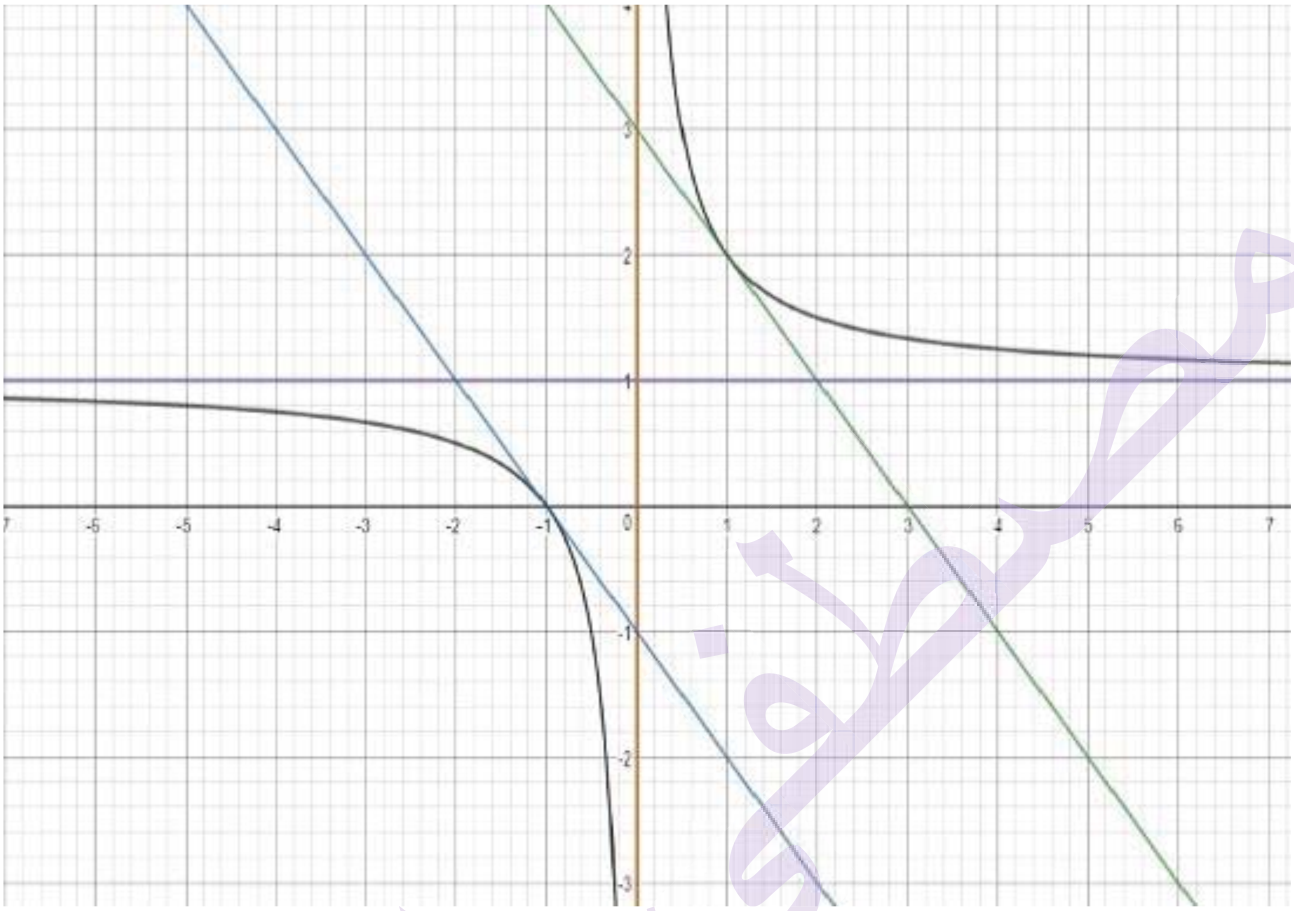
التمرين الأول

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a - أوجد مجموعة تعريف التابع وصورتها (المستقر الفعلي)

b - أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

c - أوجد معادلات المقاربات الأفقية و الشاقولية للخط البياني

d - علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد عندما $k \neq 1$

e - ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

f - احسب كل مما يلي $f(1), f(-1), f'(1), f'(-1)$

g - أوجد معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها تساوي الواحد

h - هل التابع اشتقاقي عند الصفر، علل ذلك؟

i - إذا علمت أن التابع يعطى بالشكل $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ أوجد قيم a , b

حل التمرين الأول

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[U]0, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R \setminus \{1\} =]-\infty, 1[U]1, +\infty[$

b- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 \quad , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$$

c- معادلات المقاربات الأفقية و الشاقولية للخط البياني

$x = 0$ مقارب شاقولي هو $y'y$ عند $+\infty$ و $-\infty$

$y = 1$ مقارب أفقي يوازي $x'x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

d- للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد عندما $k \neq 1$

التابع متزايد تماما على D_f فإن للمعادلة حل وحيد أيا كانت $k \in f(D_f)$

e- لا يوجد حلول للمعادلة $f(x) = 1$ لأن $1 \notin f(D_f)$

f- $f(1) = 2, f(-1) = 0$

$$f'(1) = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{0-1} = -1 \;;\; (0,3),(1,2) \in d$$

$$f'(-1) = m_{d'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{0+1} = -1 \,; (0,-1),(-1,0) \in d'$$

g- معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها تساوي الواحد

$$d: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\Rightarrow d: y = -1(x-1) + 2$$

$$\Rightarrow d: y = -x + 3$$

h- التابع غير اشتقاقي عند الصفر، لأنه غير مستمر عنده

i- $f(x) = \frac{ax+b}{x}$

$$f(1) = 2 \;\Rightarrow \frac{a(1)+b}{(1)} = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

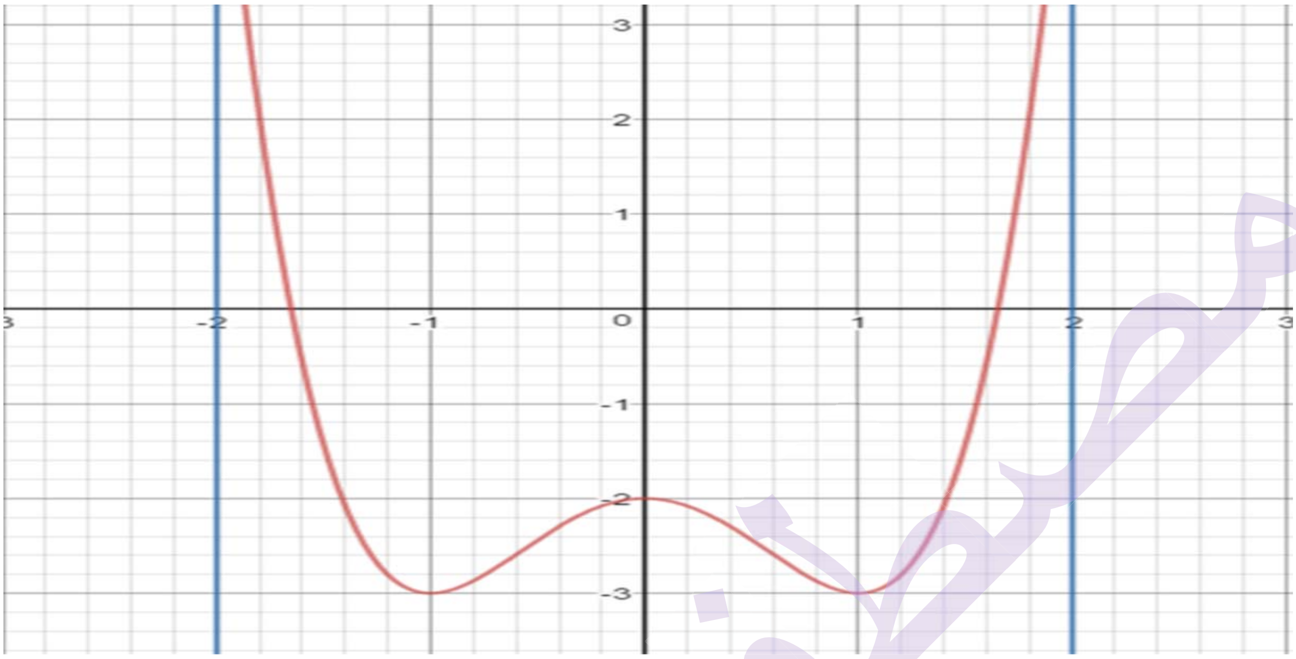
$$f(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a(-1)+b}{(-1)} = 0 \Rightarrow -a + b = 0$$

بالحل المشترك نجد $a = 1$, $b = 1$

مصطفى الحمود

التمرين الثاني

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a- اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b- أوجد جدول تغيرات التابع

c- ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$

d- ما مجموعة حلول المتراجحة $-3 \leq f(x) \leq -2$

e- احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

f- اكتب معادلات مقارباته الشاقولية

g- أوجد $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0), f'(1)$

مصطفى الحمود

حل التمرين الثاني

a- مجموعة تعريف التابع $D_f =]-2,+2[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = [-3,+\infty[$

b- جدول تغيرات التابع

x	-2		-1		0		$+1$		$+2$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

c- مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

$k \in]-\infty,-3[\Leftarrow$ لا يوجد حلول

$k = -3 \Leftarrow$ حلان

$k \in]-3,-2[\Leftarrow$ أربع حلول

$k = -2 \Leftarrow$ ثلاث حلول

$k \in]-2,+\infty[\Leftarrow$ أربع حلول

d- $x \in [-1.7,+1.7]$ هي مجموعة حلول المتراجحة

x	-1.7		-1		0		$+1$		$+1.7$
$f(x)$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

ملاحظة: الجدول هنا للتوضيح فقط و غير مطلوب ضمن الحل

e- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to +2^-} f(x) = +\infty$$

f- المقاربات الشاقولية

$x = -2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يمين المقارب

$x = +2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

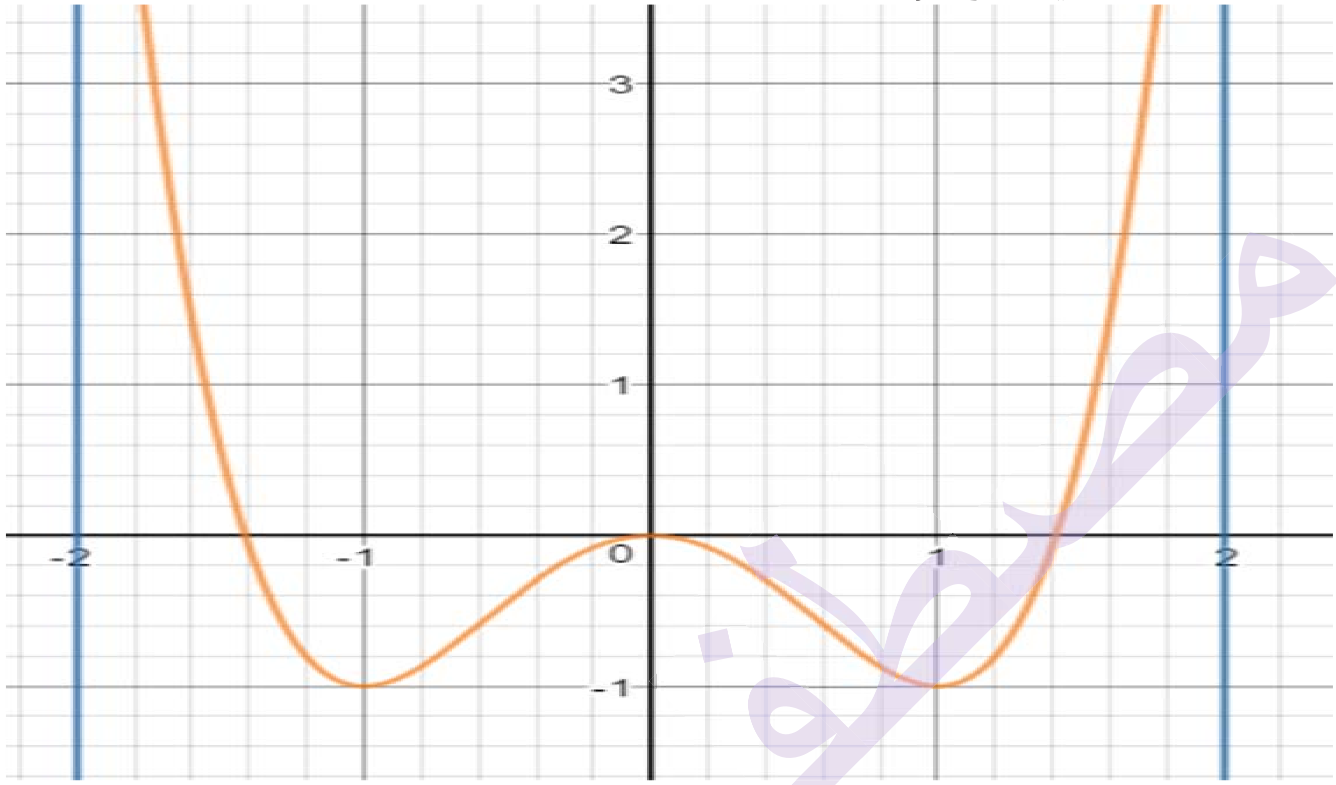
g- $f(1) = f(-1) = -3 \,, f(0) = -2$

$f'(1) = f'(-1) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية المماسات عندها أفقية ميلها يساوي المشتق عند النقطة ويساوي الصفر

مصطفى الحمود

التمرين الثالث

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a -اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b -ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$

c -احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

d -اكتب معادلات مقارباته الشاقولية

e -أوجد $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0), f'(1)$

مصطفى الأحمد

حل التمرين الثالث

a - مجموعة تعريف التابع $D_f =]-2,+2[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = [-1,+\infty[$

b - مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

$k \in]-\infty,-1[\Rightarrow$ لا يوجد حلول

$k = -1 \Rightarrow$ حلان

$k \in]-1,0[\Rightarrow$ أربع حلول

$k = 0 \Rightarrow$ ثلاث حلول

$k \in]0,+\infty[\Rightarrow$ أربع حلول

c - النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to +2^-} f(x) = +\infty$$

d - المقاربات الشاقولية

$x = -2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يمين المقارب

$x = +2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

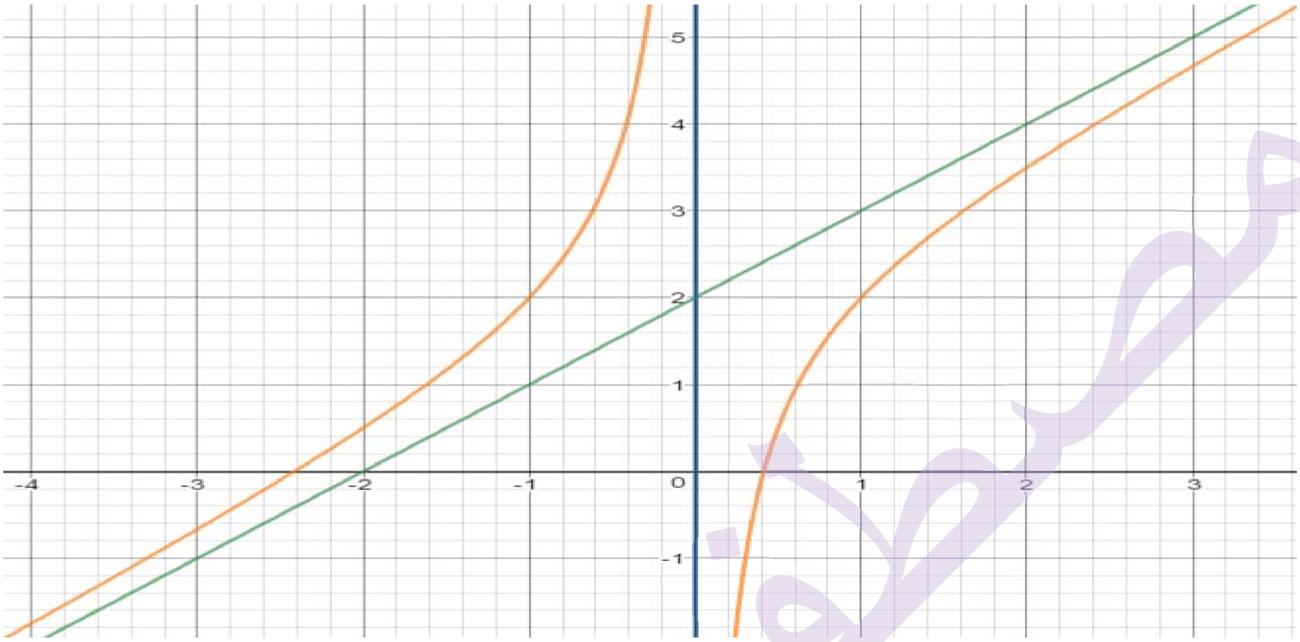
e - $f(1) = f(-1) = -1 \,, f(0) = 0$

$f'(1) = f'(-1) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية المماسات عندها أفقية ميلها يساوي المشتق عند النقطة ويساوي الصفر

مصطفى الحمود

التمرين الرابع

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a- اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$، معللاً ذلك؟

c- احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

d- اكتب معادلة مقاربه الشاقولي

e- احسب ميل المقارب المائل، ثم اكتب معادلته

f- ما إشارة $f'(x)$، علل ذلك؟

مصطفى الحمود

حل التمرين الرابع

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[U]0, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R =]-\infty, +\infty[$

b- مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

المستقيم الأفقي $y = k$ يقطع الخط البياني للتابع في نقطتين فللمعادلة حلان أيا كان $k \in R$

c- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف وعند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

d- المقارب الشاقولي

$x = 0$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

$x = 0$ مقارب يوازي $y'y$ عند $-\infty$ و c على يمين المقارب

e- نقاط من المقارب المائل $(0,2)$, $(-2,0)$

نوجد ميله $m_\Delta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{0+2} = 1$

نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$\Delta: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

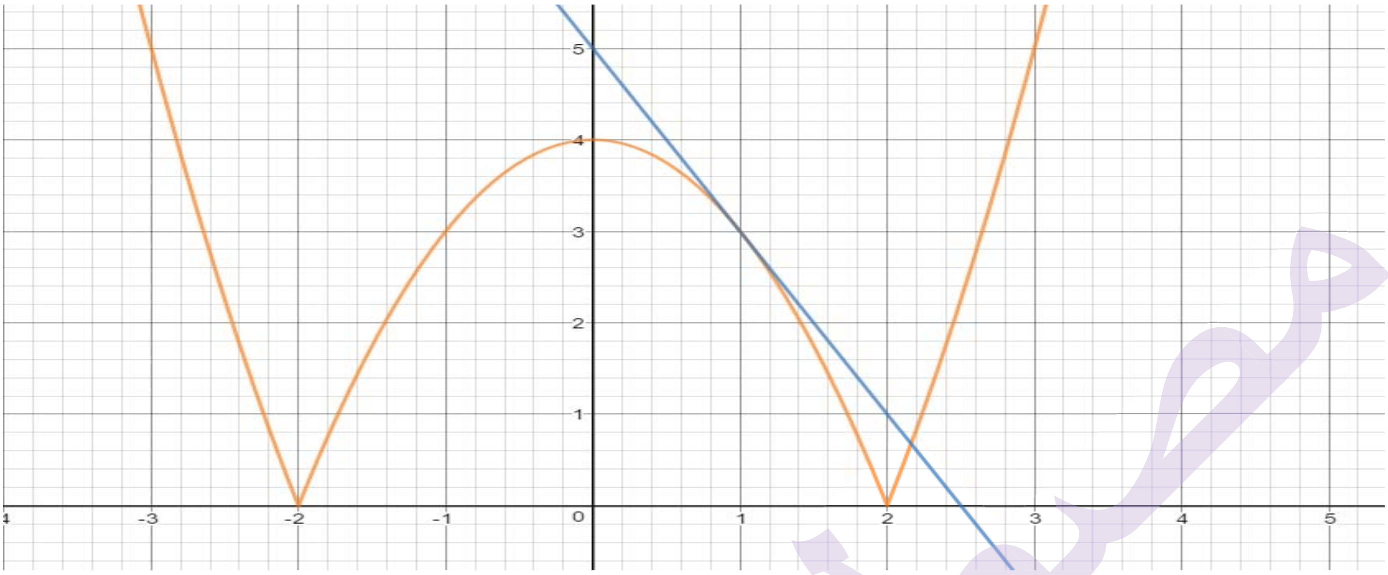
$$\Rightarrow \Delta: y - 0 = 1\big(x - (-2)\big)$$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 2$$

f- $f'(x) > 0$ لأن الخط البياني للتابع متزايد تماما على كامل مجموعة تعريفه

التمرين الخامس

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a - أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي

b - هل التابع زوجي أم فردي، علل ذلك؟

c - أوجد $f(-2), f(2), f(0), f(1)$

d - أوجد $f'(-2), f'(+2), f'(0), f'(1)$

e - أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1)

f - اكتب معادلة المماس d' نظير d بالنسبة لمحور التراتيب

g - أوجد $f([-2, +2])$

h - ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

i - ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$، أحصر كل منها ضمن مجال صغير

مصطفى الحمود

حل التمرين الخامس

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R =]-\infty, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R^+ = [0, +\infty[$

b- التابع زوجي لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

c- $f(-2) = f(2) = 0 , f(0) = 4 \; , f(1) = 3$

d- $f'(-2) = f'(+2) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية

لحساب $f'(1)$: نوجد نقطتين من المماس d $A(1,3), B(0,5)$

$$f'(1) = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0-1} = -2$$

e- نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d: y - 3 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow d: y = -2x + 5$$

f- من خواص التناظر $A'(-1,3), B(0,5)$ نوجد ميله $m_{d'} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{0+1} = 2$

نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d': y - y_1' = m_{d'}(x - x_1')$$

$$\Rightarrow d': y - 3 = 2(x - (-1))$$

$$\Rightarrow d': y = 2x + 5$$

g- $f([-2, +2]) = [0,4]$

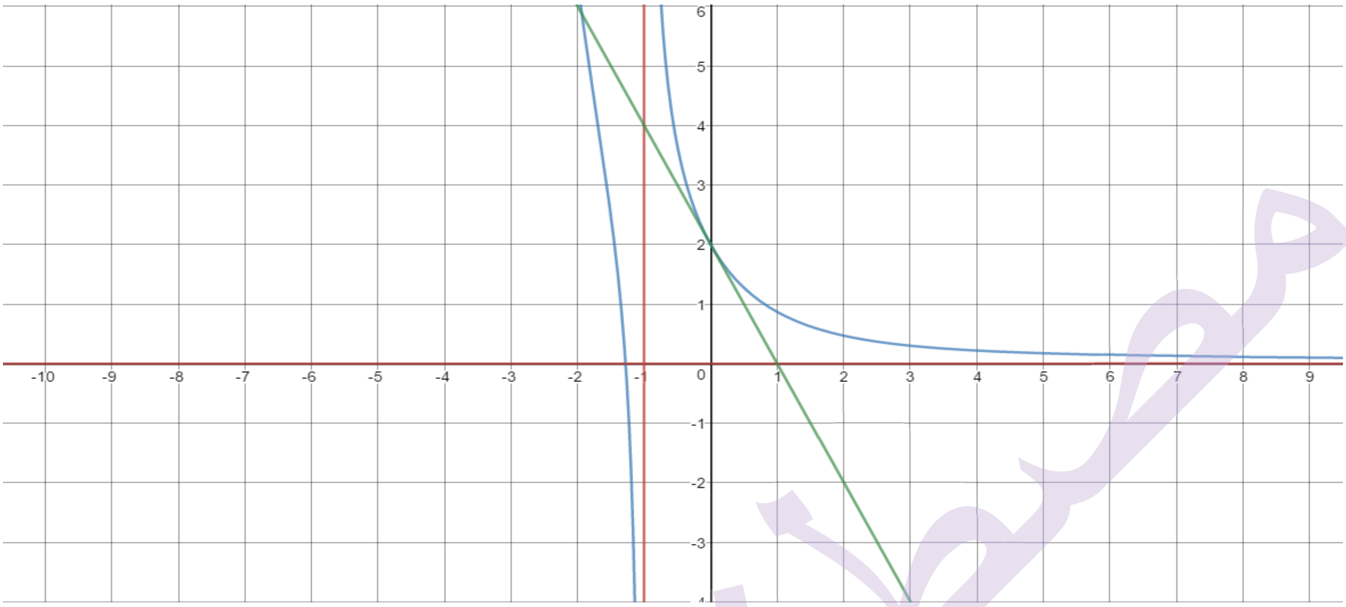
h- $f(x) \geq 5 \Rightarrow y \in [5 + \infty[\Rightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

i- $f(x) = 2$ لها أربع حلول

$x_1 \in]-3, -2[$ و $x_3 \in]2,3[$ و $x_2 \in]-2, -1[$ و $x_1 \in]1,2[$

التمرين السادس

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a- أوجد المقاربات الأفقية والشاقولية للتابع

b- أوجد مجموعة تعريفه ومستقره الفعلي

c- أوجد $f([0,+\infty[), f(]-1,0])$

d- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

e- أوجد $f(0), f'(0)$

f- اكتب معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها 0

g- إذا علمت أن التابع يعطى بقاعدة الربط $f(x)=e^{-x}+\frac{1}{ax+b}$ وأن $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ وخطه مار من النقطة $(0,2)$ عين قيمة $a\ ,b$

مصطفى الحمود

حل التمرين السادس

a - المقاربات الأفقية والشاقولية

$y = 0$ مقارب أفقي هو $x'x$ عند $+\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و $-\infty$

b - مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R \setminus \{0\} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

c - $f([0,+\infty[) =]0,2]$ و $f(]-1,0]) = [2,+\infty[$

d - حل وحيد $x_1 \in]-2,-1[$

e - $f(0) = 2$ و لحساب $f'(0)$: نوجد نقطتين من المماس d $A(1,0), B(0,2)$

$$f'(0) = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

f - نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d: y - 2 = -2(x - 0)$$

$$\Rightarrow d: y = -2x + 2$$

g - التابع من الشكل $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{ax+b}$

$$(0,2) \in C_f \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow e^0 + \frac{1}{a(0)+b} = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow e^{-\infty} + \frac{1}{a(-1)+b} = +\infty$$

$$\Rightarrow -a + b = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$