أولاً:

السؤال الأول:

1) $f(1)=-2$ قيمة حدية صغرى و $f(-1)=-2$ قيمة حدية صغرى و $f(0)=-1$ قيمة حدية كبرى.

2) $x=2$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ و $x=-2$ مقارب شاقولي عند $+\infty$.

3) $f(]-1,1[)=]-2,-1]$.

4) f تابع زوجي لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

السؤال الثاني:

نهاية التابع $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ عند الصفر هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ يجب إزالتها:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2(1)^2=2$$

السؤال الثالث:

$$f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$$

عندما $x\in[0,1[$ فإن $E(x)=0$ وبالتالي $f(x)=\sqrt{x}$

عندما $x\in[1,2[$ فإن $E(x)=1$ وبالتالي $f(x)=1+\sqrt{x-1}$ ومنه

عندما $x=2$ فإن $E(x)=2$ وبالتالي $f(x)=2+\sqrt{x-2}$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & : 0\le x<1\\ 1+\sqrt{x-1} & : 1\le x<2\\ 2+\sqrt{x-2} & : \quad x=2\end{cases}$$

- لدينا $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}=1$ و $f(1)=1+\sqrt{1-1}=1$ فإن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

وبالتالي f مستمر عند 1.

- لدينا $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(1+\sqrt{x-1})=2$ و $f(2)=2+\sqrt{2-2}=2$ فإن $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$

وبالتالي f مستمر عند 2.

وبالتالي التابع f مستمر على المجال $[0,2]$.

السؤال الرابع:

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)'=\frac{\cos x.\cos^2 x-2\cos x(-\sin x).\sin x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^3 x+2\cos x.\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$g'(x)=\left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}\right)'=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}}{2\sqrt{\frac{2\sin x}{\cos^2 x}}}=\frac{\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}}{\frac{2\sqrt{2\sin x}}{\cos x}}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^2 x.\sqrt{2\sin x}}$$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$f'(x)=1+\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.2x}{x^2+1}=1+\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=1+\frac{\frac{2x^2+2-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$f'(x)=1+\dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$ وبالتالي التابع f متزايد تماماً

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2) $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{d_1})=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-(x+2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-2\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-2=2-2=0$$

وبالتالي المستقيم $d_1:y=x+2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

3) $$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{d_2})=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-(x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+2\right)$$

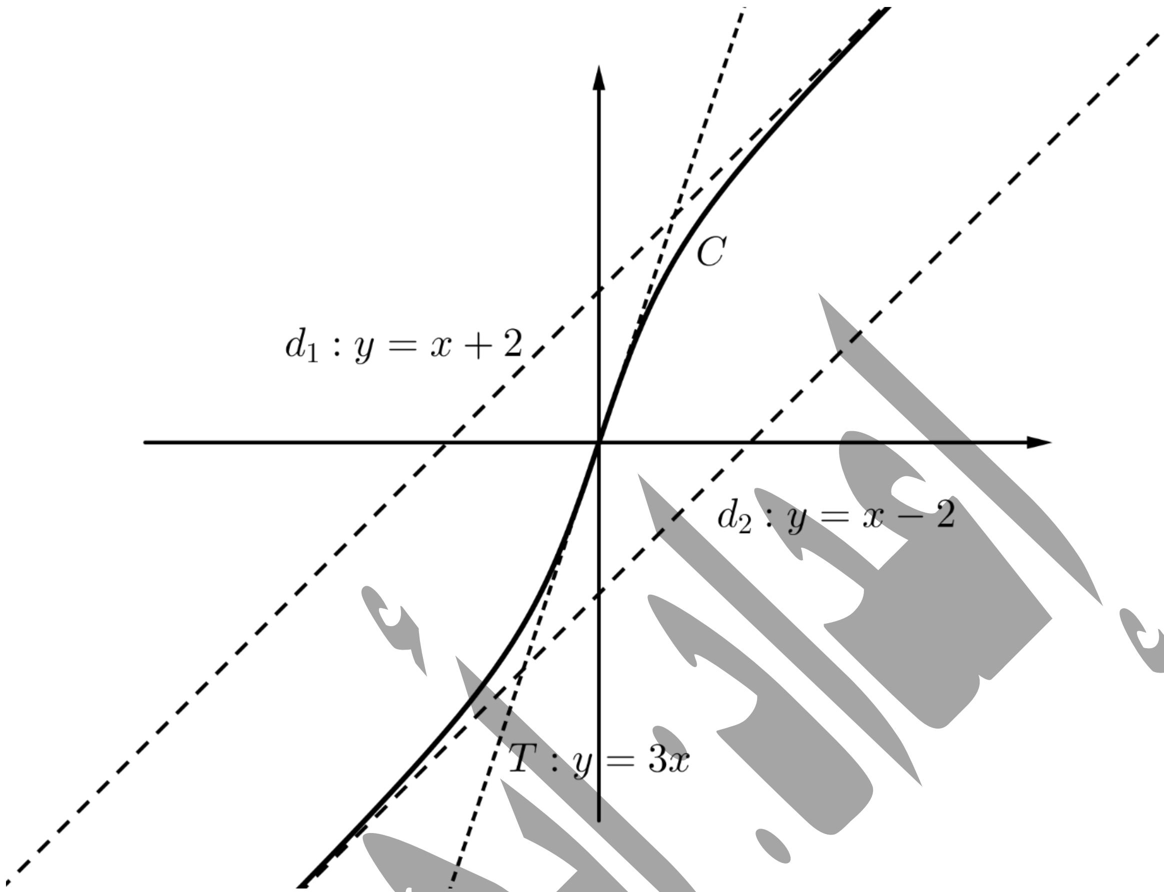
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+2=-2+2=0$$

وبالتالي المستقيم $d_2:y=x-2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$

4) معادلة المماس في المبدأ

$$T:y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$T:y=3x$$

(5



المسألة الثانية:

$$f(x)=\frac{2x}{|x|+1} \quad \text{و} \quad D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) من أجل $x \geq 0$ فإن $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x}{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x+1}=2$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

2) من أجل $x \leq 0$ فإن $f(x)=\dfrac{2x}{-x+1}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2x}{-x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2x}{-x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{-x+1}=2$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر من اليسار

وبما أن $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ فإن f اشتقاقي عند الصفر.

3) الشرط: أياً كان x من $]-\infty,+\infty[$ كان $-x$ من $]-\infty,+\infty[$

$$f(-x)=\frac{-2x}{|-x|+1}=-\frac{2x}{|x|+1}=-f(x)$$

وبالتالي التابع f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

4)
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

$f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1.9,2.1[$ فإن $1.9<f(x)<2.1$

$$1.9-2<f(x)-2<2.1-2$$

$$-0.1<\frac{2x}{x+1}-2<0.1$$

$$-0.1<\frac{-2}{x+1}<0.1$$

$$\left|\frac{-2}{x+1}\right|<0.1$$

$$\frac{2}{x+1}<\frac{1}{10}$$

$20<x+1$ وبالتالي $x>19$.

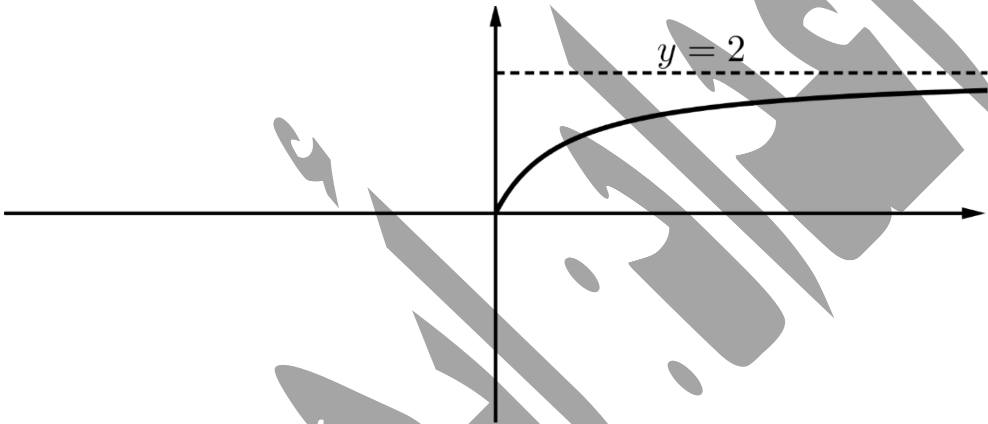
5) على المجال $]0,+\infty[$ فإن $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

$f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

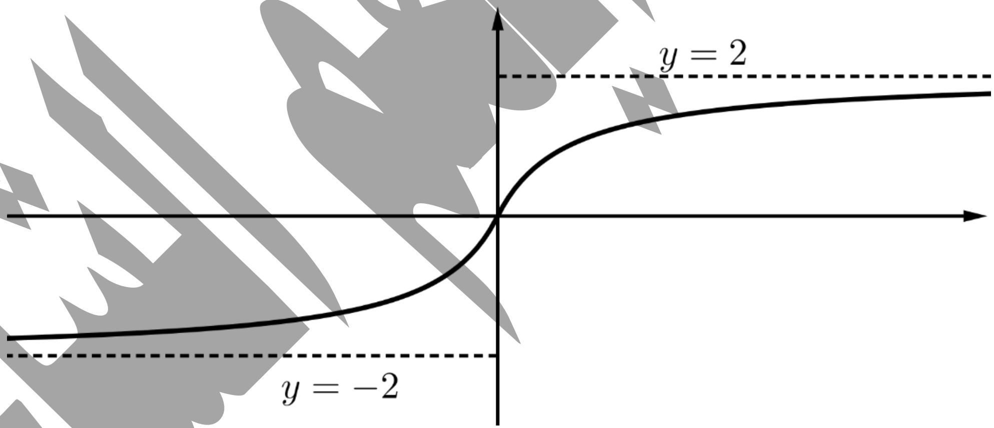
التابع f متزايد تماماً $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

6) رسم الخط البياني للتابع f على المجال $]0,+\infty[$:



وبما أن التابع f فردي فإن رسم الخط البياني C يكون:



انتهى حل النموذج الأول

النهايات والاستمرار والاشتقاق

أولاً:

السؤال الأول:

1) $f(-2)=3$ قيمة حدية كبرى و $f(2)=0$ قيمة حدية صغرى.

2) التابع f لا يقبل مقارب مائل في جوار $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و لا يقبل مقارب مائل في جوار $-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$.

4) حل وحيد

السؤال الثاني:

التابع $f(x)=x\sqrt{x}$ معرف على المجال $[0,+\infty[$ واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ، ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر فهو اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$ وتابعه المشتق:

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.x=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

السؤال الثالث:

مشتق التابع $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ هو $f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right).x^2=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا $f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ و $f'\left(\frac{2}{\pi}\right)=2.\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

وبالتالي معادلة المماس تعطى بالشكل: $y=f'\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(x-\frac{2}{\pi}\right)+f\left(\frac{2}{\pi}\right)=x-\frac{2}{\pi}$.

السؤال الرابع:

$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{3x+5}$$

$$-1\le\sin x\le1$$

$$2x-1\le2x+\sin x\le2x+1$$

عند $+\infty$ فإن $3x+5>0$ وبالتالي $\frac{2x-1}{3x+5}\le\frac{2x+\sin x}{3x+5}\le\frac{2x+1}{3x+5}$

$$\frac{2x-1}{3x+5}\le f(x)\le\frac{2x+1}{3x+5}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x+5}=\frac{2}{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{3}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$$

1) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1$ حيث $f(1)=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=1$ قيمة حدية صغرى

2) $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x}$$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}+x\right)$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x+2}-x}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+2-x^2}{\sqrt{x^2-2x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}-x}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{-2+0}{-1-1}=1$$

3) وبالتالي فإن التابع f يقبل مقارب مائل في جوار $-\infty$ من الشكل $y=ax+b$

أي أن $\Delta : y=-x+1$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2-2x+2}-(-x+1)=\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{(-x+1)^2}$

$=\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2-2x+1}>0$ ومنه C فوق المقارب Δ

4) $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 2}$

a) نفرض القضية $E(n): 1 \le u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $1 \le u_1 = \sqrt{10} < u_0 = 4$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $1 \le u_{n+1} < u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1 \le u_{n+2} < u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $1 \le u_{n+1} < u_n$ وبما أن التابع f متزايد على المجال $[1, +\infty[$ فإن:

$$f(1) \le f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$1 \le u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

b) لدينا $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n متناقصة تماماً

لدينا $1 \le u_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x$$

$$x^2 - 2x + 2 = x^2$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

ومنه $\lim_{n \to \infty} u_n = 1$.

المسألة الثانية:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3} \text{ و } D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي عند $\pm\infty$

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$ أي أن $x^2-6x+8=0$ ويكافئ $(x-4)(x-2)=0$

إما $x=2$ فيكون $f(2)=-1$

أو $x=4$ فيكون $f(4)=3$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2)=-1$ قيمة حدية كبرى

$f(4)=3$ قيمة حدية صغرى

2) باستخدام القسمة الإقليدية نجد:

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+7 & x-3 \\ \hline \ominus x^2 \oplus 3x & x-2 \\ -2x+7 & \\ \oplus 2x \ominus 6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

وبالتالي فإن f يكتب بالشكل $f(x)=x-2+\frac{1}{x-3}$

حيث $a=1$ و $b=-2$ و $c=1$

3) $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{1}{x-3}-(x-2)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-3}=0$$

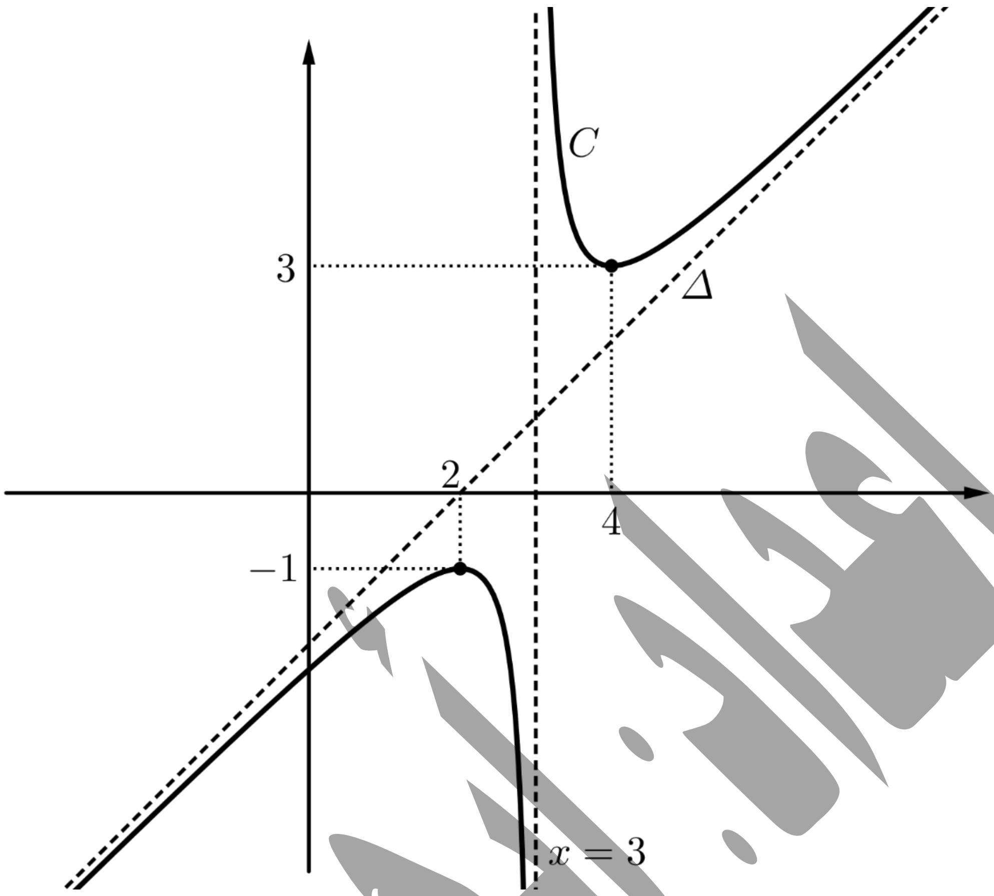
وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-3}$

عندما $x>3$: C فوق المقارب Δ

عندما $x<3$: C تحت المقارب Δ

(4



(5

$$x^2-(m+5)x+3m+7=0$$

$$x^2-mx-5x+3m+7=0$$

$$x^2-5x+7=mx-3m$$

$$m=\frac{x^2-5x+7}{x-3}=f(x)$$

عندما $m\in]-\infty,-1[$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $m=-1$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m\in]-1,3[$ ليس للمعادلة حل

عندما $m=3$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m\in]3,+\infty[$ للمعادلة حلين مختلفين

انتهى حل النموذج الثاني

النهايات والاستمرار والاشتقاق

أولاً:

السؤال الأول:

1) $f(1)=3$ قيمة حدية كبرى للتابع f لأنه يوجد مجال مفتوح $I=]0.2[$ يحوي 1 بحيث أياً كانت x من I كان $f(x)\le f(1)$.

2) $y=1$.

3) $x\in\{-1,2\}$.

4) $x\in[0,1[$.

السؤال الثاني:

نفرض القضية $E(n): f^{(n)}(x)=(-1)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-x\right)$

- نثبت صحة العلاقة $E(1)$ من أجل $n=1$: $f^{(1)}(x)=(-1)^1\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x=f'(x)$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-x\right)$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-x\right)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-x\right)=(-1)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right) \quad ؟$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=\left((-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right)'=(-1)^n\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)(-1)\right)=(-1)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

السؤال الثالث:

للتابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ قيمة حديّة عند النقطة $(1,0)$ أي أن:

$f(1)=0$: $f(1)=1+a+b=0$ أي أن $a+b=-1$ ...(1)

و $f'(1)=0$: لدينا $f'(x)=3x^2+2ax+b$ وبالتالي $f'(1)=3+2a+b=0$ أي أن $2a+b=-3$ ...(2)

بطرح العلاقتين (1) و (2) نجد $a=-2$ وبالتعويض في (1) نجد $b=1$.

السؤال الرابع:

$$\frac{6}{4+3\cos x}-1=\frac{6-4-3\cos x}{4+3\cos x}=\frac{2-3\cos x}{4+3\cos x}=f(x)$$

لدينا $-1\le\cos x\le 1$ ومنه $-3\le 3\cos x\le 3$ ومنه $1\le 4+3\cos x\le 7$ ومنه $\dfrac{1}{7}\le\dfrac{1}{4+3\cos x}\le 1$

ومنه $\dfrac{6}{7}\le\dfrac{6}{4+3\cos x}\le 6$ ومنه $\dfrac{6}{7}-1\le\dfrac{6}{4+3\cos x}-1\le 6-1$

أي أن $-\dfrac{1}{7}\le f(x)\le 5$ وبالتالي f محدود.

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=x\sqrt{6x-3x^2}$$

1) f معرف بشرط $6x-3x^2\geq 0$ وتكافئ $3x(2-x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
المتراجحة		//////		محققة		//////	

وبالتالي $D_f=[0,2]$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{6x-3x^2}=0$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماس أفقي في المبدأ معادلته $y=0$

3) $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{3x(2-x)}}{-(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{3x}.\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{3x}}{-\sqrt{2-x}}=\infty$$

وبالتالي f غير اشتقاقي عند 2 ويقبل مماس شاقولي في النقطة $(2,0)$ معادلته $x=2$

4) $$f'(x)=\sqrt{6x-3x^2}+\frac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}.x=\sqrt{6x-3x^2}+\frac{3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$=\frac{6x-3x^2+3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=\frac{x(9-6x)}{\sqrt{x(6-3x)}}=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}.(9-6x)}{\sqrt{x}.\sqrt{6-3x}}=\frac{\sqrt{x}.(9-6x)}{\sqrt{6-3x}}$$

القيمة التقريبية: $f(1.01)\approx f(1)+(0.01)\times f'(1)=\sqrt{3}+(0.01)\times\sqrt{3}=1.01\times\sqrt{3}$

5) $f(0)=0$ و $f(2)=0$

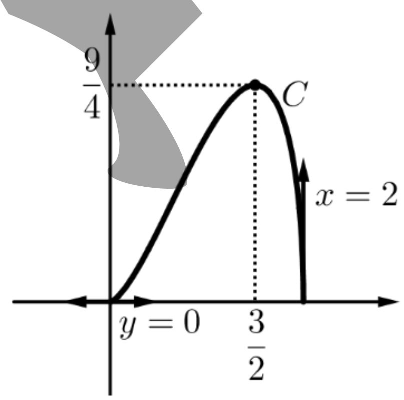
عندما $f'(x)=0$ فإن $\sqrt{x}.(9-6x)=0$

إما $x=0$ فإن $f(0)=0$

أو $x=\frac{3}{2}$ فإن $\frac{9}{4}$ $$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{6\left(\frac{3}{2}\right)-3\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{9-\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$ قيمة حدية كبرى



المسألة الثانية:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x-6}{x^2+3} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x-5)(x^2+3)-2x(x^3-2x^2-5x-6)}{(x^2+3)^2}=$$

$$f'(x)=\frac{3x^4-4x^3-5x^2+9x^2-12x-15-2x^4+4x^3+10x^2+12x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$ أي أن $x^4+14x^2-15=0$ ويكافئ $(x^2+15)(x^2-1)=0$

إما $x^2=-15$ مرفوض

أو $x^2=1$ فيكون $x=1$ حيث $f(1)=-3$ و $x=-1$ حيث $f(-1)=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)=-1$ قيمة حدية كبرى

$f(1)=-3$ قيمة حدية صغرى

2) الشرط : $h\in D_f=]-\infty,+\infty[$ و $-h\in D_f=]-\infty,+\infty[$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\frac{h^3-2h^2-5h-6}{h^2+3}+\frac{(-h)^3-2(-h)^2-5(-h)-6}{(-h)^2+3}}{2}$$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\frac{h^3-2h^2-5h-6}{h^2+3}+\frac{-h^3-2h^2+5h-6}{h^2+3}}{2}$$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\frac{-4h^2-12}{h^2+3}}{2}=\frac{\frac{-4(h^2+3)}{h^2+3}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

وبالتالي فإن النقطة $A(0,-2)$ مركز تناظر للخط C.

3) $$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-5x-6}{x^2+3}-(x-2)\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-5x-6-(x-2)(x^2+3)}{x^2+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-5x-6-(x^3-2x^2+3x-6)}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-8x}{x^2+3}\right)=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{-8x}{x^2+3}$

عندما $x>0$: C تحت المقارب Δ

عندما $x<0$: C فوق المقارب Δ

4) يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ إذا كان ميل المماس يساوي ميل المستقيم Δ أي أن:

$$f'(x)=1$$

$$\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}=1$$

$$x^4+14x^2-15=x^4+6x^2+9$$

$8x^2=24$ أي أن $x^2=3$ ومنه $x=\pm\sqrt{3}$

وبالتالي C يقبل مماسين موازيين للمستقيم Δ

الأول في النقطة التي فاصلتها $+\sqrt{3}$ و الثاني في النقطة التي فاصلتها $-\sqrt{3}$

5) على المجال $]-\infty,-1]$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $f(]-\infty,-1])=]-\infty,-1]$ أي $0\notin$ أي ليس للمعادلة حل في هذا المجال

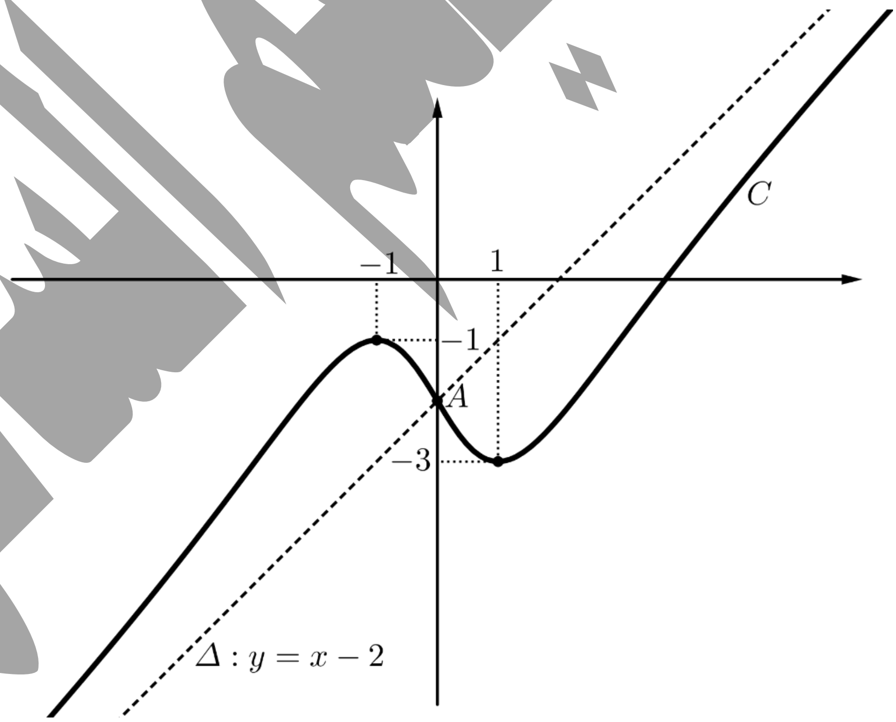
على المجال $[-1,1]$ التابع مستمر ومتناقص تماماً و $f([-1,1])=[-3,-1]$ أي $0\notin$ أي ليس للمعادلة حل في هذا المجال

على المجال $[1,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $f([1,+\infty[)=[-3,+\infty[$ أي $0\in$ أي للمعادلة حل وحيد في هذا المجال

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

بما أن $f(3)=-1$ و $f(4)=\dfrac{2}{19}$ فإن هذا الحل ينتمي إلى المجال $]3,4[$.

6)



انتهى حل النموذج الثالث

النهايات والاستمرار والاشتقاق

أولاً:

السؤال الأول:

1) حلين

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ و $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

4) $x\in]0,3]$.

السؤال الثاني:

لدينا $x-1<E(x)\le x$

$$-x+1>-E(x)\ge -x$$

$$x+1>2x-E(x)\ge x$$

بما إن x تسعى إلى $+\infty$ فإن $3x+1$ وبالتالي $\frac{x+1}{3x+1}>\frac{2x-E(x)}{3x+1}\ge\frac{x}{3x+1}$

$$\frac{x+1}{3x+1}>f(x)\ge\frac{x}{3x+1}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3x+1}=\frac{1}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{3x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{3}$ حسب مبرهنة الإحاطة.

السؤال الثالث:

لدينا $f(x)=\cos^2 x$ و $f(\pi)=\cos^2\pi=(-1)^2=1$

و $f'(x)=2\cos x.(-\sin x)=-2\cos x.\sin x$ و $f'(\pi)=-2\cos\pi.\sin\pi=-2(-1)(0)=0$

بما أن f اشتقاقي عند π وحسب تعريف العدد المشتق يكون $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x-1}{x-\pi}=0$.

السؤال الرابع:

نقول عن التابع f أنه مستمر على $\mathbb{R}$ إذا كان مستمر عند 1 أي $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ ومنه:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\frac{1}{4}=m$$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2} \text{ و } D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$ و $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$$f'(x)=\frac{4(x-1)^2-2(x-1)(4x)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(4x-4-8x)}{(x-1)^4}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $-4x-4=0$ أي $x=-1$ حيث $f(-1)=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0

$f(-1)=-1$ قيمة حدية صغرى

2) $\Delta: y=0$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$ ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$

عندما $x>0$ فإن C فوق المقارب Δ

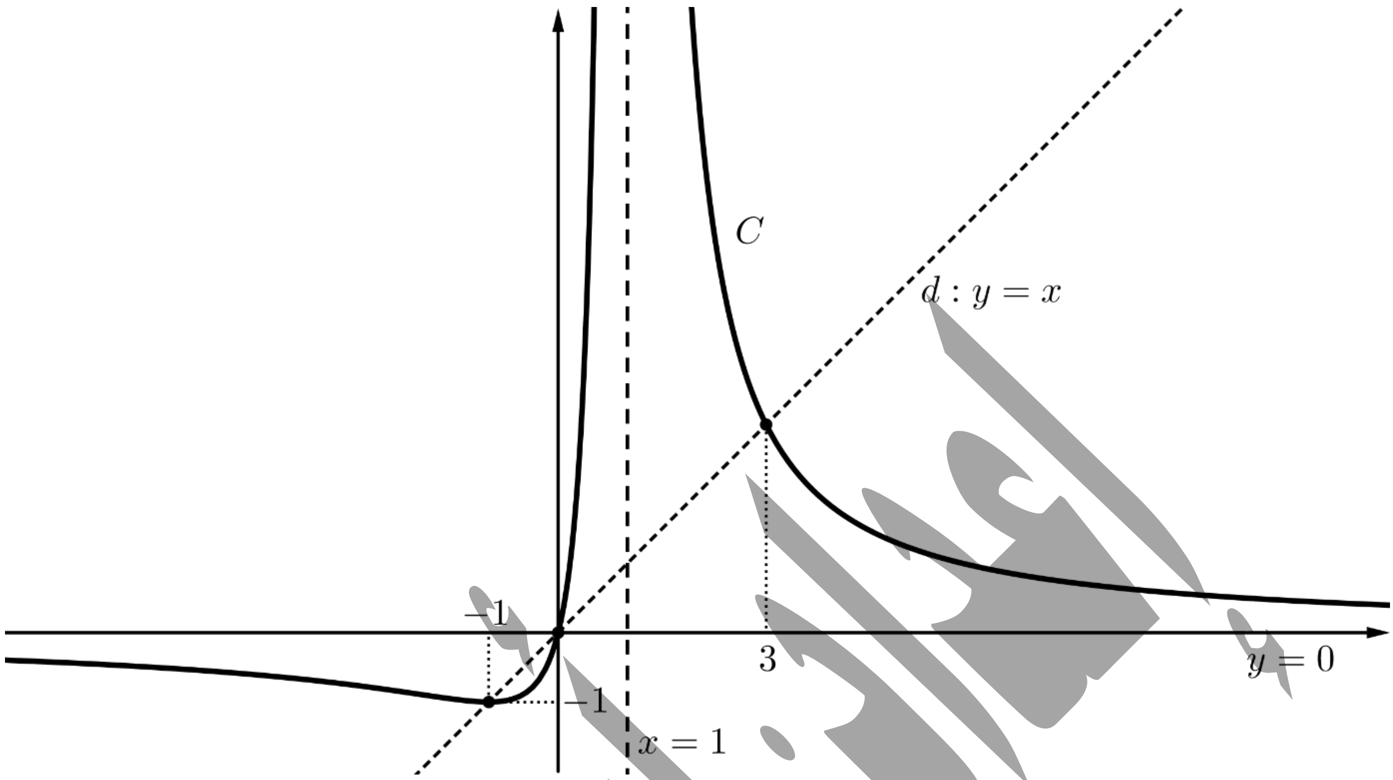
عندما $x<0$ فإن C تحت المقارب Δ

3) لدراسة وضع C بالنسبة لمنصف الربع الأول ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_d=\dfrac{4x}{(x-1)^2}-x$

$$f(x)-y_d=\frac{4x-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x\left(4-(x-1)^2\right)}{(x-1)^2}=\frac{x(2-x+1)(2+x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x(3-x)(x+1)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق d		C تحت d		C فوق d		C فوق d		C تحت d	

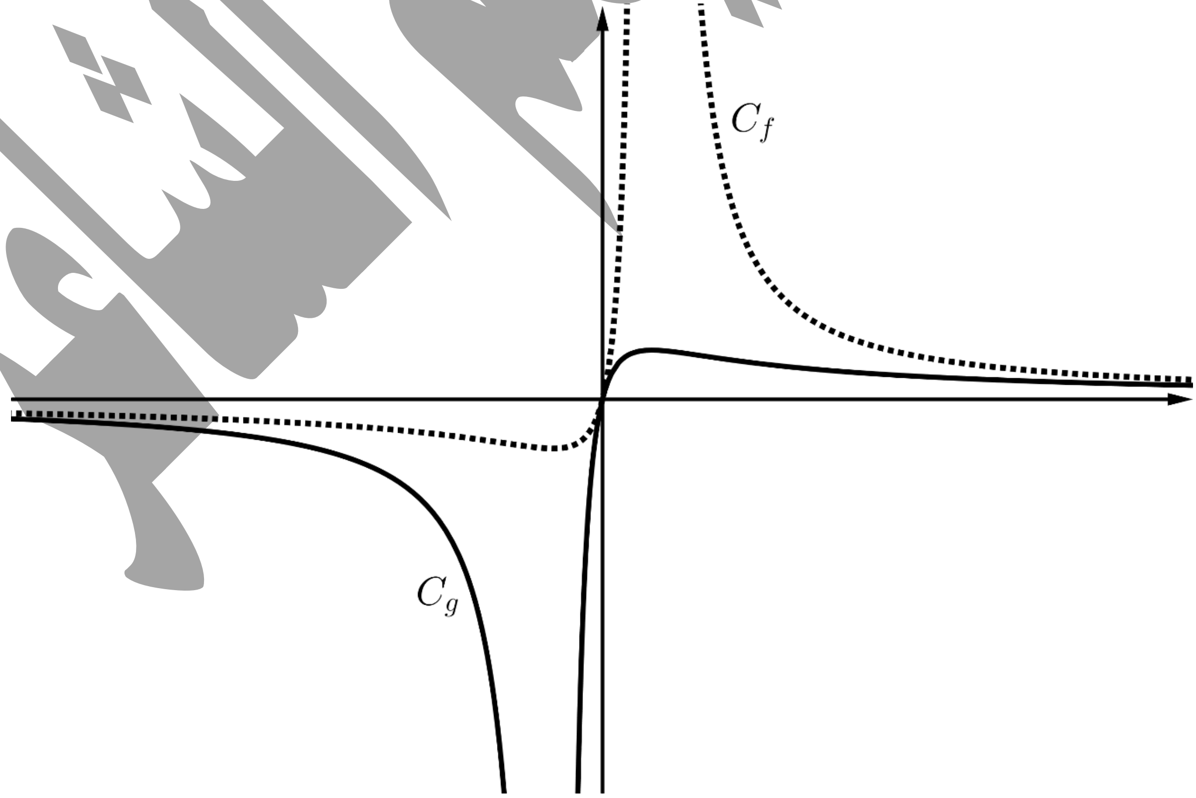
(4



(5 لدينا $g(x)=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$

$$f(-x)=\frac{4(-x)}{(-x-1)^2}=-\frac{4x}{(x+1)^2}=-g(x)$$

أي $g(x)=-f(-x)$ وبالتالي الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



المسألة الثانية:

$D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ و $f(x)=2\cos x-2\sin^2 x$

1) الشرط $x\in D_f=]-\infty,+\infty[$ و $-x\in D_f=]-\infty,+\infty[$

$$f(-x)=2\cos(-x)-2\sin^2(-x)=2\cos x-2(-\sin x)^2=2\cos x-2\sin^2 x=f(x)$$

وبالتالي التابع f زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

2) $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)-2\sin^2(x+2\pi)=2\cos x-2\sin^2 x=f(x)$

وبالتالي التابع f دوري ويقبل 2π دوراً له

وبالتالي يمكن دراسته على المجال $[0,2\pi]$

وبما أن التابع f زوجي فإنه يمكن الدراسة على المجال $[0,\pi]$

3) $f(0)=2\cos(0)-2\sin^2(0)=2$ و $f(\pi)=2\cos(\pi)-2\sin^2(\pi)=-2$

$$f'(x)=-2\sin x-4\sin x.\cos x=-2\sin x.(1+2\cos x)$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $-2\sin x.(1+2\cos x)=0$

إما $\sin x=0$ وبالتالي $x=0$ حيث $f(0)=2$ و $x=\pi$ حيث $f(\pi)=-2$

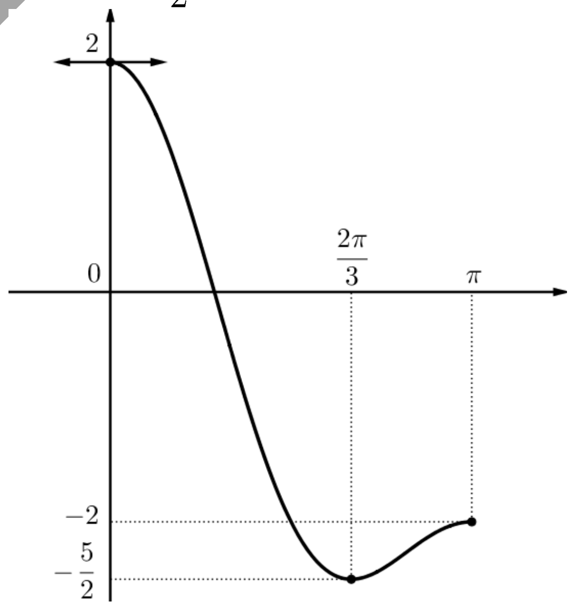
أو $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ وبالتالي $x=\dfrac{2\pi}{3}$ حيث

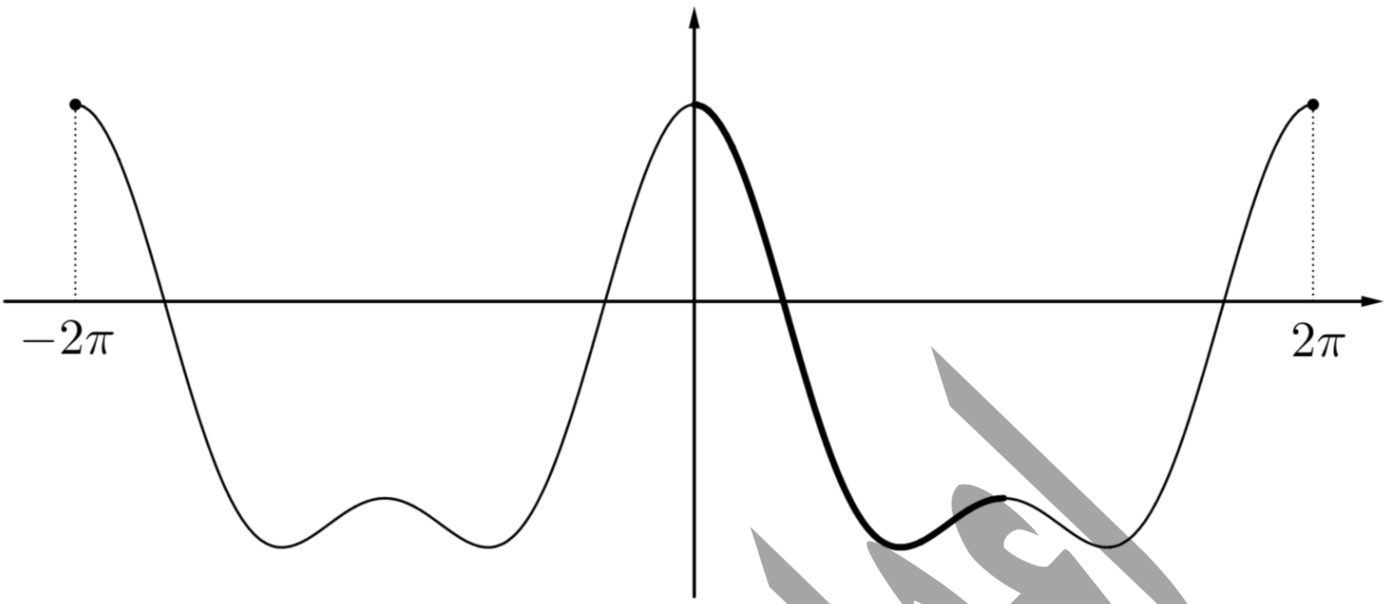
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-2\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	-2

4) المماسات الأفقية هي : $y=2$ و $y=-\dfrac{5}{2}$ و $y=-2$

5)





انتهى حل النموذج الرابع

النهايات والاستمرار والاشتقاق