\max} \quad (111-12)$$

وعليه فإن القيم المتاحة للمقدار  $m$  تقع متماثلة حول نقطة الأصل. وحيث

أن النهايتين العظمى والصغرى تختلفان بمقدار عدد صحيح فإننا نجد

الآتي:

$$m_{\max} - m_{\min} = 2j, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (112-12)$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (111-12) نحصل على

$$-j \leq m \leq j \quad (113-12)$$

أى يتاح للكمية  $m$  عدد  $2j+1$  من القيم.

باستخدام المعادلتان (107-12)، (111-12) نجد

$$\beta = j(j+1), \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (114-12)$$

أى أنه باعتبار علاقات المبادلة (88-12) كتعاريف لكمية الحركة الزاوية

بدلا من المؤثرات المشتقة (6-2) وجدنا أن القيم الصحيحة وأنصاف القيم

الصحيحة لكمية الحركة الزاوية كلاهما متاح.

( أ ) تكتب دالة الحالة العامة في الصورة

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

$$\psi^*(x) = \langle \psi | x \rangle$$

- تجرى عملية التسوية كالاتى:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = 1$$

- تكامل التطابق بين حالتين  $\langle x | \psi \rangle$ ,  $\langle x | \phi \rangle$  عبارة عن تعميم للضرب

القياسى

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx$$

- لدوال الحالة المتعامدة نجد

$$\langle \phi | \psi \rangle = 0$$

(ب) المؤثر  $\hat{A}$  يعبر عن عملية ملاحظة عندما يكون

١- الشرط

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^*$$

متحققا لأي حالتين  $\langle x | \psi \rangle$ ,  $\langle x | \phi \rangle$ .

٢- دوال الحالات المناسبة تكون فئة تامة (انظر الفقرة د).

- المتجه المناسب المنتمى إلى قيمة مناسبة  $a_n$  هو  $\langle x | a_n \rangle$ ، ولذلك نكتب

معادلة القدر المناسب في الصورة

$$\hat{A} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle x | a_n \rangle = a_n \langle x | a_n \rangle$$

أو

$$\hat{A} | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle$$

(ج) دوال الحالات المناسبة تحقق شرط المسعامدية

$$\langle a_n | a_m \rangle = \int \langle a_n | x \rangle \langle x | a_m \rangle dx = \delta(a_n, a_m)$$

حيث الرمز  $\delta$  يشير إلى  $\delta_{a_n a_m}$  أو  $\delta(a_n - a_m)$  للمتغير  $a$  المتقطع أو المتصل، على الترتيب.

(د) تحقق دوال الحالات المناسبة أيضا شرط التتام

$$S_a \dots |a\rangle \langle a| = \hat{1}$$

(راجع المناقشة التي تلى المعادلة (١٢-٥٣)).

(ه) خواص دوال الحالات المناسبة سالفة الذكر تؤدي إلى إمكانية فك

دوال الحالة الاختيارية  $\langle x|\psi\rangle$  بدلالة دوال الحالات المناسبة للمؤثر  $\hat{A}$

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_{a_n} \langle x|a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle$$

حيث معاملات المفكوك هي

$$\langle a_n|\psi\rangle = \int \langle a_n|x\rangle \langle x|\psi\rangle dx$$

- احتمال أن تسفر عملية القياس  $\hat{A}$  لمرة واحدة على نظام في الحالة  $|\psi\rangle$

عن النتيجة  $a_n$  يساوى

$$P_\psi(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

جميع المؤثرات التي عرضناها فيما سبق لتمثيل عمليات الملاحظة

الممكنة  $\hat{A}$  تحقق الشروط الواردة بالفقرة ب، كما أن دوال الحالات

المناسبة لعمليات الملاحظة هذه تتمتع بالخواص المذكورة سابقا.

من أمثلة أنواع المؤثرات الأخرى التي لا تتمتع بالخواص المذكورة هي

مؤثرات الإفناء والتوليد  $(\frac{\partial}{\partial y} \pm y)$  الواردة بالباب الخامس أثناء دراسة

المهتز التوافقي. ورد ذكر تلك المؤثرات مرة أخرى في صورة  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{a}$

بالبنود ١٢-٥. هذه المؤثرات لا تمثل عمليات يمكن ملاحظتها.

١-١٢ الدوال المناسبة المسواة للحالة الأرضية،  $E_0$ ، لمهتز توافقى هي

$$\langle x | E_0 \rangle = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \right]$$

إذا كان النظام فى الحالة

$$\langle x | \psi \rangle = \frac{\sigma^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \right]$$

فما هو احتمال أن يسفر قياس الطاقة عن النتيجة  $E_0$  ؟

(لإجراء التكامل انظر المسألة ٣-٣ بالباب الثالث)

١٢-٢ حل المسألتين ٣-٤، ٣-٥ بالباب الثالث مستخدماً رموز ديراك.

١٢-٣ دالة الحالة المناسبة الغير مسواة للحالة المثارة الأولى لمهتز توافقى

هي

$$\langle x | E_1 \rangle = x \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \right]$$

أوجد دالة الحالة المناسبة المناظرة لها فى فراغ كمية الحركة الخطية،

$$\langle p | E_1 \rangle$$

## الباب الثالث عشر

### معادلات الحركة

#### ١-١٣ معادلة شرودنجر للحركة<sup>(١)</sup>

حتى هذه المرحلة لم ندخل أى شىء فى حساباتنا عن الزمن. وعلى وجه الخصوص لم نذكر كيفية تغير الخواص الملاحظة، فى نظام كمى، مع مرور الزمن. ربما تعترينا الدهشة بسبب استطاعتنا دراسة كل ماتقدم بدون إدخال معادلة للحركة. كانت وسيلتنا الرئيسية فيما سبق من دراسة هى معادلة القدر المناسب للطاقة - معادلة شرودنجر - كذلك فقد تعرضنا لمناقشات عديدة لإيجاد المستويات المتاحة للطاقة فى الأنظمة المختلفة، وهذا من السهولة بمكان إجراؤه فى الميكانيكا الكلاسيكية. لذلك وُضعت التصورات لوصف حركة الجسيمات الكمية تحت تأثير طاقات الوضع المختلفة (الباب الرابع). كانت تلك التصورات هى الشبيه الكمى للتصورات العامة التى تُفترض كلاسيكيا على أساس قانون حفظ الطاقة

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E \quad (\text{مقدار ثابت}) \quad (1-13)$$

عند عمل ذلك لم نتطلب أى تعميم لمعادلة نيوتن للحركة التى عادة ماتكتب بدلالة القوة والعجلة. بكتابة معادلة نيوتن للحركة بدلالة الكميات الفيزيائية التى لها أهميتها فى ميكانيكا الكم فإنها تبدو على النحو:

(1) the Schrodinger equation of motion



$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2-13)$$

فيما يلي نستعرض الشكل الميكانيكي الكمي لتلك المعادلة.

في الباب الثالث افترضنا علاقة المبادلة

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

بالتعامل مع المؤثر  $\hat{x}$  كمتغير جبري عادي فإنه يؤول إلى

$$\hat{x} \rightarrow x$$

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ويُمثل المؤثر } \hat{p} \text{ كما يلي:}$$

نتوقع الآن التعامل أيضا مع الزمن  $t$  كمتغير جبري عادي. من وجهة نظر الأبعاد نرى أن علاقة الزمن بالطاقة هي تماما كعلاقة المسافة بكمية الحركة الخطية؛ بالمعنى

$$[\hbar] = [\text{كمية الحركة الخطية}] \times [\text{المسافة}] = [\text{الطاقة}] \times [\text{الزمن}]$$

وهذا يعني أن الحدين لهما أبعاد  $\hbar$ .

على ذلك يكون مقنعا للغاية افتراض أن

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \hat{H} \quad (3-13)$$

وهذه عبارة عن معادلة مؤثر. هذا المؤثر يؤثر على متجهات الحالة

المعتمدة على الزمن  $|\Psi(t)\rangle$ .

مادمنا نهتم بمتجهات الحالة المعتمدة على الزمن فإن للمعادلة (3-13) نفس

الفحوى الفيزيائي الموجود بالمعادلة المناظرة الحاوية على  $\hat{p}$ . قدمنا من

قبل شكل آخر يعبر عن التأثير بالمؤثر  $\hat{H}(x, p)$  على حالة مُعبر عنها في صورة المتغيرات الفراغية (الغير حاوية على الزمن).

بتجميع هذه المعلومات نحصل على

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \Psi(t) \rangle = \hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \Psi(t) \rangle} \quad (٤-١٣)$$

وتلك هي معادلة شرودنجر للحركة.

تعد هذه المعادلة فرضا فيزيائيا جديدا، وسوف نعطيه الرمز ف(٣) امتدادا للرموز الموضوعه في البند ٣-٣. هذا الفرض مجرد تخمين مبنى على مفاهيم أساسية، وعذرنا في قبوله أنه يؤدي إلى اقتراحات متوافقة تماما مع النتائج التجريبية.

نعتبر الآن الشكل الذى يبدو عليه حل المعادلة (٤-١٣). نظرا لأن المؤثر الموجود بالطرف الأيسر للمعادلة يعتمد فقط على الزمن، والمؤثر الموجود بالطرف الأيمن يعتمد فقط على  $x$ ، فهذا يعنى أننا نبحت عن حل له الشكل

$$\langle x | \Psi(t) \rangle = u(x) f(t) \quad (٥-١٣)$$

بالتعويض من المعادلة (٥-١٣) فى المعادلة (٤-١٣) والقسمة على  $u(x)f(t)$  نجد

$$\frac{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t)}{f(t)} = \frac{\hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u(x)}{u(x)} \quad (٦-١٣)$$

وحيث أن الطرف الأيسر للمعادلة (٦-١٣) يعتمد الآن على  $t$  فقط والطرف الأيمن يعتمد فقط على  $x$  وأن هذين المتغيرين  $(x, t)$  يتغيران بصفة مستقلة عن بعضهما فإن كلا من طرفي المعادلة يجب أن يساوى مقدارا ثابتا. لأسباب ستظهر بعد قليل نشير لهذا الثابت بالرمز  $E$ . أى أن

$$\frac{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t)}{f(t)} = E \quad (٧-١٣)$$

$$\frac{\hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) u(x)}{u(x)} = E \quad (٨-١٣)$$

المعادلة (٨-١٣) هي بالضبط معادلة القدر المناسب للطاقة، ولهذا نكتب

$$E = E_n \quad (٩-١٣)$$

$$u(x) = \langle x | E_n \rangle \quad (١٠-١٣)$$

حينئذ يصبح حل المعادلة (٧-١٣) كالاتى:

$$f(t) = e^{-iE_n t/\hbar} \quad (١١-١٣)$$

وعليه فإن حل المعادلة (٤-١٣) عند قيمة معينة للطاقة  $E_n$  هو

$$\langle x | \Psi(t) \rangle_{E_n} = e^{-iE_n t/\hbar} \langle x | E_n \rangle \quad (١٢-١٣)$$

نحصل على الحل العام للمعادلة (٤-١٣) من مجموع الحلول السابقة

بمعاملات اختيارية، أى أن

$$\langle x | \Psi(t) \rangle = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \langle x | E_n \rangle F(E_n) \quad (١٣-١٣)$$

نود استخدام هذه المعادلة لتعيين كيفية نمو أى دالة حالة اختيارية  $\langle x|\psi \rangle$  مع مرور الزمن. يجب حينئذ تحقق شرط الحدود عند  $t = 0$ ، وهو

$$\langle x|\Psi(0)\rangle = \langle x|\psi \rangle \quad (14-13)$$

بالتعويض من هذا فى المعادلة (13-13) نحصل على

$$\langle x|\psi \rangle = \sum_n \langle x|E_n\rangle F(E_n) \quad (15-13)$$

ولكن هذا هو بالضبط مفكوك أى دالة اختيارية بدلالة الحالات المناسبة للطاقة، وقد تم التعرض لذلك بالبند 12-3. ومن هنا وباستخدام المعادلتان (12-43)، (12-50) نجد

$$F(E_n) = \langle E_n|\psi \rangle \quad (16-13)$$

أى أن الحل المعتمد على الزمن والمحقق لشرط الحدود (13-14) هو

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \langle x|E_n\rangle \langle E_n|\psi \rangle \quad (17-13)$$

حيث باستخدام المعادلة (12-50) مرة أخرى نحصل على

$$\langle E_n|\psi \rangle = \int \langle E_n|x\rangle \langle x|\psi \rangle dx \quad (18-13)$$

من أبسط الأمثلة على هذا الوضع حالة جسيم حر كمية حركته الخطية محددة. لتلك الحال يكون

$$\langle x|\psi \rangle = \langle x|p\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{ipx/\hbar} \quad (19-13)$$

أما الحل المعتمد على الزمن فهو

$$\langle x | \Psi(t) \rangle_p = \left( \frac{1}{2\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{i(px - Et)/\hbar} \quad (20-13)$$

حيث

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

وتلك هي الموجة الكاملة لدى برولى الواردة بالمعادلة (18-1)، التي أدخلت لتفسير حيود الإلكترونات.

وضح الآن، ولأول مرة نتيجة لأساليب ميكانيكية كمية عامة، وجود دليل مباشر على صحة معادلة الحركة الافتراضية (13-4).

لتوضيح المعاني المحتواة في المعادلة (13-14) نعتبر مرة أخرى حالة جسيم واقع تحت تأثير بئر جهد لانهاى (انظر المعادلة 3-4). أوضحنا من قبل إمكانية فك أى دالة حالة عامة عند الزمن  $t = 0$  بدلالة الحالات المناسبة. لتبسيط الحسابات نعتبر أن الحالة الابتدائية عبارة عن تراكب بسيط من الحالات المناسبة. على سبيل المثال نعتبر أن

$$\langle x | \psi \rangle = 2^{-1/2} [\langle x | E_1 \rangle + \langle x | E_3 \rangle] \quad (21-13)$$

$$= \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/2} \left[ \cos \frac{\pi x}{2a} + \cos \frac{3\pi x}{2a} \right] \quad (22-13)$$

الحل عند الزمن  $t$  هو

$$\begin{aligned} \langle x | \Psi(t) \rangle &= (2)^{-1/2} [\langle x | E_1 \rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \langle x | E_3 \rangle e^{-iE_3 t/\hbar}] \\ &= \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/2} \left[ \cos \frac{\pi x}{2a} e^{-iE_1 t/\hbar} + \cos \frac{3\pi x}{2a} e^{-iE_3 t/\hbar} \right] \quad (23-13) \end{aligned}$$

حيث  $E_n$  تعين بالمعادلة (٣-٣٠).

احتمال تواجد جسيم عند الزمن  $t$  بطاقة  $E_n$  يساوى

$$\begin{aligned} P_{\Psi(t)}(E_n) &= |\langle E_n | \Psi(t) \rangle|^2 \\ &= \left| \int \langle E_n | x \rangle \langle x | \Psi(t) \rangle dx \right|^2 \\ &= |\langle E_n | \Psi \rangle|^2 \end{aligned} \quad (١٣-٢٤)$$

هذه الاحتمالات لا تتغير مع الزمن.

للحالة تحت الدراسة يكون احتمال تواجد الجسيم، عند أى زمن، فى مستوى الطاقة الأول مساويا لاحتمال تواجده فى مستوى الطاقة الثالث.

التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ هو

$$\begin{aligned} P_{\Psi(t)}(x) &= |\langle x | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2a} \left[ \cos^2 \frac{\pi x}{2a} + \cos^2 \frac{3\pi x}{2a} \right] + \\ &+ \frac{1}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos(E_3 - E_1)t / \hbar \end{aligned}$$

أى أن التوزيع الفراغى به حد لايعتمد على الزمن. على وجه الخصوص فإن احتمال تواجد الجسيم عند نقطة الأصل يتذبذب فى المقدار، مع مرور الزمن، بين الصفر وقيمة الاحتمال الابتدائية

$$P_{\Psi(t)}(0) = \frac{1}{a} (1 + \cos(E_3 - E_1)t / \hbar) \quad (١٣-٢٧)$$

## ١٣-٢ معادلة الحركة لهيزنبرج<sup>(١)</sup>

لمعادلة شرودنجر للحركة أهمية كبيرة في تقديم طرق تقريبية لحساب مساحات مقاطع الاستطارة. لن نوجه اهتمامنا هنا لدراسة ذلك ولكننا سنعتبر علاقة هذه المعادلة بالميكانيكا الكلاسيكية.

معادلة شرودنجر للحركة هي الوسيلة الطبيعية لوصف تغير نظام ميكانيكى كمي مع الزمن. في هذا التصور يُنظر إلى المؤثرات الممثلة لعمليات الملاحظة على أنها مستقلة عن الزمن. أما متجهات الحالة فهي تعبر عن الأنظمة تحت الملاحظة. وحيث أن هذه المتجهات (الواصفة لحالة الأنظمة) تتغير مع الزمن فكذلك تكون نتائج عمليات الملاحظة. يعطى متوسط نتيجة تكرار الملاحظة  $\hat{A}$  (الملاحظات تتم عند زمن  $t$ ) على سلسلة من الأنظمة كل منها في الحالة  $|\Psi(t)\rangle$  بالمعادلة

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\Psi(t)} &= \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle \\ &= \int \langle \Psi(t) | x \rangle \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \Psi(t) \rangle dx \quad (١٣-٢٨)\end{aligned}$$

هذا المتوسط بالطبع دالة في الزمن.

على الرغم من أن هذا الوصف طبيعي تماما إلا أنه ليس له حد كلاسيكى بسيط، وذلك لأن متجهات الحالة لاتلعب أى دور فى الميكانيكا الكلاسيكية. فضلا عن ذلك، من الوجهة الكلاسيكية لأتميز عمليات الملاحظة عن نتائج الملاحظة وعليه فالمؤثرات الكلاسيكية ماهى إلا

(1) the Heisenberg equation of motion

متغيرات جبرية عادية (مثل  $x(t)$ ,  $p(t)$ ). المتغيرات الجبرية هذه هي التي تُظهر الاعتماد الزمني للكميات الفيزيائية المختلفة للنظام. ومن هنا يجب علينا وضع المعادلة (١٣-٢٨) في صورة تتمتع بالكثير من مغزى الوصف الكلاسيكي. يمكن عمل ذلك ببساطة تامة، وعلى وجه الخصوص عند استخدام رموز ديراك التي بواسطتها نستبعد أي معلومات غير جوهرية من المعادلات.

تبدو معادلة شرودنجر للحركة (١٣-٤) بدلالة متجهات الحالة في

الصورة

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (١٣-٢٩)$$

وحلها هو (باستخدام شرط الحدود (١٣-١٤):

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar} |\Psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle \quad (١٣-٣٠)$$

معنى ذلك بدلالة دوال الحالة أن

$$\begin{aligned} \langle x | \Psi(t) \rangle &= \exp \left[ -i\hat{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) t / \hbar \right] \langle x | \psi \rangle \\ &= \exp \left[ -i\hat{H} t / \hbar \right] \sum_n \langle x | E_n \rangle \langle E_n | \psi \rangle \\ &= \sum_n \exp \left[ -iE_n t / \hbar \right] \langle x | E_n \rangle \langle E_n | \psi \rangle \end{aligned}$$

وهذا هو استنتاج آخر للمعادلة (١٣-١٧).

بناء على ذلك نعيد كتابة المعادلة (١٣-٢٨) كما يلي:

$$\bar{a}_{\Psi(t)} = \langle \psi | e^{+i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi \rangle \quad (١٣-٣١)$$



عند تعريف المؤثر المعتمد على الزمن بالمعادلة

$$\hat{A}(t) = e^{+i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (32-13)$$

حينئذ تصبح القيمة المتوسطة لنتيجة تكرار التأثير بهذا المؤثر (على الحالة  $|\psi\rangle$  المعينة عند  $t=0$ ) مساوية

$$\overline{a(t)}_{\psi} = \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle \quad (33-13)$$

المعادلة (33-13) متماثلة حقا مع المعادلة (28-13). كل ما فعلناه هنا هو تغيير الرمز بالطرف الأيمن ليصبح

$$\overline{a_{\psi(t)}} = \overline{a(t)_{\psi}} \quad (34-13)$$

إلا أن التصور الآن يختلف كلية عن سابقه.

المؤثر  $\hat{A}(t)$  يمثل عملية ملاحظة عند الزمن  $t$  على حالة معينة عند الزمن  $t=0$ . هذا قريب الشبه جدا من الوصف الكلاسيكي، ويتسنى لنا الآن توقع الارتباط القريب الشبه بين المؤثرات المعتمدة على الزمن،  $\hat{A}(t)$ ، والمتغيرات الجبرية الكلاسيكية المناظرة المعتمدة على الزمن.

بتفاضل المعادلة (32-13) مع تذكر إبقاء المؤثرات الغير متبادلة في

مواضعها الصحيحة، نجد

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} &= -\hat{H} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{H} \\ &= -\hat{H} \hat{A}(t) + \hat{A}(t) \hat{H} \end{aligned}$$

(مع ملاحظة أن

$$\hat{H}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hat{H}$$

هذا يعنى أن مؤثر الطاقة المعتمد على الزمن لايعتمد فى الحقيقة على  $t$  وتلك هى معادلة هيزنبرج للحركة التى تكتب فى صورتها المختصرة كالتى:

$$\boxed{i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}]} \quad (35-13)$$

المعنى الفيزيائى لهذه المعادلة متماثل مع معادلة شرودنجر للحركة (١٣-٤).

بتطبيق المعادلة (٣٥-١٣) عندما يكون

$$\hat{A}(t) = \hat{x}(t) \quad (36-13)$$

على جسيم يتحرك فى بعد واحد تحت تأثير طاقة وضع معينة

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

نجد أن

$$i\hbar \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = [\hat{x}(t), \hat{H}(t)] \quad (37-13)$$

من السهل التحقق، باستخدام التعريف (٣٢-١٣)، من أن علاقات المبادلة بين المؤثرات المعتمدة على الزمن (مؤثرات هيزنبرج) تأخذ نفس صورة العلاقات المناظرة بين المؤثرات المستقلة عن الزمن (مؤثرات شرودنجر).

وعلى ذلك

$$i\hbar \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{1}{2m} [\hat{x}(t), \hat{p}^2(t)] \quad (38-13)$$

ولكن

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}^2] &= \hat{x} \hat{p}^2 - \hat{p}^2 \hat{x} \\
&= [\hat{x}, \hat{p}] \hat{p} + \hat{p} [\hat{x}, \hat{p}] \\
&= 2i\hbar \hat{p}
\end{aligned}
\tag{٣٩-١٣}$$

ولهذا

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}(t)}{m}
\tag{٤٠-١٣}$$

بالمثل إذا كان

$$\hat{A}(t) = \hat{p}(t)
\tag{٤١-١٣}$$

فإن

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\hat{p}(t)}{dt} &= [\hat{p}(t), \hat{H}] \\
&= [\hat{p}, V(\hat{x})] \\
&= -i\hbar \frac{\partial V(\hat{x})}{\partial \hat{x}}
\end{aligned}
\tag{٤٢-١٣}$$

للحصول على المتساوية الأخيرة استخدمنا نتيجة المسألة ٣-٢ بالباب

الثالث. مما سبق نجد

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\frac{\partial V(\hat{x})}{\partial \hat{x}}
\tag{٤٣-١٣}$$

يمكن لنا بسهولة تعميم هذه المعادلات في الثلاث أبعاد.

والآن فإن المعادلة (٤٠-١٣) متماثلة مع العلاقة الكلاسيكية بين كمية

الحركة الخطية والسرعة (معدل تغير الموضع). تعد المعادلة (٤٣-١٣)

تعميما مباشرا لمؤثرات القانون الثاني لنيوتن، المعادلة (٢-١٣). هذا

يوضح لنا أن معادلة الحركة الكمية (١٣-٤) - أو بالتكافؤ المعادلة (١٣-١) - (٣٥) - تؤدي إلى أن المؤثرات المعتمدة على الزمن والمعرفة بالمعادلة (١٣-٣٢) تحقق بالضبط نفس العلاقات التي تحققها المتغيرات الجبرية الكلاسيكية المناظرة. من ناحية أخرى يمكن ضرب المعادلة (١٣-٤٠) من جهة اليسار في  $\langle x|\psi\rangle$  وإجراء التكامل على  $x$  لنحصل على القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظة الحادثة عند زمن  $t$  على نظام في حالة اختيارية  $|\psi\rangle$  عند الزمن  $t=0$ . ومن ثم نحصل على

$$\frac{d}{dt} \overline{x(t)}_{\psi} = \frac{\overline{p(t)}_{\psi}}{m} \quad (١٣-٤٤)$$

بالمثل من المعادلة (١٣-٤٣) نجد

$$\frac{d}{dt} \overline{p(t)}_{\psi} = -\frac{\partial \overline{V(x)}_{\psi}}{\partial x} \quad (١٣-٤٥)$$

وهذا يُظهر لنا أن هذه القيم المتوسطة تحقق معادلات الحركة الكلاسيكية.

توصلنا الآن بالكامل إلى النص العام لمبدأ التناظر، ألا وهو "عند الحد الكلاسيكي تتحول ميكانيكا الكم إلى الميكانيكا الكلاسيكية أو بمعنى آخر إلى ميكانيكا نيوتن".

### ١٣-٣ ثوابت الحركة-الندية<sup>(١)</sup>

ليس لمعادلة الحركة لهيزنبرج، المعادلة (١٣-٣٥)، الكثير من الأهمية الواقعية في مسائل معينة من ميكانيكا الكم، وذلك يرجع لكونها تشير إلى

(1) constants of motion-parity

المؤثرات. هذا يؤدي بدوره، لأي حالة  $|\psi\rangle$ ، إلى الاعتماد على كل القيم المتوقعة للمؤثر. ومع ذلك فإن هذه المعادلة تقودنا إلى استنتاجات بسيطة وهامة تتعلق بأى عملية ملاحظة  $\hat{F}(t)$  متبادلة مع  $\hat{H}$ ، مثل عمليتي الملاحظة  $\hat{J}_z, \hat{J}^2$ ،

$$[\hat{F}(t), \hat{H}] = 0 \quad (٤٦-١٣)$$

حينئذ من المعادلة (١٣-٣٥) نجد

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt} = 0 \quad (٤٧-١٣)$$

بأخذ القيمة المتوسطة عندما يكون النظام فى أى حالة اختيارية، نحصل على

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{F}(t)}_{\psi} = \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{F} | \Psi(t) \rangle = 0 \quad (٤٨-١٣)$$

وهذا دليل على عدم تغير القيمة المتوسطة مع الزمن. إذا كان النظام عند الزمن  $t=0$  فى الحالة المناسبة للمؤثر  $\hat{F}$  فإن هذه الحالة تبقى حالة مناسبة لهذا المؤثر عند أى زمن لاحق، وذلك لأن المؤثر لا يتغير مع الزمن.

تسمى المؤثرات  $\hat{F}(t)$  التى تحقق المعادلة (٤٦-١٣) بثوابت الحركة. هذا بمثابة تعميم للكميات التى تبقى محفوظة<sup>(١)</sup> فى الميكانيكا الكلاسيكية. لجسيم حر أو لأى نظام مغلق ينظر إلى مؤثر كمية الحركة الكلية على أنه من ثوابت الحركة. كما ذكرنا بالبواب الثامن، لجسيم حر

(1) conserved

يسير تحت تأثير طاقة وضع مركزية نجد أن كمية الحركة الزاوية الكلية ومركباتها، كل على حده، متبادلة مع الهاميلتونى. طبقا للمفهوم السابق تصبح أيضا هذه الكميات من ثوابت الحركة. (يجب أن تأخذ المؤثرات  $\hat{p}_x^2, \hat{p}_y^2$  قيما محددة ثابتة، وعندها تأخذ  $\hat{p}_x, \hat{p}_y$  قيما متوسطة ثابتة فقط.)

مانود عمله الآن هو إدخال ثوابت حركة لبعض الخواص التى يمكن ملاحظتها فى نظام ميكانيكى كمى والتى ليس لها مثل فى الميكانيكا الكلاسيكية.

نعتبر نظاما الهاميلتونى له لايتغير من جراء عملية انعكاس الإحداثيات، أى أن

$$\hat{H}(\bar{r}) = \hat{H}(-\bar{r}) \quad (٤٩-١٣)$$

ندخل مؤثر الانعكاس  $\hat{P}$  الذى من التعريف يتمتع بالخاصية

$$\hat{P}\langle r|\psi\rangle = \langle -r|\psi\rangle \quad (٥٠-١٣)$$

لذلك فإن ناتج تأثير  $\hat{P}$  على أى حالة هو تحويلها إلى الحالة المناظرة فى النظام الإحداثى المنعكس. لأول وهلة يبدو لنا أن هذا المؤثر يشبه بعض الشئىء مؤثرات الإفناء والتوليد المقدمة عند نهاية الباب الخامس. إلا أن هذا المؤثر، على عكس مؤثرات الإفناء والتوليد، له قيم مناسبة حقيقية مساوية  $\pm 1$ . هذه القيم المناسبة تنتمى إلى دوال الحالة التى تصبح فردية أو زوجية من جراء عملية الانعكاس. طبقا للبند ٤-٢ يمكن التعبير عن الدوال المناسبة للمؤثر  $\hat{H}$  بدلالة حالات تتمتع بخواص انعكاس محددة (أى فردية أو زوجية). نظرا لأن تلك الحالات تُكوّن فئة تامة فمن الممكن عمل فئة تامة ووحيدة التعريف من الحالات التى كل منها حالة مناسبة للمؤثر  $\hat{P}$ .

على ذلك فإن المؤثر  $\hat{P}$  يحقق كل متطلبات الباب الثانى عشر لجعله مؤثرا يعبر عن كمية قابلة للملاحظة. القيم المناسبة لهذا المؤثر،  $\pm 1$ ، ماهى إلا ندية الحالة. يتسنى لنا النظر إلى هذا المؤثر على أنه عملية ملاحظة الندية.

والآن لآى حالة  $(\psi|$  نجد

$$\begin{aligned}\hat{P}\hat{H}(r)\langle\bar{r}|\psi\rangle &= \hat{H}(-r)\langle-r|\psi\rangle \\ &= \hat{H}(r)\hat{P}\langle r|\psi\rangle\end{aligned}$$

حيث استخدمنا هنا المعادلة (١٣-٤٩). لهذا فإننا نحصل على معادلة المؤثر

$$\hat{P}\hat{H}(r) = \hat{H}(r)\hat{P} \quad (١٣-٥١)$$

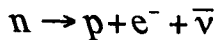
ولكن هذا هو بالضبط الشرط الذى يجعل (استخدم المعادلة (١٣-٣٥))

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = 0 \quad (١٣-٥٢)$$

ليصبح  $\hat{P}$  من ثوابت الحركة.

خلال نمو أى حالة مع الزمن تبقى صفة الندية بدون تغيير على شرط تحقق المعادلة (١٣-٤٩) فقط. وهو نوع جديد من قوانين الحفظ الذى يلعب دورا هاما فى ميكانيكا الكم وليس له شبيه فى الميكانيكا الكلاسيكية.

تُحقق ثلاثة من الأربع تفاعلات الأساسية بالجدول ١١-٢ المعادلة (١٣-٥١). أما التفاعلات النووية الضعيفة كتحلل-بيتا، مثلا،



تتغير بالانعكاس وعليه تصبح الندية غير محفوظة. نفهم من ذلك أن هذا التفاعل يبدو مختلفا اختلافا جوهريا عند النظر إليه من خلال نظام إحداثى منعكس- أو من خلال مرآة. تستمد الصورة الكلاسيكية لهذه الفكرة من خلال المقارنة بين قذيفتى مدفع وبنديقية. تخرج قذيفة المدفع بعيدا بدون حركة مغزلية ويكون لها نفس الشكل عند استخدام نظام إحداثى منعكس (أى بالتكافؤ عند النظر إليها من خلال مرآة). أما قذيفة البنديقية فيصاحبها حركة مغزلية فى اتجاه معين، وليكن مثلا فى اتجاه عقارب الساعة حول خط مسار القذيفة. عند النظر فى مرآة موضوعة على امتداد خط المسار سوف تبدو الحركة المغزلية المصاحبة لقذيفة البنديقية فى اتجاه عكس عقارب الساعة، وهذا وضع مميز تماما عن الآخر. بنفس المفهوم فإنه فى تحليل-بيتا من النيوترون تخرج دائما  $\bar{\nu}$  بمغزلية فى اتجاه عقارب الساعة حول مسارها، والنيوترون الذى ينظر إليه فى تحلله كمدفع للنيوترينات فإنه يتصرف بطريقة مشابهة لقذيفة البنديقية- وليس المدفع.

### ١٣-٤ قوانين الحفظ وعدم التغير<sup>(1)</sup>

لأى مؤثر معطى  $\hat{F}$  نستطيع تعريف المؤثر المصاحب الهرميتى<sup>(2)</sup>  $\hat{F}^+$  وذلك باستلزام أن القيم المتوقعة لأى حالات  $\langle \phi | \psi \rangle$  تحقق الشرط

$$\langle \phi | \hat{F}^+ | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \phi \rangle^* \quad (١٣-٥٣)$$

إذا كان  $\hat{F}$  على شكل مصفوفة فإننا نكتب الشرط على عناصرها كما يلى:

(1) conservation laws and invariance (2) Hermitian conjugate operator



$$\langle i|\hat{F}^+|j\rangle = \langle j|\hat{F}|i\rangle^* \quad (٥٤-١٣)$$

باستخدام هذا التعريف يكتب الشرط (١٢-٢٢) الخاص بأى مؤثر يمثل عملية ملاحظة على النحو

$$\hat{F} = \hat{F}^+ \quad (٥٥-١٣)$$

يطلق على هذا المؤثر، عندما يتحقق فيه هذا الشرط، اسم مؤثر هرميتي.

إذا حقق مؤثر  $\hat{U}$  الشرط

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{1} \quad (٥٦-١٣)$$

يطلق عليه أنه وَحْدِي<sup>(١)</sup>. هذا الشرط يطبق على المؤثرات، تفاضلية كانت أم مصفوفة. إذا كان المؤثر  $\hat{U}$  على شكل مصفوفة يصبح حاصل ضرب كل من  $\hat{U}$ ،  $\hat{U}^+$  على نفس المنوال كما عرفناه في المعادلة (٨-٢١).

بمعلومية أى مؤثر هرميتي  $\hat{F}$  يمكن تكوين المؤثر

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp[\iota \varepsilon \hat{F}] \\ &= \hat{1} + \frac{(\iota \varepsilon \hat{F})}{1!} + \frac{(\iota \varepsilon \hat{F})^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (٥٧-١٣)$$

حيث  $\varepsilon$  عدد حقيقي. ولأن

$$\hat{U}^+ = \exp[-\iota \varepsilon \hat{F}^+] = \exp[-\iota \varepsilon \hat{F}] \quad (٥٨-١٣)$$

فإننا نجد أن

(1) unitary

$$\hat{U} \hat{U}^+ = \exp[1\varepsilon \hat{F}] \exp[-1\varepsilon \hat{F}] = \hat{1} \quad (59-13)$$

وعليه يكون المؤثر  $\hat{U}$  وحدي كما سبق لنا توقع ذلك بالرموز من قبل. إذا كان مقدار  $\varepsilon$  صغيرا للغاية فإننا نحتاج فقط إلى الأخذ في الاعتبار لأول حدين في المفكوك (13-57) ليصبح المؤثر الوحدي المتناهي في الصغر له الشكل

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{1} + 1\varepsilon \hat{F} , \\ \hat{U}^+ &= \hat{1} - 1\varepsilon \hat{F} \end{aligned} \quad (60-13)$$

بهذه الطريقة نستطيع ربط المؤثر الوحدي بأى مؤثر هرميتي، والعكس صحيح. ذكرنا فيما سبق أن التفسير الفيزيائي للمؤثر الهرميتي هو أنه يعبر عن كميات فيزيائية قابلة للملاحظة. أما الآن فنقدم التفسير الفيزيائي للمؤثرات الوحيدة.

نفرض الحالة  $|\psi\rangle$  والتأثير عليها بالمؤثر الوحدي  $\hat{U}$  لتكوين حالة

جديدة

$$|\psi^u\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \quad (61-13)$$

التي مركباتها

$$\langle x|\psi^u\rangle = \langle x|\hat{U}|\psi\rangle$$

حينئذ من التعريفين (12-2)، (13-52) نجد

$$\langle \psi^u|x\rangle = \langle x|\psi\rangle^* = \langle x|\hat{U}|\psi\rangle^* = \langle \psi|\hat{U}^+|x\rangle \quad (62-13)$$

ليصبح

$$\langle \psi^u| = \langle \psi|\hat{U}^+ \quad (63-13)$$

ولذلك إذا كانت  $\langle \psi | \psi \rangle$  مسواة فإننا نحصل على

$$\langle \psi^u | \psi^u \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (13-64)$$

وتكون  $|\psi^u\rangle$  مسواة هي الأخرى.

بنفس المفاهيم نقول إذا كان  $|a_n\rangle$  فئة تامة من الحالات المناسبة المتعامدة (انظر البند 12-6)، فحينئذ يكون أيضا

$$\hat{U}|a_n\rangle \equiv |a_n^u\rangle \quad (13-65)$$

فئة تامة متعامدة.

على ذلك فإن المؤثرات الوحيدة تمكنا من الانتقال من وصف ما للنظام إلى وصف فيزيائي آخر مكافئ للوصف الأول. فمثلا، إذا كان  $|a_n\rangle$  هي الحالات المناسبة لطاقة نظام معين والمعينة طبقا لفئة إحداثيات ما فإنه بالاختيار المناسب للمؤثر  $\hat{U}$  فإن  $|a_n^u\rangle$  يمكن أن تكون الحالات المناسبة لنفس النظام في محاور إسناد الإحداثيات الجديدة التي نحصل عليها بإزاحة نقطة الأصل (انتقال) أو بتغيير توجيه الإحداثيات (دوران).

بوجه عام إذا كان  $\epsilon \hbar$  هي مقدار الإزاحة لنقطة الأصل (الإحداثي كارتيزي) وكان  $\hat{F}$  هو المؤثر الذي يمثل كمية الحركة المناظرة للإحداثي. عندئذ يكون  $\hat{U}$  المعرف بالمعادلة (13-57) هو المؤثر الوحيد الذي ينقل الحالات القديمة إلى الحالات المناظرة في الإحداثيات الجديدة. من أبسط الأمثلة على ذلك هو إزاحة الإحداثي  $x$  لنظام خطي، مثل المهتر التوافقي الخطي، بمقدار  $a$ . في مثل هذا الوضع يكون  $\hat{F}$  هو مؤثر كمية الحركة  $\hat{p}$ . أما المؤثر الذي يسبب إزاحة مقدارها  $a$  لنقطة أصل الإحداثيات فهو

$$\hat{U}^a = \exp[i\hat{p}a/\hbar] \quad (66-13)$$

في تمثيل شرودنجر نعبر عن الحالات الجديدة  $|\psi^a\rangle$  بدلالة الحالات القديمة  $|\psi\rangle$  كما يلي:

$$\begin{aligned} \langle x|\psi^a\rangle &= \exp\left[\frac{ia}{\hbar}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\langle x|\psi\rangle, \\ &= \left[1 + \frac{1}{1!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \dots\right]\langle x|\psi\rangle \quad (67-13) \\ &= \langle x+a|\psi\rangle \end{aligned}$$

حصلنا على المتساوية الأخيرة نظرا لأن التعبير قبل الأخير هو بالضبط مفعوك تيلور لدالة الحالة  $\langle x+a|\psi\rangle$  بدلالة الحالة الأصلية  $\langle x|\psi\rangle$ .

نعتبر مؤثر، من النوع العام،  $\hat{U}$  متناهي في الصغر ويمثل عملية انتقال متناهية في الصغر لإحداثي مستخدم لوصف نظام فيزيائي معين. يطلق على النظام أنه عديم التغير بالنسبة لهذه الانتقالات إذا كانت القيمة المتوقعة للهاميلتوني للحالات  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  لا تتغير من جراء عملية الانتقال؛ أي عندما يكون

$$\langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\phi^u|\hat{H}|\psi^u\rangle \quad (68-13)$$

ولهذا

$$\begin{aligned} \langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle &= \langle\phi|\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}|\psi\rangle, \\ &= \langle\phi|(\hat{1} - i\varepsilon \hat{F}) \hat{H} (\hat{1} + i\varepsilon \hat{F})|\psi\rangle, \quad (69-13) \\ &= \langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle - (i\varepsilon)\langle\phi|\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}|\psi\rangle \end{aligned}$$

حيث أهملنا في المتساوية الأخيرة الحد الذي من الرتبة  $\epsilon^2$ . نظرا لأن هذا الوضع يتحقق لأي حالة من الحالات  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  فيمكن استبعاد الحالات وكتابة الشرط المفروض على المؤثر الذي يصاحبه صفة عدم التغير كما يلي:

$$\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F} = [\hat{F}, \hat{H}] = 0 \quad (13-70)$$

ولكن هذا هو بالضبط، من المعادلة (13-46)، الشرط اللازم لجعل  $\hat{F}$  من ثوابت الحركة (أي الشرط اللازم لجعل الكمية  $\langle \hat{F} \rangle$  محفوظة). ولكون هذه المفاهيم قابلة للعكس فإننا نجد ارتباط هام بين عدم التغير وقوانين الحفظ؛ "الشرط الضروري والكافي لجعل كمية حركة خطية ما محفوظة هو أن يكون الهاميلتونى عديم التغير عند إجراء عمليات الإزاحة للإحداثى المناظر".

من أمثلة ذلك عدم تغير عناصر مصفوفة الهاميلتونى

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

للجسيم الحر عند إجراء عمليات الإزاحة للإحداثى وبقاء كمية الحركة الخطية للنظام محفوظة.

إلا أن عدم التغير هذا لا يتحقق فى حالة جسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع تتغير (تهتز) توافقيا ومركزة عند نقطة ثابتة معينة. وذلك لأن طاقة الوضع تُعرّف نقطة الأصل لإحداثى طبيعى. لهذا النظام لا تكون كمية الحركة محفوظة.

فى حقيقة الأمر هذه النتيجة ليست قاصرة فقط على إزاحات الإحداثيات الفراغية-الزمنية وكميات الحركة الخطية المناظرة، ولكنها تسرى أيضا على أى زوج من الملاحظات المتتامة . سوف نستخدم تعميما لهذه الفكرة فى الباب القادم.

### ١٣-٥ ملخص

أضيف هنا للفرضين الفيزيائيين بالبند ٣-٣ (مبدأ التناظر ومبدأ التتام) فرض فيزيائى ثالث - هو معادلة الحركة لنظام كمى .  
يمكن كتابة هذه المعادلة إما فى صورة شرودنجر

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

أو فى صورة هيزنبرج

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}]$$

هذه الصياغة أكثر ملاءمة للحسابات الكمية. ترتبط صورة هيزنبرج ارتباطا قريبا بالنظرية الكلاسيكية وقد بينا أنها تؤدي إلى أن الميكانيكا الكلاسيكية هى حقا الحد الكلاسيكى ( $\hbar=0$ ) لميكانيكا الكم.

من أعظم التطبيقات أهمية على معادلة هيزنبرج هو تلك الملاحظات القابلة للمبادلة مع  $\hat{H}$  (أى التى فيها تتحقق المعادلة  $[\hat{F}(t), \hat{H}] = 0$ ). لهذا الحال تعبر المؤثرات عن ملاحظات لاتتغير مع الزمن، وعليه تكون الكميات الملاحظة محفوظة. يمكن ربط هذه الملاحظات المحفوظة

(الهرميتية) بالمؤثرات الوحيدة، التي تصف عمليات انتقال الإحداثيات مع بقاء الهاميلتونى بدون تغيير - مثل الإزاحات والدورانات. لذلك فإن عدم التغير عند إزاحة الإحداثيات الخطية يرتبط بحفظ كمية الحركة الخطية، وعدم التغير عند الدوران (أى عند إزاحة الإحداثيات الزاوية) يرتبط بحفظ كمية الحركة الزاوية.

### مسائل ١٣

١٣-١ وضح أن معادلتى هيزنبرج للمؤثرات  $\hat{p}(t), \hat{x}(t)$  لمهترتواافقى تكون متماثلة فى صياغتها مع معادلات الحركة الكلاسيكية المناظرة.

١٣-٢ فى نظام لجسيمين متماثلين يجب علينا إدخال المؤثر  $\hat{P}_{1,2}$  الذى يُحَدِّث تبادلا لموضعى الجسيمين 1, 2 . القيمتان المناسبتان لهذا المؤثر هما  $\pm 1$  المنتميتان إلى الحالة المناسبة المتماثلة والحالة المناسبة المتماثلة ضديديا عند إجراء عملية التبادل. ماهو الشرط الذى يجب وضعه على الهاميلتونى  $\hat{H}$  لهذا النظام ليؤكد لنا أن المؤثر  $\hat{P}_{1,2}$  من ثوابت الحركة؟

## الباب الرابع عشر

### القاعدة الذهبية<sup>(1)</sup>

#### ١-١٤ نظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن<sup>(2)</sup>

عند دراسة ظاهرة سريان السوائل فى الظروف المستقرة المثالية يتاح لنا اثنين من الطرق الممكنة التى ننسبها إلى كل من أويلر<sup>(3)</sup> ولاجرانج<sup>(4)</sup>. فى طريقة أويلر يُنظر إلى النظام ككل فى صورة الكثافة والتيار عند نقاط ثابتة فى الفراغ. فى هذه الطريقة لا يظهر الزمن بوضوح، وذلك لأنه على الرغم من سريان السائل فإن التيارات والكثافات عند نقاط ثابتة لا تتغير مع الزمن فى وضع الاستقرار. من الناحية الأخرى يمكن التركيز على عنصر معين من السائل الفعلى وتتبع حركته فى النظام، وتلك هى رؤية لاجرانج للمسألة. فى طريقة لاجرانج نجد أن الزمن يلعب دورا حيويا حتى فى وضع الاستقرار.

تعاملنا فيما سبق مع المسائل الديناميكية فى ميكانيكا الكم من وجهتها المستقلة عن الزمن، أى طبقا لرؤية أويلر. لهذا فإن تأثير خطوة الجهد على حزمة من الجسيمات قد نوقش بالبند ٤-١ فى صورة الحزمتين النافذة والمنعكسة. أما فى البندين ٣-١٠، ٤-١٠ فقد اعتبرنا استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة طاقة وضع معينة على أساس نفس وجهة النظر هذه. نتيج لنا معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن التعامل مع المسائل الديناميكية لكل من الاستطارة والانحلال بطريقة تقترب كثيرا من معاملة

(1) golden rule (2) time dependent perturbation theory (3) Euler  
(4) Lagrange



لاجرائح الكلاسيكية. فالنظام يبتدىء بحالة معينة، ومن النمو الزمنى لهذه الحالة (باستخدام معادلة شرودنجر (١٣-٢٩)) يمكن حساب الاحتمال لكل وحدة زمن لتواجد النظام فى حالة أخرى عند أى لحظة زمنية لاحقة . بوجه عام لايمكن الحصول على حل لمثل هذه المسائل، ولكن إذا كان التفاعل المتسبب فى الانتقال من حالة لأخرى صغيرا فمن الممكن الوصول إلى حل تقريبي للمسألة بدلالة قوى تصاعديّة<sup>(١)</sup> لشدة طاقة وضع التفاعل. وهذا مايعرف بنظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن. نظرا لعمومية هذه النظرية فسوف نقوم باستخدام رموز ديراك العامة فى معالجتها.

لتحديد أفكارنا من المفيد التفكير فى استطارة جسيم بواسطة طاقة وضع ثابتة المقدار (تم دراسة هذه المسألة من قبل بالباب العاشر ولكن طبقا لرؤية أويلر).

نعتبر أى نظام يسمح لنا بتقسيم مؤثر الطاقة الكلية، الهاميلتونى، إلى جزئين

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (١-١٤)$$

حيث  $\hat{H}_0$  ينتمى إليه فئة من الحالات المناسبة التى تُعرّف النظام الحر والتي يمكن إيجادها بالضبط. حينئذ يكون  $\hat{V}$  هو المعبر عن طاقة وضع التفاعل.

فى مسألة الاستطارة البسيطة هذه، حيث

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}) \quad (٢-١٤)$$

من الواضح فيها أن النظام الحر يُعرّف بحد طاقة الحركة

(1) ascending powers

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (3-14)$$

نفرض أن الدوال المناسبة المنتمة للمؤثر  $\hat{H}_0$  والتي تعطى القيم المناسبة  $E_n$  عند التأثير عليها بهذا المؤثر هي

$$|E_n, \alpha\rangle \equiv |n\rangle \quad (4-14)$$

حيث الرمز  $\alpha$  هو اختصار لجميع المعلومات الإضافية اللازمة لتعيين حالة فريدة.

لجسيم حر يعبر عن هذه الدوال بالمركبتين المستقلتين لمتجه الوحدة المَعْرِف لاتجاه كمية الحركة الخطية. من ناحية أخرى يمكن تعريف حالة النظام بمتجه كمية الحركة الخطية،

$$|n\rangle \equiv |p_n\rangle \quad (5-14)$$

الحالة  $|n\rangle$  تكون فئة مسعامدة تامة<sup>(1)</sup>.

على الرغم من أن هذه الحالات تكون عادة متصلة إلا أننا يمكننا التعامل معها على اعتبار أنها متقطعة، وذلك بغرض تعميم المسألة. لاستيفاء هذه الفكرة نكتب شرط المسعامدية كالاتي:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad (6-14)$$

وعندئذ نكتب الحالات الحرة المعتمدة على الزمن على النحو (انظر

المعادلة (13-13))

$$|n(t)\rangle = |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \quad (7-14)$$

نفترض أن النظام الفيزيائي الفعلي متواجد في حالة معتمدة على الزمن

$$|\Psi_i(t)\rangle$$

(1) complete orthonormal set

والتي يجب أن تحقق معادلة شرودنجر للحركة (١٣-٢٩)،

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_i(t)\rangle = |\hat{H}_0 + \hat{V}|\Psi_i(t)\rangle \quad (٨-١٤)$$

المعامل  $i$  يدل على أنه عند الزمن الابتدائي الذي نعتبره مساويا

$$t = -T/2 \quad (٩-١٤)$$

يكون النظام في حالة مناسبة للنظام الحر (انظر المعادلة (٧-١٤))،

$$|\Psi_i(-T/2)\rangle = |i\rangle e^{iE_i T/2\hbar} \quad (١٠-١٤)$$

عند استطارة جسيم نتيجة لطاقة وضع معينة نجد أن الحالة

$$|i\rangle = |p_i\rangle \quad (١١-١٤)$$

هي التي تُعرّف طاقة واتجاه الحزمة الساقطة قبل حدوث الاستطارة.

من الملائم البحث عن حل للمعادلة (٨-١٤) في صورة مفكوك بدلالة

الدوال المناسبة (المعتمدة على الزمن) للنظام الحر،

$$|\Psi_i(t)\rangle = \sum_n |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} a_{ni}(t) \quad (١٢-١٤)$$

عند تلاشي طاقة وضع التفاعل ( $\hat{V}=0$ ) ينبغي لهذا المفكوك أن يكون هو

الشكل العام للحل المعتمد على الزمن (المعادلة (١٣-١٣)) الذي معاملاته

$a_{ni}$  ثابتة  $a_{ni}$  تناظر  $(F(E_n))$ . إلا أن وجود  $\hat{V}$  بالهاميلتونى يستحث ظهور

الاعتماد الزمني في هذه المعاملات.

من الواضح أن شرط الحدود (١٠-١٤) هو

$$a_{ni}(-T/2) = \delta_{ni} \quad (١٣-١٤)$$

نعتبر حالة نهائية معينة ونرمز لها بالرمز  $f$ . عند استطارة جسيم

نتيجة لوجوده تحت تأثير طاقة وضع ما فإن الحالة النهائية تعين بمعلومية

كمية حركة نهائية

$$|f\rangle = |p_f\rangle \quad (14-14)$$

احتمال أن يتواجد النظام عند الزمن  $t$  في الحالة  $|f\rangle$  يساوى

$$w(t) = |\langle f | \Psi_i(t) \rangle|^2 = |a_{fi}(t)|^2 \quad (15-14)$$

باعتبار فترة زمنية كلية  $T$  محسوبة ابتداء من لحظة تهيئة الحالة الابتدائية للنظام،  $|i\rangle$ ، نجد أن الاحتمال لكل وحدة زمن لحدوث انتقال للنظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية،  $|f\rangle$ ، يساوى

$$"w" = \frac{w(T/2)}{T} = \frac{|a_{fi}(T/2)|^2}{T} \quad (16-14)$$

على ذلك فإن المعاملات  $a_{fi}(t)$  فى المفكوك (14-12) هى ببساطة معدلات الانتقالات<sup>(1)</sup> التى نود حسابها. هذه المعاملات معروفة باسم ساعات الانتقالات<sup>(2)</sup>.

لاستنتاج تعبير يعطى هذه الساعات نعوض من المعادلة (14-12) فى المعادلة (14-8)؛

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_n |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} a_{ni}(t) \right] = \sum_n [\hat{H}_0 + \hat{V}] |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} a_{ni}(t) \quad (17-14)$$

فى الطرف الأيمن لهذه المعادلة ينبغى استخدام حقيقة كون دوال الحالة عبارة عن دوال حالة مناسبة للنظام الحر، أى أن

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (18-14)$$

هذا يودى إلى ظهور سلسلة من الحدود التى تتلاشى مع حدود الطرف الأيسر الناتجة من إجراء التفاضل الزمنى على المعاملات الأسية. أما الحدود المتبقية فهى:

(1) transition rates (2) transition amplitudes

$$\sum_n i\hbar |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \frac{d}{dt} a_{ni}(t) = \sum_n \hat{V}|n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} a_{ni}(t) \quad (19-14)$$

والآن بالضرب من جهة اليسار في  $\langle f|$  واستخدام شرط المسامدية

$$\langle f|n\rangle = \delta_{fn} \quad (20-14)$$

نجد أن هذا يتسبب في ملاحظة المجموع بالطرف الأيسر ويتبقى حد واحد فقط مضروباً في معامل أسى. بعد إجراء بعض الترتيب يتسنى لنا كتابة

المعادلة

$$\frac{d}{dt} a_{fi}(t) = (i\hbar)^{-1} \sum_n \langle f|\hat{V}|n\rangle e^{i(E_f - E_n)t/\hbar} a_{ni}(t) \quad (21-14)$$

التي يمكن حلها مرتبطة بشرط الحدود (13-14).

نستطيع إدماج شرط الحدود مع المعادلة التفاضلية السابقة في معادلة

تكاملية واحدة، كالتالي:

$$a_{fi}(t) = \delta_{fi} + (i\hbar)^{-1} \int_{-T/2}^t \sum_n \langle f|\hat{V}|n\rangle e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} a_{ni}(t') dt'$$

$$(22-14)$$

نفهم هذه الخطوة لاحظ أولاً أنه إذا كان

$$t = -T/2$$

$$(23-14)$$

فإن مدى التكامل يتلاشى وتؤول المعادلة (22-14) إلى شرط الحدود

المطلوب (13-14). ثانياً، تفضل المعادلة (22-14) بالنسبة للزمن هو

بالضبط المعادلة (21-14).

ينظر للمعادلة (22-14) على أنها من المعادلات المهمة المعبرة عن

ساعات الانتقالات  $a_{fi}(t)$ ، وذلك لأنها تعطي قيم مضبوطة لتلك الساعات

(مضبوطة لأننا لم نستخدم أى تقريبات حتى الآن). إلا أن هذه المعادلة

ليس لها حل في شكل محدود<sup>(1)</sup>. يتسنى لنا الحصول على حل تقريبي بسيط لو افترضنا إمكانية عمل مفكوك بدلالة قوى طاقة التفاعل  $\hat{V}$  (أو بدقة أكثر بدلالة قوى عنصر المصفوفة  $\langle f|\hat{V}|n\rangle$ ). من هذا فإننا نحصل على التقريب الصفري بإهمال التكامل بكامله لنجد

$$a_{\bar{n}}(t) = \delta_{\bar{n}} \quad (24-14)$$

وهذا هو التعبير الجبري للحقيقة الفيزيائية الواضحة التي تفيد أنه عند إهمال طاقة التفاعل يبقى النظام في حالته الابتدائية عند كل الأزمنة (انظر المعادلتين (14-7)، (14-10))، أى أن

$$|\Psi_i(t)\rangle = |i(t)\rangle \quad (25-14)$$

لإيجاد التقريب الذى يلى التقريب الصفري نعوض من المعادلة (14-1)

(24) فى التكامل الوارد بالمعادلة (14-22). يصبح حينئذ المجموع عديم

الأهمية ونستطيع تقييم المعادلة عند الزمن  $t = T/2$  لتعطى

$$a_{\bar{n}}(T/2) = \delta_{\bar{n}} + (i\hbar)^{-1} \langle f|\hat{V}|i\rangle \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i(E_f - E_i)t/\hbar} dt \quad (26-14)$$

نفرض أن الحالة النهائية غير مماثلة للحالة الابتدائية، أى أن

$$\delta_{\bar{n}} = 0 \quad (27-14)$$

عندها يمكن التعويض من المعادلة (14-26) فى المعادلة (14-16). من

الأنسب أخذ النهاية عندما تؤول الفترة الزمنية إلى مالانهاية، ومن ثم

$$"w" = (\hbar)^{-2} |\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2 \times$$

$$\times \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \hbar \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \frac{dt}{\hbar} \right] \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i(E_f - E_i)t/\hbar} dt \right] \quad (28-14)$$

(1) closed form

المعامل الذى بين أول قوسين مربعين من جهة اليسار يساوى

$$2\pi\hbar\delta(E_f - E_i) \quad (٢٩-١٤)$$

وحيث أن هذا المعامل يتلاشى مالم يكن

$$E_f = E_i \quad (٣٠-١٤)$$

فيجب علينا مساواة الأس الموجود بين القوسين المربعين الآخرين بالصفر. على ذلك فإن الكمية ككل تؤول إلى الواحد الصحيح ونستطيع أن نعبر عن معدل الانتقال كالاتى:

$$"w" = \frac{2\pi}{\hbar} \langle f | \hat{V} | i \rangle \delta(E_f - E_i) \quad (٣١-١٤)$$

وجود الدالة  $\delta$  يضمن لنا أن المعدل يساوى صفر مالم تكن الطاقة مُحَقَّقة لقانون الحفظ. التعبير السابق تقليدى بعض الشيء وذلك نتيجة للفترة الزمنية اللانهائية التى اعتبرناها، وأيضا لحقيقة اعتبارنا لحساب معدل الانتقال إلى حالة من الحالات النهائية المعروفة بالتحديد.

فى الواقع التجريبي يوجد عادة على الأقل جسيم واحد حر فى الحالة النهائية والذى يمكن اعتباره حاملا لطاقة محددة داخل حدود ضيقة، وأن اتجاه هذا الجسيم يُعرَّف بزاوية مجسمة متناهية فى الصغر. بطريقة مكافئة نقول أن كمية الحركة الخطية للجسيم تُعرَّف بواسطة جهاز الكشف لتقع

$$\text{داخل المدى } p_f + dp_f, p_f$$

نفرض أن

$$\rho(p_f) d^3 p_f = \rho(p_f) p_f^2 dp_f d\Omega_f \quad (٣٢-١٤)$$

هو عدد الحالات الكمية فى المدى المذكور. نشير إلى هذه الحالات باسم

الحالات المعنية<sup>(1)</sup>. نحصل على معدل الانتقال إلى حالة من الحالات النهائية المعنية بضرب المعادلة (٣١-١٤) في المعادلة (٣٢-١٤). (إذا كان هناك العديد من الجسيمات في حالات نهائية فيجب أن يتواجد العديد من مثل هذه المعاملات - انظر المعادلة (٩٧-١٤) التي سترد فيما بعد).

نضع التعريف

$$\rho(E_f) = \delta(E_i - E_f) \rho(p_f) d^3 p_f \quad (٣٣-١٤)$$

الذي يكافئ كثافة الحالات النهائية المعنية المتوافقة مع قوانين حفظ الطاقة.

بضرب المعادلة (٣١-١٤) في المعادلة (٣٢-١٤) فإن معدل الانتقال الفعلي إلى حالة من الحالات المعنية يساوي

$$dw_{fi} = w_{fi} \rho(p_f) d^3 p_f \quad (٣٤-١٤)$$

أو باستخدام المعادلة (٣٣-١٤) يساوي

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (٣٥-١٤)$$

كتبنا هنا معدل الانتقال في صورة تفاضل وذلك لأن  $\rho(E_f)$  كمية تفاضلية تؤدي إلى معدل انحلال تفاضلي<sup>(2)</sup> أو إلى مساحة مقطع. نحصل على المعدل الكلي للانحلال أو مساحة المقطع الكلي بإجراء المجموع على كل الحالات المعنية الممكنة. هذا يستدعي إجراء تكامل على قيم كميات الحركة الخطية التي لم تعين من قبل بواسطة قانون حفظ الطاقة، وإجراء التكامل أيضا على كل الزوايا المجسمة بالحالة النهائية.

(1) relevant states (2) differential decay rate



تم تطبيق المعادلة (١٤-٣٥) على مدى كبير من الظواهر الكمية، ولهذا فقد سماها إنريكو فيرمي<sup>(١)</sup> بالقاعدة الذهبية. فيما يلي سنستمر في دراسة استطارة جسيم مفرد بواسطة طاقة وضع ثابتة في المقدار، ومن ثم سوف نناقش الانتقالات الإشعاعية ومعدلات الانحلال.

### ١٤-٢ استطارة طاقة الوضع

مانود حسابه هنا هو مساحة المقطع التفاضلي لاستطارة جسيم تحت تأثير طاقة وضع معينة. نستطيع إجراء ذلك بواسطة معرفتنا لمعدل انتقال النظام من حالة ابتدائية يصاحبها كمية حركة خطية  $p_i$  إلى حالة نهائية يصاحبها كمية حركة خطية  $p_f$ .

نعتبر أولاً المعامل الذي يصف كثافة الحالات النهائية المعنية. لجسيم

حر تنحصر حركته في بعد واحد في المدى

$$0 \leq x \leq L \quad (١٤-٣٦)$$

نجد أن الحالة المناسبة، والمساوية، لكمية الحركة الخطية هي (انظر

المعادلة (٣-٣٣):

$$\langle x | p_n \rangle = L^{-1/2} e^{i p_n x / \hbar} \quad (١٤-٣٧)$$

حيث من المعادلة (٢-١١) نحصل على

$$p_n = \frac{2\pi \hbar}{L} n \quad (١٢-٣٨)$$

لهذا فإن عدد الحالات المتواجدة في مدى كمية الحركة الخطية،

$$p \leftarrow p + dp, \text{ يساوي}$$

(1) Enrico Fermi

$$dn = \frac{L}{2\pi\hbar} dp \quad (39-14)$$

أما فى الثلاثة أبعاد فإننا نكتب الحالة المناسبة، والمساواة، المناظرة كما

بلى:

$$\langle x | p_n \rangle = L^{-3/2} e^{i p_n \cdot x / \hbar} \quad (40-14)$$

وبنفس المفهوم السابق يكون عدد الحالات فى مدى ما من كمية الحركة الخطية مساويا

$$\rho(p) d^3 p = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 d^3 p = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 p^2 dp d\Omega \quad (41-14)$$

يجدر بنا الإشارة هنا إلى أن الكمية  $L^3 d^3 p$  تعبر عن حجم ما فى فراغ-الطور<sup>(1)</sup> وأنا قد توصلنا إلى نتيجة لها أهميتها فى الميكانيكا الإحصائية، وهى وجود حالة كمية واحدة لكل حجم<sup>(2)</sup> مساوى

$$(2\pi\hbar)^3 = h^3. \quad (42-14)$$

عند الاستطارة داخل زاوية مجسمة  $d\Omega_f$  تعطى كثافة الحالات النهائية

المعنية بالعلاقة (من المعادلة (33-14))؛

$$\begin{aligned} \rho(E_f) &= \delta(E_i - E_f) \rho(p_f) d^3 p_f \\ &= \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 p_f^2 \frac{dp_f}{dE_f} d\Omega_f \delta(E_i - E_f) dE_f \end{aligned} \quad (43-14)$$

بإجراء التكامل على أى مدى من الطاقات النهائية، التى تتبع قانون حفظ

الطاقة، نتلاشى الدالة- $\delta$ ، وهذا يستلزم أن يكون

$$E_i = E_f = \frac{p_f^2}{2m} \quad (44-14)$$

(1) phase-space (2) one quantum state per volume

ومنه

$$\frac{dE_f}{dp_f} = \frac{p_f}{m} \quad (٤٥-١٤)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٣-١٤) نجد

$$\rho(E_f) = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 m p_f d\Omega_f \quad (٤٦-١٤)$$

بهذا السياق يمكن التفكير في الحجم  $L^3$  الذي تم تسوية الحالات بداخله على أنه كبير جدا، ولكنه ما يزال صغيرا بدرجة كافية لعدم استيعاب الجهاز اللازم لإنتاج الحزمة الابتدائية والكشف عن الجسيم المستطار. ينبغي ألا تؤثر هذه الفكرة على النتيجة النهائية. وهذا بمثابة اختبار طفيف لمفهومنا عن عدم ظهور  $L^3$  في التعبير النهائي عن مساحة المقطع التفاضلي (انظر المعادلة (٥١-١٤) التي سترد فيما بعد).

نحن الآن بصدد كتابة علاقة واضحة تعبر عن معدل الانتقال. مساحة المقطع التفاضلي ما هي إلا معدل الانتقال لوحدة الفيض، وقد بينا ذلك بالبندين ١٠-١، ١٠-٣، بالباب العاشر.

لدواعي التسوية نضع فيض الحالة الابتدائية في الصورة

$$\text{Flux} = \text{الفيض} = \rho v = \frac{1}{L^3} \frac{p_i}{m} \quad (٤٧-١٤)$$

بتراكب القاعدة الذهبية (٣٥-١٤) مع المعادلة (٤٦-١٤) المعبرة عن كثافة الحالات النهائية، والمعادلة (٤٧-١٤) المعبرة عن الفيض الابتدائي، فإن العلاقة التي تعطى مساحة المقطع التفاضلي للاستطارة داخل الزاوية المجسمة  $d\Omega$  تكتب كما يلي (انظر البند ١٠-٣):

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{Flux} \cdot \frac{dw_f}{d\Omega} \quad (48-14)$$

$$= \left( \frac{mL^3}{p_i} \right) \left( \frac{2\pi}{\hbar} \right) \left| \langle p_f | \hat{V} | p_i \rangle \right|^2 \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 m p_f$$

للوصول إلى التعبير السابق تم إجراء خطوات طويلة بعض الشيء. الجزء الوحيد المتبقى هو حساب عنصر مصفوفة طاقة الوضع. يمكن عمل ذلك باستخدام رموز ديراك واتباع أسلوب المعادلة (١٢-٢٢) مع تذكر أننا هنا نواجه مسألة حقيقية في الثلاثة أبعاد.

إذا كانت طاقة الوضع مركزية ومتماثلة كروياً فإننا نجد

$$\langle p_f | \hat{V} | p_i \rangle = \int \langle p_f | r \rangle V(r) \langle r | p_i \rangle d^3r$$

$$= \frac{1}{L^3} \int e^{-i p_f \cdot r / \hbar} V(r) e^{i p_i \cdot r / \hbar} d^3r \quad (49-14)$$

$$= \frac{1}{L^3} \int e^{-i K \cdot r} V(r) d^3r = \frac{1}{L^3} \tilde{V}(K)$$

حيث

$$K \hbar = (p_f - p_i) \quad (50-14)$$

هي كمية الحركة الخطية المنتقلة إلى الجسم أثناء انتقاله من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية.

بالتعويض من المعادلة (٤٩-١٤) في المعادلة (٤٨-١٤) نحصل على

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{p_f}{p_i} |\tilde{V}(k)|^2 \quad (51-14)$$

في حالة الاستطارة المرنة<sup>(١)</sup> تصبح قيمتا كمية الحركة الابتدائية

(1) elastic scattering

والنهائية متساويتين، ومن ثم يؤول الاعتماد الصريح على كميتى الحركة الخطية بالمعادلة السابقة إلى الوحدة. يظهر بالمعادلة المعامل المحتوى على كميات الحركة الخطية بسبب الفيض الابتدائى وكثافة الحالات النهائية، وليس لميكانيكية التفاعل المحتواة فى الكمية  $\tilde{V}(K)$  دخل فى ذلك.

لطاقات الوضع الأكثر عمومية التى تتسبب فى حدوث تغيير فى طبيعة واتجاه الجسم المستطار يصبح المعامل المحتوى على كميتى الحركة الخطية الابتدائية والنهائية له أهمية قصوى. من الآن فصاعدا سوف نضع

$$p_f = p_i = p \quad (14-52)$$

بمقارنة المعادلة (14-51) بالمعادلة (10-26) يظهر لنا (بغض النظر عن المعامل المحتوى على  $\hbar, m$ ) أن  $\tilde{V}(K)$  هو سعة الاستطارة،  $f(\vartheta)$ ، الناتجة عن طاقة الوضع  $V(r)$ . يتضح لنا أيضا من المعادلة (14-49) أن  $\tilde{V}(K)$  هو انتقال فورير لطاقة الوضع، نسبة إلى انتقال فورير لكمية الحركة. انتقال فورير عبارة عن كمية قياسية تعتمد فقط على الكميات القياسية التى يمكن تأسيسها من كل من  $p_f, p_i$ ، وهى

$$p_i^2 = p_f^2 = 2mE \quad (14-53)$$

أو

$$p_i \cdot p_f = p^2 \cos \vartheta \quad (14-54)$$

حيث  $\vartheta$  هى الزاوية التى يُستطار الجسم خلالها (زاوية الاستطارة). لهذا فإن مساحة المقطع التفاضلى تظهر كدالة فى الطاقة وزاوية الاستطارة، كما يجب أن تكون.

إذا كان  $R$  هو مدى طاقة الوضع فإن الزمن الذى يقضيه الجسم داخل

منطقة تأثير طاقة الوضع يساوى

$$\tau = \frac{R}{v} = \frac{R m}{p} \quad (٥٥-١٤)$$

تتحقق صلاحية التقريب الذى وضعناه من قبل (وهو إجراء مفكوك فى صورة قوى طاقة الوضع) إذا كان حاصل ضرب زمن المرور  $\tau$  وطاقة وضع الاستطارة  $\langle V \rangle$  صغيرا بالنسبة إلى  $\hbar$ ، أى إذا كان

$$\tau \langle V \rangle < \hbar$$

أو

$$p > \frac{R m \langle V \rangle}{\hbar} \quad (٥٦-١٤)$$

من هنا فإن هذه النظرية تطبق فى الأحوال التى تشتمل على كميات حركة خطية كبيرة، أو بمعنى آخر تطبق عند الطاقات العالية. هذا يعنى أن نظرية الاضطراب تكمل التحليل الذى قدمناه فى صورة إزاحات الطور بالباب العاشر. التحليل فى صورة إزاحات الطور له أهميته عند الطاقات المنخفضة، حيث يشارك فى حل المسألة عدد محدود من حالات كمية الحركة الزاوية.

لحساب انتقال فورير لطاقة الوضع ندخل الإحداثيات القطبية بحيث يكون المحور القطبى<sup>(١)</sup> فى اتجاه  $K$ . نشير إلى المتغيرات الزاوية الإضافية بالرموز  $\varphi'$ ,  $\theta'$ ، وذلك لتميزها عن  $\varphi$ ,  $\theta$  التى يعتمد عليها  $K$  وتتمتع بأهميتها الفيزيائية حيث يستطار الجسم خلالها. لهذا نكتب

(1) polar axis

$$\begin{aligned}\tilde{V}(K) &= \int e^{iK \cdot r} V(r) d^3r \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iKr \cos \vartheta'} V(r) r^2 \sin \vartheta' dr d\vartheta' d\varphi'\end{aligned}\quad (57-14)$$

يمكن إجراء التكامل على  $\varphi'$  في الحال، كما أن التكامل على  $\vartheta'$  يمكن أيضا إجراؤه بسهولة لنحصل على

$$\tilde{V}(K) = \frac{4\pi}{K} \int_0^\infty r \sin Kr V(r) dr \quad (58-14)$$

كمثال على ذلك نعتبر طاقة الوضع الكولومية المحجوبة<sup>(1)</sup>

$$V(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (59-14)$$

مرة أخرى، يمكن إجراء التكامل بسهولة لنجد

$$\tilde{V}(K) = \frac{4\pi g}{K^2} \left(1 + \frac{\mu^2}{K^2}\right) \quad (60-14)$$

نحصل على طاقة الوضع الكولومية لجسيم شحنته  $Z_1 e$  حدث له استطارة مبتعدا عن شحنة ثابتة  $Z_2 e$  بأخذ

$$g = Z_1 Z_2 e^2 m, \quad \mu = 0 \quad (61-14)$$

بالتعويض في المعادلة (61-14) نحصل على مساحة المقطع التفاضلي للاستطارة الكولومية (استطارة رذرفورد) في الصورة

$$(\sigma(\vartheta)) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2 Z_1 Z_2 e^2 m}{\hbar^2 K^2} \right)^2 \quad (62-14)$$

بتربيع المعادلة (62-14) نعطى

$$K^2 \hbar^2 = 4 p^2 \sin^2 \vartheta / 2 \quad (63-14)$$

وتؤول المعادلة (62-14) إلى

(1) screened Coulomb potential

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2 Z_1 Z_2 e^2 m}{2 p^2 \sin^2 \theta / 2} \right)^2 \quad (14-6)$$

عند زوايا صغيرة تصبح  $\theta$  قريبة الشبه بالتعبير التقريبي الحاصلين عليه من النظرية الكلاسيكية في المعادلة (10-16). يتضح هنا أن حقيقة عدم اعتماد مساحة المقطع الكمي<sup>(1)</sup> على  $\hbar$  وتماثلها مع النتيجة الكلاسيكية المضبوطة هي من الصفات المميزة لطاقة الوضع البسيطة التي تتبع القانون  $1/r$ .

أخيراً، نشير إلى أننا اعتبرنا حالة استطارة جسيم مفرد بواسطة طاقة وضع ثابتة المقدار. من المسائل الفيزيائية المعتادة حالة استطارة جسيمين نتيجة لطاقة وضع تفاعل متبادل<sup>(2)</sup> بينهما تعتمد على المسافة بين الجسيمين. بينا في البند 10-5 أن الاستطارة المنسوبة إلى محاور إسناد مركز الكتلة تُعطى في مثل هذه الأحوال من الصياغة التقليدية للمسألة، بشرط استبدال كتلة الجسيم المستطار بالكتلة المختصرة لجسمي النظام. للحصول على مساحة المقطع الكلي نجرى التكامل على الزاوية المجسمة.

### ٣-١٤ الانتقالات الإشعاعية

يمكن لنا أيضاً استخدام القاعدة الذهبية لحساب الانتقالات الذرية المستحثة بواسطة الإشعاع الكهرومغناطيسي. نعتبر الامتصاص والانبعاث المستثار<sup>(3)</sup> بسبب وجود مجال إشعاعي كلاسيكي<sup>(4)</sup>. مثل هذه المسائل نستطيع معالجتها دون الدخول في تعقيدات

(1) quantum cross section (2) mutual interaction potential (3) stimulated emission (4) classical radiation field



الفوتونات. سنتعامل هنا بالتحديد مع الانتقالات التي تتم بين حالات متقطعة، مع الاهتمام الخاص بالاعتماد الزمني.

نفرض نبضة مستوية<sup>(1)</sup> من الإشعاع الكهرومغناطيسي الذي يلزمه فترة بقاء وتردد طيفي<sup>(2)</sup> معينين. نستطيع التعبير عن هذه النبضة في صورة طاقة الوضع المتجهة<sup>(3)</sup>

$$A(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i(\omega t - k \cdot r)} d\omega \quad (14-65)$$

حيث  $k$  متجه، في اتجاه انتشار النبضة، قيمته تساوي

$$k = \omega / c \quad (14-66)$$

وحيث أن

$$\text{div} A = 0 \quad (14-67)$$

$$\therefore A \cdot k = 0 \quad (14-68)$$

أما كون الكمية  $A(r, t)$  حقيقية فيؤدي إلى

$$A(-\omega) = A^*(\omega) \quad (14-69)$$

المجال الكهربى يساوى

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (14-69)$$

ومنه

$$|E| = \int_{-\infty}^{\infty} \omega A(\omega) e^{-i(\omega t - k \cdot r)} d\omega \quad (14-71)$$

والحث المغناطيسى<sup>(4)</sup> يساوى

(1) plane pulse (2) frequency spectrum (3) vector potential (1) magnetic induction

$$B = \text{curl} A \quad (٧٢-١٤)$$

باستخدام المعادلة (١٤-٦٦) فإن المعادلة السابقة تعطي

$$|B| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{c} A(\omega) e^{-i(\omega t - k \cdot r)} d\omega \quad (٧٣-١٤)$$

يُعيّن فيض الطاقة<sup>(١)</sup> (أى الطاقة لكل وحدة زمن لكل وحدة مساحة عمودية على اتجاه الانتشار) من متجه الموضع<sup>(٢)</sup>. يكون متجه الموضع فى اتجاه  $k$  وقيمته تساوى

$$\begin{aligned} |N| &= \left| \frac{1}{\mu_0} E \wedge B \right| \\ &= \frac{1}{c \mu_0} \int \int \omega \omega' A(\omega) A(\omega') e^{-i[(\omega + \omega')t - (k + k')r]} \omega d\omega' \end{aligned} \quad (٧٤-١٤)$$

ومنه فإن الطاقة الكلية المارة خلال وحدة المساحات، العمودية على اتجاه الانتشار، أثناء الفترة الزمنية الكلية لبقاء النبضة، تساوى

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |N| dt &= \frac{2\pi}{c \mu_0} \int \int \omega \omega' A(\omega) A(\omega') e^{i(k+k') \cdot r} \delta(\omega + \omega') d\omega d\omega' \\ &= \frac{4\pi}{c \mu_0} \int_0^{\infty} \omega^2 |A(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (٧٥-١٤)$$

للوصل إلى المعادلة السابقة استخدمنا المعادلة (١٢-٣٩).

على ذلك فإن الطاقة الكلية الناشئة عن الفترة الزمنية الكلية لبقاء النبضة لوحدة المساحات ولمدى التردد  $\omega - \omega + d\omega$  تساوى

(1) energy flux (2) poynting vector

$$I(\omega) d\omega = \frac{4\pi\omega^2}{c\mu_0} |A(\omega)|^2 d\omega = 4\pi\epsilon_0 c\omega^2 |A(\omega)|^2 d\omega \quad (٧٦-١٤)$$

حيث استخدمنا العلاقة

$$c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1 \quad (٧٧-١٤)$$

لاحظ أن الشدة لكل وحدة مساحة،  $I(\omega)$ ، لها الأبعاد

$$[I(\omega)] \sim [(زمن \times طاقة) \text{ مساحة}] \quad (٧٨-١٤)$$

نحسب الآن قيمة احتمال أن تستحث النبضة انتقال معين في ذرة

الهيدروجين (على فرض أن نواة الهيدروجين مستقرة عند نقطة الأصل)

من حالة ابتدائية

$$|i\rangle \equiv |n, \ell, m\rangle$$

إلى حالة نهائية

$$|f\rangle \equiv |n', \ell', m'\rangle$$

تسفر هذه العملية عن امتصاص أو انبعاث طاقة، وذلك تبعاً لصغر أو كبر

$E_i$  بالنسبة إلى  $E_f$ .

تعطى طاقة التفاعل بين المجال الإشعاعي والإلكترون الموجود بالذرة

من العلاقة

$$\begin{aligned} \hat{V} &= A(r, t) \cdot \hat{J} \\ &= \frac{e}{m_e} A(r, t) \cdot \hat{p} \end{aligned} \quad (٧٩-١٤)$$

حيث  $\hat{J}$  هي كثافة التيار الإلكتروني و  $\hat{p}$  هو مؤثر كمية الحركة الخطية

للإلكترون. نظراً لأن  $\hat{V}$  يعتمد اعتماداً صريحاً على الزمن فإننا لانستطيع

استخدام القاعدة الذهبية في هذه المرحلة، وبالتالي نعود إلى المعادلة (١٤-)

(٢٦).

بالتعويض عن  $\hat{V}$  من المعادلة (١٤-٧٩) وعن A من المعادلة (١٤-٦٥) تُكتب المعادلة (١٤-٢٦) كالآتي:

$$a_{fi}(T/2) = (i\hbar)^{-1} \langle f | \int A(\omega) \frac{e}{m_e} \cdot \hat{p} e^{ik \cdot r} | i \rangle \times \\ \times \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i - \hbar\omega)t/\hbar} dt d\omega \quad (١٤-٨٠)$$

ولهذا

$$a_{fi}(\infty) = 2\pi i \langle f | \int A(\omega) \cdot p \frac{e}{m_e} e^{ik \cdot r} | i \rangle \times \\ \times \delta(E_i - E_f - \hbar\omega) d\omega \quad (١٤-٨١) \\ = -\frac{2\pi i}{\hbar} \frac{e}{m_e} A(\omega_{fi}) \langle f | \hat{p}_A e^{ik \cdot r} | i \rangle$$

حيث في التعبير النهائي

$$\hbar\omega_{fi} = E_i - E_f \quad (١٤-٨٢)$$

وتلك هي قاعدة بوهر (١-٢١).

تعطى قيمة k التي تظهر في الدالة الأسية بالمعادلة (١٤-٨١) بواسطة العلاقة (استخدم المعادلة (١-٢٧))

$$k = \frac{\omega_{fi}}{c} = \left( \frac{e^2 M}{\hbar c} \right) \frac{1}{2a_0} \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right| \quad (١٤-٨٣)$$

ومنه

$$ka_0 = \left( \frac{e^2 M}{\hbar c} \right) = \frac{1}{137} \quad (١٤-٨٤)$$

مما يؤسس النتيجة المهمة وهي أن الأطوال الموجية للإشعاع المنبعث أو الممتص في الانتقالات الذرية تكون قيمتها أكبر من اتساع الذرة بمقدار الضعف.

يكتب عنصر المصفوفة بالمعادلة (١٤-٨١) بصورة أكثر وضوحا كما يلي:

$$\langle f | \hat{p}_A e^{ik \cdot r} | i \rangle = \int u_{n'l'm'}^*(r) (-i\hbar \nabla_A) e^{ik \cdot r} u_{n'l'm}(r) d^3r \quad (١٤-٨٥)$$

وحيث أن الدوال المناسبة،  $u(r)$ ، تساوى الصفر لقيم  $r$  التي تكبر بكثير عن نصف قطر بوهر فإن العلاقة (١٤-٨٤) توضح لنا أن الحد الأسى بالمعادلة (١٤-٨١) يمكن تقريبه إلى الوحدة. وهذا هو ما يعرف بتقريب ثنائى القطب<sup>(١)</sup>.

باستخدام تقريب ثنائى القطب فى المعادلة (١٤-٨١) نجد أن احتمال أن تستحث النبضة انتقال يساوى

$$\begin{aligned} w &= |a_{fi}(\infty)|^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \frac{e^2}{m_e^2} |A(\omega_{fi})|^2 |\langle f | \hat{p}_A | i \rangle|^2 \quad (١٤-٨٦) \\ &= 4\pi^2 \left( \frac{e_M^2}{\hbar c} \right) \frac{I(\omega)}{m_e^2 \omega_{fi}^2 \hbar} |\langle f | \hat{p}_A | i \rangle|^2 \end{aligned}$$

للحصول على التعبير النهائى استخدمنا المعادلة (١٤-٧٦) وتعريف  $e_M^2$  من ناحية المبدأ ماتوصلنا إليه يمثل الإجابة المطلوبة، إلا أنه يمكن

الوصول إلى مفهوم أعمق للمسألة من الفكرة البسيطة الآتية:

على ضوء الأبعاد نستطيع تقريب كمية الحركة الخطية إلى

$$\langle f | \hat{p}_A | i \rangle \cong m_e \omega_{fi} a_0 \quad (١٤-٨٧)$$

بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (١٤-٨٦) نحصل على

$$w \cong 4\pi \left( \frac{e_M^2}{\hbar c} \right) \left( \frac{I(\omega_{fi}) \pi a_0^2}{\hbar} \right) \quad (١٤-٨٨)$$

(1) dipole approximation

يمكن البرهنة على صحة التقريب (١٤-٨٧) كما يلي:

من مبدأ التناظر

$$\hat{p}_A = m_e \frac{d\hat{r}_A}{dt}$$

حيث  $r_A$  هي مركبة مؤثر الموضع للإلكترون يسير في اتجاه طاقة الوضع المتجهة. من المعادلة (١٣-٣٧)

$$i\hbar \frac{d\hat{r}_A}{dt} = [\hat{r}_A, \hat{H}]$$

ومنه

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{p}_A | i \rangle &= (i\hbar)^{-1} m_e \langle f | \hat{r}_A \hat{H} - \hat{H} \hat{r}_A | i \rangle \\ &= i m_e \frac{E_f - E_i}{\hbar} \langle f | \hat{r}_A | i \rangle \\ &= i m_e \omega_{fi} \langle f | \hat{r}_A | i \rangle \end{aligned}$$

من المعقول تماما الآن وضع التقريب

$$\langle f | \hat{r}_A | i \rangle \cong a_0$$

ليكون

$$\langle f | \hat{p}_A | i \rangle \cong m_e \omega_{fi} a_0$$

بكتابة الاحتمال في تلك الصورة يصبح لهذا التعبير تعريلا فيزيائيا واضحا تماما. نظرا لأننا نحسب احتمالا معيناً فإن النتيجة لابد أن تمثل بعدد. المعامل الأول الواقع بين القوسين هو ثابت التركيب الدقيق (أنظر المعادلة (٦-٨))، ويعبر عن شدة التفاعل الكهرومغناطيسي (كمية ليس لها أبعاد). واضح أن المعامل  $\pi a_0^2$  هو عبارة عن مساحة المقطع المستعرض من

الذرة كما يبدو للحزمة الساقطة. وحيث أن  $I(\omega)$  عبارة عن شدة لكل وحدة مساحة فإن العدد يكون حينئذ ممثلاً لشدة الطاقة للنبضة ككل (عند تردد بوهر) التي تصدم الذرة. من الملاحظ في المعادلة (١٤-٧٨) أن البسط  $(I(\omega_{fi})\pi a_0^2)$  له نفس وحدات  $\hbar$ ، أي أن المعامل ككل بالمعادلة (١٤-٨٨) مجرد عدد ليس له وحدات كما يجب أن يكون.

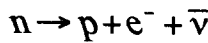
نحصل على مساحة مقطع الانتقال الذي لا يعتمد على النبضة بضرب المعادلة (١٤-٨٦) في  $\hbar\omega$ ، بغرض إعطاء الفقد المحتمل في الطاقة، ثم القسمة على معامل الشدة؛ أي أن

$$a_{fi} = \frac{\hbar \omega_{fi} \omega}{I(\omega_{fi})} = 4 \pi \omega_{fi} \left( \frac{e_M^2}{\hbar c} \right) \pi \left| \langle f | \hat{r}_A | i \rangle \right|^2 \quad (١٤-٨٩)$$

#### ١٤-٤ تحلل-بيتا

نطبق الآن القاعدة الذهبية على المسألة النووية لتحلل-بيتا وذلك لإلقاء بعض من التفصيل على الفكرة التي تنص على أن متوسطات الأعمار الملاحظة للجسيمات النووية-الجزئية الغير مستقرة يجب أن تعزو إلى تفاعل نووي ضعيف ومستقل. مرت علينا هذه الفكرة من قبل في البند ١١-٤.

نعتبر العملية الآتية لتحلل النيوترون



تاريخياً يعد هذا التحلل على أنه أول تأثيرات التفاعلات النووية الضعيفة التي تم اكتشافها. من الجدول ١١-١ يتضح لنا شذوذ هذا التحلل، نظراً لأن متوسط العمر الملاحظ (احدى وعشرين دقيقة) يختلف عن الزمن النووى النموذجى بمقدار سبع وعشرون مرة من قوى العشرة. عملية تعليل وجود هذا المعامل الكبير للغاية توضح لنا مسألة أخرى سترد فيما بعد.

نفترض عملية تحلل نيوترون حر في وضع السكون مع إهمال المغزلية. حيث أن النيوترونات والبروتونات أثقل بكثير من اللبتونات (الإلكترون + نيوترينو) فمن المعقول إهمال ارتداد البروتون واعتبار كونه في وضع السكون أيضا.

يمكن وصف النيوكلونات بواسطة دوال موجية مسواة شديدة المحلية<sup>(1)</sup>

$$u_n(r), u_p(r) \quad (90-14)$$

تتلاشى عند مسافات أكبر من نصف قطر كومتون للنيوكلون، أى تتلاشى عند المسافات

$$r > \frac{\hbar}{m_p c} \quad (91-14)$$

ينبعث كل من الإلكترون والنيوترينو بكميات حركة خطية كبيرة،  $p_e, p_n$  ومصاحبا لهما دوال موجية عبارة عن موجات دي برولى المناظرة لكميات الحركة هذه. سوف تتم تسوية الدوال الموجية مرة أخرى في حجم كبير  $L^3$  (انظر المعادلة (90-14)).

نعتبر أن التفاعل المتسبب في الانتقال يعين ببساطة بواسطة بارامتر  $g_\beta$  يشير إلى شدة التفاعل. لهذا فإن عنصر المصفوفة الذى يظهر فى المعادلة المعبرة عن القاعدة الذهبية يساوى

$$\langle i|V|f \rangle^2 = \left| \frac{g_\beta}{L^3} \int u_n^*(r) u_p(r) e^{i p_e r / \hbar} e^{i p_n r / \hbar} d^3 r \right|^2 \quad (92-14)$$

وحيث أن

$$p_e \ll m_p c \quad (93-14)$$

(1) highly localized normalized wave function



فهذا يستدعى أن يكون

$$\frac{p_e r}{\hbar} \ll 1 \quad (94-14)$$

وذلك لجميع قيم  $r$  التي عندها الدالة  $u_p(r)$  غير صفرية.

تتحقق المعادلة السابقة أيضا لقيم  $p_v$ ، وعليه نستطيع استبدال الحدين الأسيين بداخل التكامل الوارد بالمعادلة (92-14) بالوحدة. وحيث أننا نتوقع تشابه الدالتان  $u_p(r)$ ،  $u_n(r)$  فإن التكامل حينئذ يمكن تقريبه لیساوی تكامل التسوية، الذي بدوره يساوی الوحدة. من الملائم تعريف شدة التفاعل الضعيف بدلالة ثابت  $f^2$ ، مثلا، له نفس أبعاد  $e^2$ . لعمل ذلك ينبغي قسمة  $g_\beta$  على مربع مسافة معينة. من المعقول هنا اعتبار هذه المسافة على أنها نصف قطر كومتون للبروتون. لهذا نجد

$$g_\beta = f^2 \left( \frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 \quad (95-14)$$

في محيط هذا التقريب نحصل على

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 = \frac{f^4}{L^6} \left( \frac{\hbar}{m_p c} \right)^4 \quad (96-14)$$

عدد الحالات في فراغ الطور المتاح للإلكترون والنيوترينو يساوی بالضبط نفس العدد المناظر لجسيم مفرد في مسألة الاستطارة. وحيث أن

البروتون يكون في حالة فريدة، فمن المعادلة (91-14) نجد

$$\rho(E_f) = \delta(E_i - E_f) \frac{L^3 p_e^2 dp_e d\Omega_e}{(2\pi \hbar)^3} \frac{L^3 p_v^2 dp_v d\Omega_v}{(2\pi \hbar)^3} \quad (97-14)$$

من الأنسب كتابة

$$dp_e dp_v = \left( \frac{\partial p_v}{\partial E_f} \right) dp_e dE_f \quad (98-14)$$

ثم إجراء التكامل على  $E_f$ . يؤدي هذا إلى تلاشى الدالة  $\delta$  من المعادلة

(١٤-٩٧)، والالتزام بتطبيق قانون حفظ الطاقة. لهذا

$$E_i = m_n c^2 = E_f = m_p c^2 + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + p_v c \quad (١٤-٩٩)$$

وكذلك

$$\frac{\partial E_f}{\partial p_v} = c \quad (١٤-١٠٠)$$

ومنه

$$\rho(E_f) = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^6 \frac{1}{c} p_e^2 p_v^2 dp_e d\Omega_e d\Omega_v \quad (١٤-١٠١)$$

نستطيع الآن التعويض من المعادلتين (١٤-٩٦)، (١٤-١٠١) فى

القاعدة الذهبية (١٤-٣٥) للحصول على المعدل التفاضلى لتحلل-بيتا

$$\frac{d^3 w}{dp_e d\Omega_e d\Omega_v} = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{f\hbar}{m_p c} \right)^4 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^6 \frac{p_e^2 p_v^2}{c} \quad (١٤-١٠٢)$$

تختص هذه المعادلة بعملية الملاحظة الكاملة التى يمكن إجراؤها، من ناحية

المبدأ، وفيها يقاس اتجاه اللبتونات (أى اتجاه الإلكترون والنيوترينو) وطاقة

الإلكترون، ثم باستخدام قانون حفظ الطاقة نعين طاقة النيوترينو. أما

القياسات الزاوية فتمدنا بالمعلومات عن الاعتماد الزاوى للتفاعل. وحيث

أننا قد فرضنا من قبل عدم افتقارنا للتماثل عند إجراء التكامل على كلا

الزاويتين المجسمتين (كل تكامل يمدنا بالمعامل  $4\pi$ )، عندئذ وبعد إعادة

ترتيب المعادلة السابقة نحصل على

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{1}{2\pi^3} \left( \frac{f^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{m_p c^2}{\hbar} \right)^6 \frac{p_e^2 p_v^2}{(m_p c)^5} \quad (١٤-١٠٣)$$

التي تعين طيف كمية الحركة الخطية للإلكترون. أما القيمة العظمى لكمية الحركة الخطية للإلكترون،  $p_{\max}$ ، فنحصل عليها بمساواة كمية الحركة الخطية للنيوترينو بالصفر في المعادلة (١٤-٩٩)؛

$$(m_n - m_p)c = \sqrt{p_{\max}^2 + m_e^2 c^2} \quad (١٤-١٠٤)$$

بحذف  $p_v$  من المعادلة (١٤-١٠٣) نجد

$$\frac{dw}{dp_e} \approx p_e^2 \left( \sqrt{p_{\max}^2 + m_e^2 c^2} - \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} \right)^2 \quad (١٤-١٠٥)$$

تتيح هذه المعادلة للإلكترون أن ينبعث حاملا أى كمية حركة خطية محصورة في المدى بين الصفر والقيمة العظمى لها، أما القيمة الأكثر احتمالا فتقع قرب منتصف هذا المدى المتاح.

هذه النتيجة تختلف بصورة واضحة عن النتيجة التي ينبغي أن نحصل عليها في حالة عدم وجود نيوترينو في الحالة النهائية. ففي هذا الوضع تعين كمية الحركة الخطية للإلكترون من قانون حفظ الطاقة بطريقة وحيدة. من الناحية التاريخية تعد عملية ملاحظة الإلكترون في تحلل بيتا على أنها أول دليل على وجود النيوترينو.

لإيجاد المعدل الكلى يجب أن نكامل المعدل الجزئى، المعادلة (١٤-١٠٣)

على  $p_e$ . مدى هذا التكامل ينحصر بين الصفر والقيمة العظمى

المعطاة بالمعادلة (١٤-١٠٤)، التي تساوى تقريبا

$$p_{\max} \approx \frac{3}{2} m_e c \quad (١٤-١٠٦)$$

وحيث أن (من المعادلة (١٤-١٠٥))  $m_e c$  هى أيضا كمية الحركة الخطية

النموذجية داخل علامة التكامل لذلك يجب تقريب التكامل على أساس

الأبعاد ليصبح

$$\int_0^{p_{\max}} p_e^2 p_v^2 dp_e \cong (m_e c)^5 \quad (107-14)$$

بترابك هذه المعادلة مع المعادلة (103-14) نجد أن المعدل يساوى

$$w \cong \frac{1}{2\pi^3} \left( \frac{m_p c^2}{\hbar} \right) \left( \frac{f^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{m_e}{m_p} \right)^5 \quad (108-14)$$

يوجد للثلاث معاملات التي بداخل الأقواس تفسيرات فيزيائية بسيطة ومباشرة. فأولها من ناحية اليسار هو الزمن النووى النموذجى (انظر المعادلة (11-59)) الذى يظهر بالمعادلة نتيجة لمساواة أبعاد الطرفين، وذلك لأن  $w$  عبارة عن احتمال لكل وحدة زمن. أما المعامل الثانى فهو ثابت، ليس له أبعاد، يحدد شدة تحلل-بيتا (تفاعل نووى ضعيف) بطريقة مشابهة تماما لثابت التركيب الدقيق فى الكهرومغناطيسية. من الواضح أن الحد الأخير ليس له أبعاد أيضا ويعد مقياسا (طبقا لمعيار نووى مناسب) لكمية فراغ الطور المتاح للنظام فى حالته النهائية.

كما أشرنا سابقا يجب تعليل التباين الشديد بين المعدل الملاحظ، وهو

$$w = 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad (109-14)$$

ومقلوب الزمن النووى الذى يساوى

$$\frac{m_p c^2}{\hbar} \cong 1.4 \times 10^{24} \text{ sec}^{-1} \quad (110-14)$$

يتم تفسير ذلك جزئيا بواسطة معامل فراغ الطور الذى يساوى تقريبا

$$\left( \frac{m_e}{m_p} \right)^5 \cong 10^{-16} \quad (111-14)$$

مؤكدًا حقيقة أن النيوترون يكون أثقل من البروتون بشكل يكفى بالضبط لجعل التحلل متاحا من ناحية الطاقة.

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (108-14) نحصل على

$$\left( \frac{f^2}{\hbar c} \right)^2 \approx 10^{-10} \quad (112-14)$$

وتلك هي شدة التفاعل الضعيف الوارد في الجدول ١١-٢. في التحللات الأخرى المدونة بالجدول ١١-١ تكون كميات الطاقات المتاحة أكبر بكثير مما في حالة تحلل-بيتا، ويكون معامل فراغ الطور أقرب إلى الوحدة، مما يجعل فترات العمر الطويلة جدا طبقا للمقياس النووي (ليست أطول من فترة عمر النيوترون) محكومة بمدى ضعف التفاعل النووي الضعيف (انظر المسألة ١٤-٣).

نشير هنا إلى أن هذا التحليل يطبق على تحلل-بيتا من النيوترون (أو تحلل البروتون) داخل النواة على شرط استبدال طاقات السكون للنيوكلونات، التي تظهر بقانون حفظ الطاقة (١٤-٩٩)، بطاقات النواة الأم والنواة الابنة في النظام المتحلل. يتسبب هذا في حدوث تغييرات في تعريف  $p_{max}$ ، المعادلة (١٤-١٠٤)، ويجب أيضا أن يغير من قدر المساهمة الناشئة من معامل فراغ الطور. أخيرا نلاحظ أننا لانستطيع الإسهاب في مناقشة تبعات تأثيرات عدم حفظ الندية المذكورة عند نهاية البند ١٣-٣، وذلك نظرا لإهمال المغزلية في حساباتنا.

#### ١٤-٥ ملخص

باستخدام معادلة شرودنجر للحركة استطعنا استنتاج القاعدة الذهبية-التعبير التقريبي للمعدل الاحتمالي لانتقال نظام من حالة غير مضطربة لأخرى.

استخدمت هذه القاعدة أولا لحساب مساحات مقطع الاستطارة تحت تأثير طاقة وضع معينة؛ وعلى وجه الخصوص في حساب مساحة مقطع

استطارة رذرفورد. طبقت أيضا هذه القاعدة فى المعالجة شبه كلاسيكية لحساب مساحات المقطع للانتقالات الإشعاعية بالذرات- وضع أن مساحات المقطع تتناسب مع ثابت التركيب الدقيق  $(e_M^2/\hbar c)$  مضروبا فى المساحة الفعالة من الذرة.

أخيرا تم استخدام القاعدة الذهبية لبناء المعنى الفيزيائى لتحلل-بيتا من نيوترون حر. الأكثر أهمية أننا أسسنا مقدار ضعف التفاعل النووى الضعيف،  $(f^2/\hbar c)$ ، ووضحنا أيضا أن معدلات التحلل يمكن أن تتأثر بشدة بكمية فراغ الطور المتاح للنظام المتحلل فى حالته النهائية.

#### مسائل ١٤

١-١٤ باعتبار الجزء الزاوى فى التكامل الوارد بالمعادلة (١٤-١٥) وضح أنه فى تقريب ثنائى القطب يكون احتمال الانتقال (للانبعاث أو الامتصاص فى ذرة الهيدروجين) متلاشى ما لم يكن

$$l-l'=\pm 1 ; m=m' ; m-m'=\pm 1$$

٢-١٤ يمكن وصف التفاعل بين نيوترون حر ونواة ثقيلة بدلالة طاقة وضع البئر المربع

$$V(r)=-V , \quad r \leq a$$

$$V(r)=0 , \quad r > a$$

وضح أنه عند الطاقات العالية تتناسب مساحة المقطع التفاضلى مع  $(j_1(Ka)/Ka)^2$ ، حيث  $K$  هى كمية الحركة الخطية المنتقلة، ودالة بسل

الكروية<sup>(1)</sup> هي

$$j_1(Ka) = [\sin(Ka) - Ka \cos(Ka)] / (Ka)^2.$$

وَضَحَ أيضا أن لمساحة المقطع التفاضلى قمة أمامية شديدة بقيمة عظمى

عند  $Ka \approx 6$

١٤-٣ طبقا للجدول ١١-٢ يتحلل الهيبرون- $\Lambda$ <sup>(2)</sup> إلى بروتون وميزون-

$\pi$  (بيون)<sup>(3)</sup>. باتباع نفس التقريب المستخدم فى حالة تحلل-بيتا (أى اهمال

ارتداد الجسيمات الثقيلة) وضح أن الطاقة المتاحة للبيون تساوى تقريبا

$$\cdot (5/4)m_\pi c^2, \text{ وأن كمية حركته تساوى حوالى } (3/4)m_\pi c^2.$$

بسبب الأبعاد ينبغى لتفاعل التحلل أن يأخذ الصورة

$$V^2 \approx f_A^4 \left( \frac{\hbar}{m_p c} \right)$$

استخدم القاعدة الذهبية لبيان أنه فى هذا التقريب يكون معدل التحلل الكلى

(مقلوب متوسط العمر) مساويا

$$w = \frac{15}{16\pi} \left( \frac{f_A^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{m_p c^2}{\hbar} \right) \left( \frac{m_\pi}{m_p} \right)^2$$

بالمقارنة مع المعادلة (١٤-١٠٨) لاحظ أن التغير فى معامل الطور

النهائى يعطى الفرق الشديد بين متوسط عمر كل من الهيبرون -  $\Lambda$

والنيوترون، على فرض التساوى التقريبى لشدة تفاعل التحلل الضعيف فى

كلا الحالين.

(1) spherical bessel function (2)  $\Lambda$ -hyperon (3) pion

## الباب الخامس عشر

### التمائل الوحدى والفيزياء النووية-الجزئية<sup>(1)</sup>

١-١٥ التفاعلات القوية والشحنة الكهربائية<sup>(2)</sup> والشحنة الباريونية<sup>(3)</sup>  
والشحنة الفوقية<sup>(4)</sup>

نحن الآن فى وضع يمكننا من الاستمرار فى دراسة خواص الجسيمات النووية الجزئية التى بدأناها فى البند ١١-٤. أوضحنا هناك فى تصادمات البروتون-نيوترون ظهور عدد كبير من الجسيمات النووية الجزئية. هذه الجسيمات هى الميزونات، النيوكلونات (النيوترون والبروتون) والهيبرونات، وقد دوناها فى الجدول ١١-١. تتولد هذه الجسيمات وتتفاعل مع بعضها البعض من خلال التفاعلات النووية القوية، وقد أطلق عليها اسم الجسيمات المتفاعلة بقوة أو الهادرونات<sup>(5)</sup>. معظم هذه الجسيمات غير مستقرة وتتحلل أو تضمحل من خلال التفاعلات النووية الضعيفة.

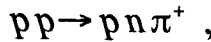
أوردنا سابقا تصادمات البروتون-بروتون. فى المعجلات الحديثة للبروتونات يمكن لحزمة مكونة من  $10^{12}$  بروتون أن تعجل كل ثانيتين لتصبح طاقتها مساوية  $30000 \text{ MeV} (= 30 \text{ GeV})$ . لتلك الطاقات وبهذه الكثافة يتم إنتاج الجسيمات الثانوية  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$  والبروتونات الضديدية  $\bar{p}$  بوفرة كافية لفصلها بطرق كهرومغناطيسية إلى حزم ثم توجيهها إلى غرف الفقاعة الهيدروجينية<sup>(6)</sup>.

(1) unitary symmetry and sub-nuclear physics (2) electric charge (3) baryon charge (4) hypercharge (5) hadrons (6) hydrogen bubble chambers

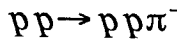


تُحدث الجسيمات المشحونة المُنتجة في التصادمات مع بروتونات ذرة الهيدروجين أثارا من الممكن تصويرها فوتوغرافيا. توضع غرف الفقاعة في مجالات مغناطيسية قوية مما يتسبب في انحناء هذه الآثار ممكنا التجريبيين من تحليل التصادمات بدلالة الطاقة وكمية حركة وكتل الجسيمات. بهذه الطريقة تم دراسة الكثير جدا من التصادمات النووية الجزئية في الظروف العملية. نشأ عن هذه الدراسة ظهور العديد من الانتظامات<sup>(1)</sup> في صورة قوانين حفظ متعددة.

أول هذه الانتظامات كان واضحا تماما. في الواقع نهتم هنا بالتفاعلات النووية فقط، ولذلك كتقريب جيد نستطيع إهمال القوى الكهربائية والمغناطيسية. إلا أن الجسيمات في حالاتها الابتدائية والنهائية يكون لكل منها شحنة كهربية مساوية لعدد صحيح (عادة هذا العدد يساوى  $1 \pm$  أو صفر إذا قيست الشحنة بوحدة شحنة الإلكترون). في أي تفاعل أو عملية تحلل نووي تتساوى محصلتى الشحنة قبل وبعد العملية. لذلك ففي تفاعلات البروتون-بروتون، مثلا، التي ينتج فيها البيونات ، نحصل على



ولا يتسنى لنا الحصول على



بإدخال مؤثر الشحنة  $\hat{Q}$  الذى يمثل عملية ملاحظة محصلة شحنة النظام (فهو مؤثر محفوظ) فإننا باستخدام المعادلة (١٣-٤٧) نجد

$$[\hat{H}_s, \hat{Q}] = 0 \quad (1-15)$$

حيث  $\hat{H}_s$  هو الهاميلتونى الذى يصف التفاعلات النووية القوية للهادرونات.

(1) regularities

يعبر عن قانون حفظ الشحنة الكهربائية بالعلاقة

$$\Delta Q = 0 \quad (2-10)$$

قانون الحفظ الذي سيأتى بعد قليل يشبه إلى حد ما هذا القانون. فهو يبين حقيقة أن البروتون من الجسيمات المستقرة ولا يتحلل إلى أى تجمع من الجسيمات المتاحة الأخف منه (انظر الجدول 11-1). أبسط طريقة لتأكيد تلك الصفات هي بأن ننسب إلى البروتون وإلى كل الجسيمات (الجسيمات التى مغزليتها مساوية لأنصاف القيم الصحيحة) الأثقل منه نوعا آخرًا مختلفًا من الشحنة، نطلق عليه اسم الشحنة الباريونية  $\hat{B}$  التى هى الأخرى تأخذ مقادير صحيحة فقط. لذلك ففى الجدول 11-1 نجد أن الباريونات  $\Sigma$ ،  $\Lambda$ ،  $n$ ،  $p$  يصاحبها القيمة  $\langle B \rangle = 1$ ، والميزونات  $K$ ،  $\eta$ ،  $\pi$  يصاحبها القيمة  $\langle B \rangle = 0$ .

للجسيمات الضديدية نجد أن الشحنة الباريونية مشابهة للشحنة الكهربائية فهى تتساوى فى المقدار وتختلف فى الإشارة مع الشحنة الباريونية للجسيمات المناظرة. نفترض أيضا أن محصلة الشحنة الباريونية محفوظة فى أى تفاعل نووى، أى أن

$$\Delta B = 0 \quad (3-10)$$

لذلك يجب أن نحصل على

$$p p \rightarrow p \Sigma^+ K^0 \quad (4-10)$$

$$\rightarrow p p \eta \quad (5-10)$$

$$\pi^- p \rightarrow p \Lambda \bar{\Lambda} \pi^- \quad (6-10)$$

ولا يتسنى لنا الحصول على

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ K^+ \bar{K}^0$$

يجب أن يتحقق القارىء بنفسه من أن هذا القانون يمنع أى سلسلة من التفاعلات التى تمكن البروتونات من التحلل إلى جسيمات أخف منه. يطبق قانونا حفظ الشحنة الكهربائية والشحنة الباريونية على جميع أنواع التفاعلات (قوية - كهرومغناطيسية - ضعيفة).

ظهر أيضا فى نواتج التصادمات القوية للغاية انتظامات أخرى دقيقة لم نضعها فى الاعتبار فى القانونين السابقين. يتسنى لنا تصنيف هذه الانتظامات الجديدة بإدخال نوع آخر من الشحنة إلى كل هادرون ونطلق عليها اسم الشحنة الفوقية،  $\bar{Y}$ . قيم  $Y$  للهادرونات المختلفة معطاة بالجدول ١٥-١. مرة أخرى فإن الشحنة الفوقية لأى جسيم ضديد تساوى فى المقدار وتختلف فى الإشارة مع الجسيم المناظر. بالإضافة لذلك نفترض أن محصلة الشحنة الفوقية محفوظة فى أى تفاعل نووى (نووى إلى المدى الذى نستطيع عنده إهمال التفاعلات الكهرومغناطيسية والضعيفة)

أى أن

$$\Delta Y = 0 \quad (٧-١٥)$$

لذلك يجب أن نحصل على

$$p\pi^+ \rightarrow \Sigma^+ K^+ \pi^0, \quad (٨-١٥)$$

$$p\bar{p} \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}, \quad (٩-١٥)$$

$$p\pi^- \rightarrow \Xi^- K^+ K^0 \quad (١٠-١٥)$$

ولكن على سبيل المثال من غير المتاح الحصول على

$$K^- p \rightarrow \pi^- p$$

ولهذا ينسب إلى كل جسيم نووى جزئى، بالإضافة إلى كتلته ومغزليته، ثلاثة أنواع من الشحنة (الشحنة الكهربائية - الشحنة الباريونية - الشحنة

الفوقية). وقد وجد أن محصلة الشحنة الكلية لكل من هذه الشحنات محفوظة في أى تفاعل نووى.

جدول ١٥-١ الشحنات النووية-الجزئية. يعطى الجدول الشحنة الكهربائية Q والشحنة الباريونية B والشحنة الفوقية Y للجسيمات النووية-الجزئية المعروفة. مركبة المغزلية

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2}$$

	B	Q	Y	$I_3 = Q - Y/2$
$\Xi^-$	1	-1	-1	-1/2
$\Xi^0$	1	0	-1	+1/2
$\Sigma^+$	1	+1	0	+1
$\Sigma^0$	1	0	0	0
$\Sigma^-$	1	-1	0	-1
$\Lambda$	1	0	0	0
n	1	0	+1	-1/2
p	1	+1	+1	+1/2
$K^-$	0	-1	-1	-1/2
$K^0$	0	0	-1	+1/2
$\pi^+$	0	+1	0	+1
$\pi^0$	0	0	0	0
$\pi^-$	0	-1	0	-1
$\eta$	0	0	0	0
$K^0$	0	0	+1	-1/2
$K^+$	0	+1	+1	+1/2

يمكن ربط قوانين الحفظ هذه بعدم التغير بالنسبة للانتقالات الوحيدة

بالطريقة الآتية (انظر البند ١٣-٥):

تبدو دوال الحالة التى تصف الحالات الابتدائية والنهائية لعمليات التصادم المذكورة منذ قليل فى صورة أكثر صعوبة من نظيرها الوارد فى الأبواب

السابقة. فبالإضافة إلى إعطاء معلومات عن التشكيلات الفراغية والمغزلية للجسيمات فيجب أن تصف الدوال الجديدة هنا طبيعة الجسيمات؛ أى هل الجسيمات بروتونات  $|p\rangle$  أم نيوترونات  $|n\rangle$ ، ...، وهكذا. بالمثل يجب أن نعبر عن هاميلتوني التفاعل بدلالة المؤثرات التى تُقْنى وتُوَلَّد هذه الجسيمات، حيث أنه بمرور الزمن يمكن أن تتغير طبيعة الجسيمات بالحالة - يعد هذا تعميماً للمعادلتين (١٢-٧١)، (١٢-٧٢) التى تعطى طاقة المهترز التوافقى بدلالة مؤثرى الإفناء والتوليد لوحداث الطاقة. سنهتم هنا فقط بالمعاملات الأخيرة فى متجهات الحالة التى يجب أن تكون متجهات مناسبة للمؤثرات  $\hat{Q}, \hat{B}, \hat{Y}$ .

إذا كانت  $|i\rangle$  هى الحالة الابتدائية فى تصادم معين فإننا نجد

$$\hat{Q}|i\rangle = Q_i|i\rangle \quad (١١-١٥)$$

حيث  $Q_i$  هى محصلة الشحنة الكلية للحالة الابتدائية.

الانتقال الوحى المناظر هو

$$\hat{U}_0 = \exp[i\hat{Q}\varepsilon] \quad (١٢-١٥)$$

حيث  $\varepsilon$  بارامتر حقيقى.

إذا كان  $\hat{H}_s$  هو هاميلتوني التفاعل القوى فإننا نعبر عن حفظ الشحنة بعدم

تغير  $H_s$  بالنسبة إلى الانتقال (١٢-١٥) (انظر المعادلة (١٣-٦٨)):

$$\begin{aligned} \langle f|H_s|i\rangle &= \langle f|U_0^+ H_s U_0|i\rangle \\ &= \langle f|H_s|i\rangle \exp[i(Q_i - Q_f)\varepsilon] \end{aligned} \quad (١٣-١٥)$$

وهذا يؤدى إلى

$$\langle f|H_s|i\rangle = 0 \quad (١٤-١٥)$$

مالم يكن

$$Q_f = Q_i \quad (15-15)$$

هذا يعنى أن الهاميلتونى يزواج الحالة النهائية (f) مع الحالة الابتدائية (i) عندما يكون لهما نفس الشحنة الكلية فقط

لاحظ أنه إذا احتوت الحالة على العديد من الجسيمات المشحونة فإن عمل مؤثر الشحنة يكمن بالضبط فى استخلاص محصلة شحنة الحالة:

$$\hat{U}_Q |pn\pi^+\rangle = \exp[i\hat{Q}\varepsilon] |pn\pi^+\rangle = \exp[i(Q_p + Q_\pi)\varepsilon] |pn\pi^+\rangle \quad (16-15)$$

حيث

$$Q_p = Q_\pi = +1$$

هى شحنتى البروتون والميزون  $\pi^+$ .

وهى عبارة عن انتقالات وحيدة بيارامتر واحد وتكوّن ما هو معروف بالمجموعة  $U(1)$ .

من الممكن إدخال انتقالات وحيدة مشابهة،  $\hat{U}_V, \hat{U}_B$ ، مصاحبة لحفظ الشحنة الباريونية والفوقية، على الترتيب. عند هذه المرحلة بالذات ندرك أن خواص عدم التغير السالفة للهاميلتونى ليست فى غاية الأهمية ولكنها تمهد لنا الطريق إلى تعميمات أخرى مثمرة للغاية

### ١٥-٢ المغزلية النظائرية والمجموعة $SU(2)$ <sup>(1)</sup>

تتمتع الهادرونات بصفة ملفتة للنظر لم يرد ذكرها فى النظرية التى عرضناها حتى الآن. هذه الصفة هى الطريقة التى يظهر بها الهادرونات

(1) isotopic spin and  $SU(2)$

فى صورة تعددات<sup>(1)</sup> لشحنات مختلفة بكتل متساوية تقريبا (انظر الجدول ١١-١). لذلك نلاحظ وجود اثنين من النيوكلونات وثلاثة من النوع  $\Sigma$  واثنين من النوع  $\Xi$ . يبدو من المعقول افتراض أن فروق الكتل فى تعدد معين هى من نواتج تأثيرات كهرومغناطيسية، وأنه فى حدود التفاعلات القوية تماما تكون كل أعضاء التعدد لها بالضبط نفس الكتلة. بالإضافة لذلك نفترض أن (بالمعنى الذى سنحدده لاحقا) التفاعلات القوية عديمة التغير عندما تتبادل الجسيمات لموضعها داخل تعدد كتلى<sup>(2)</sup>.

للتخصيص نفترض أن البروتون والنيوترون هما حالتى النيوكلون الممكنتان، وأنهما مشابھتين لحالتى المغزلية الممكنتان للبروتون. نعرّف الدوار المغزلى النيوكلوني<sup>(3)</sup>  $N_a$  الثنائى المركبة ( $a=1,2$ ) بالمعادلة

$$N_a = \binom{P}{n} \quad (15-17)$$

مثل هذه المعاملات تظهر فى متجهات الحالة لتحديد طبيعة الجسيمات. نفترض عدم تغير التفاعل القوى من تأثير الانتقالات الوحيدة (التي على النظم  $(2 \times 2)$ ) لهذه الدورات المغزلية. يكتب مثل هذا الانتقال فى صورته الأكثر عمومية كالتالى:

$$N_a \rightarrow \sum \hat{U}_a^b N_b$$

حيث

$$\hat{U}_a^b = \exp \left[ \frac{i}{2} \left( \varepsilon^{(1)} \hat{t}_1 + \varepsilon^{(2)} \hat{t}_2 + \varepsilon^{(3)} \hat{t}_3 \right) \right]_a^b, \quad (15-18)$$

$\varepsilon^{(i)}$  بارامترات حقيقية. ( $i=1,2,3$ )

(1) multiplets (2) mass multiplets (3) nucleon spinor

المصفوفات الهرميتية الثلاثة تماثل عدديا مصفوفات المغزلية لباولي،  
المعادلة (٣٢-٨)،

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (١٩-١٥)$$

(تم هنا استبعاد الانتقالات التي على الصورة

$$\hat{U} = \exp[i \varepsilon \hat{I}], \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (٢٠-١٥)$$

التي تعد انتقالات طورية متزامنة<sup>(١)</sup> (آنية) لكل من n, p، وقد عرضنا ذلك من قبل عند الحديث عن حفظ الشحنة الباريونية.

وحيث أننا نتعامل مع انتقالات وحيدة على النظم (2x2) فإننا نصب اهتمامنا على انتقالات المجموعة SU(2). بسبب التشابه مع المغزلية فإن هذه الانتقالات يطلق عليها اسم الانتقالات المغزلية النظائرية<sup>(٢)</sup>.

من بين الثلاث مصفوفات  $\hat{\tau}$ ، نجد ان المصفوفة

$$\frac{1}{2} \hat{\tau}_3 \equiv \hat{I}_3 \quad (٢١-١٥)$$

قطرية.

بمقارنة المعادلة (١٥-١٨) مع المعادلة (١٣-٥٧) في حالة الانتقالات التي فيها  $\varepsilon$ <sup>(٣)</sup> فقط لا تساوى الصفر فإننا ندرك أن  $\hat{I}_3$  تلعب نفس دور  $\hat{F}$  وأنها

كمية محفوظة من الممكن ملاحظتها مثل  $\hat{B}, \hat{Q}, \hat{Y}$ .

بالتعويض المباشر عن المصفوفات ومتجهات الحالة نحصل على

$$\exp[i \varepsilon^{(3)} \hat{I}_3] |p\rangle = \exp\left[i \varepsilon^{(3)} \left(+\frac{1}{2}\right)\right] |p\rangle, \quad (٢٢-١٥)$$

(1) simultaneous phase transformation / (2) isotopic spin transformation



$$\exp[i\varepsilon^{(3)} \hat{I}_3] |n\rangle = \exp\left[i\varepsilon^{(3)} \left(-\frac{1}{2}\right)\right] |n\rangle \quad (23-15)$$

وذلك لكى تكون الشحنة  $I_3$  لكل من  $n, p$  مساوية  $+1/2$  ,  $-1/2$  ، على الترتيب.

يتسنى لنا الآن تأسيس تعددات أخرى للجسيمات التى تنتقل خاضعة للانتقالات المغزلية النظائرية.

الذى يرتبط مباشرة بالمغزل الدوار النيوكلوني هو المغزل الدوار النيوكلوني الضديد<sup>(1)</sup>

$$\bar{N}^a = (\bar{p}, \bar{n}) \quad (24-15)$$

الذى ينتقل طبقا للعلاقة

$$\bar{N}^a \rightarrow \sum_b \bar{N}^b \hat{U}_b^{+a} \quad (25-15)$$

حتى تصبح قيم  $I_3$  لكل من  $\bar{n}, \bar{p}$  مساوية  $-1/2$  ,  $+1/2$  ، على الترتيب.

يمكن الحصول على تعددات أخرى بتراكب النيوكلونات والنيوكلونات

الضديدية. لهذا فإننا نحصل على التراكب القياسى<sup>(2)</sup>

$$\eta = \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}} N_a \bar{N}^a = \frac{p\bar{p} + n\bar{n}}{\sqrt{2}} \quad (26-15)$$

الذى فيه

$$Q = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad Y = 0$$

من الممكن أيضا الحصول على

(1) anti-nucleon spinor (2) scalar combination

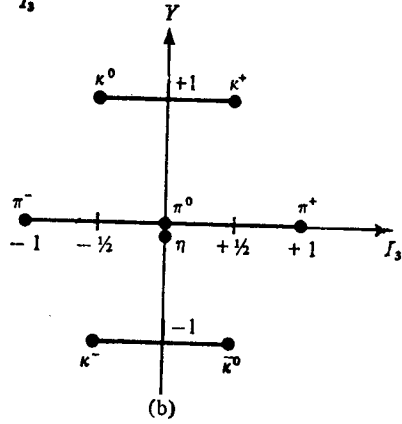
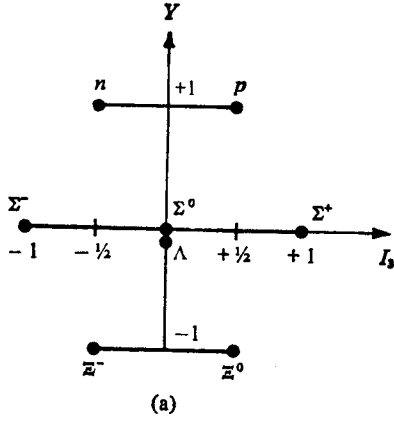
$$\begin{aligned}\pi_a^b &\equiv \left[ N_a \bar{N}^b - \frac{1}{2} \delta_a^b \left( \sum_c N_c \bar{N}^c \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{2} & p\bar{n} \\ n\bar{p} & -\frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{2} \end{pmatrix} \quad (27-10) \\ &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

نعين قيم كل من  $(I_3, Y, B, Q)$  للترابكات المختلفة من النيوكلونات والنيوكلونات الضديدية بجمع القيم المناسبة للجسيمات المشاركة. يمكن لنا حينئذ تمييز التراكبات الثلاثة المختلفة التي تظهر في الحالات المختلفة الثلاثة للميزون  $\pi$  ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) بواسطة قيم  $I_3$  التي تساوى على الترتيب  $+1, -1, 0$ . وهذا هو جوهر التعبير الأخير بالمعادلة (27-10). يمكن التفكير في هذه التعدادات، بطريقة فيزيائية تامة، على أنها حالات مقيدة تم تكوينها من النيوكلونات والنيوكلونات الضديدية، وأنها تتفاعل مع بعضها من خلال قوى عديمة التغير بالنسبة للانتقالات المغزلية النظائرية.

أشكال التعدادات الثلاثة هذه - وهي التعدد القياسى<sup>(1)</sup> (المسمى بالأحادى<sup>(2)</sup>) والتعدد المغزلى الدوار (المسمى بالثنائى<sup>(2)</sup>) والتعدد الاتجاهى (المسمى بالثلاثى<sup>(3)</sup>) - كافية لبيان الجسيمات النووية الجزئية الواردة بالجدول 11-1. وضعت هذه التعدادات بيانيا مع قيم  $Y$  لها فى شكل 10-1

1

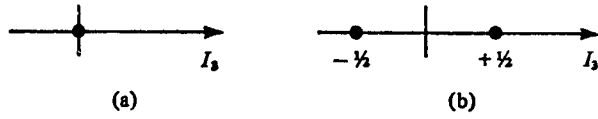
(1) scalar (2) singlet (3) doublet (3) triplet



شكل ١٥-١ شكل يوضح التعددات-الجزئية لجسيمات المجموعة  $SU(2)$  (المتصلة بالخطوط الداكنة) مع قيم  $I_3, Y$  لها. كل جسيمات شكل (أ) لها  $B=0$  ومغزلية مساوية  $1/2\hbar$ ، بينما في شكل (ب)  $B=0$  والمغزلية تساوي صفر . كل تعدد من هذه التعددات الجزئية يشتمل على تعدد ثمانى من المجموعة  $SU(3)$ . وجد سنة ١٩٦١ تعدد مشابه، للجسيمات التي لها  $B=0$  ومغزلية مساوية  $\hbar$ . تم هذا بإجراء الاستبدال  $\pi \leftarrow \rho (765 \text{ MeV}/c^2)$ ؛  $\eta \leftarrow \phi (1020 \text{ MeV}/c^2)$ ؛  $K \leftarrow K^* (890 \text{ MeV}/c^2)$ .

بعرض تلك الجسيمات بهذه الطريقة يتبين لنا أنها تكون نماذج منتظمة، وهذا ماسنقوم بدراسته في البند القادم.

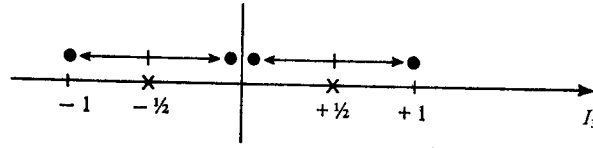
قبل البدء في دراسة هذه الظاهرة نعتبر تركيباً هندسياً تبادلياً<sup>(1)</sup> لتعددات  $SU(2)$  (النظائرية). نعين التعدد بيانياً بواسطة قيم  $I_3$  لمركباته. من أبسط التعددات هو القياسى الأحادى المركبة،  $I_3=0$ ، شكل ١٥-٢. التعدد الذى يلي هذا مباشرة هو المغزل الدوار،  $I_3=\pm 1/2$ ، شكل ١٥-٢.



شكل ١٥-٢ التمثيل البياني لتعددات  $SU(2)$  لكل من (أ) القياسى الأحادى (ب) المغزل الدوار الثنائى الأساسى.

نظراً لأن  $I_3$  تتمتع بخاصية الجمع<sup>(2)</sup> فعند تراكب اثنين من المغزليات الدوارة يمكن إما إضافة أو طرح  $1/2$  من أحد هذه المغزليات الدوارة ثم جمعها جبرياً على كل مركبات المغزل الدوار الآخر للحصول على قيمة  $I_3$  للتراكب المعنى. قمنا بعمل ذلك فى شكل ١٥-٣ الذى فيه أدخل التمثيل البياني للمغزل الدوار الأساسى على نقطتى شكل ١٥-٢. بإزالة أحد النقطتين الناشئتين عند نقطة الأصل، وذلك لأنها تعيد إنتاج شكل ١٥-٢ (قياسى المعادلة (١٥-٢٦))، يتبقى لنا الثلاثى المؤسس جبرياً فى المعادلة (١٥-٢٧)،  $(I_3=\pm 1, 0)$ .

(1) alternative geometrical construction (2) additive



شكل ١٥-٣ التركيب الهندسى للتعددات التى نحصل عليها من تراكب اثنين من ثنائيات المجموعة  $SU(2)$ . أدخل الرسم المبين لأحد ثنائيات شكل ١٥-٢ على كل عضو من أعضاء الثنائى الآخر (المشار إليه بالعلامة  $\times$ ) وذلك للحصول على أحادى ( $I_3=0$ ) وثلثى ( $I_3=0, \pm 1$ ).

إذا تم بنفس الطريقة تراكب ثنائى آخر مع الثلثى فمن السهل بيان أن هذا يعيد إنتاج الثنائى الأسمى بالإضافة إلى تعدد جديد مكون من أربع حالات  $I_3$  لها تساوى  $\pm 1/2, \pm 3/2$ . نستطيع الإسهاب أكثر فى تتبع هذا السلوك، وقد تم بالفعل تعميم ذلك فى البند التالى لتكوين تعددات مناظرة لخواص عدم تغير أكثر تعقيداً.

### ١٥-٣ طريقة الثماني والمجموعة $SU(3)$ <sup>(1)</sup>

عند رسم تعددات المجموعة  $SU(2)$  التى لها نفس المغزلية والشحنة الباريونية، كما فى شكل ١٥-١، نجد أنها تنشئ نماذج سداسية منتظمة مكونة من ثمانية جسيمات. مانريده الآن هو إيجاد تفسير لذلك.

من أول الأشياء التى نلاحظها بالجدول ١٥-١ مايلى:

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2} \quad (١٥-٢٨)$$

(1) the eight-fold way and  $SU(3)$

أشرنا من قبل فى البند ١٥-٢ إلى عدم التغير بالنسبة لانتقالات المجموعة  $SU(2)$ ، وذلك لتقديم الأساس للتعددات النووية الجزئية. أدى هذا إلى قانون حفظ الشحنة  $I_3$ . إذا كانت الشحنة  $Y$  محفوظة أيضا فإن المعادلة (١٥-٢٨) تعنى أن  $Q$  تكون محفوظة هي الأخرى. فى محيط التفاعلات القوية تبدو الشحنة الكهربائية كمية ثانوية.

لتفسير النماذج المنتظمة بشكل ١٥-١ كان من الطبيعى تطوير هذه الأفكار ومحاولة إشراك  $\hat{Y}$  أيضا فى التركيب العديم التغير. لعمل ذلك يتحتم علينا افتراض أن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير (تقريبيا على الأقل) فى محيط مجموعة كبيرة من الانتقالات التى تعطى مصفوفة هرميتية قطرية ثنائية<sup>(١)</sup>. (ملاحظات مصفوفة) والتى يمكن تمييزها بالكمية  $\hat{Y}$ .

من أبسط الوسائل التى أثبتت فاعليتها هو التفكير فى الجسيمات النووية الجزئية على أنها تتركب من ثلاثى من كواركات أساسية<sup>(٢)</sup>

$$q_a = \begin{pmatrix} p' \\ n' \\ \lambda' \end{pmatrix}, \quad (a = 1, 2, 3) \quad (٢٩-١٥)$$

وأن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير تقريبا عند إجراء الانتقالات الوحيدة التى على النظم  $(3 \times 3)$  لهذا الثلاثى الكواركى، أى انتقالات المجموعة  $SU(3)$ ،

$$q_a \rightarrow \hat{U}_a^b q_b \quad (٣٠-١٥)$$

(عدم التغير تقريبا فقط حيث أنه يؤدي إلى تعددات بكتل أكبر، ويجمع

(1) a second diagonal Hermitian matrix (2) a triplet of basic quarks

سويا جسيمات كتلها الفيزيائية الملاحظة منفصلة تماما.)  
يكتب الانتقال العام على النحو

$$\hat{U} = \exp \left[ i \sum_{j=1}^8 \varepsilon^{(j)} \hat{F}_j \right] \quad (31-10)$$

حيث  $\varepsilon^{(j)}$  بارامترات حقيقية اختيارية. المصفوفات الهرميتية معطاة بالجدول ٢-١٥.

اثنين من هذه المصفوفات قطرية وتُعطى الأعداد الكمية المحفوظة القابلة للجمع. يتضح لنا من الجدول ٢-١٥ أن  $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$  تؤثر فقط على أول مركبتين من مركبات  $q_a$ ، وتعيد إنتاج الانتقالات النظائرية لتعددات المجموعة،  $SU(2)$ . لذلك فإن المجموعة الجديدة من الانتقالات تتضمن ما ذكرناه سالفًا بالبند ٢-١٥، وعلى وجه الخصوص تؤسس خواص  $I_3$  للكواركات المدونة بالجدول ٣-١٥.

أما المصفوفة القطرية الأخرى فهي  $\hat{F}_8$ . هدفنا الآن هو ربط هذه المصفوفة بالكمية  $\hat{Y}$ . العلاقة التي نضعها بعد تركيبها بالنتائج هي

$$\hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \quad (33-10)$$

باعتبار التأثير على  $q_a$  بالانتقالات التي فيها  $\varepsilon^{(8)}$  فقط لاتساوى صفر يمكننا تعيين، كما في المعادلتين (٢٢-١٥)، (٢٣-١٥)، قيم  $Y$  لكل من  $p', n', \lambda'$  المعطاة بالجدول ٣-١٥. حينئذ من العلاقة (٢٨-١٥) نعين قيم  $Q$  المعطاة.

جدول ١٥-٢ مصفوفات تعددات  $SU(3)$ . المصفوفات المؤلفة لانتقالات المجموعة  $SU(3)$ . يوجد مصفوفتان قطريتان تعطى الأعداد الكمية المحفوظة القابلة للجمع،

$$\hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Y}, \hat{F}_3 = \hat{I}_3$$

وتتميز بالعلاقين

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

جدول ١٥-٣ خواص الكواركات

	$I_3$	$Y$	$Q$	$B$
$p'$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$n'$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\lambda'$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

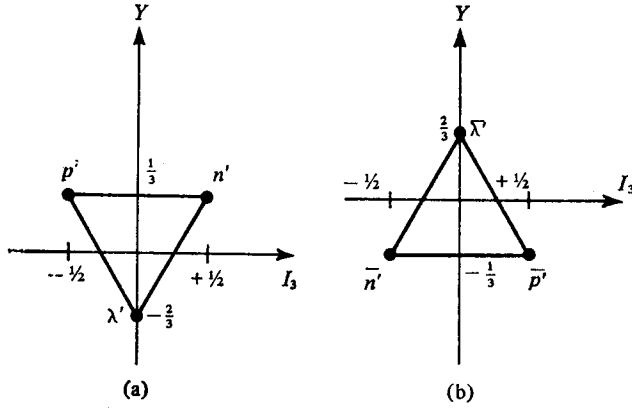
أخيرا يجب أن نعتبر  $B$  مساوية  $1/3$  نظرا لأننا نريد تكوين جسيمات بشحنة فوقية مساوية لعدد صحيح وشحنة باريونية مساوية للواحد الصحيح.



الكوارك المضديد<sup>(1)</sup>

$$\bar{q}^a = (\bar{p}', \bar{n}', \bar{\lambda}') \quad (34-15)$$

كل أعداد الكمية تتساوى في المقدار وتختلف في الإشارة مع  $q_a$ . هذان الثلاثيان الأساسيان (الكوارك والكوارك المضديد) ممثلان بيانياً بشكل ١٥-٤.

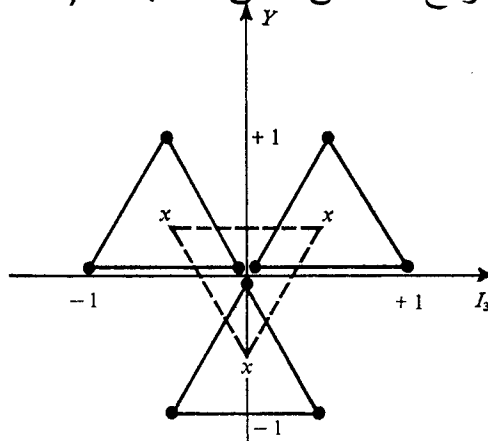


شكل ١٥-٤ التمثيل البياني لثلاثيات  $SU(3)$  الأساسية (أ) الكوارك ، 3. (ب) الكوارك المضديد ،  $\bar{3}$ . عند اختيار مقياس رسم مناسب لجعل  $F_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y, F_3 = I_3$  فإن هذه الكواركات تمثل بمثلثات متساوية الأضلاع.

نستطيع الآن تطبيق التعميم الواضح للوسيلة البيانية المعطاة بالبند السابق، وذلك لتكوين تعددات أخرى للجسيمات التي تنتقل فيما بينها خاضعة لانتقالات  $SU(3)$ . وحيث أن  $I_3, Y$  شحنات قابلة للجمع مثل الأعداد الكمية تماماً فإننا نكوّن الجسيمات الحاصلين عليها من تراكب  $q_a, \bar{q}^a$ ، مثلاً. يتسنى لنا ذلك بإدخال المثلث الممثل للكوارك المضديد  $\bar{q}^a$  (شكل ١٥-٤ب) على كل نقطة من نقاط الكوارك  $q_a$  (شكل ١٥-٤أ). هذه

(1) anti-quark

العملية موضحة بشكل ١٥-٥. من بين الثلاث نقاط التي تتواجد عند المركز يجب إزالة إحداها حيث أنها تمثل القياسى الأحادي<sup>(1)</sup>. أما النقاط المتبقية فهي تعيد النموذج السداسى ثمانى الجسيمات (شكل ١٥-١٥ اب).



شكل ١٥-٥ نموذج الأحادي والنموذج السداسى ثمانى التعدد الحاصلين عليهما بإدخال مثلثات  $\bar{3}$  على نقاط 3، مما يؤسس بيانيا معادلة التعدد  $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ . هذا يبين لنا الطريقة التي بها عدم تغير SU(3) يولد التعدد العلوى للميزونات الموضح بشكل ١٥-١٥ اب.

نظرا لأن الشحنة الباريونية B تساوى صفر ( $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ) فإن تفسير كل الأعداد الكمية للتعدد الميزونى<sup>(2)</sup> يتم بشكل مقنع. نستطيع كتابة التراكب المؤسس من الثلاثى 3 والثلاثى الضديد  $\bar{3}$  الذى يُولّد الأحادي 1 والثمانى 8 كما يلى:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (١٥-٣٥)$$

بإدخال المثلثات التى بشكل ١٥-٤أ على النقاط التى بنفس الشكل يمكن أن يتبين القارىء بنفسه وبسهولة أن حاصل ضرب اثنين من الثلاثيات الكواركية يولد كوارك ضديد  $\bar{3}$  بالإضافة إلى نموذج مثلثى آخر 6 مكون

(1) singlet scalar (2) meson multiplet

من ست نقاط.

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (36-10)$$

بعد ذلك يمكن إجراء تراكب لثلاثي كواركي آخر 3 بإدخال المثلاثات المناسبة على نقاط كل من 6,  $\bar{3}$ . هذا التراكب الأخير أُعطى من قبل فى المعادلة (33-10).

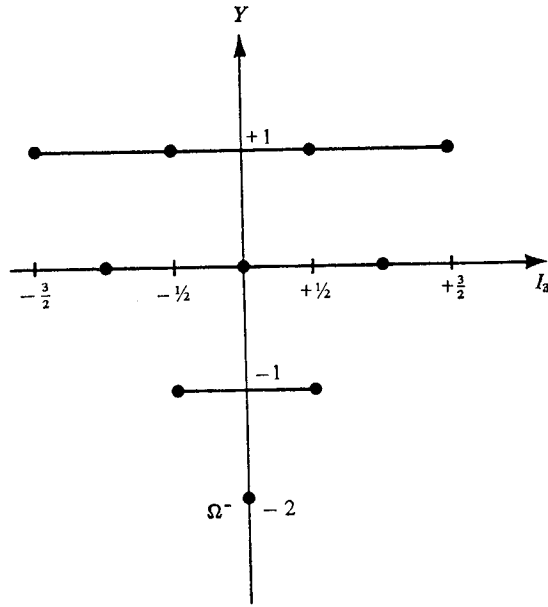
التراكب بين كل من 3, 6 يعطى الثماني 8 بالإضافة إلى نموذج عشاري مثلثي<sup>(1)</sup> جديد (انظر شكل 10-6). بتجميع تلك النتائج فيما بينها فإننا نحصل عند تراكب ثلاث من الكواركات على الآتى:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 2 \times 8 \oplus 10$$

حيث أنه من الجدول 3-10  $B=1$  ( $B=1/3 + 1/3 + 1/3$ ) لهذه الجسيمات فإن 8 لهذا التركيب يعطى النموذج ثماني الجسيمات الذى فيه  $B=1$  والمغزلية مساوية  $1/2\hbar$  الموضح بشكل 10-11. لهذا فإننا نشرك  $\hat{Y}, \hat{I}_3$  فى خاصية عدم تغير (تقريبية) عامة فى التفاعلات القوية ونحسب بنجاح اثنين من التعددات العليا<sup>(2)</sup>  $SU(3)$  لكل الهادرونات المتواجدة بالجدول 1-11.

أثناء سنة 1961 اكتشف ثمانى آخر من الجسيمات التى مغزليتها مساوية  $\hbar$  والتى لها  $B=0$ ، وقد وجد أنها تتناسق بإتقان فى نموذج شكل 10-5. وفى سنة 1962 اكتشف تسع جسيمات نووية جزئية أخرى وظهر أن مغزليتها تساوى  $3/2\hbar$  وأن قيمة  $B$  لها مساوية للواحد الصحيح. ملأت هذه الجسيمات الثلاثة صفوف العليا من شكل 10-6، وتنقسم إلى رباعى

(1) triangular decuplet pattern (2) super multiplet

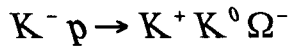


شكل ١٥-٦. العشارى، 10، الذى يتكون بترابك ثلاثة من الثلاثيات الكواركية الأساسية، 3. تم اكتشاف التسع جسيمات المناظرة للثلاث خطوط العليا بحلول عام 1962، ويصاحبها المقادير  $B=1$  ومغزلية  $3/2\hbar$ . الجسيم العاشر  $\Omega^-$ ، المناظر للنقطة أسفل العمود الرأسى، تم اكتشافه عام 1964.

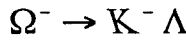
(1238 MeV/c<sup>2</sup>) وثلاثى (1385 MeV/c<sup>2</sup>) وثنائى (1535 MeV/c<sup>2</sup>) التى قيم Y لها تساوى على الترتيب +1, 0, -1. عدم التغير بالنسبة إلى انتقالات المجموعة SU(3) اقترح علينا حينئذ وجود الجسيم العاشر المفقود اللازم لتكوين العشارى. أشير إلى هذا الجسيم بالرمز  $\Omega^-$ . قيمة I<sub>3</sub> لهذا الجسيم تساوى صفر، أما قيمة Y فتساوى -2، وعليه فمن المعادلة (١٥-٢٨) نستنتج أن قيمة Q لا بد وأن تساوى -1. بمعلومية كتل الأعضاء

الأخرى للعشارى نستطيع تقدير كتلة هذا الجسيم العاشر بالمقدار 1685  
 . MeV/c<sup>2</sup>

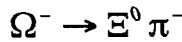
أوضحت قوانين حفظ كل من I<sub>3</sub>, Y, B أن أبسط الطرق لإنتاج هذا الجسيم  
 هو استخدام حزمة من K<sup>-</sup> فى غرفة الفقاعة الهيدروجينية لحدوث التفاعل



ولكن من الكتلة المقدره لهذا الجسيم اقترح أنه مستقر فى التفاعلات القوية،  
 إلا أنه يتحلل بتغير الشحنة الفوقية من خلال التفاعل الضعيف



أو التفاعل



وهذا ما وجد بالفعل، كما كان مقترحا سنة ١٩٦٤، فى مختبر بروكهافن  
 بالولايات المتحدة الأمريكية فى تجربة استخدم فيها أكبر معجل للبروتونات  
 فى ذلك الوقت. بذلك يكون قد تأسس عدم التغير التقريبى فى التفاعلات  
 القوية بالنسبة إلى انتقالات المجموعة SU(3).

عدم التغير هذا لايعين التفاعلات القوية بطريقة وحيدة ولكنه يقيد بشدة  
 إمكانيات التعيين. تبدو نماذج SU(3) للتعددات العليا (التي بداخلها تم تنسيق  
 الجسيمات النووية الجزئية) قريبة الشبه بالجدول الدورى للعناصر  
 الكيميائية. توضح لنا هذه النماذج أن عدد الهادرونات المختلفة ليس له  
 أهمية جوهرية. يجب التفكير فى هذه الجسيمات على أنها تركيبات معقدة  
 ويوجد عدد غير محدود منها، بالضبط كما يوجد عدد غير محدود من  
 مستويات الطاقة الذرية أو النووية. إذا أمكن النظر إلى هذه الجسيمات على  
 أنها عبارة عن أى شىء بسيط (أى مثل تفكيرنا فى مستويات الطاقة بذرة

الهيدروجين على أن جميعها عبارة عن حالات مقيدة لبروتون وإلكترون) فسوف يتضح لنا أنها مؤسسة من الكواركات. تعد هذه الفكرة ثورة كبيرة فى علم الفيزياء لأنها تتضمن وجود جسيمات شحنتها الكهربائية مساوية لكسر عشرى (مقاسة بوحدة شحنة الإلكترون)، حيث نعتبر دائما فى الفيزياء أن شحنة الإلكترون غير قابلة للانقسام. ينظر إلى وجود ثلاثة من الكواركات الأساسية كتركيب جزئى لكل الهادرونات على أنه من الوسائل المتاحة التى تستحوذ على اهتمامنا والتى يجب اختبارها فى السنوات المقبلة. إلا أنه يجب تذكر أن المخطط الوحى<sup>(1)</sup> لا يستلزم وجود الكواركات بالفعل. فمن الممكن لكل الهادرونات أن تفسر بعضها البعض بواسطة قوى عديمة التغير تقريبا بالنسبة لانتقالات المجموعة  $SU(3)$ ، وأن الكواركات ماهى إلا وسيلة رياضية لإجراء الحسابات. ومع ذلك فأيا كان الكواركات موجودة أم لا فإنها تعد أحد الأسئلة الصريحة الحيوية التى تواجه الفيزيائيين.

#### ١٥-٤ ملخص

اعتبرنا هنا التفاعلات القوية الحادثة بين الهادرونات. ظهر أنه يمكن تنظيم هذه التفاعلات بإشراك ثلاثة أنواع من الشحنت إلى كل جسيم نووى جزئى، وهى الشحنة الكهربائية  $Q$  والشحنة الباريونية  $B$  والشحنة الفوقية  $Y$ . كل شحنة من هذه الشحنت تكون محفوظة فى أى تفاعل نووى ويمكن ربطها بعدم التغير بالنسبة إلى عائلة بارامتر واحد من الانتقالات الوحيدة للمجموعة  $SU(1)$ .

(1) unitary scheme

يمكن تفسير ظهور الهادرونات فى التعددات الكتلية بافتراض أن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير بالنسبة إلى مجموعة الانتقالات الوحيدة التى على النظم  $(2 \times 2)$ ،  $SU(2)$ . ينشأ عن ذلك شحنة عامة جديدة،  $I_3$ ، محفوظة هى الأخرى وتحل محل  $Q$  فى التفاعلات القوية.

يُظهر التمثيل البيانى للهادرونات الملاحظة (بدلالة  $Y, I_3$ ) انتظامات معينة تقترح علينا وجود خواص عدم تغير أكثر عمومية. فسرت هذه الخواص على ضوء عدم تغير تقريبي بالنسبة للانتقالات الوحيدة التى على النظم  $(3 \times 3)$ ،  $SU(3)$ . هذا يتضمن حفظ كل من  $Y, I_3$ ، وقد تأكد ذلك باكتشاف الجسيم المقترح  $\Omega^-$ .

هذه المفاهيم تقترح علينا أن جميع الهادرونات لا بد أن تكون عبارة عن حالات مقيدة لثلاثى من الجسيمات التى مغزليتها تساوى  $1/2\hbar$ ، وشحنتها تساوى كسر عشرى مقاسة بوحدة شحنة الإلكترون. أُطلق على هذه الثلاثيات اسم الكواركات.

**والحمد لله الذى تنم بفضله الصالحات**

## ملحق

### الثوابت والوحدات

أ- ١ وحدات الطاقة وكمية الحركة والكتلة

من الملائم في الفيزياء الذرية تعريف وحدة للطاقة وهي الإلكترون فولت (eV). الإلكترون فولت هي الطاقة التي يكتسبها إلكترون واحد نتيجة

وضعه تحت تأثير طاقة وضع مقدارها واحد فولت  $\left(1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ cgs}\right)$ .

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

وحدة الطاقة في الفيزياء النووية، التي لها أهميتها، هي المليون إلكترون فولت (MeV).

$$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ joule}$$

وحدات كمية الحركة الخطية المناظرة هي

$$1 \text{ eV}/c = 0.5 \times 10^{-22} \text{ cgs} = 0.5 \times 10^{-27} \text{ mks}$$

$$1 \text{ MeV}/c = 0.5 \times 10^{-16} \text{ cgs} = 0.5 \times 10^{-21} \text{ mks}$$

ووحدة الكتلة هي

$$1 \text{ MeV}/c^2 = 1.8 \times 10^{-30} \text{ kg} = 1.8 \times 10^{-27} \text{ g} \cong 2m_e$$

أ- ٢ الثوابت الفيزيائية

شحنة الإلكترون

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb} = 4.8 \times 10^{-10} \text{ cgs(esu)}$$

لتجنب إدخال الوحدات الكهربائية من الأنسب وضع التعريف

$$e_M^2 \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0) = 2.3 \times 10^{-28} \text{ kg m}^3 \text{ sec}^{-2}$$

كتلة الإلكترون

$$m_e = 0.91 \times 10^{-30} \text{ kg} = 0.91 \times 10^{-27} \text{ gm} = 0.51 \text{ MeV}/c^2$$



كتلة البروتون (النيوترون)

$$m_p(m_n) = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938(939) \text{ MeV}/c^2 \\ = 1836(1838) m_e$$

ثابت بلانك

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{sec} = 1.05 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} \\ [h=2\pi\hbar]$$

سرعة الضوء تساوى

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{ m/sec} = 2.99 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$$

أ- الثوابت الذرية

نصف قطر أدنى مدار لبوهر

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e_M^2} = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.53 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

ثابت التركيب الدقيق

$$\alpha = \frac{e_M^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

طاقة ربط الحالة الأرضية فى ذرة لهيدروجين

$$|E_1| = \frac{1}{2} \frac{m_e e_M^4}{\hbar^2} = \frac{1}{2} \frac{e_M^2}{a_0} = 13.6 \text{ eV}$$

العدد الموجى المناظر لهذه الطاقة هو الريدبرج

$$R_\infty = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar c} = 1.1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

والتردد المناظر هو

$$R_\infty c = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar} = 3.29 \times 10^{15} \text{ cycles/sec} \\ = 3.29 \times 10^9 \text{ Mc/sec}$$

أ-٤ الثوابت النووية

نصف القطر النووي  $\sim 10^{-14}$  m

نصف قطر النيوكليون (أنظر المعادلة (٩-٣٦))  $\sim 1.5 \times 10^{-15}$  m

نصف قطر كومتون للنيوكليون

$$\frac{\hbar}{m_p c} = 0.2 \times 10^{-15} \quad m = 0.2 \times 10^{-13} \quad \text{cm}$$

الزمن النيوكلوني

$$\frac{\hbar}{m_p c^2} = 7 \times 10^{-25} \quad \text{sec}$$

مساحة المقطع

$$\begin{aligned} 1 \text{ barn} &= 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ 1 \text{ mb} &= 10^{-31} \text{ m}^2 = 10^{-27} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

طاقة ربط الديوترون

$$\varepsilon = 2.1 \text{ MeV.}$$