المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات ٢-٢

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثانية

الفصل الدراسي الثاني

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٤ - ٢٠٢٢

توزع مجاناً ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٤٣هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٢-٢- مسارات. / وزارة التعليم.- الرياض ، ١٤٤٣هـ
١٧٢ ص ؛ ٢٧,٥ x ٢١سم
ردمك : ٤ - ٠٨٨ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١- الرياضيات - كتب دراسية
أ. العنوان
ديوي ٣٧٢,٧ ١٤٤٣/٨٠٧١

رقم الإيداع : ١٤٤٣/٨٠٧١
ردمك : ٤ - ٠٨٨ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفهرس

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

التهيئة للفصل الرابع 11
4-1 العمليات على الدوال 12
4-2 العلاقات والدوال العكسية 19
توسع 4-2 معمل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 24
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي 25
4-4 الجذر النوني 30
توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا 35
اختبار منتصف الفصل 36
4-5 العمليات على العبارات الجذرية 37
4-6 الأسس النسبية 43
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية 49
توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 55
دليل الدراسة والمراجعة 57
اختبار الفصل 62
الإعداد للاختبارات المعيارية 63
اختبار تراكمي 65

الفصل 5 العلاقات والدّوال النّسبية

التهيئة للفصل الخامس 69
5-1 ضرب العبارات النّسبية وقسمتها 70
5-2 جمع العبارات النّسبية وطرحها 79
5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا 85
اختبار منتصف الفصل 91
5-4 تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًّا 92
توسع 5-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًّا 98
5-5 دوال التغيُّر 99
5-6 حل المعادلات والمتباينات النّسبية 105
توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات النّسبية 111
دليل الدراسة والمراجعة 113
اختبار الفصل 117
الإعداد للاختبارات المعيارية 118
اختبار تراكمي 120

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفهرس

الفصل 6

المتتابعات والمتسلسلات

التهيئة للفصل السادس 123

6-1 المتتابعات بوصفها دوال 124

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية 130

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية 138

اختبار منتصف الفصل 144

6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية 145

توسع 6-4 معمل الحاسبة البيانية: نهاية المتتابعة 151

6-5 نظرية ذات الحدين 152

توسع 6-5 معمل الجبر: التوافيق ومثلث باسكال 156

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيِّ 157

دليل الدراسة والمراجعة 161

اختبار الفصل 165

الإعداد للاختبارات المعيارية 166

اختبار تراكمي 168

الصيغ والرموز 170

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ستركز في دراستك لهذا الكتاب على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **العلاقات والدوال العكسية والجذرية.**
- **العلاقات والدّوال النّسبية وخصائصها.**
- **المتتابعات والمتسلسلات والعمليات عليها.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد

  اقرأ فقرة **والآن** .

- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية، واقرأ تعريف كل منها.

- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.

- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .

- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك

  على حل هذه التمارين وما شابهها.

- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.

- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.

- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.

- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.

- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم

  الرياضية فتجتنبها.

- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته

  من أفكار في **المطويات** .

- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها.

- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 4

العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations

فيما سبق

درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

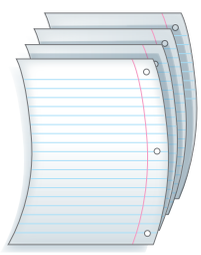
لماذا؟

إدارة الموارد المالية:
يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

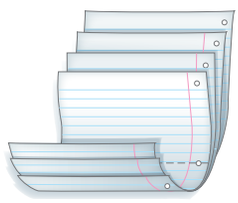
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.



2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحوافَ بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثنِ الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطي، ثم اقلب المطوية واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 2-4)

1) $\sqrt{28}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

3) طاقة حركية: يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$ ، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبرًا كتلة الكرة $50\,\text{kg}$.

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية: (يستعمل مع الدروس 4-4 إلى 4-6)

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) مبيعات: يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

a) أجرِ عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$ — اضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{900}}{20}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{30}{20}$ — أوجد قيمة $\sqrt{900}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$ — بسّط

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4+4x^3+x^2+9x-6) \div (x + 2)$ ، مستعملًا القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$ ، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

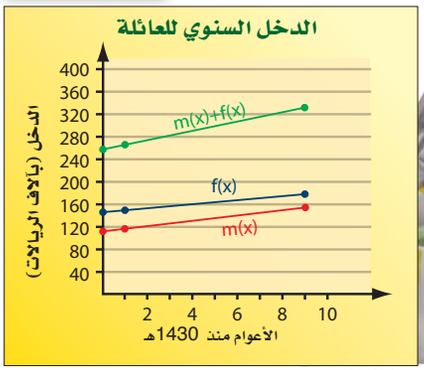
المفردات

تركيب دالتين
composition of functions

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 — جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ — جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 + 2x - 3$ — بسِّط

b) $(f-g)(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ — طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 - 2x - 5$ — بسِّط

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$

1A) $(f+g)(x)$

1B) $(f-g)(x)$

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

ضرب دالتين: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

عوّض: $= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$

خاصية التوزيع: $= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$

بسّط: $= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قسمة دالتين: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

عوّض: $= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تنبيه!

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$

2A $(f \cdot g)(x)$

2B $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

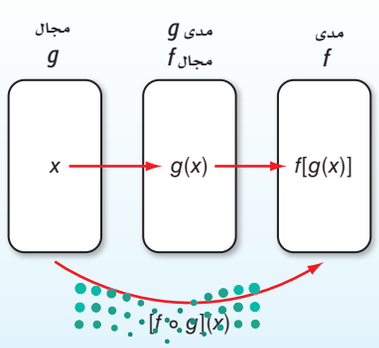
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج:



وزارة التعليم
Ministry of Education

1444 - 2022

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$f[g(10)] = f(14) = 9$ **$g(10) = 14$**
$f[g(9)] = f(0) = 13$ **$g(9) = 0$**
$f[g(8)] = f(15) = 11$ **$g(8) = 15$**
$f[g(5)] = f(1) = 8$ **$g(5) = 1$**

$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$g[f(14)] = g(9) = 0$ **$f(14) = 9$**
$g[f(15)] = g(11)$ **$f(15) = 11$**
$g[f(1)] = g(8) = 15$ **$f(1) = 8$**
$g[f(0)] = g(13)$ **$f(0) = 13$**

$g(11)$ غير معرّفة
$g(13)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(14)] = 0, g[f(1)] = 15$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	عوّض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	عوّض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بسّط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب
كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الربط مع الحياة

في أعقاب الأزمة المالية العالمية عام 2009م، هبطت مبيعات كبرى شركات صناعة السيارات الأمريكية بصورة كبيرة بلغت 53% في أكبر انخفاض لها منذ 42 عامًا، مما اضطر هذه الشركات إلى خفض حجم إنتاجها بمقدار 40%.

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال تركيب دالتين

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم: **المعطيات:**
- نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
- سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $(r \circ d)(x)$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $(d \circ r)(x)$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل: اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x = 0.88x$$

يخصم الوكيل1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](64500) = r[d(64500)]$$

$$= r[0.88\ (64500)]$$

$$= r(56760)$$

$$= 56760 - 1500 = 55260$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](64500) = d[r(64500)]$$

$$= d(64500 - 1500)$$

$$= d(63000)$$

$$= 0.88\ (63000)$$

$$= 55440$$

وبما أن $[r \circ d](64500) = 55260$, $[d \circ r](64500) = 55440$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق: تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيُّهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

1444 - 2022

تأكد

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$, $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$, $g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$, $g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

5) $f(x)=-3x$, $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$, $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4 **7) ادِّخار:** يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادِّخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسطًا آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادّخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=x^2-8x+4$

11) رياضة المشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟

b) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$, $g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$, $g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$, $g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$, $g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

16) $f(x)=2x^2-x+1$, $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$, $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$, $g(x)=8x^2+3x$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 4

19) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبِّر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالًا، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ ، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$؟ وضِّح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟

الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة HDTV هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12, g(x) = x - 3$. فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x, g(x) = -2x + 1, h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ **25)** $h[f(-5)]$ **26)** $h[f(9)]$

27) $f[g(3a)]$ **28)** $f[h(a + 4)]$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f + g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1434 هـ ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2, g(x) = -4x + 3, h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$

وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **مسألة مفتوحة:** أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

39) **اكتشف الخطأ:** تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$$

40) **تحدٍّ:** إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

a) $[g \circ g](x)$ **b)** $[f \circ f](x)$

41) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءًا منه.

b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءًا منه.

42) **اكتب:** وضِّح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة يمكنك حلّه باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

43) إذا كان $h(x) = 2(x + 5)^2, g(x) = x^2 + 9x + 21$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكلٍّ من الدوال الآتية: (مهارة سابقة)

45) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ **46)** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$

47) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in. ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كلٍّ بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

48) $5x - 7y = 12, x$ **49)** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ **50)** $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-2

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

لماذا؟

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\,r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\,d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
السعودية	0.267
أمريكا	3.75

إيجاد العلاقة العكسية: تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. والعلاقة العكسية هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

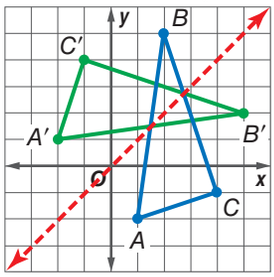
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 — إيجاد العلاقة العكسية

هندسة: يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-2, 1), (5, 2), (-1, 4)\}$. وبتمثيل هذه الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية بيانيًّا يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1) هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-3, -6), (-8, -6), (-8, -3)\}$، تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى دالة عكسية. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

وزارة التعليم
Ministry of Education

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$. أوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

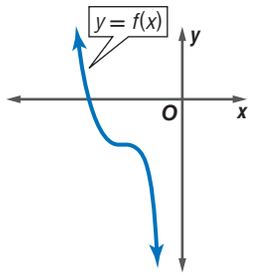
وبما أن كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

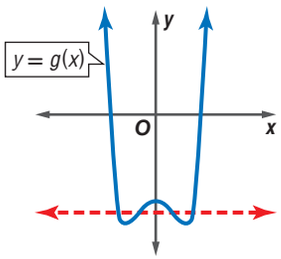
الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1: أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

الخطوة 2: بدِّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة $x = 2y - 5$

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$$x = 2y - 5$$

$$x + 5 = 2y \quad \text{أضف 5 للطرفين}$$

$$\frac{x+5}{2} = y \quad \text{اقسم الطرفين على 2}$$

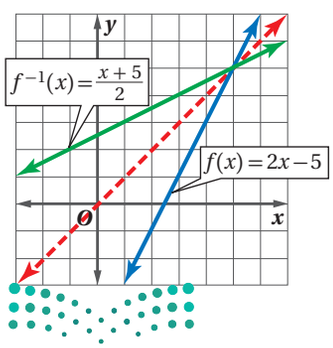
الخطوة 4: ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y، إذا كان المعكوس دالةً.

بما أن الدالة $f(x)$ خطية، وباستعمال اختبار الخط الأفقي، تجد أن معكوسها هو دالة أيضًا، لذا يمكنك استعمال الرمز $f^{-1}(x)$

$$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



إرشادات للدراسة

رمز الدالة العكسيّة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

(b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1: $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

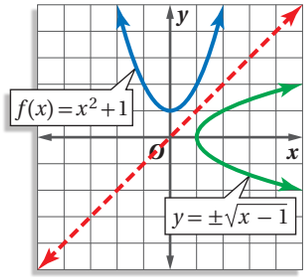
الخطوة 2: $x = y^2 + 1$

الخطوة 3: $x = y^2 + 1$

اطرح 1 من كلا الطرفين $x - 1 = y^2$

خُذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{x-1} = y$

الخطوة 4: $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًّا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

ارشادات للدراسة

الدوال

معكوس الدالة f في الفرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

(2B $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 — **التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى**

في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

(a $f(x) = 3x + 9, g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x), f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)] = g(3x + 9) = \frac{1}{3}(3x + 9) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

إذن تمثل كلٌّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

(b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f(2\sqrt{x}) = 4(2\sqrt{x})^2 = 4(4x) = 16x$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[g \circ f](x)$ و $[f \circ g](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك

(3A $f(x) = 3x - 3, g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

(3B $f(x) = 2x^3 - 1, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$ **10)** $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $l(x) = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x - 4}{3}$ **15)** $k(x) = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$

22) $f(x) = \frac{x + 10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$، وكان سعر اللتر كما هو موضح في الشكل المجاور.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد ما إذا كان معكوس كلِّ دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا أم لا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **29)** $h(x) = 2x^2$ **30)** $g(x) = 3x + 7$

31) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السيليزية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

32) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًا: مثِّل الدوال $y = x^n$ بيانيًا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) جدوليًا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول.

c) تحليليًا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.
"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا."

34) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.

35) تحدٍّ: أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

36) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

37) إذا كان $g(x) = -x + 1$ ، $f(x) = x^2 + 3$، فأيٌّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$
B $-x^2 - 2$ **D** $x^2 - 2x + 4$

38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **C** $g(x) = 2x + 5$
B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 1-4)

39) $g[f(3)]$ **40)** $f[h(-2)]$ **41)** $h[g(1)]$

42) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **44)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **45)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **46)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

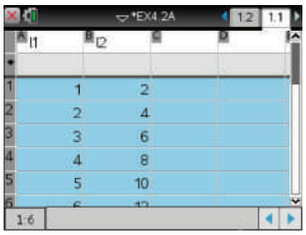
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

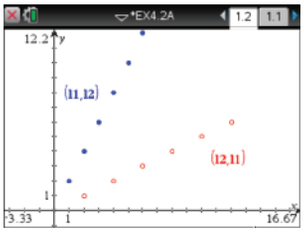
الهدف
أقارن دالةً بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

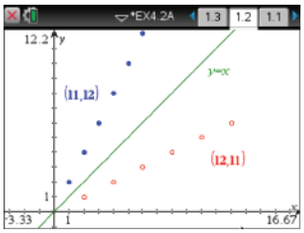
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال التمثيلات البيانية.

نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة: $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًّا.





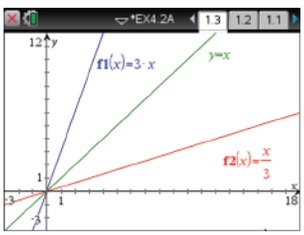


الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر (1 مستند جديد)، ومنها اختر (4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات) فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز $l1$ ثم اضغط (enter)، واكتب في أعلى العمود B الرمز $l2$ ثم اضغط (enter).
- أدخل قيم x في العمود $l1$ بالترتيب، وقيم y في العمود $l2$.
- اضغط مفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط (enter) فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها (3 :إدخال/تحرير الرسم البيا) ومنها اختر (5: التمثيل النقطي المبعثر)، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًّا أسفله إشارة لقيم x, y.
- اضغط مفتاح (var) واختر $l1$ الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y، ثم اضغط مفتاح (var) مرّةً ثانيةً واختر $l2$، ثم اضغط (enter).
- اضغط (tab)، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار $l2$ عند x، و$l1$ عند y ثم اضغط (enter).
- اضغط (menu) ثم اختر منها (3 :إدخال/تحرير الرسم البياني) ومنها اختر (2: معادلة) ومنها (1: مستقيم)، ثم أدخل الدالة $f1(x) = x$ ثم اضغط (enter).
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها (4: تكبير/تصغير النافذة) واختر منها (6: تكبير/تصغير الربع الأول).

نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًّا.



يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح من اليمين إلى اليسار:

(on) (1 مستند جديد) (2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية)

ثم كتابة الدالتين $f3(x) = \frac{x}{3}$, $f2(x) = 3x$, $f1(x) = x$ كما مرّ سابقًا، ارسم المعادلة $y = x$ بالضغط على (menu) ثم اختر (2: معادلة) ومنها اختر (1: مستقيم) ثم أدخل المعادلة $y = x$، فيظهر التمثيل المطلوب.

تمارين: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$
7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة والتمثيل البياني لمعكوسها ؟
8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)](x)$ لأيِّ دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-3

دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق

درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات

دالة الجذر التربيعي
square root function

الدالة الجذرية
radical function

متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

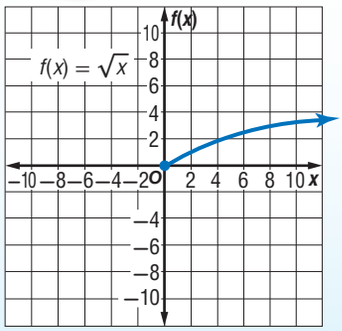
لماذا؟

يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام ، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي**

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطعان:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1 — **تعيين المجال والمدى**

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط القيم التي يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x+4 \geq 0$ — اكتب المتباينة

$x \geq -4$ — اطرح 4 من الطرفين

وبالتالي فالمجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

وبما أن $\sqrt{x+4} \geq 0$ دائمًا، وتزيد قيم الدالة بتزايد قيم x، فإن أقل قيمة للدالة تكون عندما $x+4=0$؛ أي عندما $x=-4$؛ لذا فإن $f(-4)$ تمثل الحد الأدنى للمدى.

$(f(-4)=\sqrt{-4+4}=0)$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$

1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$

1444 - 2022

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعي بيانيًّا، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

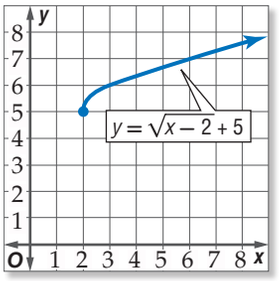
مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x ، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$ ، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4

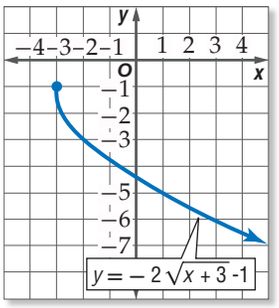


b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى لمجال الدالة هي -3. اعمل جدولًا من قيم x ، حيث $x \geq -3$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$ ، المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



تحقق من فهمك

2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B) $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$

إرشادات حل المسألة

عمل جدول

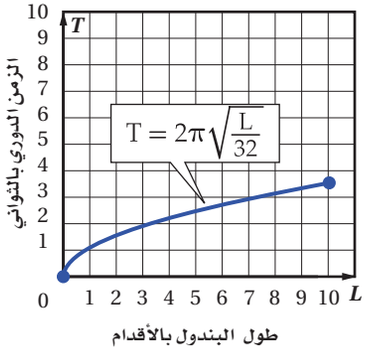
يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

فيزياء: بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكنك تحديد الزمن الدوري للبندول T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \leq L \leq 10$.

L	T
0	0
2	1.57
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51



b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تحقق من فهمك

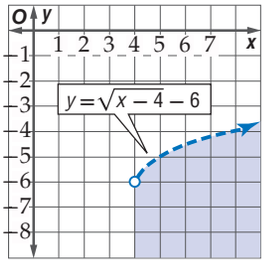
3) صوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $f = 200\sqrt{m_t}$، حيث f تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، m_t كتلة ثقل قوة الشّد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le m_t \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشّد 3 أرطال.

متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.



المجال هو $\{x \mid x \ge 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي «y أقل من»، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.

تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$:

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{3} - 6$

$-5 < -4.27$ ✓

تحقق من فهمك

4A) $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

4B) $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

تأكد

مثال 1 عيّن المجال والمدى لكلِّ دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$

2) $f(x) = \sqrt{x-5}$

3) $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

5) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$

7) $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال الدالة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

9) $f(x) \ge \sqrt{x} + 4$

10) $f(x) \le \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$

12) $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3

22) القفز بالمظلات: إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالدالة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

23) ألعاب: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة V في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالدالة: $V = \sqrt{v_0^2 + 64h}$، حيث v_0 السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10ft/s ؟

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

24) $y < \sqrt{x-5}$ **25)** $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$ **27)** $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$ **29)** $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$

30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال الدالة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft.

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًّا؟

c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

31) عيِّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى استخدام الهاتف الجوال أثناء القيادة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مسائل مهارات التفكير العليا

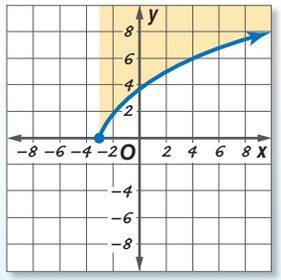
32) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

33) تبرير: ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟

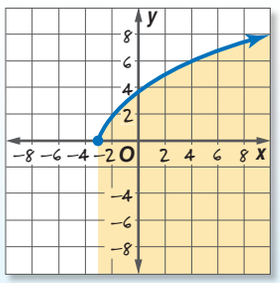
34) اكتب: وضِّح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟

35) اكتشف الخطأ: مثَّل كلٌّ من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيُّهما إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

36) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$:

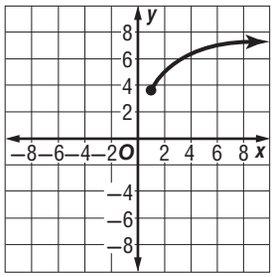
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

37) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. فأيٌّ ممَّا يأتي صحيح؟



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط **B** II, III فقط **C** I, II, III **D** III فقط

مراجعة تراكمية

في كلِّ زوج مما يأتي حدد هل كلّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 2-4)

38) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$

39) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$

40) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$

41) زمن: إذا كانت الدالة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والدالة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كان كلُّ عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

42) 6.34 **43)** 3.787887888... **44)** 5.333... **45)** 1.25

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4 الجذر النوني
nth Root

فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني
*n*th root

رمز الجذر
radical sign

الدليل
index

ما تحت الجذر
radicand

الجذر الرئيس
principal root

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعدُّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

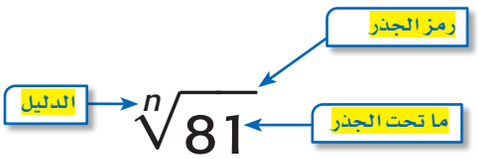
يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني:

مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a , b ، ولأيِّ عدد صحيح n ، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $81 = (-3)^4$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

الوثيق للعدد
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الجذر النوني الحقيقي

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًّا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	

مثال 1

إيجاد الجذور

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b) $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d) $\sqrt[7]{128}$

$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

الجذر السابع لـ 128 هو 2

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt[3]{8x^6}$

1B) $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2

التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة $x^2 - 3$ (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تحقق من فهمك

2A) $\sqrt{36y^6}$

2B) $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكَّر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

تشير الإحصاءات في الولايات المتحدة إلى وقوع أكثر من 500 ألف حادث اصطدام للدراجات الهوائية والسقوط من عليها وإصابة راكبيها سنويًا، منهم أكثر من 11 ألف طفل ومراهق، مما يرفع تكلفة العلاج إلى ما يجاوز 200 مليون دولار سنويًا. ويُنصح بارتداء الخوذة لأهميتها لحماية رؤوس راكبي الدراجات الهوائية عند تعرضهم لحوادث السقوط.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

حوادث الدراجات: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمرُّ خلاله كل شهر.

افهم: **المعطيات:** • $c = \sqrt[5]{b^2}$ توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث (c). بينها وبين السيارات

• عدد الدراجات الهوائية التي تمر خلال الطريق كلَّ شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط: عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل:

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$= \sqrt[5]{1000^2}$ — $b = 1000$

≈ 15.85 — باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بسّط

$1000 \approx b$ ✓ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 21$

$21^5 = b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بسّط

$2021 \approx b$ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

إذن عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجةً تقريبًا.

تحقق من فهمك

3A) قياس: يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال الدالة $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$.

3B) قياس: إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة.

تأكد

المثالان 2 , 1 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$

5) $\sqrt[3]{-125}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

7) قمر اصطناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالدالة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت :

$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2,\ M = 5.98 \times 10^{24}\,kg,\ t = 2.6 \times 10^6 s$

مثال 3 استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

8) $\sqrt{58}$ **9)** $-\sqrt{76}$ **10)** $\sqrt[5]{-43}$ **11)** $\sqrt[4]{71}$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

12) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

مثال 3

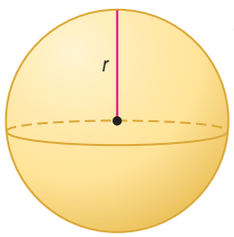
24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$ ، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة . أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$.

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** $\sqrt{0.43}$ **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كلٍّ من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3, 8000\,cm^3, 64000\,cm^3$.

b) ما مقدار التغيّر في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

34) فيزياء: طوَّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس ، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كان كوكب المريخ يستغرق 687 يومًا أرضيًّا ليدور حول الشمس، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟

الربط مع الحياة

الأيض metabolism هو جميع العمليات الكيميائية التي ينتج عنها بناء أو تحليل المواد الغذائية داخل جسم الكائن الحي.

35) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسعرات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكلٍّ من $f(x), g(x)$ مستعملًا $n = 4, n = 3$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أيُّ المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ما قيم n التي يكون عندها كلٌّ من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدٍّ:** ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $x > \sqrt[3]{x}$؟

38) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددًا يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

39) **اكتب:** وضّح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟

40) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$

تدريب على اختبار

41) أيُّ الآتية هو الأقرب إلى قيمة المقدار $\sqrt[3]{7.32}$؟

A 1.8

B 1.9

C 2

D 2.1

42) قيمة $\sqrt[4]{256x^8y^{16}}$ هي:

A $16x^8y^{16}$

B $16x^2y^{16}$

C $4x^2y^4$

D $4x^4y^4$

مراجعة تراكمية

مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-4)

43) $y = \sqrt{x-5}$ **44)** $y = \sqrt{x} - 2$ **45)** $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) **صحة:** تبلغ كتلة طفل وُلد حديثًا $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتمتر الواحد يساوي 0.3937in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (الدرس 2-4)

بسّط كلًّا ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

47) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$ **48)** $(2a^2 + 6)^2$

أوجد حاصل الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $(x + 4)(x + 5)$ **50)** $(x + 2y)(x - y)$ **51)** $2(w + z)(w - 4z)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

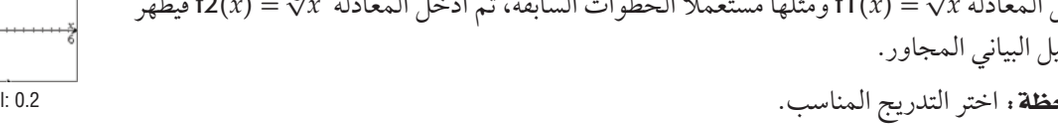
الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

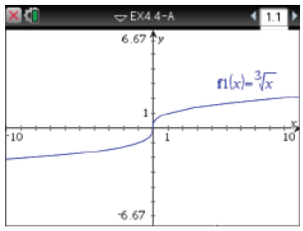
مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثِّل $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا.

- استعمل المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار.



- أدخل الدالة الجذرية بالضغط على مفتاح ctrl ثم مفتاح ^ ، ثم أدخل الدالة. ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني.



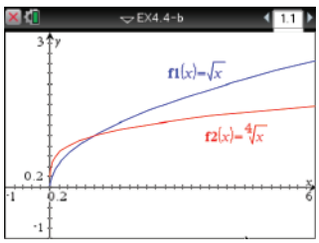
[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ وَ $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا .

أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملًا الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[4]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور.

ملاحظة: اختر التدريج المناسب.

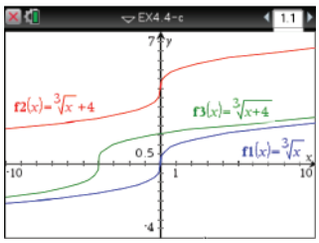


[−1, 6] scl: 0.2 by [−1, 3] scl: 0.2

مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثِّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x} + 4$, $y = \sqrt[3]{x + 4}$, $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور.



[−10, 10] scl: 1 by [−4, 7] scl: 0.5

تمارين:

مثّل كلَّ دالةٍ مما يأتي بيانيًّا:

1) $y = \sqrt[4]{x}$
2) $y = \sqrt[4]{x + 2}$
3) $y = \sqrt[4]{x} + 2$
4) $y = \sqrt[5]{x}$
5) $y = \sqrt[5]{x - 5}$
6) $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لما تحت الجذر في التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟

8) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لدالة الجذر النوني في تمثيلها البياني؟

اختبار منتصف الفصل

الدروس 4-1 إلى 4-4

إذا كان $g(x) = 5x - 2$, $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

1) $(f+g)(x)$ **2)** $(f-g)(x)$

3) $(f \cdot g)(x)$ **4)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5) $[f \circ g](x)$ **6)** $[g \circ f](x)$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدِّد هل كلَّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، ووضِّح إجابتك:

7) $f(x) = 2x + 16$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$

8) $g(x) = 4x + 15$, $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$

9) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5 + x^{-2}$

10) $g(x) = -6x + 8$, $h(x) = \frac{8-x}{6}$

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$ **12)** $f(x) = \frac{4}{9}(x-3)$

13) $h(x) = -\frac{10}{3}(x+5)$ **14)** $f(x) = \frac{x+12}{7}$

15) تنسيق حدائق: تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالًا أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالًا عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالًا، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟

مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

16) $y < \sqrt{x-5}$ **17)** $y \le -2\sqrt{x}$

18) $y > \sqrt{x+9} + 3$ **19)** $y \ge \sqrt{x+4} - 5$

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجال كل منهما ومداها:

20) $y = 2 + \sqrt{x}$ **21)** $y = \sqrt{x+4} - 1$

22) اختيار من متعدد: ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$ C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$ D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

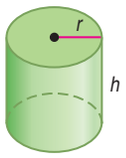
بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ **24)** $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$

25) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$ **26)** $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$

27) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$ **28)** $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$

29) اختيار من متعدد: نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\,\text{in}^3$؟



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

30) إنتاج: إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبّر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبَّر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p(h)]$.

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5

العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق
درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني. (الدرس 4-4)

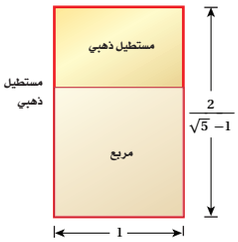
والآن
- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات
إنطاق المقام
rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة
like radical expressions

المرافق
conjugate

لماذا؟



عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًّا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًّا.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 — تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 4x^4\sqrt{2}$ — بسّط

b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ — بسّط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ $\quad$ **1B)** $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية قسمة الجذور

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

مثالان: $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

مثال 2

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ — بسّط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ — $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ — إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ — اضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ — $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$ $\qquad$ **2B)** $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- **إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.**
- **إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.**
- **إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.**
- **إذا لم توجد جذور في المقام.**

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$ — حلّل الثوابت

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$ — جمّع العوامل في صورة أسس تكعيبية

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ — بسّط

$= -90ab^2$ — اضرب

تحقق من فهمك

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ — بسّط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ — اضرب

$= -\sqrt{2}$ — $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$ خاصية التوزيع

$= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$ بسّط

تحقق من فهمك

5A $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ **5B** $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

إرشادات للدراسة

المُرافق

حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ $\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$

$= \frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$ اضرب واستعمل خاصية التوزيع

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$ بسّط

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$ اطرح

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ بسّط

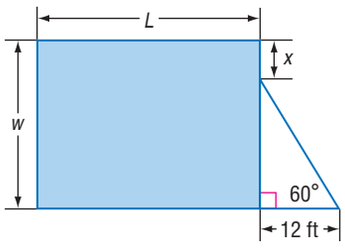
إرشادات للدراسة

يمكنك إيجاد ناتج $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ مباشرة باستعمال الفرق بين مربعين بالشكل:

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$
$= (\sqrt{5})^2 - (1)^2$
$= 5 - 1 = 4$

تحقق من فهمك

6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

1) $\sqrt{36ab^4c^5}$ **2)** $\sqrt{144x^7y^5}$ **3)** $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$ **4)** $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$

5) $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$ **6)** $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

7) $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$ **8)** $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

9) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$

10) $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

11) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3}$

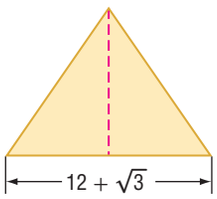
12) $\dfrac{8}{\sqrt{6}-5}$

13) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

14) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$

مثال 6

15) هندسة: أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $\sqrt{72a^8b^5}$

17) $\sqrt{9a^{15}b^3}$

18) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$

19) $\sqrt{\dfrac{7x}{10y^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$

21) $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$

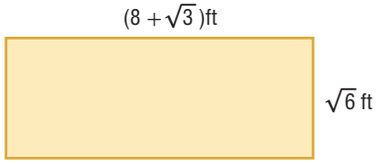
22) $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$

23) $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$

25) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

26) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.



المثالان 5, 6

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$

28) $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$

29) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

30) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

31) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$

32) $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$

34) $\sqrt[4]{\dfrac{12x^3y^2}{5a^2b}}$

35) $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$

36) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

37) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

38) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

الربط مع الحياة

التفاح يطفو على الماء لأن نسبة الهواء فيه 25% من حجمه.

39) تفاح: يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالدالة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

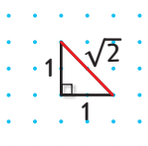
40) $\sqrt[b]{a^b}$

41) $\sqrt[b]{a^{4b}}$

42) $\sqrt[b]{a^{2b}}$

43) $\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.



a) عدديًّا: انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) بيانيًّا: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) تحليليًّا: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) بيانيًّا: استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e) عدديًّا: برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 1422

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فأيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحدٍّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا.

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما .

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

حل كلَّ معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (مهارة سابقة)

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6

الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس. (مهارة سابقة)

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أُبسّط عبارات أسية أو جذرية.

لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدَّل التضخم السنوي، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلًا يمكن أن تستعمل الصيغة:

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$ اجمع الأسس

$$= b^1 = b$$ بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأيِّ عدد حقيقي b، وأيِّ عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{x}{y}}$)

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأيِّ عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًّا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركّبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$ $\quad 27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$

$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$ — $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$ — $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$ — $81 = 3^4$

$= \frac{1}{3}$ — بسّط

b) $216^{\frac{2}{3}}$

$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$ — $216 = 6^3$

$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$ — خاصية قوة القوة

$= 6^2$ — ضرب الأسس

$= 36$ — بسّط

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$

2B) $256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن الثمن الحالي لجهاز تبريد الماء هو 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

$P = c(1 + r)^n$ — الصيغة

$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$ — $c = 390, r = 0.053, n = \frac{6 \text{ أشهر}}{12 \text{ شهرًا}} = \frac{1}{2}$

≈ 400.20 — استعمل الحاسبة

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذن سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريالات تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك أنت في حاجة إلى إنطاق المقام أحيانًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{6}{7}}$ جمع الأسس

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ اضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$ $b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$ $b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$

c) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$ $3x^{\frac{1}{2}} - 2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}} + 2$

$= \frac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4}$ اضرب

$= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4}$ بسّط

تحقق من فهمك

4A) $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $r^{-\frac{4}{5}}$

4C) $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

a) $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبية

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوة القوة

b) $\sqrt[4]{9g^2}$

$\sqrt[4]{9g^2} = (9g^2)^{\frac{1}{4}}$ الأسس النسبية

$= [(3g)^2]^{\frac{1}{4}}$ $9g^2 = (3g)^2$

$= (3g)^{\frac{1}{2}}$ خاصية قوة القوة

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلًا من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ خاصية قسمة قوتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بسّط

$= \sqrt[4]{3}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

$= \sqrt{3g}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

تحقق من فهمك

(5A $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$

(5B $\sqrt[3]{16x^4}$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

(1 $10^{\frac{1}{4}}$ **(2** $x^{\frac{3}{5}}$ **(3** $\sqrt[3]{15}$ **(4** $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(5 $343^{\frac{1}{3}}$ **(6** $32^{-\frac{1}{5}}$ **(7** $125^{\frac{2}{3}}$ **(8** $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$

مثال 3 **(9 قياس:** إذا علمت مساحة مربع هي A ، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟

المثالان 4, 5 بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

(10 $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **(11** $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ **(12** $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$

(13 $\sqrt[3]{64z^6}$ **(14** $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ **(15** $\frac{g^{\frac{1}{2}}-1}{g^{\frac{1}{2}}+1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كلٍّ مما يأتي:

(16 $8^{\frac{1}{5}}$ **(17** $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ **(18** $\sqrt{17}$ **(19** $\sqrt[4]{625x^2}$

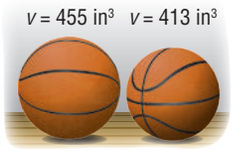
مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(20 $27^{\frac{1}{3}}$ **(21** $256^{\frac{1}{4}}$ **(22** $16^{-\frac{1}{2}}$ **(23** $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 3

24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يُعبَّر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$، فأجب عمَّا يأتي:



a) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير.

b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير.

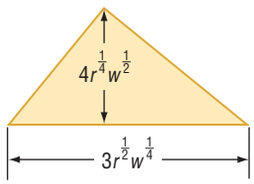
المثالان 4, 5

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

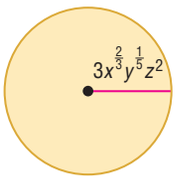
25) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}$ **27)** $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

30)



31)



32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$ ؟

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

33) $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}$

الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبَّر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:

a) كم سيصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًّا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرِّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a) جدوليًّا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا كلًّا من: $g(x)$, $f(x)$.

c) لفظيًّا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

وزارة التعليم
Ministry of Education

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك.

48) **اكتشف الخطأ:** بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) **مسألة مفتوحة:** أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كلٍّ منهما 2 .

50) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $p = 3^3 \cdot 3^5$؟

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 5-4)

53) $\sqrt{243}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$

56) **فيزياء:** تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \text{N/m}^2, d = 10^3\ \text{kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 5-4)

أوجد $p(x+h), p(-4)$ لكلِّ دالة مما يأتي: (مهارة سابقة)

57) $p(x) = x - 2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$

أوجد $(\frac{f}{g})(x), (f.g)(x), (f-g)(x), (f+g)(x)$ لكلِّ دالتين فيما يأتي: (الدرس: 1-4)

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$ **64)** $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي: (الدرس: 5-4)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-7

حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

فيما سبق

درست حل معادلات كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن

- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات

المعادلة الجذرية
radical equation

الحل الدخيل
extraneous solution

المتباينة الجذرية
radical inequality

لماذا؟

عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية : تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي — حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 : اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2 : ارفع طرفَي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3 : حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلًا**.

مثال 1 — حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{x+2} = 3$	اطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر
$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$	ربِّع الطرفين للتخلص من الجذر
$x + 2 = 9$	أوجد مربع الطرفين
$x = 7$	اطرح 2 من الطرفين

تحقق :

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$	عوض عن x بالعدد 7
$\checkmark \quad 7 = 7$	بسِّط

b) $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{x-12})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$	ربِّع الطرفين
$x - 12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$	أوجد مربع الطرفين
$-16 = -4\sqrt{x}$	اطرح $x + 4$ من الطرفين لفصل الجذر
$4 = \sqrt{x}$	اقسم الطرفين على -4
$16 = x$	ربِّع الطرفين

وزارة التعليم
Ministry of Education

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

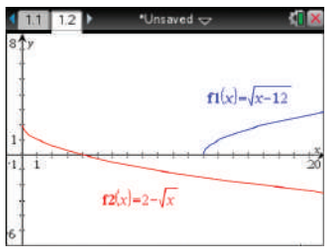
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق: $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2 - \sqrt{16}$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2 - 4$

$2 \neq -2$



يكون حل هذه المعادلة دخيلًا. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y = \sqrt{x-12}$، والمعادلة $y = 2 - \sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

(1A) $5 = \sqrt{x-2} - 1$

(1B) $\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x}$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولًا جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 4$	أضف **4** للطرفين
$(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$	اقسم الطرفين على **2**
$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 2^3$	كعّب الطرفين
$6x - 3 = 8$	أوجد مكعب الطرفين
$6x = 11$	أضف **3** للطرفين
$x = \frac{11}{6}$	اقسم الطرفين على **6**

تحقق:

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	عوض عن x بالعدد $\frac{11}{6}$
$2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	بسّط
$2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$	الجذر التكعيبي للعدد **8** هو **2**
$0 = 0$ ✓	اطرح

تحقق من فهمك

(2A) $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$

(2B) $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي عبارة ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حلُّ المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 11

$3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$	المعادلة الأصلية
$3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$	أضف **6** للطرفين
$\sqrt[4]{2n+6} = 2$	اقسم الطرفين على **3**
$(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$	ارفع الطرفين للأس **4**
$2n + 6 = 16$	أوجد ناتج كل من الطرفين
$2n = 10$	اطرح **6** من الطرفين
$n = 5$	اقسم الطرفين على **2**

إذن الجواب هو C.

تحقق من فهمك

3) $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$

A $x = 7$ **B** $x = 25$ **C** $x = 29$ **D** $x = 37$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حلّ سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحلّ الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

حلُّ المتباينات الجذرية: **المتباينة الجذرية** هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحلّ متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حلُّ المتباينات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2: حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3: حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4

حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا، فحل أولًا $5x - 10 \ge 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفًا.

$5x - 10 \ge 0$	المعادلة الأصلية
$5x \ge 10$	أضف **10** للطرفين
$x \ge 2$	اقسم الطرفين على **5**

الخطوة 2: حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

$3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{5x - 10} \le 5$	اطرح **3** من الطرفين لفصل الجذر
$5x - 10 \le 25$	ربع الطرفين للتخلص من الجذر
$5x \le 35$	أضف **10** للطرفين
$x \le 7$	اقسم الطرفين على **5**

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \le c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل، والتي تُبسَّط إلى الصورة $\sqrt{ax+b} > c$ تكون مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- إذا كان طرفا المتباينة موجبين، فإنه يمكنك تربيع الطرفين مع بقاء الرمز $\le$ كما هو.

الخطوة 3: يتَّضح من الخطوتين السابقتين أن حل المتباينة هو $2 \le x \le 7$. ويمكنك اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ثم نظم النتائج في جدول:

$x = 9$	$x = 4$	$x = 0$
$3 + \sqrt{5(9) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $8.92 \le 8$ وبما أن $8 \not\ge 8.92$، فإن المتباينة لا تتحقق.	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✓ $6.16 \le 8$ وبما أن $8 \ge 6.16$، فإن المتباينة تتحقق.	$3 + \sqrt{5(0) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $3 + \sqrt{-10} \le 8$ وبما أن $\sqrt{-10}$ ليس عددًا حقيقيًا فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \le x \le 7$ فقط هي التي تحقق المتباينة.

تحقق من فهمك

(4A) $\sqrt{2x + 2} + 1 \ge 5$

(4B) $\sqrt{4x - 4} - 2 < 4$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

(1) $\sqrt{x - 4} + 6 = 10$

(2) $\sqrt{x + 13} - 8 = -2$

(3) $8 - \sqrt{x + 12} = 3$

(4) $\sqrt[3]{x - 2} = 3$

(5) $(x - 5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$

(6) $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$

(7) $\sqrt{y} - 7 = 0$

(8) $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$

(9) $5 + \sqrt{4y - 5} = 12$

(10) $\sqrt{2t - 7} = \sqrt{t + 2}$

(11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن الدوري للبندول بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، والذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانيةٍ مربعةٍ.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3 **(12) اختيار من متعدد:** حلّ المعادلة $(2y + 6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو:

A $y = 1$ B $y = 5$ C $y = 11$ D $y = 15$

مثال 4 حلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(13) $\sqrt{3x + 4} - 5 \le 4$

(14) $\sqrt{b - 7} + 6 \le 12$

(15) $2 + \sqrt{4y - 4} \le 6$

(16) $\sqrt{3a + 3} - 1 \le 2$

(17) $1 + \sqrt{7x - 3} > 3$

(18) $\sqrt{3x + 6} + 2 \le 5$

(19) $-2 + \sqrt{9 - 5x} \ge 6$

(20) $6 - \sqrt{2y + 1} < 3$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟

مثال 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$

مثال 3 **34) اختيار من متعدد:** حَلّ المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو:

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

39) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

40) $-3+\sqrt{6a+1}>4$

41) فيزياء: الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تُمثل الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث L طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.

42) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حلّ هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

43) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزةٍ زمنُ تحليقها 0.98 ثانية.

44) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470 kg على الأكثر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) تحدٍّ: قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حلٍّ حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حلٌّ؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. ووضِّح إجابتك.

48) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلّهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلّها برفع كلا الطرفين للأس المعطى:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

50) **تحدٍّ:** حَلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$).

51) **اكتب:** وضِّح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلّها.

تدريب على اختبار

52) أيُّ المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟

54) ما حلّ المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$ ؟

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 6-4)

55) $27^{-\frac{2}{3}}$ **56)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **57)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

58) **هندسة:** العبارتان $8x^2y^2$ ، $4x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 6-4)

أوجد معكوس كلِّ دالةٍ مما يأتي: (الدرس: 2-4)

59) $y=3x-4$ **60)** $y=-2x-3$ **61)** $y=x^2$ **62)** $y=(2x+3)^2$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

63) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ **64)** $\frac{6}{7}=9m$ **65)** $\frac{9}{8}b=18$ **66)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحل معادلات ومتباينات جذرية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية، وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة، بحيث يكون أحد طرفَيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحل.

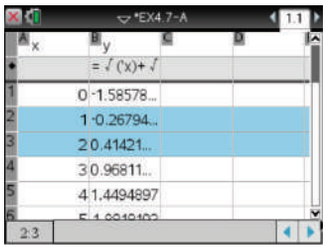
مثال 1 المعادلة الجذرية

حُلَّ المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

- اطرح العدد 3 من طرفَي المعادلة لتحصل على المعادلة:
$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3 = 0$

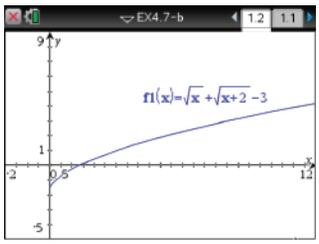
الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدّر الحلّ.



- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on ‹ 1 مستند جديد ‹ 4 إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا تختارها لِـ x .
- سمِّ رأس العمود B بالرمز y، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$، ثم اضغط enter فتظهر شاشة اختر منها مرجع المتغير
ثم اضغط enter لتحصل على الجدول المطلوب.

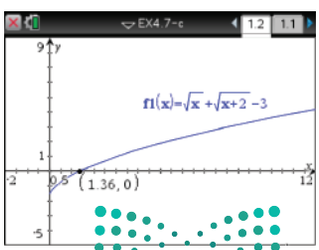
بما أن إشارة الدالة تتغير من سالبٍ إلى موجبٍ بين $x = 2$, $x = 1$ فهناك حلٌّ بين العددين 2 , 1

الخطوة 3 استعمل ميزة أصفار الدالة لإيجاد الحلّ.



[−2, 12] scl: 0.5 by [−5, 9] scl: 1

- اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on ‹ 1 مستند جديد ‹ 2 إضافة تطبيق الرسوم البيانية
- اكتب الدالة: $f1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$
ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني المجاور.
- حدِّد أصفار الدالة بالضغط على مفتاح menu:
ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 1: أصفار الدالة وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x، فيظهر إحداثيات صفر الدالة.
ثم الضغط على كلٍّ من منحنى الدالة والمحور x، فيظهر صفر الدالة كما في الشكل المجاور.



[−2, 12] scl: 0.5 by [−5, 9] scl: 1

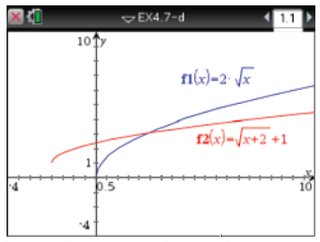
فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو يقع بين العددين 2 , 1 كما تبين في الخطوة 2

مثال 2 المتباينة الجذرية

حُلَّ المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثّل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًّا، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانيًّا فتظهر الشاشة التالية:

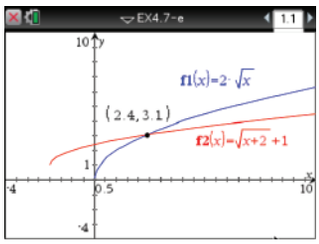


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

تبيِّن الشاشة أعلاه أن النقاط التي تقع عن يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها f1 < f2 أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$، ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن تجد النقاط التي تكون عندها f1 > f2، وهذه النقاط تقع عن يمين نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل ميزة نقاط التقاطع.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ومنها اختر نقاط التقاطع وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، يظهر الزوج المرتب (2.4, 3.1)

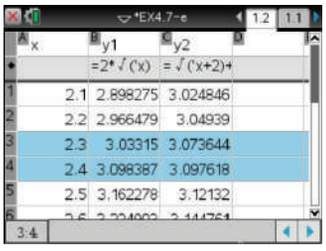


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

أي أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2 تقريبًا؛ لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.4$ استعمل الرمز > في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلّك باستعمال الجداول البيانية.

- اضغط مفتاح on، واختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات.
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 2 , 3
- سَمِّ رأس العمود B بالرمز y1، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y1 = 2\sqrt{x}$، ثم اضغط enter.
- سَمِّ رأس العمود C بالرمز y2، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y2 = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.



لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن y2 > y1.

وهذا يُثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.4\}$.

تمارين:

استعمل طريقة التمثيل البياني لحلّ كلِّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4} = 3$
2) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$
3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 4$
4) $\sqrt{x-3} \geq 2$
5) $\sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$
6) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 4$

7) **اكتب:** وضِّح كيف يمكنك تطبيق الأسلوب المتَّبع في حلّ المثال الأول لحلّ متباينة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي
(الدرسان 4-2, 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.
- الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$ ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$ ومداها $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

الجذور النونية للأعداد الحقيقية (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد a			
n	a > 0	a < 0	a = 0
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

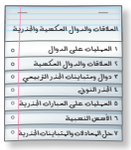
العبارات الجذرية (الدروس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $b \neq 0, n>1, y>1$ يُعد كل مما يأتي صحيحًا، وذلك عندما تكون جميع الجذور معرفة.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x$.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

تركيب دالتين ص 13
العلاقة العكسية ص 19
دالة عكسية ص 19
دالة الجذر التربيعي ص 25
الدالة الجذرية ص 25
متباينة الجذر التربيعي ص 27
الجذر النوني ص 30
رمز الجذر ص 30
الدليل ص 30
ما تحت الجذر ص 30
الجذر الرئيس ص 30
إنطاق المقام ص 38
الجذور المتشابهة ص 39
المرافق ص 40
المعادلة الجذرية ص 49
الحل الدخيل ص 49
المتباينة الجذرية ص 51

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____ ، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____.

3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____.

4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____.

5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____.

6) _____ هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية.

7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالةَ المحايدةَ فإن كلتيهما تكون _____ للأخرى.

8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال ص 12-18

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكلٍّ مما يأتي:

9) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — عوّض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$

$= g(x^2 + 3)$

$= 3(x^2 + 3) - 2$

$= 3x^2 + 9 - 2$ — اضرب

$= 3x^2 + 7$ — بسّط

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ — عوّض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$

$= f(3x - 2)$

$= (3x - 2)^2 + 3$

$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$ — اضرب

$= 9x^2 - 12x + 7$ — بسّط

4-2 العلاقات والدوال العكسية ص 19-23

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. وبيِّن ما إذا كان معكوس الدالة يمثِّل دالة أم لا، وإذا كان كذلك فاكتب قاعدة الدالة العكسية.

14) $f(x) = 5x - 6$

15) $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

17) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$

19) $f(x) = (2x + 1)^2$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدّد هل كل دالة تمثل داالة عكسية للأخرى أم لا، ووضّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$

21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

22) ثقافة مالية: قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x , y، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$ — بالتبديل بين المتغيرين

$2y = -x + 7$ — بالحل بالنسبة للمتغير y

$y = \frac{-x + 7}{2}$ — اقسم الطرفين على 2

$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$ — ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y؛ لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مراجعة الدروس

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي ص 25-29

مثّل بيانيًّا كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

23 $f(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -\sqrt{6x}$

25 $f(x) = \sqrt{x - 7}$

26 $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

27 $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

28 $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

29 **هندسة:** يُعبَّر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. حيث r نصف قطرها. فما قيمة نصف قطر دائرة مساحتها $300\,\text{cm}^2$؟

مثّل بيانيًّا كلَّ متباينة فيما يأتي:

30 $y \geq \sqrt{x} + 3$

31 $y < 2\sqrt{x - 5}$

32 $y > -\sqrt{x - 1} + 2$

مثال 3

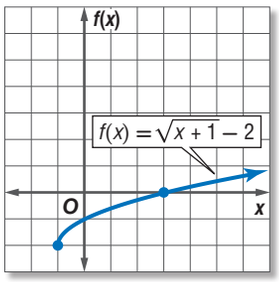
مثِّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها.

تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.



x	f(x)
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45

المجال هو $\{x | x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني ص 30-34

بسّط كلًّا مما يأتي:

33 $\pm\sqrt{121}$

34 $\sqrt[3]{-125}$

35 $\sqrt{(-6)^2}$

36 $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$

37 $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$

38 $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$

39 $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$

40 **فيزياء:** تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا.

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$ $64x^6 = (8x^3)^2$

$= 8|x^3|$ بسّط

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$ $4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$

$= 4x^2y^4$ بسّط

4-5 العمليات على العبارات الجذرية ص 37-42

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

41) $\sqrt[3]{54}$

42) $\sqrt{144a^3b^5}$

43) $4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$

44) $6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$

45) $(6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$

46) $\dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

47) $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$

48) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

49) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.

مثال 6

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ حلّل إلى العوامل

$= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ أوجد الجذر التكعيبي

$= 36ab^2$ بسّط

مثال 7

بسّط العبارة $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

4-6 الأسس النسبية ص 43-48

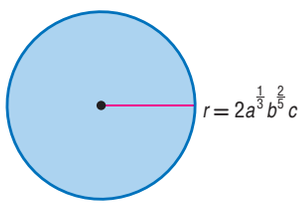
بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

50) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ **51)** $m^{-\frac{3}{4}}$ **52)** $\dfrac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

53) $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ **54)** $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ **55)** $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

56) هندسة: ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



مثال 8

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{13}{15}}$ اجمع الأسس

مثال 9

بسّط العبارة $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}}$

$\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$ اكتب العبارة على الصورة الأسية

$= \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ اكتب العبارة على الصورة الجذرية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

57 $\sqrt{x-3}+5=15$

58 $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

59 $4+\sqrt{3x-1}=8$

60 $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$

61 $\sqrt{2x+3}=3$

62 $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

63 $a^{\frac{1}{3}}-4=0$

64 $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$

65 **فيزياء:** تُعطى المسافة الأفقية d بالكيلومترات التي يمكن أن يراها شخص بالعلاقة $d=3.57\sqrt{L}$، حيث L تمثل ارتفاع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض ويقاس بالأمتار. فإذا كانت المسافة الأفقية التي يراها شخص هي 71.4 كيلومترًا، فكم مترًا ترتفع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض؟

حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

66 $2+\sqrt{3x-1}<5$

67 $\sqrt{3x+13}-5\geq 5$

68 $6-\sqrt{3x+5}\leq 3$

69 $\sqrt{-3x+4}-5\geq 3$

70 $5+\sqrt{2y-7}<5$

71 $3+\sqrt{2x-3}\geq 3$

72 $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$

مثال 10

حُلّ المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	أضف 2 للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	ربّع الطرفين
$2x+9=49$	أوجد مربع الطرفين
$2x=40$	اطرح 9 من الطرفين
$x=20$	اقسم الطرفين على 2

تحقق: $\sqrt{2\times 20+9}-2\stackrel{?}{=}5$ ✓

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\geq 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\geq 5$	أضف 5 للطرفين
$x\geq 2.5$	اقسم الطرفين على 2

يجب أن يكون الحلّ أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	اطرح 2 من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	ربّع الطرفين
$2x-5>9$	أوجد مربع الطرفين
$2x>14$	أضف 5 للطرفين
$x>7$	اقسم الطرفين على 2

بما أن $x\geq 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

تحقق: $x=0,\ \sqrt{2\times 0-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✗ $\sqrt{-5}+2>5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًّا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x=8,\ \sqrt{2\times 8-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✓ $\sqrt{11}+2>5$

وبما أن $5.3>5$، فإن المتباينة تتحقق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

اختبار الفصل

في كلِّ زوج ممَّا يأتي، حدِّد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

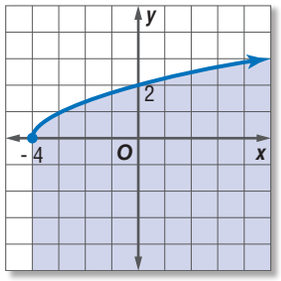
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$

5) **اختيار من متعدد:** أيُّ المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



A $y \geq \sqrt{x+4}$ C $y \geq \sqrt{x-4}$

B $y \leq \sqrt{x+4}$ D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ **7)** $(f \cdot g)(x)$

8) $(f-g)(x)$ **9)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$

12) $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$

14) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$

15) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$

16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

A -5 B $-\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{5}$ D 5

بسّط كلًّا مما يأتي:

17) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ **18)** $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ **20)** $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$

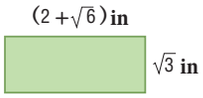
21) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ **22)** $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ **24)** $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$

25) $w^{-\frac{4}{5}}$ **26)** $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$

27) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ **28)** $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$

29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

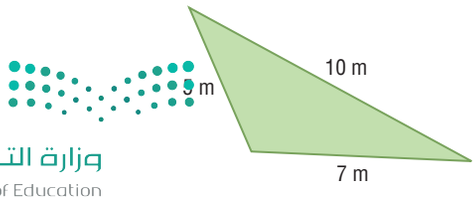
حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

30) $\sqrt{4x-3}<5$ **31)** $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$

32) $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$ **33)** $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$

34) $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$

35) **قانون هيرو (HERO):** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c باستعمال قانون هيرو: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.
اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الحل عكسيًّا

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقًا. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبِّر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بيانيٌّ، ثم اعمل عكسيًّا لحلّ المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكلِّ عملية أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 39540 ريالًا. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالاً، وعمولة مكتب الوساطة وهي 1% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحلّ.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي: ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

المتغير: x = ثمن السيارة.

المعادلة: $x + 0.01x + 150 = 39540$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x.

$$1.01x + 150 = 39540$$
$$1.01x = 39390$$
$$x = 39000$$

تحقق من صحة حلّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$39000(1.01) = 39390$ أوجد عمولة مكتب الوساطة

$39390 + 150 = 39540$ اجمع رسوم نقل الملكية

$39540 = 39540$ القيمة نفسها المعطاة

لذا فإن ثمن السيارة هو 39000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألتين الآتيتين جيدًا، وحدد المطلوب في كلٍّ منها، ثم استعمل معطياتها لحلِّها:

1) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/s. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبَّر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$.
فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟

A 10 ثوانٍ

B 25 ثانية

C 100 ثانية

D 625 ثانية

2) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. فأيُّ المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة؟

A $y = x - \frac{1}{32}$ **C** $y = \frac{1}{32}x$

B $y = \frac{1}{32}x$ **D** $y = x + \frac{1}{32}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفصل 4

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أيّ عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأيُّ الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالًا؟

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) أيُّ العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1)-(2a-2)(a+3)$؟

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

3) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالًا رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال.

A 64140

B 68000

C 64000

D 68160

4) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$.

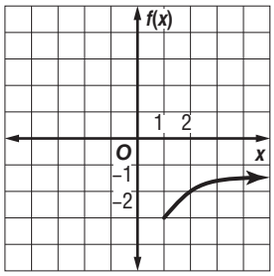
A $-3b^3c^6$

B $-3b^2c^4$

C $3b^2c^4$

D $3b^3c^6$

5) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟



A $f(x) = \sqrt{x - 3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x + 1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x + 3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x - 1} - 3$

6) ما حَلُّ المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$ ؟

A 2

B 20

C 200

D 1000

7) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$.

A $f^{-1}(x) = x + 5$

B $f^{-1}(x) = 5x$

C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

D $f^{-1}(x) = 5 - x$

8) أيُّ المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط

B II فقط

C II، III فقط

D I، III فقط

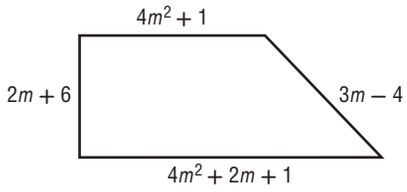
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

9) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.

10) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟

11) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

12) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

13) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

a) صف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

b) ما قيمة $f[g(2)]$ ؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	4-1	مهارة سابقة	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-7	مهارة سابقة	مهارة سابقة	4-2

الفصل 5

العلاقات والدوالّ النسبية
Rational Functions and Relations

فيما سبق:
درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًا.

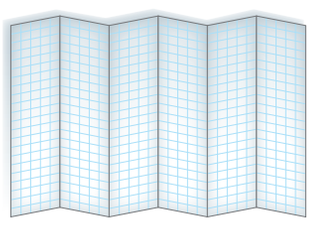
والآن:
- أتعرّف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثّل دوالّ نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل التغيّر الطردي والتغيّر المشترك والتغيّر العكسي والتغيّر المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

لماذا؟
سفر: يمكن استعمال الدوالّ النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، فيمكنك استعمال العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

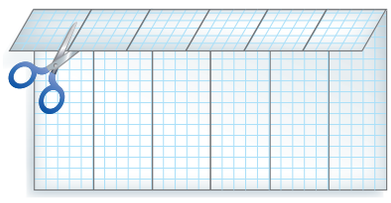
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوالّ النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوالّ النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

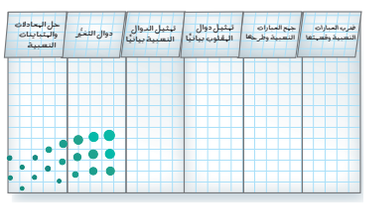
1. **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية.



2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.



3. **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الخامس

أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة. (تستعمل مع الدرس 1-5)

1) $\frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p = 7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (تستعمل مع الدرس 2-5)

6) $\frac{3}{4} - \frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $\frac{3}{4}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كلَّ تناسب مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-5)

11) $\frac{9}{12} = \frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18} = \frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7} = \frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$، واكتب الحل في أبسط صورة.

$\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$	المعادلة الأصلية
$\frac{72}{11} = 7r$	اضرب كل من الطرفين في العدد 8
$\frac{72}{77} = r$	اقسم كل من الطرفين على العدد 7

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$	العبارة الأصلية
$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$	المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6, 4, 3 هو العدد 12
$= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$	بسّط
$= \frac{3}{12}$	اجمع، ثم اطرح
$= \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$	بسّط

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$	المعادلة الأصلية
$5(11) = 8u$	بالضرب التبادلي
$55 = 8u$	بسّط
$\frac{55}{8} = u$	اقسم كل من الطرفين على 8

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:
درست تحليل كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:
العبارة النسبية rational expression
الكسر المركّب complex fraction

لماذا؟

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالّة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d - 33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d - 33}$ **"عبارة نسبية"**.

بما أن المتغيِّرات في الجبر تمثِّل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كلٍّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

$\overset{1}{\cancel{4}}$ ← GCF = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x - 3)(\overset{1}{\cancel{x - 1}})}{(x - 5)(\cancel{x - 1})} = \frac{x - 3}{x - 5}$$

$\overset{1}{\cancel{x - 1}}$ ← GCF = $x - 1$

قراءة الرياضيات

GCF
الرمز (GCF) يمثِّل اختصارًا لـ:
Greatest Common Factor
القاسم (العامل) المشترك الأكبر

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)}$

$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x + 3)(x + 1)}{(x - 6)(x + 3)(x - 3)}$ — حلّل كلًّا من البسط والمقام إلى عوامل

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{(x + 3)}}}{\cancel{(x + 3)}_{1}}$ — اختصر العوامل المشتركة

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)}$ — بسّط

تحقق من فهمك

(1A) $\frac{4y(y - 3)(y + 4)}{y(y^2 - y - 6)}$

(1B) $\frac{2z(z + 5)(z^2 + 2z - 8)}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تكون العبارة النسبية غير معرَّفة عند قيم المتغيِّر التي تجعل مقامها صفرًا.

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$ **B** $-2, 7$ **C** $0, -2, -4$ **D** $0, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B .

والآن حلّل المقام إلى عوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C .

تحقق من فهمك

2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2$ **D** $5, -6$

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1- كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1– كعامل مشترك

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}=\frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$ حلّل إلى عوامل

$=\frac{w(-1)(\cancel{3y-4w}^{\,1})(w+y)}{(3y-4w)(\cancel{5w+y}^{\,1})}$ $4w-3y=-1(3y-4w)$

$=\frac{(-w)(w+y)}{5w+y}$ بسِّط

b) $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

$\frac{x^3-y^3}{y-x}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x}$ حلّل إلى عوامل

$=\frac{(-1)(\cancel{y-x}^{\,1})(x^2+xy+y^2)}{(\cancel{y-x}^{\,1})}$ $x-y=-1(y-x)$

$=-x^2-xy-y^2$ بسِّط

تحقق من فهمك

3A) $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$

3B) $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

قراءة الرياضيات

قيم x التي تجعل العبارة غير معرَّفة

لإيجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير معرَّفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

إرشادات للاختبار

بدائل السؤال

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

مثال: $\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال: $\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

حلِّل إلى عوامل: $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$

اختصر العوامل المشتركة: $= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$

بسِّط: $= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$

بسِّط: $= \frac{9c^2d}{4a}$

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$

جمِّع العوامل: $= \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{b}{b^2}\right)$

استعمل قوانين الأسس واختصر العوامل المشتركة: $= \left(\frac{\overset{1}{\cancel{6}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{6}} \times 2 \times \underset{1}{\cancel{7}}}\right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$

بسِّط: $= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$

تعريف الأسس السالبة: $= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$

بسِّط: $= \frac{15y^2}{2xb}$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تحقق من فهمك

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ويتم اختصارها كما في المثال 5a.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كلٍّ من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

حلّل إلى عوامل

$$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-8)}}\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-8)}}\underset{1}{\cancel{(x-8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x-8}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$

بسّط

$$= \frac{1}{x+3}$$

(b $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18} = \frac{x^2-16}{12y+36} \cdot \frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$$

حلّل إلى عوامل

$$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{(x+4)\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y+3)}}} \cdot \frac{(y-6)\overset{1}{\cancel{(y+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-4)}}(x-8)}$$

بسّط

$$= \frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$$

تحقق من فهمك

(5A $\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$

(5B $\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$

تبسيط الكسور المركّبة: الكسر المركّب يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورًا، والعبارات الآتية كسور مركّبة:

$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$ $\quad \frac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\quad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\quad \frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$

ولتبسيط كسر مركّب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{a+b}{4} \div \frac{a^2+b^2}{4}$$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{a+b}{4} \cdot \frac{4}{a^2+b^2}$$

اختصر العوامل المشتركة وبسّط

$$= \frac{a+b}{\cancel{4}\,1} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \frac{x^2}{x^2-y^2} \div \frac{4x}{y-x}$$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{y-x}{4x}$$

حلّل إلى عوامل

$$= \frac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{4x}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{(x+y)\cancel{(x-y)}\,1} \cdot \frac{(-1)(\overset{1}{\cancel{x-y}})}{4\cancel{x}\,1}$$

بسّط

$$= \frac{-x}{4(x+y)}$$

تحقق من فهمك

6A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2

3) اختيار من متعدد: حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرَّفة.

A $-7, 4$ B $4, 7$ C $-7, 4, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

(8 $\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b}$

(9 $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x-4}{x^2-2x-35}$

(10 $\frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

(11 $\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

(12 $\frac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \frac{4a+4b}{a^2-1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(13 $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

(14 $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

(15 $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

(16 $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2 **(17 اختيار من متعدد:** حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرَّفة.

A $-6, 3$ **B** $4, 6$ **C** $-6, 6$ **D** $-6, 3, 4, 6$

الأمثِّلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(18 $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

(19 $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

(20 $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$

(21 $\frac{3-3y}{y^3-1}$

(22 $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

(23 $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

(24 $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

(25 $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

(26 $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

(27 $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$

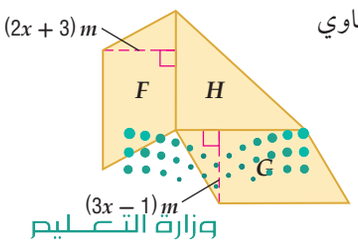
(28 $\frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

(29 $\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

(30 $\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

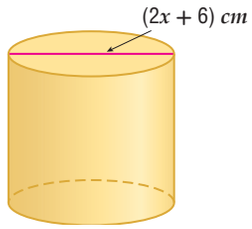
(31 $\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

(32 هندسة: في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2+10x-3)\text{m}^2$، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2+13x-5)\text{m}^2$، وارتفاعه $(3x-1)\text{m}$، فأوجد مساحة المثلَّث القائم الزاوية H.

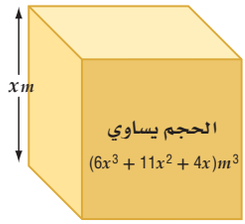


وزارة التعليم
Ministry of Education

33) هندسة: إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل أدناه $(x^2 - 3x - 18)\pi \text{ cm}^3$، $(x + 3)$، فأوجد ارتفاعها.



34) هندسة: يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)\text{m}^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل أدناه الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكلِّ قيم x ؟

الربط بالحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

35) تلوث: تمثِّل الدالّة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a) اكتب الدالّة في أبسط صورة.

b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

36) $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

37) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

38) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

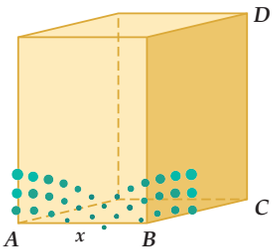
39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

41) $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

42) $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$

43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2 .



a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

44) $\dfrac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \dfrac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \dfrac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$

45) $\dfrac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$

46) $\dfrac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \dfrac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$

47) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين العبارة النسبية قبل تبسيطها وبعده.

a) جبريًا: بسّط العبارة: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

b) جدوليًا: إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالّة $g(x)$ المرتبطة بالدالّة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلّتا الدالّتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) تحليليًا: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضِّح الفرق بين القيمتين.

d) لفظيًا: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالّة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **تبرير:** قارن بين كلٍّ من $\dfrac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\dfrac{x+y}{x-y} \div \dfrac{4}{y-x}$. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$$
$$= \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$$
$$= -\frac{x+y}{4}$$

50) **تحدٍّ:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $\dfrac{x-6}{x+3} \cdot \dfrac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائمًا، عدا عند $x=6$ و $x=-3$؟

51) **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسِّر إجابتك.
"العبارة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرَّفة لجميع الأعداد الحقيقية".

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\dfrac{x-1}{x+4}$.

53) **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\dfrac{x^2+3x}{4x}$ هو $\dfrac{x+3}{4}$. فوضِّح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفة لجميع قيم x؟

تدريب على اختبار

54) احتمال: إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{5-c}{c^2-c-20}$ ؟

A $\frac{5-c}{c-4}$ **C** $\frac{5-c}{c+4}$

B $\frac{1}{c+4}$ **D** $-\frac{1}{c+4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8}+5=7$ (مهارة سابقة)

57) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ (مهارة سابقة)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

5-2

جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:
درست جمع كثيرات حدود وطرحها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، و v سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

الأعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2-3x+2}+\frac{5}{2x^2-2}$
LCM للعددين 6, 9	$x^2-3x+2, 2x^2-2$ LCM لكثيرتي الحدود
$6=2\cdot3$	$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
$9=3\cdot3$	$2x^2-2=2\cdot(x-1)(x+1)$
$\text{LCM}=2\cdot3\cdot3=18$	$\text{LCM}=2(x-1)(x-2)(x+1)$

قراءة الرياضيات
LCM
الرمز (LCM) يمثِّل اختصارًا لـ:
Least Common Multiple
(المضاعف المشترك الأصغر)

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a $6xy, 15x^2, 9xy^4$

$6xy=2\cdot3\cdot x\cdot y$	حلِّل
$15x^2=3\cdot5\cdot x^2$	حلِّل
$9xy^4=3\cdot3\cdot x\cdot y^4$	حلِّل
$\text{LCM}=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot x^2\cdot y^4=90x^2y^4$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر وبسِّط

b $y^4+8y^3+15y^2, y^2-3y-40$

$y^4+8y^3+15y^2=y^2(y+5)(y+3)$	حلِّل
$y^2-3y-40=(y+5)(y-8)$	حلِّل
$\text{LCM}=y^2(y+5)(y+3)(y-8)$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

تحقق من فهمك

1A $12a^2b, 15abc, 8b^3c^4$

1B $4a^2-12a-16, a^3-9a^2+20a$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحِّد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال:
$$\frac{2}{5}\pm\frac{1}{3}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}\pm\frac{5\cdot1}{5\cdot3}=\frac{2\cdot3\pm5\cdot1}{5\cdot3}$$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}=\frac{3y}{2x^3}\cdot\frac{4y^2}{4y^2}+\frac{5z}{8xy^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}$$ وحّد المقامات باستعمال LCM وهو $8x^3y^2$

$$=\frac{12y^3}{8x^3y^2}+\frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$ اضرب الكسور

$$=\frac{12y^3+5x^2z}{8x^3y^2}$$ اجمع البسطين

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(2B) $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بسِّط العبارة: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

$$\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$ حلّل المقامين

$$=\frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)}-\frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$ وحّد المقامين

$$=\frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$ اطرح البسطين

$$=\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$ بسّط

تحقق من فهمك

(3A) $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$

(3B) $\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

من طرائق تبسيط الكسور المركَّبة تبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركَّبة بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$

LCM لمقامات البسط هو x
LCM لمقامات المقام هو y

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

بسّط

تحقق من فهمك

(4A) $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

(4B) $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

إرشادات للدراسة

حدود غير معرَّفة

تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كلٍّ من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 تبسيط الكسور المركَّبة بإيجاد (LCM) للمقامات

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$

LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

(5A) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

(5B) $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

(5C) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(5D) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 1422

تأكـد

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 2 , 3 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

10) $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

11) $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

12) $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

المثالان 4 , 5 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

14) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

15) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

16) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

17) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

18) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

19) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

20) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 2 , 3 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

21) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

22) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

23) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

24) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

25) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

26) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

27) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

28) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

29) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

30) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

31) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

32) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

المثالان 4 , 5 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

33) $\frac{\frac{2}{x - 3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x + 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$

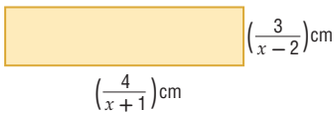
34) $\frac{\frac{4}{x + 5} + \frac{9}{x - 6}}{\frac{5}{x - 6} - \frac{8}{x + 5}}$

35) $\frac{\frac{5}{x + 6} - \frac{2x}{2x - 1}}{\frac{x}{2x - 1} + \frac{4}{x + 6}}$

36) $\frac{\frac{8}{x - 9} - \frac{x}{3x + 2}}{\frac{3}{3x + 2} + \frac{4x}{x - 9}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

37) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

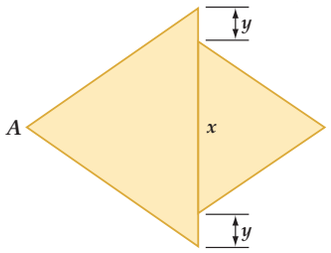


38) أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2+36} + 6.5$، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضِيِّ 30 min على تناوله الطعام.

39) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلَّثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلَّث الأصغر $200\ \text{cm}^2$، ومساحة المثلَّث الأكبر $300\ \text{cm}^2$، فأوجد البُعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.



40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالّة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالّة $R(x)$.

b) ما معدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

الربط بالحياة

يقع حقل الغوار في المملكة العربية السعودية، وتبلغ مساحته $3000\ \text{km}^2$، وتم اكتشافه عام 1948م. وتقدّر إنتاجيته بنحو 65% من إنتاج المملكة؛ أي حوالي 5 مليون برميل يوميًا، ويقدّر احتياطيّه من 70 إلى 170 مليار برميل.

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي:

41) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

42) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

43) $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$

44) $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$

45) $\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$

46) $\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$

47) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$

48) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$

49) $\frac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

50) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

51) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

52) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h .

a) إذا كانت x تعبِّر عن السرعة الأولى بالأميال لكلِّ ساعة، فاكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

وزارة التعليم
Ministry of Education

الربط بالحياة

الكاميرا الرقمية آلة تلتقط الصور الفوتوغرافية وتخزنها إلكترونيًا بدلاً من الأفلام. وبإمكان بعضها تسجيل الصوت أو الفيديو مع الصور. وتمتاز بالسرعة، وسهولة الاستخدام.

53) تصوير: يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، فإنه يجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

54) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/ لتر (g/L) يُعطى بالدالّتين: $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$, $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالّتين لتحصل على دالّة تمثِّل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

55) تحدٍّ: بسّط العبارة $\frac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

56) تبرير: حدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضِّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأيِّ عدد حقيقي x.

57) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدٍّ، على أن يكون LCM لهنّ يساوي $180a^4b^6c$.

58) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

59) إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

60) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ **61)** $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ **62)** $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها (مهارة سابقة)

63) $y=-\sqrt{2x+1}$ **64)** $y=\sqrt{5x-3}$ **65)** $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

66) $y=4(x+3)^2+1$ **67)** $y=-(x-5)^2-3$ **68)** $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ **70)** $y=x^2+6x+2$ **71)** $y=x^2-8x+18$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-3

تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ كثيرات الحدود بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحدِّد خصائص دوالّ المقلوب.
- أمثِّل تحويلات دوالّ المقلوب بيانيًا.

المفردات:
- خط التقارب asymptote
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- دالّة المقلوب reciprocal function
- القطع الزائد hyperbola

لماذا؟

خطّطَت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **خط التقارب** لدالّة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالّة. ولدالّة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالّة.

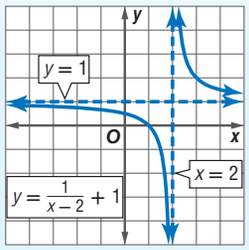
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال:



وأما مجال الدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالّة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالّة.

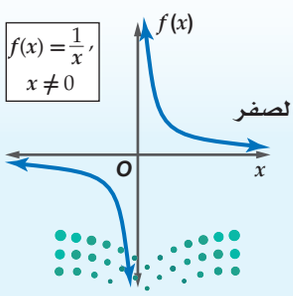
تمثِّل الدالّة $c = \frac{5000}{n}$ دالّة مقلوب، و**دالّة المقلوب** التي سندرسها هي الدالّة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب

الدالّة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب:	$x = 0$ و $y = 0$
المقطعان:	لا يوجد
تكون الدالّة غير معرَّفة عندما:	$x = 0$



وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

مجال دالّة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالّة عندها معرَّفة.

فمثلًا الدوالّ: $f(x)=\frac{-3}{x+2}$ ، $g(x)=\frac{4}{x-5}$ ، $h(x)=\frac{3}{x}$

غير معرَّفة عندما: $x=-2$ ، $x=5$ ، $x=0$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالّة غير معرَّفة)

حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

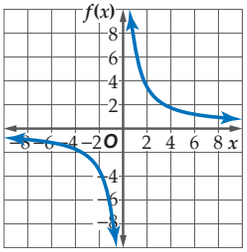
$$2x+5=0$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

الدالّة غير معرَّفة عندما $x=-\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\frac{2}{x-1}$ **1B)** $f(x)=\frac{7}{3x+2}$

قد لا تكون بعض قيم x في دالّة المقلوب منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثِّل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني والذي تكون فيه قيم x سالبة.



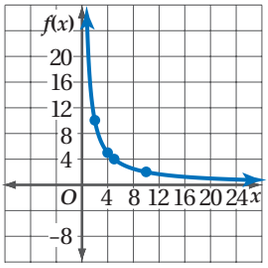
مثال 2 من واقع الحياة تمثيل دالّة المقلوب بيانيًّا

سفر: **مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{20}{x}$ بيانيًّا، حيث تمثِّل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثِّل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكلِّ شخص بالأقدام المربعة.**

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفرًا أو سالبًا، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x .

عدد الأشخاص x	2	4	5	10
المساحة المخصصة للشخص $f(x)$	10	5	4	2

عيِّن النقاط (2, 10)، (4, 5)، (5, 4)، (10, 2) في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحنٍ. وبما أن الدالّة غير معرَّفة عند $(x=0)$، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x=0$؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $x=0$ (المحور y) ولا يمسّه، وبالمثِّل للدالّة خط تقارب أفقي $y=0$ (المحور x)؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $y=0$ ولا يمسه، لذا مُدّ المنحنى الذي رسمته في اتجاه كلٍّ من المحورين x, y الموجبين، ولكن دون أن يمس أيًّا منهما، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

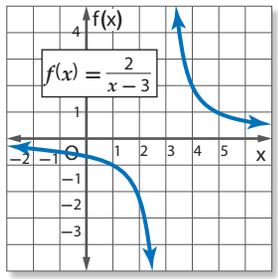
2) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $18\ \text{cm}^2$ ، والدالّة $l=\frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولها وعرضها. مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 3 تحديد خصائص دوالّ المقلوب

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(a)



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $f(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x - 3 = 0$$

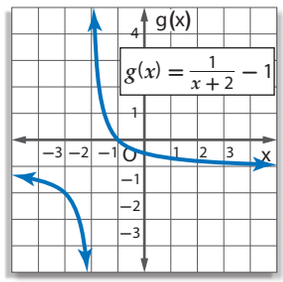
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرَّفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$ ، وبما أن $c = 0$ فإنه، يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 0$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلَّت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$) .

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

(b)



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $g(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$g(x)$ غير معرَّفة عند $x = -2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$ ، وبما أن $c = -1$ ، فإنه يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1أيضًا، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$).

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1 .

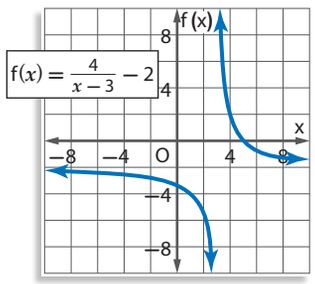
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

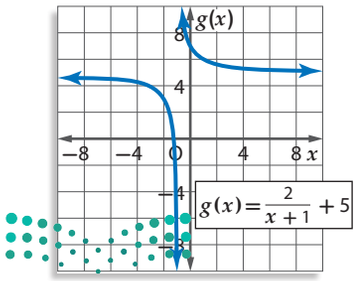
يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالّة عندها غير معرَّفة. أما خط التقارب الأفقي فيبيِّن سلوك طرفَي التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

(3A)



(3B)



يمكنك استعمال دوالّ المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الربط بالحياة

تأسست الخطوط الجوية العربية السعودية في عام 1946 م، وكانت أولى رحلاتها الدولية إلى مطار (اللد) الفلسطيني لنقل الحجاج. وفي عام 2013 م حققت الشركة أعلى معدل نقل للركاب (25.241.421 راكبًا) على (177.435) رحلة داخلية ودولية، وأحرزت المركز الثاني عالميًا (90.46%) في انضباط مواعيد الرحلات.

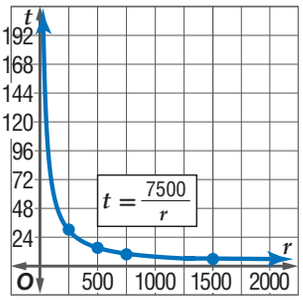
مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوالّ المقلوب

طيران: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالّة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t.

$rt = d$	المعادلة الأصلية
$t = \frac{d}{r}$	اقسم كل من الطرفين على r
$t = \frac{7500}{r}$	$d = 7500$



مثِّل الدالّة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا، عين النقاط:
(250,30)، (500,15)، (750,10)، (1500,5)

b) وضِّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صُغرى تستطيع الطيران بها.

تحقق من فهمك

4) رحلات: نظَّم طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة أهلية رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا ثمنًا للوجبات الغذائية، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالّة تمثِّل متوسط التكلفة الكلِّية للطالب الواحد ومثِّلها بيانيًا. ووضِّح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

مثال 1

1) حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x) = \frac{5}{4x - 8}$ غير معرَّفة.

مثال 2

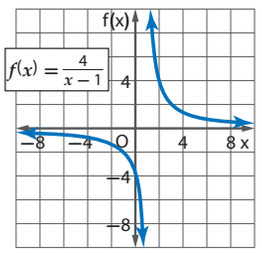
مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

2) $f(x) = \frac{5}{x}$ **3)** $f(x) = \frac{2}{x+3}$

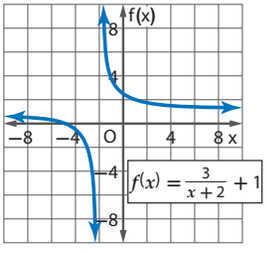
مثال 3

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

4)



5)



مثال 4

6) هدية جماعية: يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، وf عدد الأصدقاء، فاكتب دالّة تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

c) وضِّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد قيمة x التي تجعل كلَّ دالّة فيما يأتي غير معرَّفة.

7) $f(x)=\frac{5}{2x}$ **8)** $f(x)=\frac{x}{x-7}$ **9)** $f(x)=\frac{4}{3x+9}$

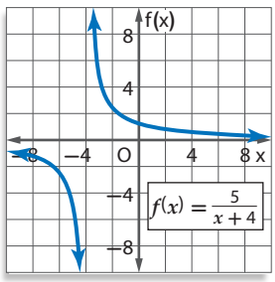
مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

10) $f(x)=\frac{3}{x}$ **11)** $f(x)=\frac{-4}{x+2}$ **12)** $f(x)=\frac{2}{x-6}$

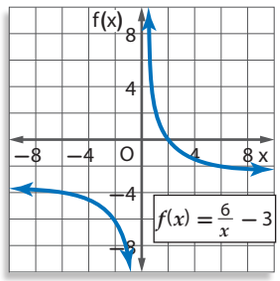
13) $f(x)=\frac{-2}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{x-7}-8$ **15)** $f(x)=\frac{9}{x+3}+6$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

16)



17)



مثال 4 **18) كيمياء:** لدى محمد 200 جرام (g) من سائل مجهول. وتساعد معرَّفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

a) اكتب دالّة تمثِّل كثافة هذا السائل (d) بدلالة حجمه (v).

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالّة.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

19) $f(x)=\frac{5}{3x}$ **20)** $f(x)=\frac{2}{4x+1}$ **21)** $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

22) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالّتين.

b) **بيانيًّا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالّتين بيانيًّا.

c) **لفظيًّا:** قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدِّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) تحليليًّا: اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوالّ التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{x^n}$، عندما تكون n عددًا زوجيًّا، وعندما تكون n عددًا فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$.

24) **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكلٍّ زوج من المعادلات الآتية موضِّحا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a) $y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5}$

d) استعمل ملاحظاتك في الفروع a – c؛ لتمثيل الدالّة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قِيم.

25) **أيُّها لا ينتمي؟** حدِّد الدالّة المختلفة عن الدوالّ الثلاث الأخرى، ووضِّح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ $j(x) = \frac{20}{x-7}$

26) **تحدٍّ:** اكتب دالَّتَي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكلٍّ منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثِّل هاتين الدالّتين بيانيًّا.

27) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضِّح كيف يمكن استعمال دوالّ المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالّة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

28) ما مجال الدالّة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3−.

29) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$، إذا كانت $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

30) $\frac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$ **31)** $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ **32)** $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **للدالّتين** $f(x), g(x)$ **في كلٍّ ممَّا يأتي:** (مهارة سابقة)

33) $f(x) = x+9$, $g(x) = x-9$ **34)** $f(x) = 2x-3$, $g(x) = 4x+9$ **35)** $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8-x$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (مهارة سابقة)

36) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ **37)** $f(x) = |x-5|$ **38)** $f(x) = x^2 - 4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5) $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) اختيار من متعدد: إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأيٌّ ممَّا يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8) اختيار من متعدد: ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A $-3, -1$ C $-3, -1, 9$

B $-9, 1, 3$ D -1

9) أوجد LCM لكثيرتَي الحدود $3-3x$, x^2-x .

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

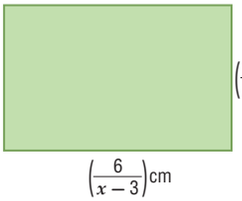
11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



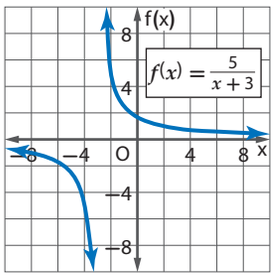
16) سفر: سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 km عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 km/h .

a) إذا كانت x تمثِّل السرعة الأولى، فاكتب عبارةً تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

17) حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالّة الآتية:



مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

18) $f(x) = \frac{6}{x-1}$

19) $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

20) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

21) $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

22) شطائر: أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كلُّ شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) إذا كانت x تمثِّل عدد الأصدقاء المشاركين في الرحلة، فاكتب دالّة تمثِّل هذا الموقف.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا. الدرس (3-5)

والآن:
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:
الدالّة النسبية
rational function
نقطة الانفصال
point discontinuity

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكنه استعمال الدالّة النسبية $C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$ لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **الدالّة النسبية** هي دالّة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالّة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي
خطوط التقارب الرأسية والأفقية

أضف إلى مطويتك

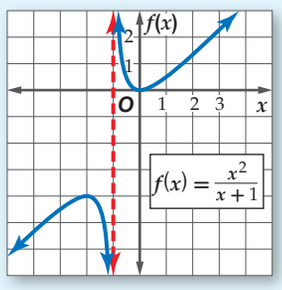
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$, $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}.$$

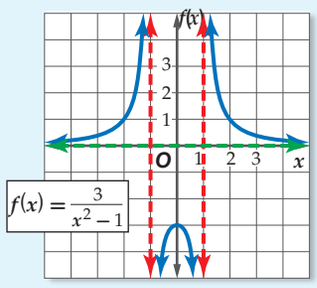
أمثلة:

لا يوجد خط تقارب أفقي



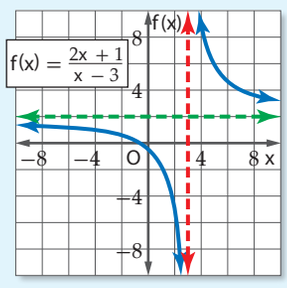
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

إرشادات للدراسة

مجال الدالّة النسبية
مجال الدالّة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك الأعداد التي تجعل المقام صفرًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا، كما يمكنك استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالّة، فإذا كان هناك خط تقارب رأسي واحد، فإن التمثيل ينقسم إلى فرعين، أما إذا كان هناك خطًّا تقارب فإنه ينقسم إلى ثلاثة أفرع.

مثال 1 التمثيل البياني لدالّة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أوجد مجال الدالّة.

$x - 1 = 0$ $\quad b(x) = 0$

$x = 1$ أضف 1 لكلا الطرفين

إذن مجال الدالّة هو جميع الأعداد باستثناء $x = 1$.

الخطوة 2: أوجد خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

بما أن المقام يصبح صفرًا عند $x = 1$.

إذن يوجد خط تقارب رأسي للدالّة عند $x = 1$.

وبما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالّة.

الخطوة 3: أوجد أصفار الدالّة.

$x^2 = 0$ $\quad a(x) = 0$

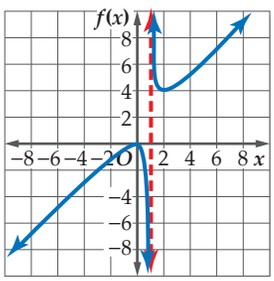
$x = 0$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

يوجد للدالّة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالّة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 4: مثِّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالّة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.

x	$f(x)$
−3	−2.25
−2	−1.33
−1	−0.5
0	0
0.5	−0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5



إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكنك استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالّة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

مثال 2 من واقع الحياة

استعمال التمثيل البياني للدوالّ النسبية

الربط بالحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

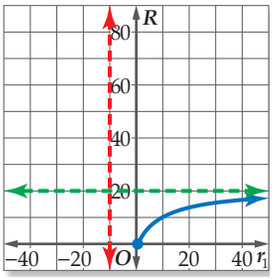
a) إذا كان r_1 هو المتغيِّر المستقل، و R هو المتغيِّر التابع، فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالّة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

وَخط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثِّل خطَّي التقارب والدالّة بيانيًّا.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

تحقق من فهمك

2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالّة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا. وحدِّد القيم المنطقية لمجال الدالّة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالّة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومُعرفةً حولها.

مفهوم أساسي

نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

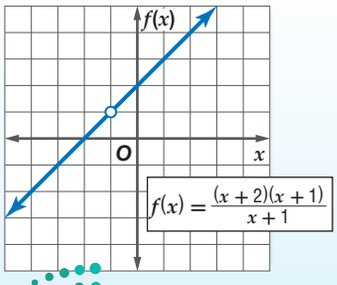
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= x + 2, \quad x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

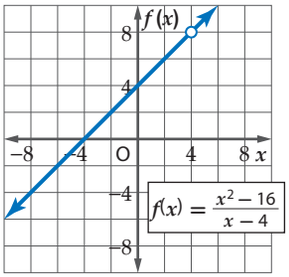
$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 3 التمثيل البياني لدالّة تتضمن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ بيانيًّا .



لاحظ أن مجال الدالّة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ هو نفسه التمثيل البياني للدالّة $f(x)=x+4$، مع وجود فجوة في $x=4$ عندما $f(x)=x+4$.

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني

تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالّة.

تحقق من فهمك

3A $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$

3B $f(x)=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$

تأكد

مثال 1 مثِّل الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

مثال 2

3) كرة سلة : في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثِّلة بالدالّة $P(x)=\frac{7+x}{11+x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) أيُّ جزء من التمثيل البياني للدالّة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثِّل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثِّلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

4) $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

5) $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x)=\frac{x^2}{6x+12}$

7) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-1}$

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

8) $f(x)=\frac{x}{x+2}$

9) $f(x)=\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

10) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

11) $f(x)=\frac{2x}{(x+2)(x-5)}$

12) $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$

13) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

14) كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $C = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1 , R_2 , R_3 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغيِّر المستقل، و C هو المتغيِّر التابع، فمثِّل المعادلة بيانيًّا عندما تكون $V = 120\text{ v}, R_2 = 25\ \Omega, R_3 = 75\ \Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، ومقطع المحور C للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة C عندما تكون $R_1 = 140\ \Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$ **16)** $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$ **18)** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة ممَّا يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$ **20)** $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$ **21)** $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) اتصالات: اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 200 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًّا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالّة نسبية تمثِّل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثِّلها بيانيًّا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالّة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$ **24)** $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

الربط بالحياة

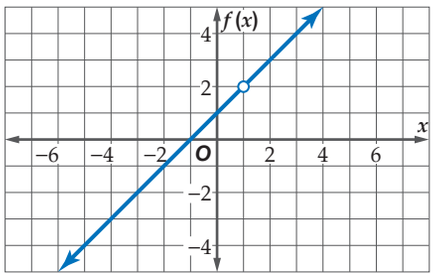
أشار مسح عالمي إلى أن مستخدمي الهواتف النقالة في المملكة العربية السعودية أكثر من أي دولة في العالم؛ بمعدل 180 هاتفًا نقالًا لكل 100 فرد.

المصدر: وزارة الاتصالات وتقنية المعلومات
http://www.mcit.gov.sa/Ar/Communication

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة: مثِّل بيانيًّا بشكل تقريبيٍّ دالّة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) تحدٍّ: اكتب دالّة نسبية لها التمثيل البياني المجاور.



27) تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالّتين: $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

28) **برهان:** إذا علمت أن الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة: $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x)\neq 0$، فأثبت أن $f(x)=\frac{x}{a-b}+c$ دالّة نسبية.

29) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن استعمال تحليل البسِّط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالّة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد عليٌّ أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

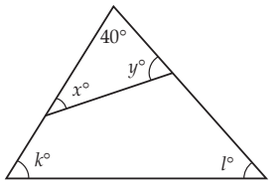
A 48

B 18

C 15

D 12

31) **هندسة:** في الشكل المجاور، ما قيمة $x+y+k+l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (الدرس 3-5)

32) $f(x)=\frac{-5}{x+2}$

33) $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$

34) $f(x)=\frac{1}{x+6}+1$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

35) $\frac{m}{m^2-4}+\frac{2}{3m+6}$

36) $\frac{d-4}{d^2+2d-8}+\frac{d+2}{d^2-16}$

37) $\frac{y}{y+3}-\frac{6y}{y^2-9}$

38) $\frac{5}{x^2-3x-28}+\frac{7}{2x-14}$

39) **سفر:** يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

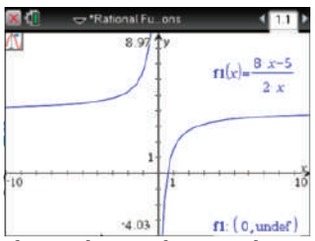
يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوالّ النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالّة لها خطوط تقارب

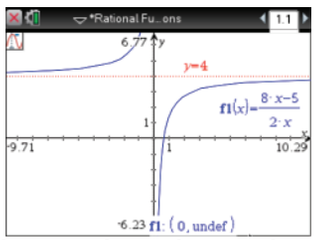
مثِّل الدالّة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا، وأوجد معادلات خطوط التقارب.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد خطوط التقارب اضغط (menu)، ومنها اختر 5:تتبع المسار، ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.



[−10, 10] scl:1 by [−4.3, 8.97] scl:1



[−9.71, 10.29] scl:1 by [−6.23, 6.77] scl:1

الخطوة 2: أوجد معادلات خطوط التقارب.

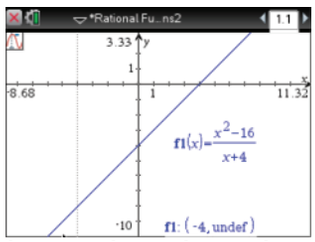
بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرَّفة أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالّة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالّة تتضمَّن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on) ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد نقاط الانفصال اضغط (menu) ومنها اختر 5:تتبع المسار ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبَّع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عند $x = -4$، وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال (−4, undef).



[−8.68, 11.32] scl:1 by [−10, 3.33] scl:1

الخطوة 2: أوجد نقاط الانفصال.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلِّ دالّة مما يأتي بيانيًّا، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-5

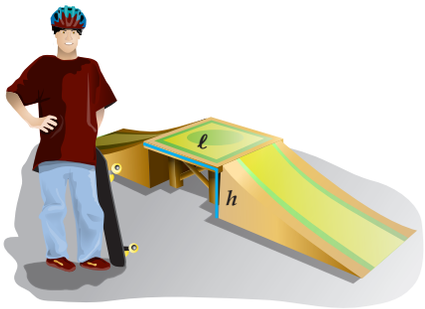
دوالّ التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:
درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:
التغيُّر الطردي
direct variation
ثابت التغيُّر
constant of variation
التغيُّر المشترك
joint variation
التغيُّر العكسي
inverse variation
التغيُّر المركّب
combined variation

لماذا؟

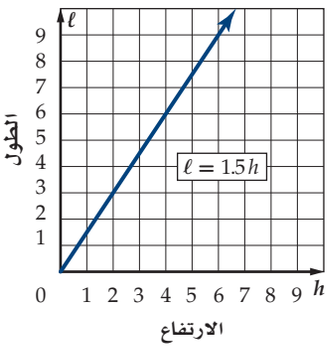


وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما (**تغيّرًا طرديًا**) كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة $(\frac{\ell}{h})$
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر
في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$ ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$
$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	تناسب طردي
$\frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$	$y_1 = 15, x_1 = 5, x_2 = 7$
$15(7) = 5(y_2)$	بالضرب التبادلي
$105 = 5y_2$	بسّط
$21 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 5

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث $x = 4, z = -5$ ، فإن قيمة y عندما

إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ،

تكون: $y = 5 \times 4 \times (-5) = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2z_2 \quad , \quad y_1 = kx_1z_1$$
$$\frac{y_2}{x_2z_2} = k \quad \frac{y_1}{x_1z_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$	تناسب مشترك
$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$	$y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9, z_2 = 2$
$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$	بالضرب التبادلي
$360 = 15y_2$	بسّط
$24 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 15

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي** ، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي

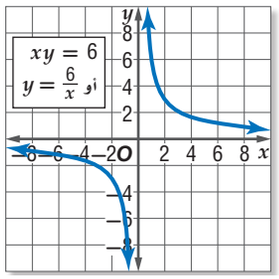
أضف إلى مطويتك

التغيُّر العكسي

التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًّا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

x	6	3	2
y	1	2	3



إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطىً فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k \text{ ، } x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

مثال 3

التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$a_1 b_1 = a_2 b_2$	تناسب عكسي
$28(2) = 10(a_2)$	$a_1 = 28, b_1 = 2, b_2 = 10$
$56 = 10(a_2)$	بسّط
$5\frac{3}{5} = a_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 10

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$.

يُستعمل التغيُّر العكسي في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

افترض أن $l_2 = 8$, $f_1 = 512, l_1 = 10$. وأوجد قيمة f_2.

$l_1 f_1 = l_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$	$f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$
$\frac{5120}{8} = f_2$	اقسم كل من الطرفين على 8
$640 = f_2$	بسّط

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

4) فضاء: يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = \frac{kx_2}{z_2} \quad , \quad y_1 = \frac{kx_1}{z_1}$$

$$\frac{y_2 z_2}{x_2} = k \qquad \frac{y_1 z_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 التغيُّر المركّب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h ، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

استعمل تناسبًا يربط القيم.

$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	تناسب مركب
$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$	$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$
$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$	اضرب تبادليًا
$-1296 = 12g_2$	بسّط
$-108 = g_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 12

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$. فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تأكد

الأمثلة 1—3

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4

4) **خرائط:** تتناسب المسافات على الخرائط تناسبًا طرديًّا مع المسافات الفعلية على سطح الأرض. إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

6) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

7) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2

إذا كانت a تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

9) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

10) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3

إذا كانت f تتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

11) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$.

12) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$.

مثال 4

13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5

14) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو تغيّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

17)

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

18) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كلٍّ منها :

19) $a = 27b$

20) $c = \frac{7}{d}$

21) $-10 = gh$

22) $m = 20cd$

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

23) كيمياء: يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t . وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $\left(v=\frac{kt}{p}\right)$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركًا أم مركّبًا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 لترات، ودرجة حرارتها 275° كلفن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى درجة حرارة 300° كلفن . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) جاذبية: ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67\times10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84\times10^{8}\ \text{m}$ تقريبًا، وكتلة القمر $7.36\times10^{22}\ \text{kg}$. وكتلة الأرض $5.97\times10^{24}\ \text{kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5\times10^{11}\ \text{m}$تقريبًا، وكتلة الشمس $1.99\times10^{30}\ \text{kg}$ تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركّب، تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح ؟ وضِّح إجابتك.

يوسف

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1y_1}{x_1},k=\frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1}=\frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1x_1}{y_1},k=\frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1}=\frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) تبرير: وضِّح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركّبًا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركّب مشتركًا.

27) مسألة مفتوحة: صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) اكتب: حدِّد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b=15$ عندما $c=2,\ a=4$ فما قيمة b عندما $a=7,\ c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركّب

مراجعة تراكمية

حدِّد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالّة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-5)

31) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$

32) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x-4}$

33) $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

34) $a,2a,a+1$

35) $8,24x,12$

36) $x^4,3x^2,2xy$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-6

حل المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية. الدرس (1-5)

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:

المعادلة النسبية
rational equation

المتباينة النسبية
rational inequality

لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة :

$\frac{200+10x}{x}$ ، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات والمتباينات النسبية : تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات؛ لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل
هو الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

المعادلة الأصلية	$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$
اضرب المعادلة في LCM للمقامات	$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$
اختصر العوامل المشتركة	$\frac{(x+3)(\cancel{x+5})(2x)}{\cancel{x+5}} - \frac{(\cancel{x+3})(\cancel{x+5})(x^2-x-10)}{\cancel{x^2+8x+15}} = \frac{(\cancel{x+3})(x+5)3}{\cancel{x+3}}$
	$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
بسّط	$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$
خاصية التوزيع	$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$
بسّط	$x^2+7x+10 = 3x+15$
اطرح $3x+15$ من كلا الطرفين	$x^2+4x-5 = 0$
حلّل إلى عوامل	$(x+5)(x-1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x+5=0$ أو $x-1=0$
	$x=-5$ أو $x=1$

تحقق: اختبر $x = -5$:

المعادلة الأصلية $\quad \frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$

$x = -5$ $\quad \frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$

بسّط $\quad$ ✗ $\frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2}$

اختبر $x = 1$:

المعادلة الأصلية $\quad \frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$

$x = 1$ $\quad \frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$

بسّط $\quad \frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$

وحّد المقامات $\quad \frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$

بسّط $\quad$ ✓ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

(1A $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

(1B $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

(1C $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

(1D $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة d والسرعة r والزمن t لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكنك استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$, $r = \frac{d}{t}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل الحركة

تجديف: **ركب سعيد قاربًا سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.**

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهابًا وإيابًا والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي: $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة

عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حل:

$$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$$ اكتب المعادلة

$$(6+v)(6-v)\frac{5}{6+v}+(6+v)(6-v)\frac{5}{6-v}=(6+v)(6-v)(3)$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات $(6+v)(6-v)$

$$\cancel{(6+v)}^{1}(6-v)\frac{5}{\cancel{6+v}^{1}}+(6+v)\cancel{(6-v)}^{1}\frac{5}{\cancel{6-v}^{1}}=(6+v)(6-v)(3)$$ اختصر العوامل المشتركة

$$(6-v)(5)+(6+v)(5)=(36-v^2)(3)$$ بسّط

$$30-5v+30+5v=108-3v^2$$ خاصية التوزيع

$$60=108-3v^2$$ بسّط

$$0=-3v^2+48$$ اطرح 60 من كلا الطرفين

$$0=-3(v+4)(v-4)$$ حلّل إلى عوامل

$$0=(v+4)(v-4)$$ اقسم كل من الطرفين على -3

$v=4$ أو $v=-4$ (مرفوض؛ لأن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة) خاصية الضرب الصفري

تحقق:

$$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{5}{6+4}+\frac{5}{6-4}\stackrel{?}{=}3$$ $v=4$

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}3$$ بسّط

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}\ \checkmark$$ بسّط ووَحّد المقامات

لذا؛ فإن سرعة التيار هي 4 mi/h .

تحقق من فهمك

2) طيران: إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟

الربط بالحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العلب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها. وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنويًا.

يمكنك حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة **استعمال المعادلات والمتباينات النسبية في مسائل العمل**

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الأول الثانوي لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معًا
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

إرشادات للدراسة

جداول

تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

وزارة التعليم
Ministry of Education

حُل:

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$$ اكتب المعادلة

$$72j\,\frac{1}{24}+72j\,\frac{1}{j}=72j\,\frac{1}{18}$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات وهو $72j$

$$\overset{3}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\cancel{24}_{1}}+72\cancel{j}\,\frac{1}{\cancel{j}_{1}}=\overset{4}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\cancel{18}_{1}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$3j+72=4j$$ بسّط

$$72=j$$ اطرح $3j$ من كلا الطرفين

تحقق:

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{72}\overset{?}{=}\frac{1}{18}$$ $j=72$

$$\frac{3}{72}+\frac{1}{72}\overset{?}{=}\frac{4}{72}$$ LCM للمقامات هو 72

$$\frac{4}{72}=\frac{4}{72}\ \checkmark$$ بسّط

يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

3) طلاء: يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية: **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدِّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلًا من رمز التباين في المتباينة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4 — حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3}-\frac{1}{x-2}<\frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{x-2}=\frac{x+1}{4}$$ المعادلة المرتبطة

$$\overset{4}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x}{\cancel{3}_{1}}-\overset{1}{\cancel{12}}(x-2)\frac{1}{\cancel{x-2}_{1}}=\overset{3}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x+1}{\cancel{4}_{1}}$$ اضرب في LCM للمقامات: $12(x-2)$

$$4x^2-8x-12=3x^2-3x-6$$ خاصية التوزيع

$$x^2-5x-6=0$$ اطرح $3x^2-3x-6$ من كلا الطرفين

$$(x-6)(x+1)=0$$ حلّل إلى عوامل

$$x=6 \text{ أو } x=-1$$ خاصية الضرب الصفري

إرشادات للدراسة

تقسيم خط الأعداد

من الضروري استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الخطوة 3: ارسم خطًّا رأسيًّا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = -3$

$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$

$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$

✓ $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$

اختبر $x = 0$

$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$

$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$

اختبر $x = 4$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$

✓ $\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$

اختبر $x = 8$

$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$

$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$

$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

الجملة صحيحة عندما $x = -3, x = 4$ ؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك

(4A $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$

(4B $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(1 $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

(2 $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3 $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

(4 $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

(5 مسافة: قطع وليد مسافة 40 km ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 km/h عندما تكون الريح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 3

(6 تبليط: يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 4 حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(7 $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

(8 $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

(9 $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(10 $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

(11 $\frac{2}{y-5} + \frac{1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

المثالان 2, 3

12) **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

13) **طيران:** سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20 h ، واحتاجت إلى 16 h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 4

14) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$.

15) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x-3}$.

a) جبريًا: حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) بيانيًا: مثّل: $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ ، $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0<x<5$.

c) تحليليًا: ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) لفظيًا: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع(c) ؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

16) حُلّ المعادلة: $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلُّها بضرب طرفَي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

18) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$

19) **تبرير:** وضِّح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية.

20) **اكتب:** عند استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالّة: $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ ، فإن الحاسبة البيانية تعطي خطأ عند القيمتين $x=-2$ و $x=3$. وضِّح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

21) ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

22) ما قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ ؟

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

مراجعة تراكمية

23) حدِّد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيّرًا طرديًّا، أم تغيرًا عكسيًّا، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًّا. (الدرس 4-5)

25) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: ... 2, 8, 14, 20, (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حلُّ المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف

أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأحلَّ معادلات ومتباينات نسبية بيانيًا أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحلِّ معادلات نسبية باستعمال التمثيل البياني أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

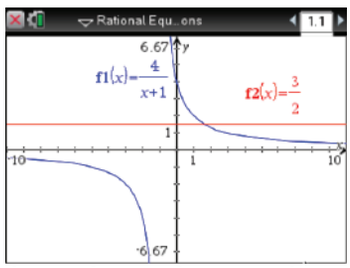
نشاط 1 معادلة نسبية

حُلَّ المعادلة $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

مثِّل طرفَي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا كدالّتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷) ، ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط (enter) ، ثم اضغط المفاتيح (÷) (ctrl) (tab) واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط (enter)

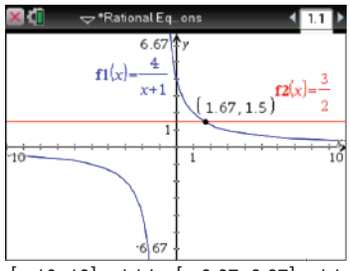


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

الخطوة 2 أوجد نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

تمكِّنك ميـزة نقاط التقاطع في قائمة تحليل الرسـم البياني من تقدير الزوج المرتَّب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على (menu) ثم اختر منها 6:تحليل الرسم البياني ، ثم اختر 4:نقاط التقاطع ، وقم بالضغط على أيِّ نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، فتظهر نقطة التقاطع (1.67 , 1.5).

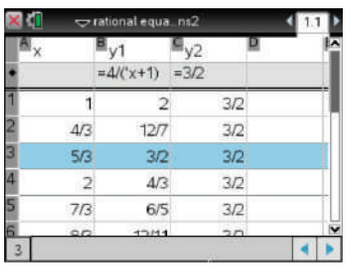


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

أي أن الحل هو $x = 1.67 \approx \frac{5}{3}$.

الخطوة 3 استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحَّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x، على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات ، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 1 وبزيادة قدرها $\frac{1}{3}$ (لأن الحلّ الذي ستتحقَّق منه هو $x=\frac{5}{3}$)، واكتب $y_1=\frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $y_2=\frac{3}{2}$ في العمود الثالث، ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير ، فتظهر الشاشة المجاورة.



يبيِّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكلِّ تمثيل بياني. فعندما $x=\frac{5}{3}$ ،

يكون للدالّتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حلَّ المعادلة هو $\frac{5}{3} \approx 1.67$.

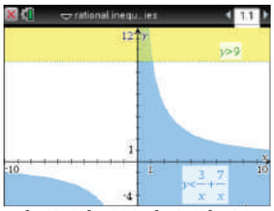
يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحلِّ متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}>9$.

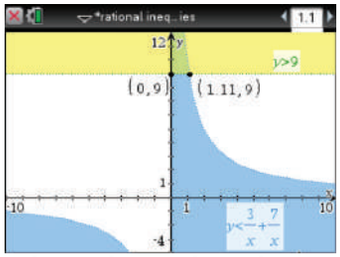
الخطوة 1 مثِّل المتباينتين

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y<\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$، والثانية $y>9$، ومثِّلهما بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ثم <، واكتب $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ ثم اضغط enter، فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح > del tab، واكتب 9، ثم اضغط enter، ولإظهار الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختر 1:اعدادات النافذة ثم 4:تكبير/ تصغير النافذة لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x , y ، ولاحظ أن منطقة حلِّ المتباينتين قد ظُلِّلت باللون الأخضر.



[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

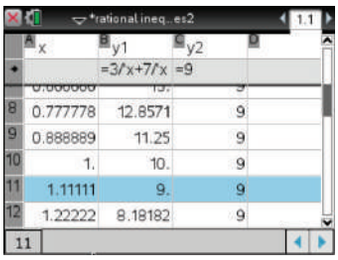


[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

لإيجاد نقطة (نقاط) تقاطع التمثيلين البيانيين اضغط menu ثم 8:الهندسة ومنها 1:النقاط والمستقيمات، واختر منها 3:نقطة (نقاط) التقاطع واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11 , 9)، كرِّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y، والتمثيل البياني لِـ $y=9$؛ فتظهر نقطة التقاطع (0 , 9) لتتوصَّل إلى أن مجموعة الحلِّ هي $\{x \mid 0<x<1.11\}$.

الخطوة 3 استعمل تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات .
اعمل جدولًا يبيِّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ أو 0.111111 كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ومنها اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 0 وبزيادة قدرها $\frac{1}{9}$(لأن الحلِّ الذي ستتحقق منه هو $x=1.11$).
واكتب $y_1=\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و$y_2=9$ في العمود الثالث.



تنقَّل بالمؤشِّر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9}\approx 1.11$ ، يكون عندها $y_1>y_2$.
وهذا يؤكد أن مجموعة حلِّ المتباينة هي: $\{x \mid 0<x<1.11\}$

تمارين

حُلَّ كلَّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x}$
2) $\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$
3) $\frac{4}{x}=\frac{6}{x^2}$
4) $\frac{1}{1-x}=1-\frac{x}{x-1}$
5) $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x^2+3x-4}-\frac{1}{1-x}$
6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}>5$
7) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}<0$
8) $1+\frac{5}{x-1}\le 0$
9) $2+\frac{1}{x-1}\ge 0$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 2-5 , 1-5)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية (الدرسان 4-5 , 3-5)

- دالّة المقلوب هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوالّ، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالّة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 5-5)

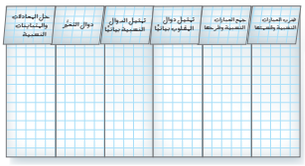
- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y=\frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$.
- التغيُّر المركب: ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 6-5)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- لحل المتباينات النسبية، حل المعادلات المرتبطة، واستعمل القيم التي تحصل عليها لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات:

العبارة النسبية ص 70
الكسر المركب ص 73
خط التقارب ص 85
خط التقارب الرأسي ص 85
خط التقارب الأفقي ص 85
دالّة المقلوب ص 85
القطع الزائد ص 85
الدالّة النسبية ص 92
نقطة الانفصال ص 94
التغيُّر الطردي ص 99
ثابت التغيُّر ص 99
التغيُّر المشترك ص 100
التغيُّر العكسي ص 101
التغيُّر المركب ص 102
المعادلة النسبية ص 105
المتباينة النسبية ص 108

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان _____ فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن _____ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر _____ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y=\frac{x}{x+2}$ له _____ عند $x = -2$.

6) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتَي حدود _____ .

8) تظهر _____ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة غير معرّفة عندها.

9) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

مراجعة الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 70-78

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

11) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) هندسة: مثلَّث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته، ثم اكتبه في أبسط صورة.

مثال 1

بسّط العبارة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$.

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b}{\cancel{3} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot a}$

بسّط: $= \frac{6b^3}{a}$

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$.

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $= \frac{\cancel{r}(r+5)}{\cancel{2r}} \cdot \frac{\cancel{6}(r-2)}{(r+5)(r-5)}$

بسّط: $= \frac{3(r-2)}{r-5}$

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 79-84

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

16) $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

17) $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

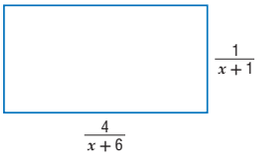
18) $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

19) $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) هندسة: أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه ، ثم اكتبه في أبسط صورة.



مثال 3

بسّط العبارة: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$.

حلّل المقام a^2-4: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$

وحّد المقامين: $= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

اطرح البسطين: $= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

خاصية التوزيع: $= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$

بسّط: $= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

5-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا ص 85-90

مثّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) تشجير: يقوم طلاب الصف الثاني الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالّة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

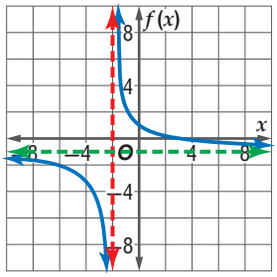
مثال 4

مثّل الدالّة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالّة الأم رأسيًّا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين. وَيوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة. وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا ص 92-97

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) مبيعات: يبيع عليٌّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وباع لكلٍّ منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالّة $P(x) = \frac{10 + x}{15 + x}$.

a) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) ما القيم المنطقية لكلٍّ من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$

الدالّة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

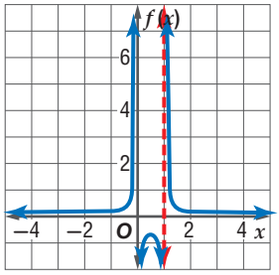
وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالّة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًّا.

الدالّة غير معرفة عند $x = 0$، وعند $x = 1$.

وبما أن الدالّة في أبسط صورة، فإن $x = 0$ ، و $x = 1$ خطَّا تقارب رأسيَّان للدالّة.



ارسم الخطين والدالّة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education

5-5 دوالّ التغيُّر ص 99-104

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b ، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت x تتغيّر تغيّرًا طرديًّا مع y وعكسيًّا مع r، وكانت $y = 6$، عندما $r = 4$ و $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 8$ و $r = 10$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$	تناسب عكسي
$24(-8) = x_2 \times 15$	$x_1 = 24 , y_1 = -8 , y_2 = 15$
$-192 = 15x_2$	بسّط
$-12\frac{4}{5} = x_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$ ، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 105-110

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **زراعة:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليٌّ زراعتها في 4 h . فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2 - 2 = 0 \quad ✓$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبار الفصل

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $\frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

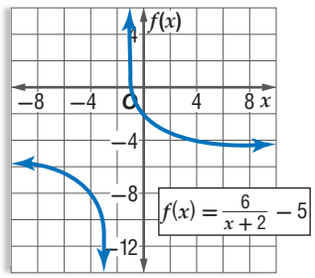
5) $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدِّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالّة الممثلة بيانيًّا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالّة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x = -2$ **C** $x = 1$

B $x = -1$ **D** $x = 2$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

11) $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12) $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13) $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14) $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

17) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20) $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21) $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22) $r + \frac{6}{r} < 5$

23) $\frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$

24) $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

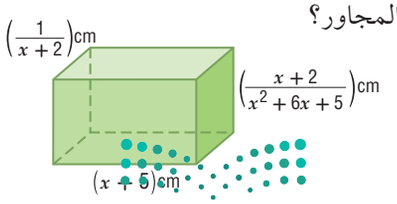
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ و $t = -5$. فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ و $t = 2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) **هندسة:** ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟



التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختيار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كلٍّ منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة.

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- معادلات: إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممَّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلًّا منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

خمن: -1	تحقق:
	$\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$
	✗ $-\frac{5}{2}\neq -1$

خمن: 1	تحقق:
	$\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$
	✗ $-2\neq -1$

خمن: 5	تحقق:
	$\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$
	✓ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x=5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A $\frac{1}{10}$ **B** $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$

2) أعمار: مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلَي عُمر محمود بسنة واحدة، وعُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟

A 7 **B** 15

C 14 **D** 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A -5 **B** 4

C 3 أو 2 **D** 2 أو -5

4) مبيعات: تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر . فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟

A 10 ريالات **B** 15 ريالًا

C 13 ريالًا **D** 20 ريالًا

وزارة التعليم
Ministry of Education

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي :

1) فنادق: تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أيِّ اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالّة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركّب $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

C 5

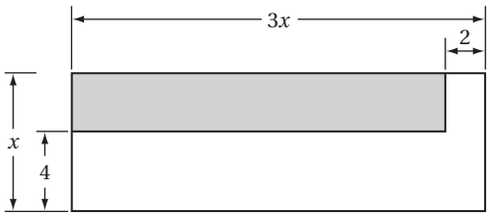
D 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=12$ عندما $x=-3$، فأوجد قيمة y عندما $x=16$.

9) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z، وكانت $z=26$ عندما $x=8$ و $y=13$، فأوجد قيمة z عندما $x=8$ و $y=-6$.

10) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y=4$ عندما $x=12$، فأوجد قيمة y عندما $x=5$.

11) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كلَّ يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا.

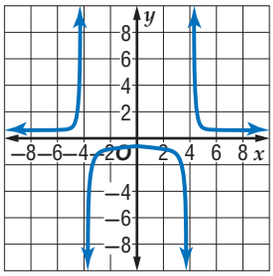
b) هل الصيغة التي وضعتها تُمثّل تغيّرًا طرديًّا أم مشتركًا أم عكسيًّا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

12) استعمل التمثيل البياني للدالّة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالّة النسبية.



13) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالّتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(x)=x^2$
$g(x)=x-5$

b) $f(x)=6-x^2$
$g(x)=2x^2+3x-5$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	5-5	5-3	5-3	5-1	مهارة سابقة	5-6	مهارة سابقة	5-5	5-5	5-5	5-5	5-4	مهارة سابقة

وزارة التعليم
Ministry of Education
1442 - 1444

الفصل 6

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

فيما سبق:

درست الأنماط الجبرية، والمتتابعات الحسابية بوصفها دوالّ خطية.

والآن:

- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدَّين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا؟

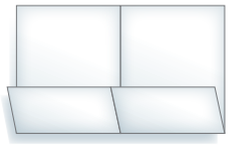
بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتَّى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلًا تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبّاع الشمس، بحيث يتكوّن الشكل الحلزوني المعروف بدوّامة فيبوناشي.

المطويات منظِّم أفكار

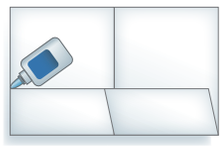
المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.

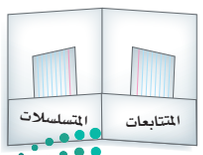
2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار 5 cm لعمل جيبٍ كما في الشكل.



3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.



4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل السادس

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة"؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 3-6)

1) $-6 = 7x + 78$

2) $768 = 3x^4$

3) $23 - 5x = 8$

4) $2x^3 + 4 = -50$

5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوالّ الآتية بيانيًّا: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$

9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$

10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضمُّ c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المُعطَاة. (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

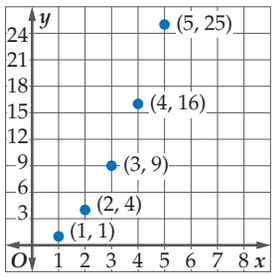
مثال 1

حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$25 = 3x^3 + 400$	المعادلة الأصلية
$-375 = 3x^3$	اطرح **400** من الطرفين
$-125 = x^3$	اقسم الطرفين على **3**
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	خُذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بسّط

مثال 2

مثّل الدالّة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانيًّا. ثم حدِّد كلًّا من المجال والمدى.



مجال الدالّة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالّة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أمّا مدى الدالّة فهو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالّة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $y = -3$, $x = -2$ ، فأوجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$	عوّض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بسّط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-1

المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:
درست الدوالّ الخطية والدوالّ الأسيّة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرّف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالّة خطية.
- أتعرّف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالّة أُسّية.

المفردات:
- المتتابعة sequence
- الحدّ term
- المتتابعة المنتهية finite sequence
- المتتابعة غير المنتهية infinite sequence
- المتتابعة الحسابية arithmetic sequence
- أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) common difference
- المتتابعة الهندسية geometric sequence
- أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) common ratio

لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كلِّ صفٍّ كما يأتي: مشارك واحد في الصفِّ الأول، وثلاثة في الصفِّ الثاني، وخمسة في الصفِّ الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمطٍ محدّدٍ أو ترتيب معين، ويُسمّى كلُّ عدد في المتتابعة **حدًّا**.

ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: $2-, 0, 2, 4, 6$، أو **غير منتهية**، حيث تستمر إلى مالانهاية مثل ... $0, 1, 2, 3,$. ويُرمز للحدّ الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحدّ الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — المتتابعات بوصفها دوالّ

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالّة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الرموز:

عناصر المجال:	1 2 3 ... n	ترتيب الحدّ
عناصر المدى:	a_1 a_2 a_3 ... a_n	حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كلُّ حدّ في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

3 (+3) 6 (+3) 9 (+3) 12 (+3) 15

مثال 1 — تحديد المتتابعة الحسابية

بيِّن ما إذا كانت كلّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) 5, −6, −17, −28, ...

5 (−11) −6 (−11) −17 (−11) −28

الفرق الثابت هو 11−

المتتابعة حسابية

b) −4, 12, 28, 42, ...

−4 (+16) 12 (+16) 28 (+14) 42

الفرق غير ثابت

المتتابعة ليست حسابية

تحقق من فهمك

1A) 7, 12, 16, 20, ...

1B) −6, 3, 12, 21, ...

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًّا

في المتتابعة الحسابية: ... ,10 ,14 ,18

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أيَّ حدّ من حدود المتتابعة من الحدّ السابق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $-4 = 14 - 10$. ويُمثّل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، أضف -4 للحدّ الأخير المُعطَى.

وهكذا أضف -4 لكل حدّ من الحدود التالية.

$$10 \xrightarrow{+(-4)} 6 \xrightarrow{+(-4)} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{+(-4)} -6$$

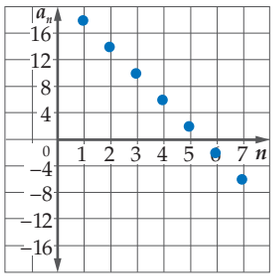
إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $-6, -2, 2, 6$

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

ومدى المتتابعة هو المجموعة: $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, ...\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا بالشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,4 ,11 ,18
ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الحسابية

هو الفرق بين كلّ حدّين متتاليين (الحدّ – سابقه) ابتداءً من الحدّ الثاني .

لاحظ أن النقاط التي تُمثّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالّة خطية مجالها أو متغيّرها المستقل هو رقم الحدّ n، ومداها أو متغيّرها التابع هو الحدّ a_n، والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

الربط بالحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظّمون بعمل ترتيبات خاصّة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

المهرجانات الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم: بما أن الفرق الثابت بين كلِّ حدّ والحدّ السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط: اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افترض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$, $m = 2$. ثم حُلّ المعادلة عندما $x = 14$

حُلّ:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كلٍّ من طرفَي المعادلة
$y = 2(14) - 1$	عوّض 14 مكان x
$y = 28 - 1 = 27$	بسّط

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركًا.

تحقّق: يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صفٍّ، بدءًا من الصفِّ الأول حتى نصل إلى الصفِّ الرابع عشر.

تحقق من فهمك

3) نقود: ادّخر عامل في يوم ما 20 ريالًا من أجره اليومي، فإذا علمت أنه يدّخر في كل يوم 5 ريالات زيادة على اليوم السابق، فكم ريالًا يدَّخر في اليوم الثاني عشر؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
1443 - 1444

المتتابعة الهندسية: **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حدٍّ من حدودها بضرب الحدّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدّ السابق له مباشرة.

$\frac{1}{16}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ 1 $\xrightarrow{\times 4}$ 4 $\xrightarrow{\times 4}$ 16

تنبيه!

النسب

إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحدّ السابق له، فأوجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

هو النسبة بين كل حدّين متتاليين، الحدّ ÷ سابقه ابتداءً من الحدّ الثاني.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدّين متتاليين.

$\frac{54}{-18} = -3$, $\frac{-18}{6} = -3$, $\frac{6}{-2} = -3$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$\frac{24}{16} = 1.5$, $\frac{16}{8} = 2$

بما أن النسبتين غير متساويتين؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$ **4B)** $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًّا

المتتابعة: $32, 8, 2, \ldots$ متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، اضرب الحدّ السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كلِّ حدّ في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

2 $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{8}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{32}$

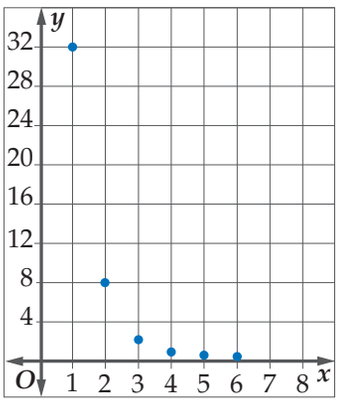
إذن الحدود الثلاثة التالية هي: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

b) مثّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.\}$

مدى المتتابعة هو: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots.\right\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

5) أوجد الحدّين التاليين في المتتابعة الهندسية: $\ldots, 7, 21, 63$ ، ثم مثّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًّا.

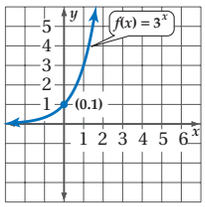
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تفحَّص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّيٌّ وليس خطيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بوصفها دالّة أسّية في الصورة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية، و $r > 0$ و $r \neq 1$

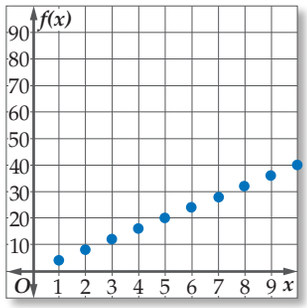
إرشادات للدراسة

الدالّة الأسّية

هي الدالّة التي تكون على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$, $b \neq 1$، وهي متصلة ومتباينة، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خطٌّ تقارب أفقي هو المحور x، ويمرُّ منحناها بالنقطة $(0, 1)$ دائمًا، فمثلًا $f(x) = 3^x$ دالّة أسّيّة تمثيلها البياني هو

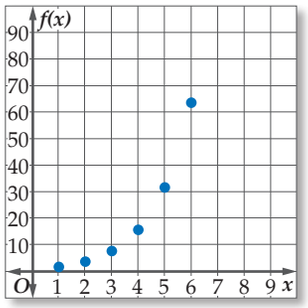


حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

ويمكنك استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) 16, 24, 36, 54, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$54 - 36 = 18$ $\quad$ $36 - 24 = 12$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

بما أن النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

b) 1, 4, 9, 16, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$16 - 9 = 7$ $\quad$ $9 - 4 = 5$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7}$ $\quad$ $\frac{9}{4} = 2.25$ ✗

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ليس عددًا ثابتًا، وكذلك النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ليست ثابتة أيضًا؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

c) 23, 17, 11, 5, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$5 - 11 = -6$ $\quad$ $11 - 17 = -6$ $\quad$ $17 - 23 = -6$ ✓

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

تحقق من فهمك

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $-4, 4, -5, 5, \ldots$

تأكـد

مثال 1 بيِّن ما إذا كانت كلّ متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$ **2)** $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$ **4)** $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3 **5)** **توفير:** يوفِّر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

a) المبلغ الذي سيصبح معه بعد مرور 8 أشهُرٍ.

b) الوقت الذي يحتاج إليه ليصبح معه 7250 ريالًا، إذا استمر في التوفير بالطريقة ذاتها.

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$ **7)** $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$ **9)** $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$ **11)** $200, -100, 50, -25, \ldots$ **12)** $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

13) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$ **14)** $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$ **16)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$ **17)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3 **18)** **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كلِّ صفٍّ تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) **تمارين قوة:** يقوم عليٌّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدَّة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدَّة الاستعمال بمعدَّل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.

a) ما مدَّة استعمال عليٍّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟

b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدَّة ساعة أو أكثر؟

c) هل يُعدّ استمرار عليٍّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيِّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

20) $21, 14, 7, \ldots$ **21)** $-27, 18, -12, \ldots$ **22)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$ **24)** $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ **25)** $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$ **27)** $1, -2, -5, -8, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

32) قراءة: أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضمُّ 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) نقص القيمة: تنقص قيمة سيَّارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرّبًا الجواب إلى أقرب ريال؟

34) طيُّ الأوراق: عند طيِّ ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكُها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm، وأمكن طيُّها 37 مرَّة، فكم يصبح سمكها؟

الربط بالحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدَّل 15% إلى 20% سنويًّا؛ وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) تحدٍّ: إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هذه الحدود؟

36) مسألة مفتوحة: أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلٌّ منها كما يأتي $3, 9, \ldots$. بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

37) تبرير: إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

38) اكتب: صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلَي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

39) إجابة قصيرة: صالة مستطيلة الشكل بُعدَاها 13 مترًا، و11 مترًا. أردنا وضع سجادة تغطِّيها كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

40) ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية التالية:

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$ **B** $\frac{27}{16}$ **C** $\frac{9}{4}$ **D** $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

41) حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 6-5)

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

42) المارّ بالنقطة $(4, 6)$، وميله 0.5 .

43) المارّ بالنقطتين $(3, 1)$, $(8, -\frac{1}{2})$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:
الأوساط الحسابية arithmetic means
المتسلسلة series
المتسلسلة الحسابية arithmetic series
المجموع الجزئي partial sum
رمز المجموع sigma notation

لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية: لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6؛ لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية a_n ، ... ، a_3 ، a_2 ، a_1 التي أساسها d يكون:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ اجمع a_1 للطرفين

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d ، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: ... ، 30 ، 23 ، 16 ، 9

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$ $a_1 = 9$ ، $d = 7$ ، $n = 12$

$= 9 + 77 = 86$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

1A) a_n علمًا بأن: $a_1 = -4$ ، $d = 6$ ، $n = 9$

1B) a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15$ ، $d = -8$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة الحدّ النوني لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $5, -13, -31, \ldots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحدّ الأول 5

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$a_1 = 5$ و $d = -18$
$a_n = -18n + 23$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

b) $a_5 = 19,\ d = 6$

الخطوة 1: أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$a_5 = 19,\ n = 5,\ d = 6$
$-5 = a_1$	اضرب، ثم اطرح 24 من الطرفين

الخطوة 2: كتابة الصيغة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$a_1 = -5$ و $d = 6$
$a_n = 6n - 11$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12,\ d = 8$

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدَّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $-8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 22$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحدّ الأول والحدّ الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$22 = -8 + (6-1)\,d$	$a_1 = -8,\ a_6 = 22,\ n = 6$
$30 = 5d$	أضف 8 إلى الطرفين، ثم بسّط
$6 = d$	اقسم الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $-18, 36$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحلّ

تحقّق من صحة الحلّ، باستعمال صيغة الحدّ النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدَّل عددين أو أكثر. الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a+b}{2}$

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أيّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

المتسلسلات الحسابية: يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا فالمتسلسلة **الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n, n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1, d, n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم n, a_n, a_1 ، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

مثال 4

استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12\ ,\ a_n = 180\ ,\ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولًا كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$180 = 12 + (n-1)(7)$	$a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$
$168 = 7n - 7$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط
$25 = n$	حُلَّ المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n .

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	صيغة المجموع
$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$	$n = 25, a_1 = 12, d = 7$
$S_{25} = 12.5(192) = 2400$	بسّط

تحقق من فهمك

(4A) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(4B) $n = 16, a_n = 240, d = 8$

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال 5

إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $S_n = 430,\ a_1 = 7,\ a_n = 79$

الخطوة 1: أوجد قيمة n .

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$430 = \frac{n}{2}(7 + 79)$	$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$
$430 = \frac{n}{2}(86)$	اجمع
$430 = n(43)$	بسّط
$10 = n$	اقسم طرفَي المعادلة على 43

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الخطوة 2: أوجد قيمة d .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
$72 = 9d$	اطرح 7 من طرفي المعادلة
$8 = d$	اقسم طرفي المعادلة على 9

الخطوة 3: استعمل d لحساب كلٍّ من a_2 , a_3 .

$a_2 = 7 + 8 = 15$ ، $a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن الحدود الثلاثة الأولى هي 7, 15 , 23

تحقق من فهمك

(5A) $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$

(5B) $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي — رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ — $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة؛ k: أول قيمة لـ k؛ n: آخر قيمة لـ k

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما"، وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كلَّ حدّ يزيد على الحدّ السابق له بمقدار 6،

ويوجد فيها 15 حدًّا $(n = 15)$؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$a_1 = 6(4) - 1 = 23$ ، $a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_{15} = \frac{15}{2}(23 + 107)$	$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$
$S_{15} = \frac{15}{2}(130) = 975$	بسّط

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو **C** .

إرشادات للدراسة

عدد الحدود

المتسلسلة المكتوبة باستعمال رمز المجموع $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ عدد حدودها يساوي $b - a + 1$

تحقق من فهمك

6) أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

1) a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

3) $13, 19, 25, \ldots$

4) $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$

6) $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

7) أول 50 عددًا طبيعيًّا

8) $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

10) $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

12) $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 **13)** **اختيار من متعدد:** أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

15) a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

16) a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \ldots$

17) a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ متتابعة حسابية فيما يأتي:

18) $24, 35, 46, \ldots$

19) $a_5 = 1.5, d = 4.5$

20) $9, 2, -5, \ldots$

21) $a_6 = 22, d = 9$

22) $a_8 = -8, d = -2$

23) $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

24) $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

25) $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

26) $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

27) $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 4 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) **مسابقات ثقافية:** في إحدى المسابقات الثقافية تم تخصيص جوائز تصاعدية للإجابة الصحيحة عن أسئلة المسابقة، فخُصِّص للسؤال الأول 100 ريال، وتزيد قيمة الجائزة 50 ريالًا للسؤال التالي، وهكذا. إذا شارك سعد في المسابقة، وأجاب عن 11 سؤالًا بصورة صحيحة، فما مجموع مبلغ الجائزة الذي يستحقُّه؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k-2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k+1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k+6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k+2)$

43) **قرض حسن:** اقترض عليٌّ مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسَّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟

الربط بالحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ ... ﴿٢٨٢﴾﴾

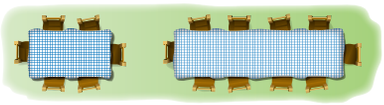
استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحدّ النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحدّ رقم 100 في المتتابعة يساوي 245، وأساس المتتابعة يساوي 13 .

45) الحدّ الحادي عشر في المتتابعة يساوي 78، وأساس المتتابعة يساوي -9 .

46) الحدّ الخامس والعشرون في المتتابعة يساوي 121، والحدّ الثمانون يساوي 506 .

47) **تنظيم:** تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورةً لتُشكّل طاولة كبيرة. ويُبيّنُ الشكل المجاور عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.



a) ارسم شكلًا يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كلٍّ من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كلَّ مرَّة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحدّ النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

48) جاذبية: عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) دخل سنوي: إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة في السنة الأولى 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، ففي أيّ سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) رياضة: خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثَمَّ يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحدّ النوني لهذه المتتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.

الربط بالحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

51) تمثيلات متعددة: معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \le k \le 10$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a**، وذلك بتمثيل النقاط (k, S_k) .

c) بيانيًّا: مثّل الدالّة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 \le x \le 10$.

d) لفظيًّا: ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) تحليليًّا: ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) جبريًّا: أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها التمثيل البياني للمجاميع الجزئية (k, S_k) هو نفسه للدالّة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: إذا كان a هو الحدّ الثالث في متتابعة حسابية، وb هو الحدّ الخامس، وc هو الحدّ الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b .

55) تحدٍّ: يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فأوجد الوسط الحسابي للعددين a, b.

56) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود، ومجموعها 324 .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

57) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

58) **صيغ:** اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية.

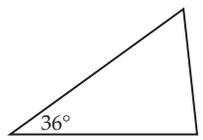
59) **صيغ:** اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) **صيغ:** اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) **تحدّ:** بالعودة إلى فقرة "لماذا ؟" ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت).

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى $36°$، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A $75°$ **B** $84°$

C $90°$ **D** $97°$

63) العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$ **B** $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$ **D** $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

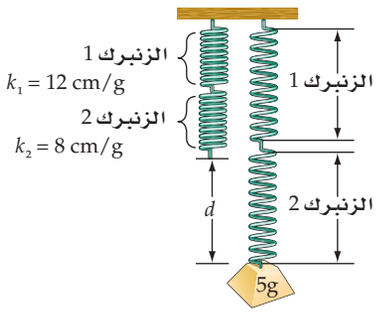
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا" : (الدرس 1-6)

64) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

65) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

66) $10, 8, 5, 1, \ldots$

67) **فيزياء:** ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبَّر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، وm الكتلة، وk ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يُحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 5-6)



a) إذا وُصِل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$ ، فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

68) $2 \cdot 3^6$

69) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

70) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الهندسية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة هندسية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا هندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:
الأوساط الهندسية
geometric means
المتسلسلة الهندسية
geometric series

لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت، وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كلٌّ واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كلٌّ من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدُدٍ. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحدِّ النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ من حدودها.

مفهوم أساسي — **الحد النوني في المتتابعة الهندسية**

أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1، وأساسها r، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (39)

مثال 1 من واقع الحياة — **إيجاد الحدّ النوني في متتابعة هندسية**

بريد إلكتروني: في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسَلة في المرحلة الثامنة؟

افهم: تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كلُّ شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كلَّ شخص استلم رسالة واحدة).

خطط: يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كلِّ مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$، لذا استعمل صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

حُلّ:

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية — $a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 5, r = 5, n = 8$ — $a_8 = 5(5)^{8-1}$

$5^7 = 78125$ — $a_8 = 5(78125) = 390625$

وعليه فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقّق: اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

$5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625$

تحقق من فهمك

1) أمطار: في أثناء هطول الأمطار ونزولها من أعلَى تلّةٍ إلى أحد الوديان، صنعت الأمطار مجرًى لها في الوادي طوله 40 in ، إذا كان هذا المجرى يتسع كلّ يومٍ ثلاثة أمثال اليوم السابق لعمقه. سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الأمطار بهذا المنوال؟

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحدّ النوني لها.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني لمتتابعة الهندسية

اكتب صيغة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

a) $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

الحدّ الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 0.5, r = 4 \quad a_n = 0.5\,(4)^{n-1}$

b) $a_4 = 5, r = 6$

الخطوة 1: إيجاد a_1

الحد النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 5, r = 6, n = 4 \quad 5 = a_1(6^{4-1})$

أوجد قيمة 6^3 ثم اقسم عليها $\quad \frac{5}{216} = a_1$

الخطوة 2: كتابة الصيغة

الحد النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = \frac{5}{216}, r = 6 \quad a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$

تحقق من فهمك

2A) $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$

2B) $a_3 = 16, r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدَّين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $3 + 2 = 5$ ، ولذلك يكون $n = 5$.

الخطوة 2: أوجد قيمة r

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية $\quad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5 \quad 1250 = 2r^{5-1}$

اقسم الطرفين على 2، ثم أوجد الجذر الرابع $\quad \pm 5 = r$

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$ أو $2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي : $-250, 50, -10$ أو $10, 50, 250$

تحقق من فهمك

3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5, 512

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

يمكن بسهولة استنتاج قاعدة تساعد على إيجاد أساس المتتابعة الهندسية (r) إذا عُلم حدَّان من حدودها a_n ، a_m

$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

المتسلسلات الهندسية: يمكنك الحصول على **المتسلسلة الهندسية** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويُرمز لمجموع أول n حدًّا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكنك إيجاده باستعمال أيٍّ من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي — المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

مثال 4 من واقع الحياة — إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

بريد إلكتروني: **بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المُرسَلة حتى نهاية المرحلة الثامنة؟**

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.

إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5(1-5^8)}{1-5}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_8 = 488280$ بسّط

إذن مجموع الرسائل المرسَلة حتى 8 مراحل هو : 488280 .

تحقق من فهمك

4) بكتيريا: ينمو أحد أنواع البكتيريا في وسط غذائي، بحيث ينقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة، ثم إلى ثمانية وهكذا. إذا بدأ مجتمع هذا النوع من البكتيريا بعدد 10، فما مجموع البكتيريا فيه بعد 8 انقسامات؟

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه طُلب إيجاد المجموع من الحدّ الثالث إلى الحدّ العاشر.

مثال 5 — المجموع باستعمال رمز المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

لاحظ أن المتسلسلة المُعطاة هندسية؛ لأن صيغة حدودها $4(2)^{k-1}$ مُعطاة بدالّة أُسيّة، إذن $r = 2$ ،

والآن أوجد قيمة كلٍّ من n ، a_1 ، ولإيجاد الحدّ الأول عوِّض العدد 3 مكان k، ويستخرج كما يأتي:

$a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$ ، وأساس المتسلسلة الهندسية هو r ، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو : $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{16(1-2^8)}{1-2}$ $a_1 = 16, r = 2, n = 8$

$= 4080$ استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

5A) $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B) $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

يمكنك استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حدٍّ معيَّن من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحدّ الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$	صيغة المجموع
$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$	$S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$
$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$	استعمل خاصية التوزيع
$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$	اطرح
$13116 = 1093a_1$	بسِّط
$12 = a_1$	اقسم الطرفين على 1093

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكد

مثال 1

1) فيروسات: اخترق فيروس حاسوبًا، فأتلف أحد ملفاته، فإذا كانت الملفات التي يُتلفها الفيروس تتضاعف كلَّ دقيقة، فما مجموع الملفات التي سيُتلفها الفيروس بعد 15 دقيقة، إذا لم تتمّ السيطرة عليه؟

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$ **3)** $-4, 16, -64, \ldots$ **4)** $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $0.25, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 64$ **6)** $0.20, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 125$

مثال 4

7) تدريب: قامت شركة تعمل في مجال التطوير بإرسال 4 من خبرائها إلى بعض الدوائر التعليمية؛ لتدريب العاملين في هذه الدوائر على كيفية استخدام وتوظيف التكنولوجيا في تدريس المناهج، فقام كلٌّ خبيرٍ منهم بتدريب 3 من مشرفي هذه الإدارات، وبدورهم قام كلُّ مشرفٍ منهم بتدريب 30 آخرين وهكذا ...
إذا استمر هذا النمط، فما مجموع المتدرِّبين الذين سيتم تدريبهم حتى المرحلة السادسة؟

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$ **9)** $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6

أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$ **11)** $S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

مثال 1

12) طقس: نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟

أوجد a_n في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2 , 16

مثال 4

24) بندول: يقطع بندول مسافة 30 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 اهتزازة.

الربط بالحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتزُّ اهتزازات منتظمة تقريبًا.

والاهتزازة الواحدة تعني حركة البندول جيئة وذهابًا حول موضع اتزانه.

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

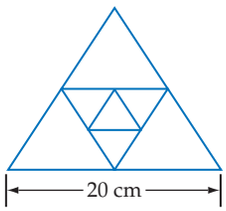
أوجد قيمة a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) علوم: ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كلّ دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444



34) هندسة: في الشكل المجاور، طول ضلع المثلَّث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلَّث الداخلي الذي تنصِّف رؤوسه أضلاع المثلَّث الخارجي. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلَّثات الثمانية الأولى في النمط؟

35) معالجة المياه: يقوم نظام معيَّن لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب في أثناء مرور عيّنة مياه خلاله. فإذا مرّت عيّنة مياه تحتوي 900 mg من الشوائب في النظام أربع مرات، فما كمية الشوائب المتبقّية في العيّنة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

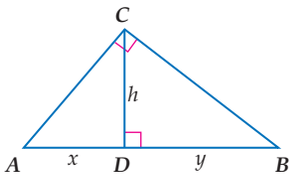
36) برهان: اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) برهان: اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي **لا** تتضمّن a_1

38) تبرير: وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$، للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

40) تحدٍّ: استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y



41) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحدّ الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5 **C** 7

B 6 **D** 8

44) إجابة قصيرة: عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) نقود: اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 2-6)

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 1-6)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $z = -5, x = 9$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $z = 15$ ، $x = -6$. (الدرس 5-5)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
1442 - 1443

اختبار منتصف الفصل

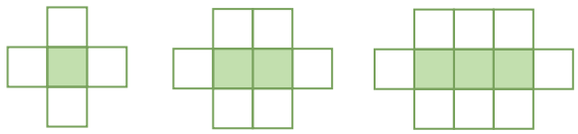
الدروس 6-1 إلى 6-3

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحدّ النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلّل) بالضبط في هذا النمط؟

أوجد الحدّ التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عددًا فرديًّا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, __?__, __?__, __?__, 2048$

A 512.375, 1024.25, 1536.125

B $-683, 1365.5, -2048$ أو $683, 1365.5, 2048$

C $-2, 8, -32$ أو $2, 8, 32$

D $-4, 32, -256$ أو $4, 32, 256$

13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

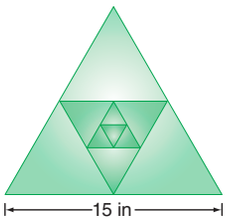
6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 3-6)

والآن:
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:
المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series
المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum
المتسلسلة المتقاربة
convergent series
المتسلسلة المتباعدة
divergent series
مالانهاية
infinity

لماذا؟



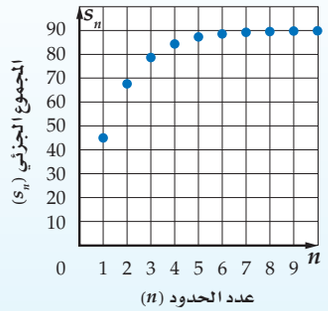
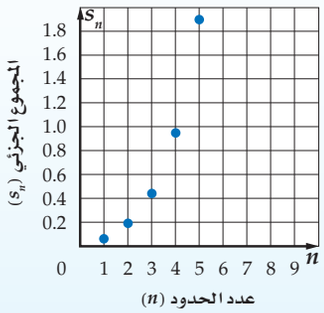
أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90 in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي — المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert < 1$؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert \ge 1$؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$
	

مثال 1 — المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \ldots$

أوجد قيمة r

$r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$، وبما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

إرشادات للدراسة

المجاميع الجزئية

يمكن توضيح التمثيل البياني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة الواردة في فقرة "لماذا؟" بإنشاء الجدول التالي:

عدد الحدود n	المجموع الجزئي S_n
1	$s_1 = 45$
2	$s_2 = 45 + 22.5 = 67.5$
3	$s_3 = 45 + 22.5 + 11.25 = 78.75$
⋮	⋮

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8} = 1.5$ ، وبما أن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B)** $100 + 50 + 25 + \ldots$

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1(1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

مفهوم أساسي **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة**

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$)، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية**

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ اقسم الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموعًا.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$ $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ بسّط

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6} = 1.5$؛ وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيِّ حدٍّ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدّ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B)** $16 + 20 + 25 + \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$

$a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$ ، ثم بسّط $= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$

بسّط $= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \ldots$

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$

$a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$ $= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$

بسّط $= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

افترض $x = 0.\overline{63}$ $x = 0.\overline{63}$

اكتب في صورة كسر عشري دوري $x = 0.636363\ldots$

اضرب كلا الطرفين في 100 $100x = 63.636363\ldots$

اطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$ $99x = 63$

اقسم الطرفين على 99 $x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حلُّ المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

تأكد

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$ **2)** $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$ **4)** $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إن وجدت:

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ **6)** $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي:

7) $0.\overline{35}$ **8)** $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيّها متباعدة:

9) $21 + 63 + 189 + \ldots$ **10)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$

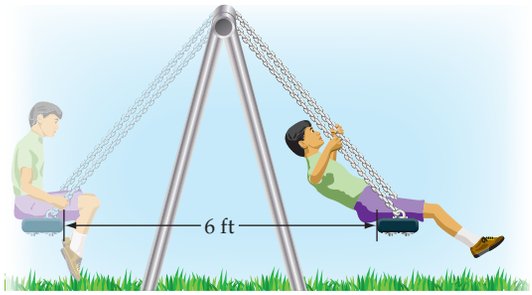
11) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$ **12)** $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية إن وجد:

13) $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$ **14)** $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$

15) $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$ **16)** $32 + 40 + 50 + \ldots$

17) أراجيح: انطلق سعيد من نقطة البداية الموضَّحة في الشكل المجاور، تاركًا نفسه بعد ذلك من دون دفع منه، فبدأت مسافة التأرجح تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، أوجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقّف الأرجوحة تمامًا.



مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي إن وجدت:

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ **19)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ **20)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

21) $0.3\overline{21}$ **22)** $4.\overline{96}$ **23)** $0.12\overline{14}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الربط بالحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام، وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كلّ عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

24) بطاريات قابلة للشحن: أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية إن وجد:

25) $\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$ **26)** $-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}-1+\ldots$ **27)** $\frac{21}{16}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\ldots$

28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) حسيًّا: افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحدّ الأول، ثم قُصَّ النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحدّ الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة اللانهائية، التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.

b) عدديًّا: إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**؟

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وتركت لتتدحرج تلقائيًّا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft ، ثم بدأت تقطع في كلّ دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة.

31) كرات: أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 ft، فكانت ترتدّ في كلّ مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فأوجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحدّ الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى أسفل، ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كلّ مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

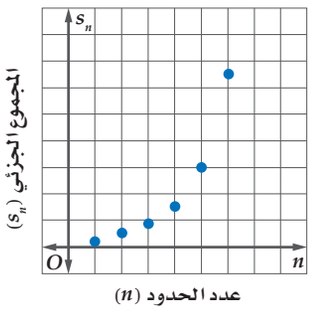
إرشادات للدراسة

أساس المتسلسلة

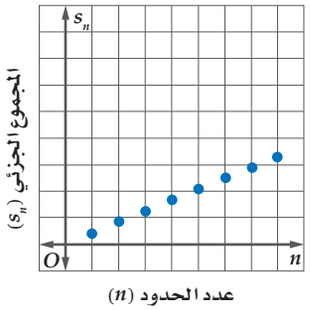
في السؤال 32 تنقص المسافة التي يقطعها الجسم المعلّق بالزنبرك 20%، أي أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثّل 80% من المسافة السابقة لها قبل أن يغيّر اتجاه حركته.

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

33)



34)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

b) متسلسلة هندسية متباعدة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $\ldots - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي	أحمد
المجموع صفر؛ لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.	لا يمكن إيجاد المجموع؛ لأن $\lvert r \rvert \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

36) صيغ: اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

37) تحدٍّ: ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $\ldots + 81b^3 + 27b^2 + 9b + 3$ ؟

38) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

39) مسألة مفتوحة: اكتب المتسلسلة $\ldots - 12 + 6 - 3$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

40) اكتب: وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :

A 81

B 65

C 34

D 18

42) هندسة: ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

43) مسابقات: تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كلّ جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقّي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 6-3)

44) حياكة: مشْغَلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستانًا واحداً يوميًّا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبيِّن مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كلِّ يوم. (الدرس 6-2)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $(y + 4)(y + 3)$

46) $(9p - 1)(3p - 2)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

نهاية المتتابعة
Sequence Limit

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأستكشف نهاية متتابعة.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحدّ في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويُسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهايةَ المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

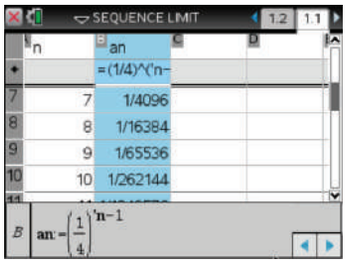
نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

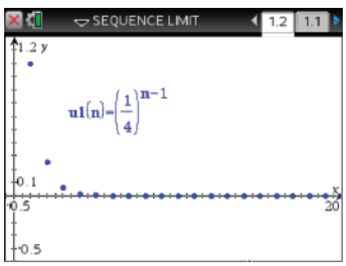
- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ومنها اختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز n ثم اضغط enter، واكتب في أعلى العمود B الرمز a_n ثم اضغط enter.
- أدخل قيم n في العمود n بالترتيب، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحدِّ النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط enter واختر مرجع المتغير فتظهر الشاشة المجاورة.



لاحظ أنه كلما زادت قيمة n، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$، فإن قيمة كلِّ حدٍّ تكون قريبة من 0، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0.

الخطوة 2: مثِّل المتتابعة.

- اضغط المفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط enter فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 1: متتابعة ومنها 6: متتابعة، فتظهر شاشة أدخل فيها صيغة الحدّ النوني والحدّ الأول للمتتابعة واضغط enter.
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الأول.



ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0.

تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3) $a_n = 5^n$
4) $a_n = \frac{1}{n^2}$
5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
6) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-5 نظرية ذات الحدَّين
The Binomial Theorem

فيما سبق:
درست التوافيق واستعمالاتها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل مثلَّث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- أستعمل نظرية ذات الحدَّين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:
مثلَّث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدَّين
Binomial Theorem

لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 6 متخصِّصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلَّث باسكال: يُنسبُ مثلَّث باسكال إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (1662–1623)، على الرغم من قيام العديد من العلماء بدراسته قبله في بلاد المسلمين والهند وبلاد فارس والصين وإيطاليا، ويتكون المثلَّث من صفوف يكون بداية كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة، ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$
$(a+b)^1$
$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

1 3 3 1
+ + +
4 6 4

فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

الأُسس تبدأ من 0 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأُسس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال مثلَّث باسكال

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية، وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^6$.

استعمل النمط أعلاه في كتابة مثلَّث باسكال لـ $(a+b)^6$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$(a+b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + 1a^0b^6$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

عند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 64 توفيقًا من متخصِّصي المنطقتين يمكن استئجارهم، وبما أن العدد 15 في المقدار $15a^4b^2$ يُمثّل عدد التوافيق التي فيها 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنان من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{15}{64}$ أو 23% تقريبًا، وذلك بحسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 15، وعدد الطرائق جميعها 64.

تحقق من فهمك

2) بالعودة إلى فقرة "لماذا"، إذا أراد مدير معمل التحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصِّصين، فما احتمالات أن يختار 6 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية؟

تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلَّث المشهور الذي يُسمى الآن مثلَّث باسكال.

مراجعة المفردات
التوافيق يسمى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق.

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدَّين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}\, b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأُسِّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 — استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق .

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدَّين .

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + \frac{7!}{6!}a^6 b + \frac{7!}{2!5!}a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!}a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!}a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!}a^2 b^5 + \frac{7!}{6!}a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلَّث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلَّث باسكال.

6		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معاملا الحدَّين في ذات الحدَّين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدَّين.

مثال 3 — استعمال نظرية ذات الحدَّين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$

$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$

$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280a b^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x-2y)^5$.

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصرًا كل مرَّة سابقًا بالرمز ${}_nق_r$ ، وسيُرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

- $0! = 1$
- ${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ${}_nC_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{1}{1} = 1$
- ${}_nC_n = 1$
- ${}_nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{1} = 1$

إرشادات للدراسة

الحاسبة العلمية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة العلمية. اضغط على العدد n ثم ÷ ثم SHIFT ثم العدد r ثم = مثال

$6C_3$: 6 SHIFT ÷ 3 = 20

إرشادات للدراسة

إشارات حدود مفكوك $(a+b)^n$

عند إيجاد مفكوك $(a+b)^n$، تكون إشارة كلِّ حدٍّ في المفكوك تعتمد على إشارة كلٍّ من b ، a. فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، ويمكنك عندها استعمال الحد العام في صيغة المجموع لنظرية ذات الحدَّين بحيث تجد الحدَّ الذي ترتيبه $k+1$ أو t_{k+1} في مفكوك $(a+b)^n$ باستعمال الصيغة $t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

مثال 4 إيجاد قيمة حدّ معيّن

أوجد قيمة الحدّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

استعمل صيغة الحدِّ العام لإيجاد الحدِّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$

$t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

حيث $n = 11$، وبما أن الحدَّ المطلوب هو الحدُّ الخامس

أي $t_{k+1} = t_5$ ؛ لذا $k = 4$

إذن $t_5 = t_{4+1} = {}_{11}C_4\, y^{11-4}\, z^4$

$= 330\, y^7\, z^4$

عند الحد الخامس تكون $k = 4$

${}_{11}C_4 = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة الحدِّ السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

ملخص المفاهيم مفكوك ذات الحدّين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدَّين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أسُّ a في الحدِّ الأول هو n، وكذلك أسُّ b في الحدِّ الأخير هو n .
- يقلُّ أسُّ a بمقدار واحد، ويزيد أسُّ b بمقدار واحد في أيِّ حدّين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حدٍّ يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكـد

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

1) $(g+h)^7$ **2)** $(x+3)^5$ **3)** $(y-4z)^4$

4) ولادة: إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد قيمة الحدِّ المطلوب في مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

5) الحدّ السادس في مفكوك $(2c-3d)^8$

6) الحدّ الأخير في مفكوك $(5x+y)^5$

7) الحدّ الأول في مفكوك $(3a+8b)^5$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

8) $(c-d)^7$ **9)** $(2a+4b)^4$ **10)** $(3a-4b)^5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

11) لجان: إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلاب الصفَّين الأول الثانوي والثاني الثانوي في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الصف الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلَّاب الصفَّين متساوٍ، وأن الاختيار يتم عشوائيًّا.

مثال 4 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممَّا يأتي:

12) الحدّ الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$.

13) الحدّ السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$.

14) الحدّ الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$.

15) الحدّ الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$.

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

16) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^4$

17) $\left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$

18) كرة سلَّة: إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلَّة لأحد اللاعبين يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محدَّدة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرَّة من بين 12 محاولة.

19) كرة قدم: إذا كان احتمال أن يسجِّل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70% ، فأوجد احتمال أن يسجِّل 9 أهداف من 10 ضربات.

إرشادات لحل المسألة

نظرية ذات الحدَّين والاحتمال

يمكنك استعمال نظرية ذات الحدَّين في حساب نتائج التجارب المستقلة المتكرِّرة. فإذا كان p يمثل احتمال النجاح، و $(q = 1 - p)$ يمثِّل احتمال الفشل، فإن احتمال أن تكون x محاولة ناجحة من بين n محاولة تُعطى بالصيغة التالية $p(x) = {}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) تحدٍّ: أوجد قيمة الحدّ السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

21) تبرير: وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلٍّ من $(x - y)^n$, $(x + y)^n$ ، وكيف تختلف.

22) مسألة مفتوحة: اكتب قوة لذات حدَّين، الحدّ الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

23) اكتب: وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلَّث باسكال.

تدريب على اختبار

24) احتمال: يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تمَّ سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ **B** $\frac{7}{15}$ **C** $\frac{5}{10}$ **D** $\frac{1}{5}$

25) أيُّ العلاقات التالية تُمثّل دالّة خطِّية؟

A $y = \frac{x+3}{x+2}$ **B** $y = (3x + 2)^2$ **C** $y = \frac{x+3}{2}$ **D** $y = |3x| + 2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 2-6)

26) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

27) $a_6 = -7,\ a_7 = -1$

28) أوجد مجموع المتسلسلة $-6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots$. (الدرس 4-6)

29) بيّن ما إذا كانت الجملة $\frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2$ صحيحة عندما $n = 1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

التوافيق ومثلَّث باسكال
Combinations and Pascal's Triangle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل التوافيق ومثلَّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة في الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفُز المتسابق في أيِّ مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرَّة.

وتعلم مسبقًا أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًّا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أيِّ جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أيِّ 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلَّث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلَّث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلَّث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0					1					
الصف 1				1		1				
الصف 2			1		2		1			
الصف 3		1		3		3		1		
الصف 4	1		4		6		4		1	
الصف 5	1	5		10		10		5		1

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصفّ الخامس. فالعدد الأول في الصفّ الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلِّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلَّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار n من العناصر 0, 1, 2, 3, 4, …, من بين n من العناصر.

2) على افتراض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 جوائز.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ
Proof by Principle of Mathematical Induction

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية. (الدرس 2-6)

والآن:
- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادٍّ.

المفردات:
مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction
فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى. وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: **مبدأ الاستقراء الرياضيّ** هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ — مبدأ الاستقراء الرياضيّ

أضف الى مطويتك

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى **فرضية الاستقراء** .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 — برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أيْ برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$	فرضية الاستقراء
$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$	اجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين
$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$	اجمع
$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$	حلِّل
$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$	بسِّط
$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$	حلِّل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وكما في برهان المجموع فإن مبدأ الاستقراء الرياضيّ يمكنك استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1 = 7$. وبما أن 7 يقبل القسمة على 7 ، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 ، حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$
أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 ؛

$8^k - 1 = 7r$	فرضية الاستقراء
$8^k = 7r + 1$	أضف 1 لكلا الطرفين
$8(8^k) = 8(7r + 1)$	اضرب كلا الطرفين في 8
$8^{k+1} = 56r + 8$	بسّط
$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$	اطرح 1 من كلا الطرفين
$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$	حلّل

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7 ؛
إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 .
وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ

أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

الأمثلة المضادَّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضادّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: " $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن فالقيمة $n = 3$ تُعدُّ مثالًا مضادًّا للجملة.

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: " $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ ، حيث n أي عدد طبيعي".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تأكد

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ **2)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) نظرية الأعداد: يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.

a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 **5)** $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4 **7)** $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

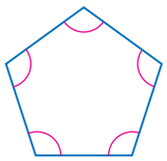
8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) هندسة: مستعملًا مبدأ الاستقراء الرياضيّ والهندسة؛ برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع محدَّب $[(n-2).180]$، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$.



مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.

الربط بالحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس، إذ يمكن رسم 13 أو 21 أو 55 شكلًا حلزونيًا اعتمادًا على درجة ميل الشكل، وجميعها من عناصر متتابعة فيبوناشي.

17) متتابعة فيبوناشي: تبدأ متتابعة فيبوناشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1 ، ويكون الحدّ التالي فيها مساويًا لمجموع الحدّين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحدّ الثاني). فإذا كان f_n يمثّل عدد فيبوناشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعطِ مثالًا مضادًّا يُثبت خطأها:

18) $5 + 7^n$ يقبل القسمة على 6

19) $1 - 18^n$ يقبل القسمة على 17

20) $7 + 21n + n^2$ عدد أولي.

21) $3 + 3n + n^2$ عدد أولي.

22) $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحدٍّ: اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2n + \ldots + 6 + 4 + 2$، ثم برهنها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأً. وضّح إجابتك.

24) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضادٍّ في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

25) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ ، وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

26) تحدٍّ: برهن أن : $2 + 5^2 (11^n)$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

27) مسألة مفتوحة: اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

28) اكتب: وضّح مبدأ الاستقراء الرياضيّ بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

29) أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30) مبدأ العدّ: يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوَّنة من أرقام العدد 1986، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-6)

31) الحدّ الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

32) الحدّ الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

33) الحدّ الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين :

34) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 1000$ (الدرس 2-6)

35) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \ldots$ (الدرس 4-6)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 6-2 ، 6-1)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \text{ , } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ .}$$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 6-4 , 6-3)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ , } S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \text{ ، حيث } r \neq 1$$

- مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُعطى بالصيغة:

$$S = \frac{a_1}{1-r} \text{ ، حيث } |r| < 1 \text{ .}$$

نظرية ذات الحدَّين (الدرس 6-5)

- نظرية ذات الحدَّين:

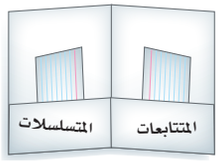
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} k! \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

مبدأ الاستقراء الرياضيّ (الدرس 6-6)

- مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم افكار

تأكَّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات

المتتابعة ص 124
الحدّ ص 124
المتتابعة المنتهية ص 124
المتتابعة غير المنتهية ص 124
المتتابعة الحسابية ص 124
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) ص 124
المتتابعة الهندسية ص 126
أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) ص 126
الأوساط الحسابية ص 131
المتسلسلة ص 132
المتسلسلة الحسابية ص 132
المجموع الجزئي ص 132
رمز المجموع ص 133
الأوساط الهندسية ص 139
المتسلسلة الهندسية ص 140
المتسلسلة الهندسية اللانهائية ص145
المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهائية ص 145
المتسلسلة المتقاربة ص 145
المتسلسلة المتباعدة ص 145
ما لا نهاية ص 145
مثلّث باسكال ص 152
نظرية ذات الحدّين ص 153
مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 157
فرضية الاستقراء ص 157

اختبار المفردات

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدِّل المصطلح الذي تحته خطٌّ لتصبح العبارة صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة اللانهائية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحدّ هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًّا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حدٍّ فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة 5, 11, 17, 23 .

9) باستعمال نظرية ذات الحدّين فإن: $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

مراجعة الدروس

6-1 المتتابعات بوصفها دوالّ ص 124-129

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

حدِّد نوع المتتابعة، ثم أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعتين الآتيتين ومثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

12) $10, 7, 4, \ldots$

13) $800, 200, 50, \ldots$

مثال 1

أوجد الحدّ الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$a_1 = -15, d = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_{11} = -15 + (11-1)6$	$n = 11, a_1 = -15, d = 6$
$a_{11} = 45$	بسّط

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 130-137

أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

15) $15, \underline{?}, \underline{?}, 29$

16) $12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

17) $72, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 24$

18) توفير: يوفِّر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدَّة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفِّره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + (-2) + \cdots + (-65)$

23) مسرح: لكي يؤدِّي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النصِّ مرَّتين في اليوم الأول، وأربع مرَّات في اليوم الثاني، وست مرَّات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرَّات التي سيتدرَّبها في اليوم العشرين؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21} (3k - 2)$

25) $\sum_{k=0}^{10} (6k - 1)$

26) $\sum_{k=4}^{12} (-2k + 5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 3, 39 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_4 = 3 + (4-1)d$	$n = 4, a_1 = 3$
$39 = 3 + 3d$	$a_4 = 39$
$12 = d$	بسّط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$	$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$
$= 296$	بسّط

مثال 4

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية: $\sum_{k=3}^{15} (5k + 1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًّا، وحدُّها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 138-143

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

27 $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28 $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29 $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

30 $6, \underline{?}, \underline{?}, 162$

31 $8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 648$

32 $-4, \underline{?}, \underline{?}, 108$

33 **تخفيضات:** أعلن أحد المتاجر عن تخفيضات كبرى، فبلغت مبيعاته 2048000 ريال في اليوم الأول، ومع نفاد بعض السلع فإن مبيعاته صارت تقلُّ إلى النصف يوميًّا. إذا استمر انخفاض المبيعات بهذا المعدّل، فكم ريالًا ستكون مبيعات المتجر في اليوم الثاني عشر من التخفيضات؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34 $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحدّ السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 9, r = 4$.

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 6, a_1 = 9, r = 4$: $a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$

$a_6 = 9216$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 4, a_1 = 1$: $a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$

$a_4 = 27$: $27 = r^3$

بسّط: $3 = r$

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3$، $3(3) = 9$.

مثال 7

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$n = 6, a_1 = 2, r = 4$: $S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$

بسّط: $= \frac{-8190}{-3} = 2730$

6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية ص 145-150

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية فيما يأتي إن وجد:

36 $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37 $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

38 $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39 **ألعاب:** أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها $60\ ft$، فارتدَّت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمرَّ ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي فيها $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

صيغة المجموع: $S = \frac{a_1}{1 - r}$

$a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$: $= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$

بسّط: $= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
1442 - 1444

6-5 نظرية ذات الحدَّين ص 152-155

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

40 $(a+b)^3$

41 $(y-3)^7$

42 $(3-2z)^5$

43 $(4a-3b)^4$

44 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

45 الحدّ الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46 الحدّ السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47 الحدّ الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد قيمة الحدّ الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدّين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}\, x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحدّ الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحدّ الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!}\, x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 157-160

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48 $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 5^n-1 يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجمل الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي:

50 8^n+3 يقبل القسمة على 11 .

51 $6^{n+1}-2$ يقبل القسمة على 17 .

52 n^2+2^n+4 عدد أولي .

53 $n+19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n=1$ ، فإن: $9^n+3 = 9^1+3 = 12$.
وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن 9^k+3 يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k+3 = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 برهن صحَّة الجملة عند $n=k+1$ ، أي برهن أنَّ $(9^{k+1}+3)$ يقبل القسمة على 4

$9^k+3 = 4r$	فرضية الاستقراء
$9^k = 4r-3$	اطرح 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} = 36r-27$	اضرب كلا الطرفين في 9
$9^{k+1}+3 = 36r-27+3$	أضف 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1}+3 = 36r-24$	بسّط
$9^{k+1}+3 = 4(9r-6)$	حلّل

وبما أن r عدد كلي فإن $9r-6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1}+3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n=k+1$

إذن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبار الفصل

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين إن وجد:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية
$81, 72, 63, \ldots$.

4) أوجد الحدّ الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها
$a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ الثامن في المتتابعة الحسابية
$18, 20.2, 22.4, 24.6, \ldots$ ؟

A 26.8 **C** 31.2
B 29 **D** 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها
$a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟
$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \ldots$

A $\frac{13}{32}$ **C** $\frac{5}{128}$
B $\frac{5}{32}$ **D** $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية التي فيها
$a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k - 1)$

12) $45 + 37 + 29 + \cdots + -11$

13) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحدّ الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$

18) أوجد الحدّ الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كلٍّ من الجملتين الآتيتين، لكل عدد طبيعي n

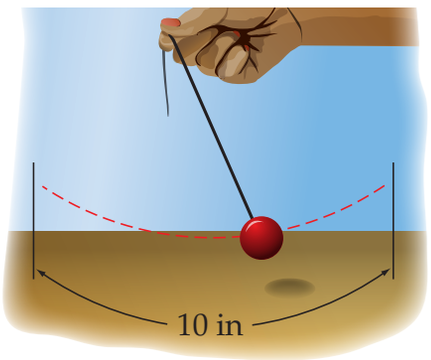
19) $1 + 6 + 36 + \cdots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ الجملة الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة:** إذا كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلاب الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول:** يقوم سعد بتحريك بندول، بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل اهتزازة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فأوجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقّف عن الحركة.



البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حلِّ المسألة استعمالًا. وتعدّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبريًّا، وتوسيع النمط أدوات مهمّة جدًّا في حلِّ المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرُّف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصَّلُ من خلالها من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسبًا.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط، وحُلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكّد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلّها:

انظر إلى متتابعة الأشكال المربَّعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاج إليها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟

شكل 1 شكل 2 شكل 3

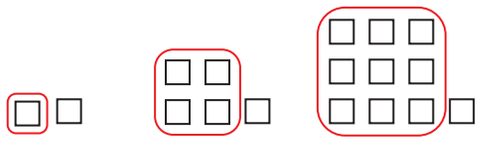
A 55 C 74

B 65 D 82

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الخطوة 1: تعرَّف النمط.

- اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع.
- ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عُدّ المربعات في كل شكل، ولاحظ أن عدد المربعات في كل شكلٍ هو



الخطوة 2: عمّم النمط.

- أي أن عدد مربعات الشكل التالي هو $4^2 + 1$ أو 17
- اكتب العبارة الجبرية التي تُمثّل نموذجًا لهذا النمط.

التعبير اللفظي	عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.
متغير	افترض أن n يُمثّل رقم الشكل.
المعادلة	$a_n = n^2 + 1$

الخطوة 3: وسِّع النمط.

- استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطًا لحلّ المسألة.

1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحدّ التالي في هذه المتتابعة؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

A 36 **B** 34 **C** 31 **D** 29

2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

A 17 **B** 20 **C** 18 **D** 21

وزارة التعليم
Ministry of Education

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) أوجد قيمة الحدّ التالي في المتتابعة الحسابية:

7, 13, 19, 25, 31, …

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15}(8k-1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية الممثَّلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرَّات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تُزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أيُّ المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty}(-2)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x-5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود x^3-7x^2+7x+k ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مفكوك $(c + d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدَّين.

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

9) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c}$

10) $\frac{x^2 - x - 20}{2x + 8} \cdot \frac{3x}{x - 5}$

11) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$، فما قيمة $f[g(6)]$؟

12) يتكرّر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟

الخطوة 1 الخطوة 2 الخطوة 3

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

13) برهن صحّة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
"$7^n - 1$ يقبل القسمة على 6".

14) يقطع خالد مسافة معيّنة على دراجة هوائية في 2.5 ساعة. وإذا زاد من سرعته فإنه يقطع المسافة نفسها في ساعتين.

a) هل يُمثّل هذا الوضع تناسبًا طرديًّا أم تناسبًا عكسيًّا؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كانت سرعته عندما قَطَعَ المسافة في 2.5 ساعة. 12 km/h، فكم يجب أن تكون سرعته ليقطع المسافة ذاتها في ساعتين؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع حل السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	6-2	6-2	6-3	6-3	6-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	6-5	5-1	5-1	مهارة سابقة	6-2	6-6	5-5

وزارة التعليم
Ministry of Education
1444 - 2022

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$$n! = n\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1$$

$$0! = 1$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع حدود المتتابعة الحسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$
مجموع حدود المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

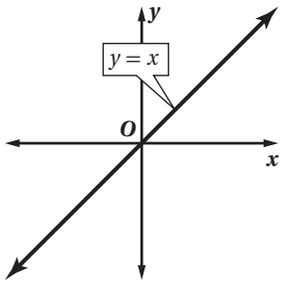
الصيغ

حساب المثلثات

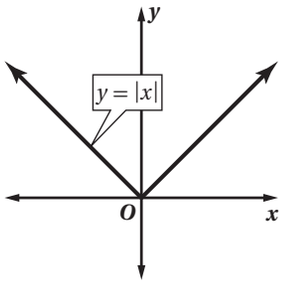
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

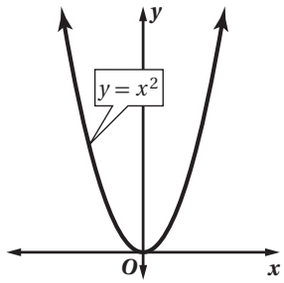
الدوال الخطية



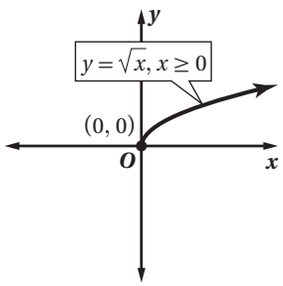
دوال القيمة المطلقة



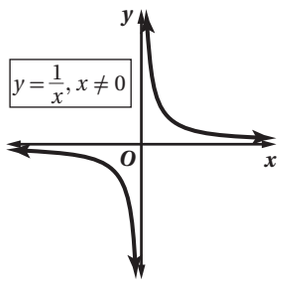
الدوال التربيعية



دوال الجذر التربيعي



دوال المقلوب



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{\mathrm{I}}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\overline{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\lvert \underline{A} \rvert$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444