قناة الرياضيات

سلسلة التفوق التعليمية

T.ME/SALEMALHAMDANMATHS

الأوراق الذهبية

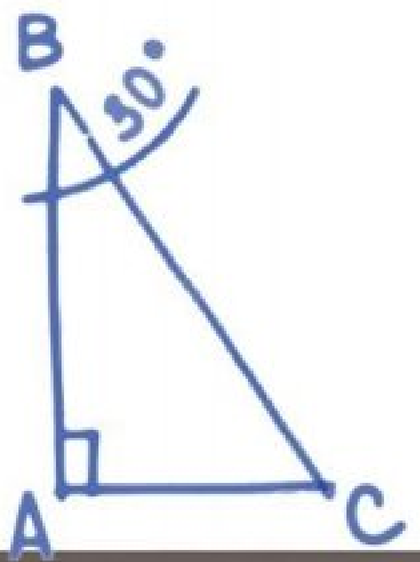
A+

الأوراق الذهبية للأشعة

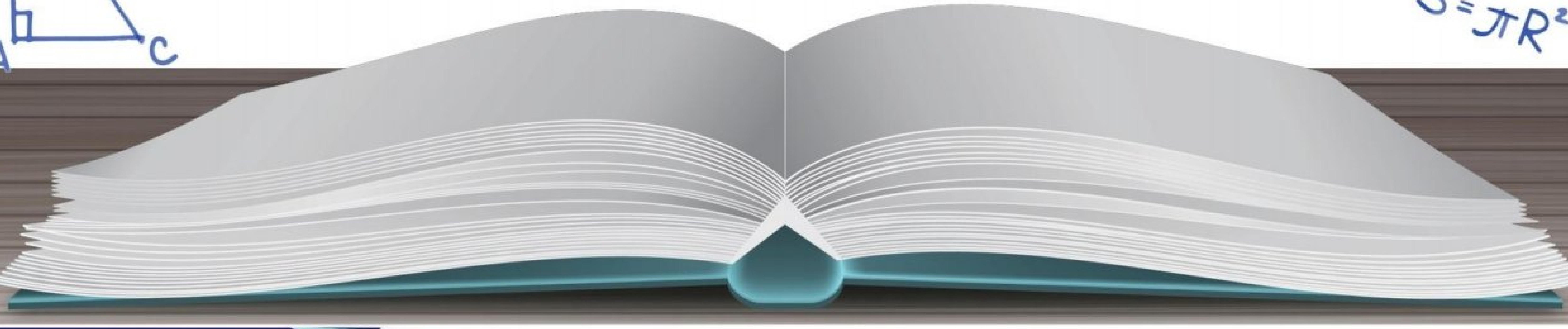
(الأبحاث الثلاث)

لطلاب الثالث الثانوي

تحتوي هذه الأوراق على
شرح كافي لجميع افكار البحث
وحل مع شرح طرق الحل لأهم التمارين
الإمتحانية و النموذجية



$S=\pi R^2$



إعداد المدرس: رام عبدو

0947459007

Ram Abdo

لإيجاد معادلة مستوي نحتاج إلى نقطة و ناظم:

$$M(x_0, y_0, z_0)\ , \vec{n}(a, b, c)$$

ونعوض بمعادلة هنا:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مثال[١]:

أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,1,2)$ والذي يقبل $\vec{n}(2,1,1)$ ناظماً عليه.

الحل:

نعوض بمعادلة هنا:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$2(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$
$$\Rightarrow 2x + y + z - 5 = 0$$

مثال[٢]:

أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,1,2)$ ويوازي المستوي :

$$2x + y + z + 5 = 0$$

الحل:

النقطة: $A(1,1,2)$.

يوازي أي له نفس الناظم: $\vec{n}(2,1,1)$.

ومنه نعوض بمعادلة هنا:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$2(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$
$$\Rightarrow 2x + y + z - 5 = 0$$

مثال[٣]: سؤال دورة

أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ علماً

$$A(1,1,2),\quad B(3,-1,4)$$

تذكرة:

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مستوي عمودي على القطعة في منتصفها ويكون ناظم المستوي هو نفسه شعاع توجيه المستقيم.

أي: $$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \left(\underbrace{2}_{a}, \underbrace{-2}_{b}, \underbrace{2}_{c}\right)$$

النقطة[هي منتصف القطعة $[AB]$]:

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$
$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$\Rightarrow M_0(2,0,3)$$

نعوض في معادلة هنا:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow 2x - 2y + 2z - 10 = 0$$

سؤال خطير:

لتكن لدينا النقاط:

$$A(1,2,1),\ \ B(2,1,0), C(0,0,2)$$

1] **اثبت أن النقاط تشكل مستوي.**

2] **أوجد معادلة المستوي.**

الحل:

١) **لنثبت أن النقاط تشكل مستوي يجب أن لا تقع النقاط على استقامة واحدة. ومنه لدينا:**

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$$
$$\overrightarrow{AC}(-1,-2,1)$$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة، ومنه فإن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً، ومنه فإن النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

بالتالي فإن النقاط تشكل مستوي.

٢) **إيجاد معادلة المستوي:**

الناظم ليس معنا بالتالي نقوم بما يلي:

1] **نفرض الناظم $\vec{n}(a, b, c)$.**

2] **ليكن $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.**

3] **نوجد معادلتين بمجهولين ونفرض شيء مجهول ونوجد البقية.**

إذا نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1),\ \ \overrightarrow{AC}(-1,-2,1)$$

لأن الناظم يعامد أي شعاع في المستوي:

$$\#\ \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0$$

$$\boxed{a-b-c=0}\ ...(1)$$

$$\#\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0$$

$$\boxed{-a-2b+c=0}\ ...(2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b-c=0\\-a-2b+c=0\end{cases}$$

بفرض $\boxed{c=1}$:

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b-1=0\\-a-2b+1=0\end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين:

$$-3b=0\Rightarrow\boxed{b=0}$$

نعوض في (1):

$$a-0-1=0\Rightarrow\boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow\vec{n}(1,0,1)$$

ونختار نقطة: $A(1,2,1)$

ونعوض بمعادلة هنا:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-1)+0(y-2)+1(z-1)=0$$

$$x-1+z-1=0$$

$$\boxed{x+z-2=0}$$

تمرين:

أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(1,1,2)$،

و يعامد المستويين:

$$p_1:\ \ 2x+y-z+3=0$$

$$p_2:\ \ -x+y+2z+5=0$$

ملاحظة حل:

بما أن المستوي المطلوب يعامد المستويين p_1,p_2 ومنه يكون يعامد النواظم ومنه نستفاد من الجداء السلمي بانه مساوياً للصفر بين ناظم المستوي والناظمين الآخرين.

الحل:

نفرض ناظم المستوي المطلوب هو: $\vec{n}(a,b,c)$.

$$\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)\quad,\quad\overrightarrow{n_2}(-1,1,2)$$

$$\#\vec{n}.\overrightarrow{n_1}=0$$

$$x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0$$

$$\boxed{2a+b-c=0}\ ...(1)$$

$$\#\vec{n}.\overrightarrow{n_2}=0$$

$$x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0$$

$$\boxed{-a+b+2c=0}\ ...(2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b-c=0\\-a+b+2c=0\end{cases}$$

بفرض $\boxed{c=1}$:

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b-1=0\\-a+b+2=0\end{cases}$$

بطرح المعادلتين الأخيرتين:

$$3a-3=0\Rightarrow\boxed{a=1}$$

نعوض في (1):

$$2+b-1=0\Rightarrow\boxed{b=-1}$$

$$\Rightarrow\vec{n}(1,-1,1)$$

ونختار نقطة ولتكن:

$$A(1,1,2)$$

ونعوض بمعادلة هنا:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\boxed{x-y+z-2=0}$$

المعادلات الوسيطة لمستقيم:

لإيجاد المعادلات الوسيطية لمستقيم نحتاج إلى نقطة M_0 وشعاع توجيه $\vec{u}$ بحيث:

$$\vec{u}(a,b,c)$$

ونعوض بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\quad;t\in\mathbb{R}$$

مثال[١]:

أوجد معادلة المستقيم المار من $A(1,1,2)$ ويقبل $\vec{u}(3,2,1)$ شعاعاً موجهاً له.

الحل:

نعوض بالمعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = t+2 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

مثال[٢]:

أوجد معادلة المستقيم المار من النقطتين:

$A(1,1,3)$ و $B(-1,2,2)$

الحل:

إن شعاع التوجيه هو:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,1,-1)$$

ونختار النقطة $A(1,1,3)$.

نعوض بالمعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t+3 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

الوضع النسبي لمستويين:

$$p_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$p_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1) \quad , \quad \overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$$

- إذا كان $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ مرتبطين خطياً يكون المستويين متوازيين.
- إذا كان $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً يكون المستويين متقاطعين.
- في حالة خاصة إذا كان $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ يكون المستويين متعامدين.

مثال:

$$p_1: \quad 2x + y - z + 1 = 0$$
$$p_2: \quad x + 2y + z - 1 = 0$$

أثبت أن المستويين متقاطعين وأوجد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهم.

الحل:

$$\overrightarrow{n_1}(2,1,-1) \quad , \overrightarrow{n_2}(1,2,1)$$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة ومنه المستويين متقاطعين.

لإيجاد التمثيل الوسيطي:

نفرض $\boxed{x = t}$:

$$\begin{cases} 2t + y - z + 1 = 0 \\ t + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y - z + 1 = -2t \quad \dots(1) \\ 2y + z - 1 = -t \dots(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين:

$$3y = -3t \Rightarrow \boxed{y = -t}$$

نعوض في (1):

$$-t - z + 1 = -2t \Rightarrow \boxed{z = t+1}$$

ومنه المعادلات الوسيطية للفصل المشترك:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

تمرين هام:

حساب بعد نقطة عن مستقيم

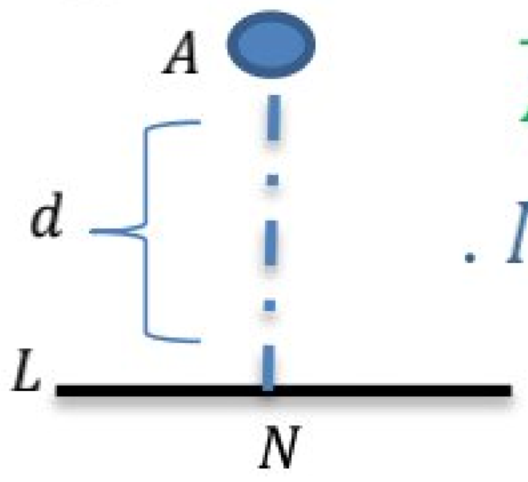
١] نفرض $N(x,y,z)$ مسقط النقطة A على المستقيم L.

٢] بما أن $N \in L$ فهي تحقق معادلاته الوسيطية.

٣] إن $\overrightarrow{AN}$ عامودي على $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم: $\overrightarrow{AN}.\vec{u} = 0$

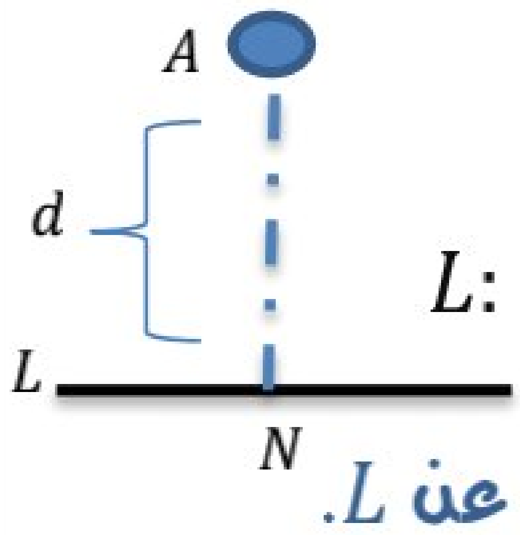
فنحصل على t ثم على N.

٤] نحسب البعد بين N و A.



مثال:

ليكن لدينا المستقيم:



$$L: \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t+2 \end{cases}$$

والنقطة $A(1,2,1)$. احسب بعد A عن L.

الحل:

بفرض $N(x,y,z)$ مسقط A على المستقيم L

ومنه : $N \in L$ ، فهي تحقق معادلاته الوسيطية:

$$N(1+t, -t, 2+t)$$

ولدينا: $A(1,2,1)$.

نشكل $\overrightarrow{AN}$: $\overrightarrow{AN} = (t, -t-2, t+1)$

ولدينا شعاع توجيه المستقيم هي:

$$\vec{u} = (1,-1,1)$$

<u>ولأن $\overrightarrow{AN}$ يعامد $\vec{u}$ فإن:</u>

$$\overrightarrow{AN}.\vec{u} = 0$$
$$t + t + 2 + 1 + t = 0$$
$$\Rightarrow 3t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

ومنه:

$$N(0,1,1)$$

لنحسب المسافة بين $A \,\&\, N$:

$$AN = \sqrt{(x_N - x_A)^2 + (y_N - y_A)^2 + (z_N - z_A)^2}$$
$$= \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2 + (1-1)^2}$$
$$\Rightarrow AN = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

<u>**حساب بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين:**</u>

١] بالحل المشترك بين جملة المعادلتين للمستوي نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم [الفصل]

٢] نفرض نقطة $D(x,y,z)$ مسقط النقطة على الفصل المطلوب حساب بعدها عن الفصل.

٣] نستفيد من أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يعامد شعاع توجيه مستقيم الفصل $\vec{u}$ أي:

$$\overrightarrow{AD}.\vec{u} = 0$$

لنوجد منها قيمة t، ثم نوجد إحداثيات النقطة D التي كتبت بدلالة t .

٤] نوجد المسافة بين $A \,\&\, D$.

مثال:

أوجد بعد A عن d الفصل المشترك لـ p, q :

$$p: \quad 2x - y + z - 4 = 0$$
$$q: \quad x + y + 2z - 5 = 0$$

حيث أن: $A(3,-1,2)$.

الحل:

بالحل المشترك بين $p \,\&\, q$:

نجمع المعادلتين:

$$3x + 3z - 9 = 0$$
$$3z = -3x + 9$$
$$\boxed{z = -x + 3}$$

نعوض z في معادلة p :

$$\Rightarrow \quad 2x - y + (-x+3) - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{y = x - 1}$$

وبفرض $\boxed{x = t}$ نجد أن الفصل المشترك:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

بفرض: $D(x,y,z)$ هي مسقط A على الفصل المشترك d ومنه: $D \in d$، فهي تحقق معادلاته الوسيطية:

$$D(t, t-1, -t+3)$$

ولدينا: $A(3,-1,2)$

بالتالي فإن:

$$\overrightarrow{AD}(t-3, t, -t+2)$$

ولدينا $\vec{u}$ شعاع توجيه الفصل d ومنه:

$$\vec{u}\ (1,1,-1)$$

وبالتالي:

$$\overrightarrow{AD}.\vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow\ t-3+t+t-1=0$$
$$\Rightarrow 3t = 4 \quad \Rightarrow \boxed{t=\frac{4}{3}}$$

ومنه نوجد إحداثيات D نقطة المسقط:

$$D\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

نحسب البعد بين $A\ \&\ D$:

$$AD = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2+(z_D-z_A)^2}$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{\frac{42}{9}}$$

ومنه:

$$AD = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

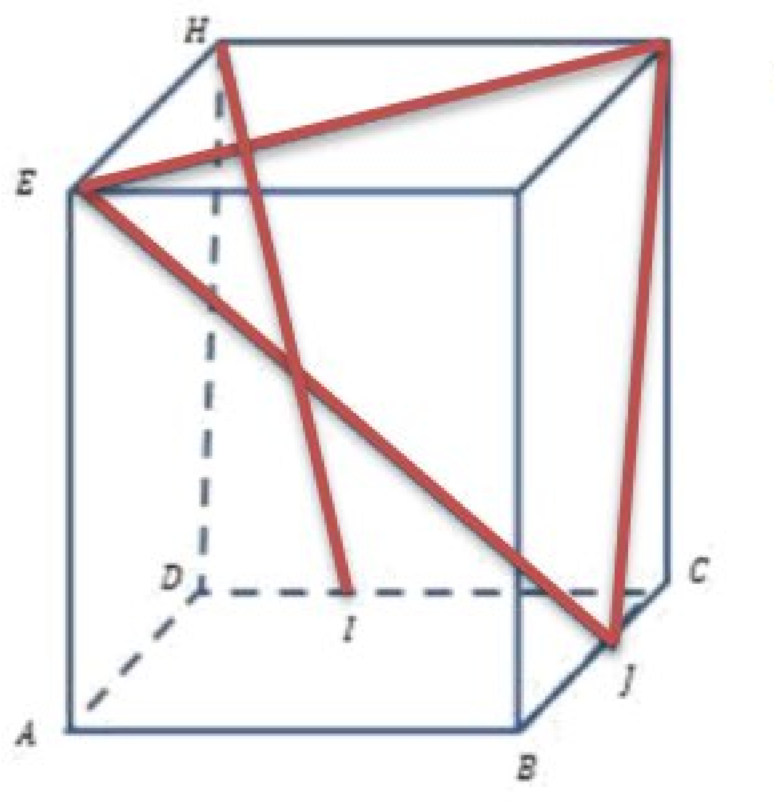
وهو البعد بين A والفصل d.

تمرين:

ليكن لدينا الشكل المجاور:

$$(A : \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\overrightarrow{AE}\ )$$

مكعب طول ضلعه 1 .



فيه:

1) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

2) $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

المطلوب:

١] اكتب احداثيات رؤوس المكعب.

٢] اكتب معادلة المستوي EGJ .

٣] اكتب معادلة المستقيم HI .

٤] برهن أن المستقيم HI يوازي المستوي EGI

الحل:

١) $A(0,0,0)\ ,\ \ B(1,0,0)\ ,D(0,1,0)$
$E(0,0,1),\ \ C(1,1,0)\ ,\ F(1,0,1)$
$H(0,1,1)\quad ,\ G(1,1,1)$

٢) نحتاج نقطة وناظم ، **النقطة** $J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$

الناظم: ليس معنا [نعلم أن الناظم يعامد أي شعاعين في المستوي].

نوجده من التعامد مع الشعاعين:

$\overrightarrow{EG}\ (1,1,0)\quad ,\ \ \overrightarrow{EJ}\ \left(1,\frac{3}{4},-1\right)$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ ومنه:

$\vec{n}\,.\overrightarrow{EG} = 0$

$\Rightarrow\ \ a+b+0=0\ \ldots(1)$

$\vec{n}\,.\overrightarrow{EJ} = 0$

$\Rightarrow\ \ a+\frac{3}{4}b-c=0\ \ \ldots(2)$

معادلتين بثلاث مجاهيل [نفرض $b=4$]

ونعوض في (1) فنجد: $\boxed{a=-4}$.

نعوض في (2):

$$-c = 1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

ومنه:

$$\vec{n}(-4,4,-1)$$

ولدينا:

$$E(0,0,1)$$

نعوض بمعادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-4(x-0)+4(y-0)-1(z-1)=0$$
$$\Rightarrow 4x-4y+z-1=0$$

٣) لإيجاد معادلة المستقيم HI، نحتاج نقطة وشعاع توجيه، حيث لدينا:

$$H(0,1,1)\qquad ,\ I\left(\frac{1}{4},1,0\right)$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{HI} = \left(\frac{1}{4},0,-1\right)$$

ونعوض بالمعادلات الوسيطية:

$$HI: \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{4}t \\ y = 1 + 0t \qquad ; \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

٤) بالاستفادة من الجداء السلمي:

$$\vec{n}.\vec{u} = -4 * \frac{1}{4} + 4 * 0 - 1 * -1$$
$$= -1 + 0 + 1 = 0$$

ومنه المستقيم يوازي المستوي.

تمرين:

أثبت أن المستقيم AB يقطع المستوي p، وعين إحداثيات نقطة التقاطع، حيث:

$$A(2,-1,0) \qquad , \quad B(-1,3,5)$$
$$p: \quad 2x - 3y + z - 5 = 0$$

فكرة الحل:

١] نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم ومعادلة المستوي.

٢] نثبت أن: $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$.

٣] بالحل المشترك لمعادلة المستقيم المستوي نحصل على نقطة التقاطع.

الحل:

شعاع التوجيه:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,4,5)$$

ولدينا:

$$A(2,-1,0)$$

ومنه المعادلات الوسيطية للمستقيم هي:

$$AB = \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 4t \qquad ; \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 + 5t \end{cases}$$

لدينا المستوي:

$$p: \quad 2x - 3y + z - 5 = 0$$

ومنه الناظم:

$$\vec{n}(2,-3,1)$$

الآن نستخدم الجداء السلمي:

$$\vec{n}.\vec{u} = -6 - 12 + 5 = -13$$

ومنه فإن المستقيم يقطع المستوي[لأنه لا يعامد ناظم المستوي].

نعوض المعادلات الوسيطية لـAB بالمستوي p :

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$
$$2(2-3t) - 3(-1+4t) + (5t) - 5 = 0$$
$$4 - 6t + 3 - 12t + 5t - 5 = 0$$
$$-13t = -2 \implies \boxed{t = \frac{2}{13}}$$

ومنه نوجد إحداثيات نقطة التقاطع من تعويض t في المعادلات الوسيطية، فنجد:

$$x = 2 - \frac{6}{13} \implies \boxed{x = \frac{20}{13}}$$
$$y = -1 + 4\left(\frac{2}{13}\right) \implies \boxed{y = -\frac{5}{13}}$$
$$z = 5\left(\frac{2}{13}\right) \implies \boxed{z = \frac{10}{13}}$$

ومنه تكون نقطة التقاطع هي:

$$N\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

تمرين:

ليكن لدينا النقاط التالية:

$$A(1,2,0)\,, B(0,0,1)\,, C(1,5,5)$$

عين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي ABC .

فكرة الحل:

١] نوجد معادلة المستوي ABC .

٢] نوجد معادلة المستقيم d المار من D ويعامد ABC [شعاع توجيه المستقيم ناظم على المستوي].

٣] بالحل المشترك لمعادلة المستقيم والمستوي نحصل على نقطة التقاطع.

الحل:

نحتاج نقطة وناظم لتعيين المستوي ABC :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم، ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}\,(-1,-2,1) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(0,3,5)$$

ومنه:

$$\# \qquad \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\boxed{-a-2b+c=0} \ldots (1)$$

$$\# \qquad \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\boxed{0+3b+5c=0} \ldots (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-2b+c=0 \\ 3b+5c=0 \end{cases}$$

بفرض $\boxed{c=3}$:

نعوض في (2):

$$3b+15=0 \Rightarrow \boxed{b=-5}$$

نعوض في (1):

$$-a+10+3=0 \Rightarrow \boxed{a=13}$$
$$\Rightarrow \vec{n}(13,-5,3)$$

ونختار نقطة:

$$B(0,0,1)$$

ونعوض بمعادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$13(x-0)-5(y-0)+3(z-1)=0$$
$$\boxed{13x-5y+3z-3=0}$$

نكتب معادلة المستقيم d المار من النقطة $D(-11,9,-4)$ وشعاعه هو ناظم المستوي $\vec{u}$ لأنه عمودي عليه، ومنه: $\vec{u}(13,-5,3)$.

بالتالي:

$$d: \begin{cases} x=-11+13t \\ y=9-5t \\ z=-4+3t \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية بمعادلة المستوي:

$$13(-11+13t)-5(9-5t)+3(-4+3t)-3=0$$

ومنه:

$$-143+169t-45+25t-12+9t-3=0$$

بالتالي:

$$\Rightarrow \quad \boxed{t=1}$$

نعوض بالمعادلات الوسيطية لنوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي:

$$x=-11+13=2$$
$$y=9-5=4$$
$$z=-4+3=-1$$

ومنه: $D'(2,4,-1)$

الوضع النسبي لمستقيمين

- $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ اشعة التوجيه مرتبطة خطياً: **(متوازيين)**
  وفي حال اشتراكهم بنقطة نحصل على: **(تطابق)**
- $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ اشعة التوجيه مستقلة خطياً:
  نحل جبرياً حل مشترك إذا كان هناك حل: **(مستقيمين متقاطعين)**
  إذا كانت الجملة مستحيلة الحل: **(المستقيمين متخالفين)**

تمرين:

ليكن $d \,\&\, d'$ مستقيمين، حيث:

$$d: \; \vec{u}(1,0,-2) \qquad A(3,-1,1)$$
$$d': \; \vec{v}(2,1,-3) \qquad B(3,-3,-1)$$

١] أثبت أن d, d' متقاطعين وأوجد نقطة التقاطع I.

٢] أوجد معادلة المستوي الناتج من تقاطع المستقيمين $d \,\&\, d'$.

الحل:

١] نلاحظ أن:

$$\vec{u}(1,0,-2) \quad , \quad \vec{v}\,(2,1,-3)$$

المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين مستقلين خطياً.

بالحل الجبري ندرس التقاطع:

$$d:\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 0t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

و:

$$d':\begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -3 + s \\ z = -1 - 3s \end{cases} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$

ومنه بالحل المشترك بين $d \,\&\, d'$:

$$3 + t = 3 + 2s \quad \ldots(1)$$
$$-1 = -3 + s \quad \ldots(2)$$
$$1 - 2t = -1 - 3s \quad \ldots(3)$$

من (2) نجد أن: $\boxed{s = 2}$.

نعوض في (1):

$$3 + t = 3 + 4 \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

نعوض في (3) للتحقق:

$$1 - 8 = -1 - 6 \quad \Rightarrow -7 = -7$$

المستقيمين متقاطعين، نعوض $t = 4$ في d:

$$x = 3 + 4 = 7$$
$$y = -1$$
$$z = 1 - 2(4) = -7$$

ومنه نقطة التقاطع: $I(7,-1,7)$.

٢] معادلة المستوي الناتج من تقاطع $d \& d'$ ،

نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ الناظم، ومنه:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0$$
$$a + 0 - 2c = 0 \quad \ldots(1)$$
$$\vec{n}.\vec{v} = 0$$
$$2a + b - 3c = 0 \quad \ldots(2)$$

بفرض $\boxed{c = 1}$:

نعوض في (1) فنجد: $\boxed{a = 2}$.

نعوض في (2) فنجد: $\boxed{b = -1}$.

ومنه: $\vec{n}(2,-1,1)$.

ونختار نقطة A أو B أو I ولتكن :

$$A(3,-1,1)$$

نعوض بمعادلة المستوي:

$$2(x-3) - (y+1) + (z-1) = 0$$

ومنه:

$$2x - y + z - 8 = 0$$

مركز الأبعاد المتناسبة:

علاقات هامة في مركز الأبعاد:

١- تحديد موقع مركز الأبعاد المتناسبة:

بفرض أن G هي م.أ.م للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta)$ فمنه:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$$

٢- لإثبات أن G هي نقطة وحيدة وتحقق أنها م.أ.م

نستفيد من العلاقة:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

٣- إذا كانت M نقطة من الفراغ:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$$

نستفيد من هذه العلاقة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط عندما تكون بين طويلة || ... || .

تعليم قراءة:

تمرين:

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

نلاحظ أن:

M هي م.أ.م للنقاط:

$$(A,3),(B,2),(C,1)$$

تمرين:

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

نلاحظ أن:

G هي م.أ.م للنقاط:

$$(A,3),(B,2),(C,1)$$

مثال:

ماذا تمثل مجموعة النقاط M في الفراغ:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 9$$

بفرض أن G م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,1)$$

ومنه:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad ...(*)$$

نعوض $(*)$ بالمعادلة الأساسية:

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 9$$ [بدال الجذر]

إذا طرف واحد فيه مجهول [تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها 3].

مثال:

ماذا تمثل مجموعة النقاط M في الفراغ:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

إن G_1 م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,-1)$$

إن G_2 م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,-1),(C,1)$$

ومنه:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG_1}$$
$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG_2}$$

بالتالي نجد:

$$\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_2}\right\|$$

وهي تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة G_1G_2.

مسألة $\frac{21}{43}$ أشعة:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

إن G م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

أثبت أن G يقع على $[EF]$.

الحل:

لدينا:

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

إن E م.أ.م للنقاط:

$$(C,1),(B,3)$$

ولدينا:

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

إن F م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(D,2)$$

ولدينا G هو م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

ومنه G يكون م.أ.م لـ $(E,4),(F,3)$ وبالتالي تكون F, E, G على استقامة واحدة.

مسألة $\frac{22}{43}$ عامة أشعة [هامة + معدلة]:

ليكن لدينا $ABCD$ رباعي وجوه فيه:

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$
$$\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$$

١] أثبت أن M نقطة من الفراغ تحقق:

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

٢] جد مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل:

١]   # إثبات أن:

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

لدينا:

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Longrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

ومنه I م.أ.م للنقاط:

$$(A,1),(B,-2)$$

وأياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

فالعلاقة محققة.

\# إثبات أن:

$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

لدينا:

$$\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD} \Rightarrow \overrightarrow{JC} - 2\overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

ومنه J م.أ.م للنقاط:

$$(C,1),(D,-2)$$

وأياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MC} + \beta\overrightarrow{MD} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ}$$
$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

فالعلاقة محققة.

٢] جد مجموعة نقاط الفراغ:

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

لنفرض أن G هي م.أ.م للنقاط:

$$(B,1),(C,1),(D,1)$$

ومنه:

$$\boxed{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}}$$

نعوض بالعلاقة الأساسية:

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)\right\|$$

ومنه:

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}\right\|$$
$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها هو $\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$.

المستوي كمركز أبعاد متناسبة

لإثبات أن ثلاث نقاط تشكل مستوي:

١] نشكل منهم شعاعين.

٢] نثبت أن الشعاعين مستقلين خطياً أي الشعاعان غير متوازيان.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$:

١] إذا نتج أحدهم عن الشعاعين الآخرين:

$$\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$$

$\vec{v}, \vec{u}$ مستقلان خطياً.

٢] إذا كان شعاعان منهم مرتبطين خطياً عندها $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً.

اثبات وقوع أربعة نقاط في مستوي واحد:

١) نوجد معادلة المستوي من ثلاث نقاط.

٢) نعوض النقطة الرابعة في معادلة المستوي ونتأكد من أنها تنتمي إلى المستوي أم لا.

تمرين:

أثبت أن A, B, C, D تقع في مستو واحد حيث:

$$A(2,0,1),\ B(1,-2,1)$$
$$C(5,5,0),\ D(-3,-5,6)$$

الحل:

١] نوجد معادلة المستوي ABC:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,0), \overrightarrow{AC} = (3,5,-1)$$

نلاحظ أن الشعاعين مستقلين خطياً ومنه تشكل النقاط A, B, C مستوي.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{-a-2b=0} \ldots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{3a+5b-c=0} \ldots (2)$$

بفرض $\boxed{b=1}$ يكون:

نعوض في $(1) \Leftarrow \boxed{a=-2}$

نعوض في $(2) \Leftarrow \boxed{c=-1}$

$$\vec{n}(-2,1,-1)$$

ولدينا النقطة $A(2,0,1)$ نعوض بمعادلة هنا:

$$-2(x-2)+1(y-0)-1(z-1)=0$$

$$\boxed{P:\ -2x+y-z+5=0}$$

نعوض النقطة الرابعة في معادلة المستوي ونتأكد من أنها تنتمي إلى المستوي أم لا:

نعوض $D(-3,-5,6)$ في P:

$$-2(-3)+(-5)-(6)+5=0$$

$$0=0 \Rightarrow D\in P$$

ومنه النقاط $A\ ,B\ ,C\ ,D$ تقع في مستو واحد.

تمرين:

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين ولدينا $DA\perp(ABC)$ وفيه:

$$\overrightarrow{AB}=3\vec{\imath}\ \ ,\ \ \overrightarrow{AC}=3\vec{\jmath}\ \ ,\ \ \overrightarrow{AD}=3\vec{k}$$

بفرض لدينا معلم متجانس مبدوه A:

١] عين إحداثيات الرؤوس A, B, C, D .

٢] أكتب معادلة المستوي BCD.

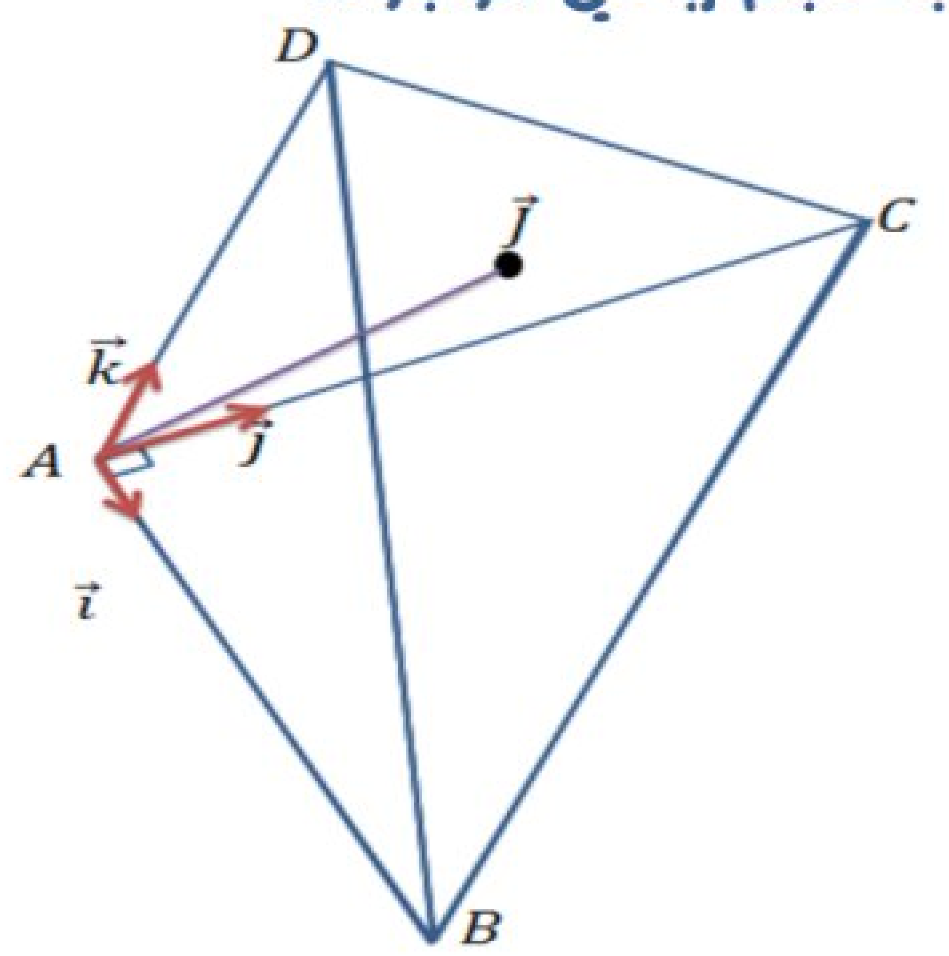
٣] أثبت أن مسقط A على BCD وليكن J هو مركز ثقل المثلث BCD.

٤] عين احداثيات G م ، أ ، م للنقاط

$$(A,1)(B,2)(C,1)$$

٥] أوجد معادلة الكرة التي مركزها J وتمر من A.

٦] احسب حجم رباعي الوجوه.



الحل:

١] إن احداثيات الرؤوس:

$$A(0,0,0)\ ,\ B(3,0,0)$$
$$C(0,3,0)\ \ ,\ D(0,0,3)$$

٢) نفرض $\vec n(a,b,c)$ ناظم المستوي.

$$\overrightarrow{BC}=(-3,3,0)\ ,\overrightarrow{BD}=(-3,0,3)$$

$$\vec n.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \boxed{-3a+3b=0}\ ...(1)$$

$$\vec n.\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow \boxed{-3a+3c=0}\ ...(2)$$

بفرض $\boxed{a=1}$ يكون:

نعوض في $(1) \Leftarrow \boxed{b=1}$ حيث:

$$-3+3b=0 \Longrightarrow \boxed{b=1}$$

نعوض في $(2) \Leftarrow \boxed{c=1}$

$$-3+3c=0 \Longrightarrow \boxed{c=1}$$

ومنه أصبح لدينا: $\vec n(1,1,1)$

ولدينا النقطة $B(3,0,0)$ نعوض بمعادلة هنا:

$$1(x-3)+1(y-0)+1(z-0)=0$$

$$\boxed{P:\ x+y+z-3=0}$$

٣) نوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر من A وعامودي على المستوي BCD.

بما أنه عامودي على المستوي يقبل شعاع توجيه له (ناظم المستوي).

$$\Rightarrow \vec u(1,1,1)$$

و $A(0,0,0)$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

نعوض في معادلة المستوي لنوجد قيمة t:

$$x+y+z-3=0$$
$$t+t+t-3=0 \Rightarrow 3t=3$$
$$\Rightarrow \boxed{t=1}$$

ومنه بعد تعويض t بالمعادلات الوسيطية نكون قد أوجدنا النقطة : $J(1,1,1)$

لنوجد احداثيات مركز ثقل المثلث:

$$x_0 = \frac{x_B+x_C+x_D}{3} = \frac{3+0+0}{3} = 1$$

$$y_0 = \frac{y_B+y_C+y_D}{3} = \frac{0+3+0}{3} = 1$$

$$z_0 = \frac{z_B+z_C+z_D}{3} = \frac{0+0+3}{3} = 1$$

نلاحظ أنها $(1,1,1)$ وهي نفس إحداثيات النقطة $J(1,1,1)$ وبالتالي تكون J هي مركز ثقل المثلث.

٤] إحداثيات G:

$$x_G = \frac{\alpha.x_A+\beta.x_B+\gamma.x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$= \frac{1\times0+2\times3+1\times0}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y_G = \frac{\alpha.y_A+\beta.y_B+\gamma.y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$= \frac{1\times0+2\times0+1\times3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$z_G = \frac{\alpha.z_A+\beta.z_B+\gamma.z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$= \frac{1\times0+2\times0+1\times0}{4} = 0$$

ومنه: $G\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},0\right)$

٥] مركزها J: $J(1,1,1)$

نصف قطرها: JA حيث: $A(0,0,0)$.

$$JA = \sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}$$

$$JA = R = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 3$$

٦] حجم رباعي الوجوه:

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.DA$$

$$\Longrightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{AB.AC}{2}\right).DA$$

$$\Longrightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{3.3}{2}\right).3$$

$$\Longrightarrow \boxed{V = \frac{9}{2}}$$

الوضع النسبي لثلاث مستويات

لتكن لدينا المستويات الثلاث:

$$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$$

$$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$$

$$P_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3 = 0$$

ندرس الوضع النسبي للمستويين P_1, P_2 من خلال $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$:

a] إذا كانا مرتبطان خطياً [متوازيان] تكون الجملة مستحيلة الحل.

b] إذا كان:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

منطبقين ومنه يكون P_1, P_2 معادلة واحدة ومنه نناقش وضع P_1, P_3.

c] إذا كان $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ مستقلين خطياً يكونان متقاطعين في فصل مشترك.

ملاحظة:

يمكن دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات حسب غاوس.

نوجد معادلة الفصل المشترك وندرس تقاطعه مع P_3

إما يكون حل وحيد [نقطة تقاطع]

أو عدد غير منته من الحلول ومنه المستويات الثلاث تتقاطع في فصل مشترك

أو مستحيلة الحل [لا يوجد تقاطع].

مثال 1 :

ادرس تقاطع المستويات:

$$P_1: x+2y+z-3=0$$
$$P_2: 2x+y-z-6=0$$
$$P_3: x-y-2z-3=0$$

الحل:

$$\overrightarrow{n_1}(1,2,1) \quad , \quad \overrightarrow{n_2}(2,1,-1)$$

$\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ مستقلين خطياً ومنه P_1, P_2 متقاطعين.

بالجمع بين $1\&2$ نجد:

$$3x+3y-9=0 \qquad \boxed{\div 3}$$
$$3y=-3x+9$$
$$\boxed{y=-x+3}$$

نعوض في 2 فنجد:

$$2x-x+3-z-6=0$$
$$-z=-x+3 \Longrightarrow z=x-3$$

نفرض $\boxed{x=t}$ ومنه المعادلات الوسيطية:

$$L: \begin{cases} x=t \\ y=-t+3 \ : t\in\mathbb{R} \\ z=t-3 \end{cases}$$

نعوض المعادلات في 3 فنجد:

$$x-y-2z-3=0$$
$$t+t-3-2t+6-3=0 \Rightarrow 0=0$$

ومنه المستويات الثلاث تتقاطع في فصل مشترك.

مثال ٢ :

ادرس تقاطع المستويات:

$$P_1: 2x+2y-z-1=0$$
$$P_2: -x-y-\frac{1}{2}z+3=0$$
$$P_3: x+2y+5z+1=0$$

الحل:

$$\overrightarrow{n_1}(2,2,-1) \quad , \quad \overrightarrow{n_2}\left(-1,-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ مرتبطين خطياً ومنه متوازيين وغير منطبقين $\Leftarrow$ مستحيلة الحل.

الجداء السلمي

ليكن:

$$\vec{u}(x_1,y_1,z_1)\ ,\ \vec{v}(x_2,y_2,z_2)$$
$$\vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2$$

⌘ إذا كان معنا زاوية بين الشعاعين:

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

حيث θ الزاوية بين الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$.

⌘ إذا كان $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدين :

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$

مسألة:

$SABCD$ هرم رباعي قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه (4) والاحرف الجانبية طولها (4).

O مركز المربع $ABCD$ ولدينا SO يعامد القاعدة $ABCD$ أي $(SO \perp ABCD)$.

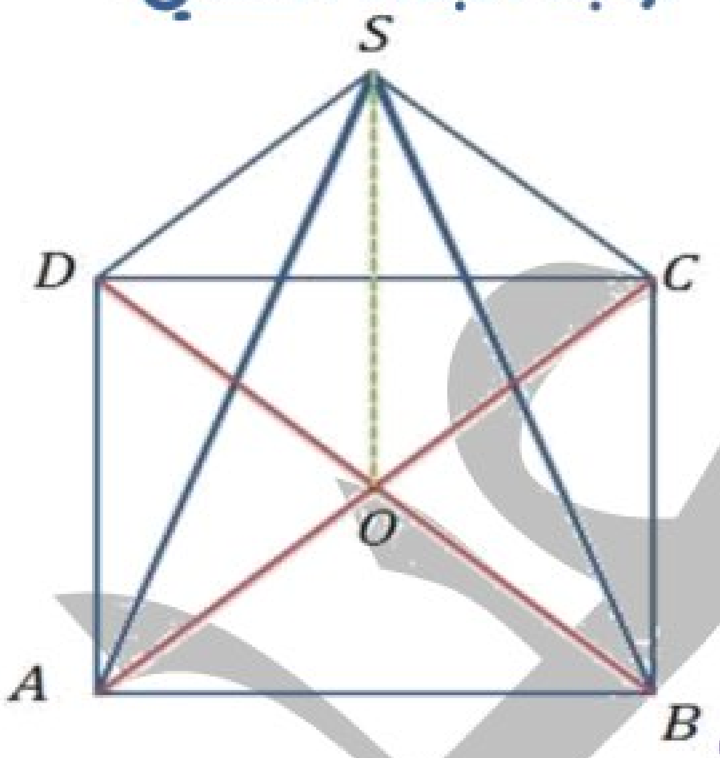
١] أحسب طول $AC\ ,\ SO$

٢] أوجد الجداء السلمي:

a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

b) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

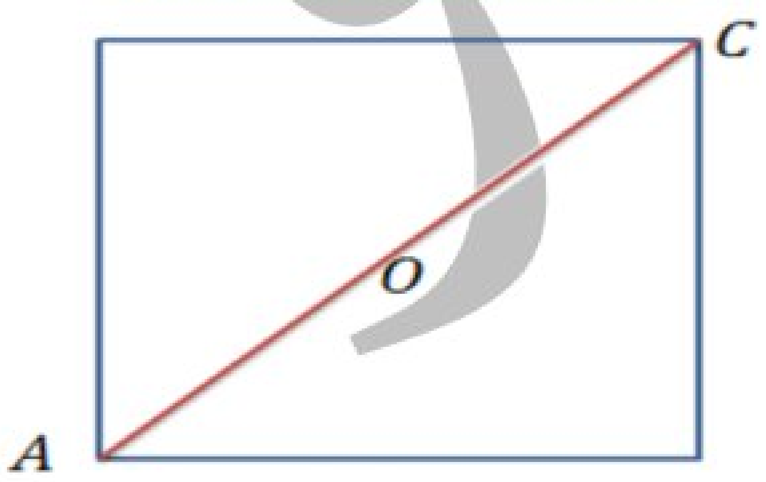
c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$



الحل:

١] حساب طول AC:

لنحلل الشكل [القاعدة المربع]

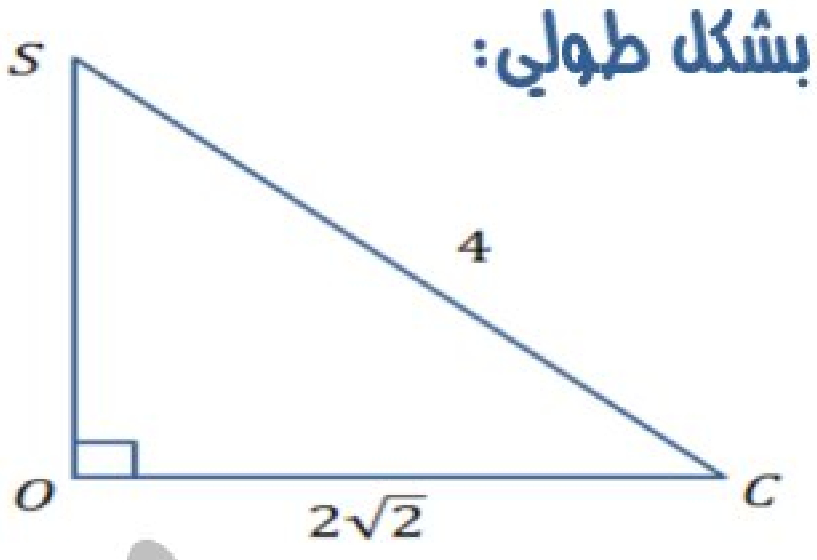


حسب فيثاغورث في المثلث ABC :

$$(AC)^2=4^2+4^2$$
$$AC=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$\Longrightarrow \boxed{AC=4\sqrt{2}}$$

حساب طول SO :

لنحلل الشكل بشكل طولي:



حسب فيثاغورث في المثلث القائم SOC :

$$(SC)^2 = (SO)^2 + (OC)^2$$
$$16 = (SO)^2 + 8$$
$$SO = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

٢] حساب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$:

بما أن طول ضلع القاعدة (4) وطول الحرف الجانبي (4) ومنه مثلث الوجه الأمامي متساوي الأضلاع ومنه زواياه تساوي 60 .

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SB}|.\cos(60)$$
$$\Longrightarrow 4.4.\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$
$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SC}|.\cos(90)$$
$$\Longrightarrow 4.4.(0) = 0$$

لأن المثلث ASC طبوق على المثلث القائم ABC

ومنه الزاوية: $\hat{S} = \widehat{90}°$

نغير كتابة $\overrightarrow{SA}$:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{SO}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$$
$$= 0 + 2\sqrt{2}.4\sqrt{2}.\cos(\pi)$$
$$= -16$$

تمرين هام:

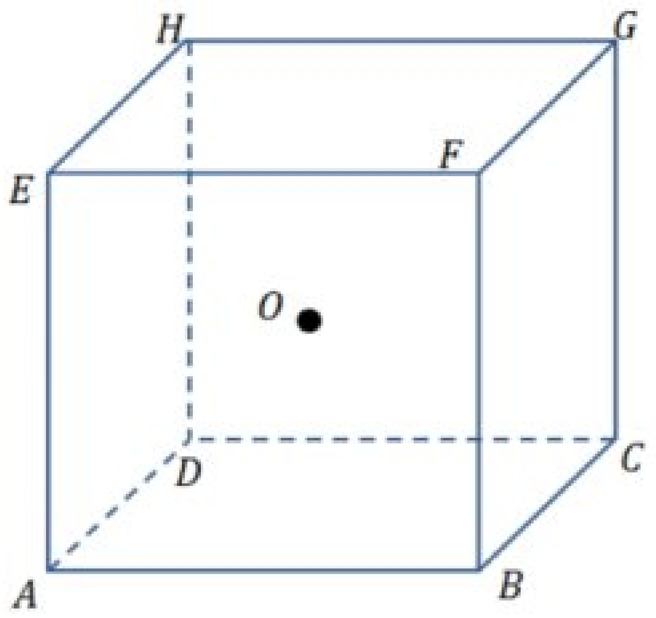
مكعب طول ضلعه 4 و O نقطة تلاقي الأقطار فيه.

١] أثبت أن: $\cos(\widehat{GOB}) = -\frac{1}{3}$

٢] أوجد معادلة الكرة التي مركزها O وتمر من النقطة A :

$$\left(D; \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}; \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}; \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}\right)$$

الحل:



أولاً نوجد احداثيات النقاط:

$G(0,4,4)$, $D(0,0,0)$
$B(4,4,0)$, $F(4,4,4)$

إن O نقطة تلاقي الأقطار [...]

ومنه O منتصف DF أو أي رأسين متقابلين:

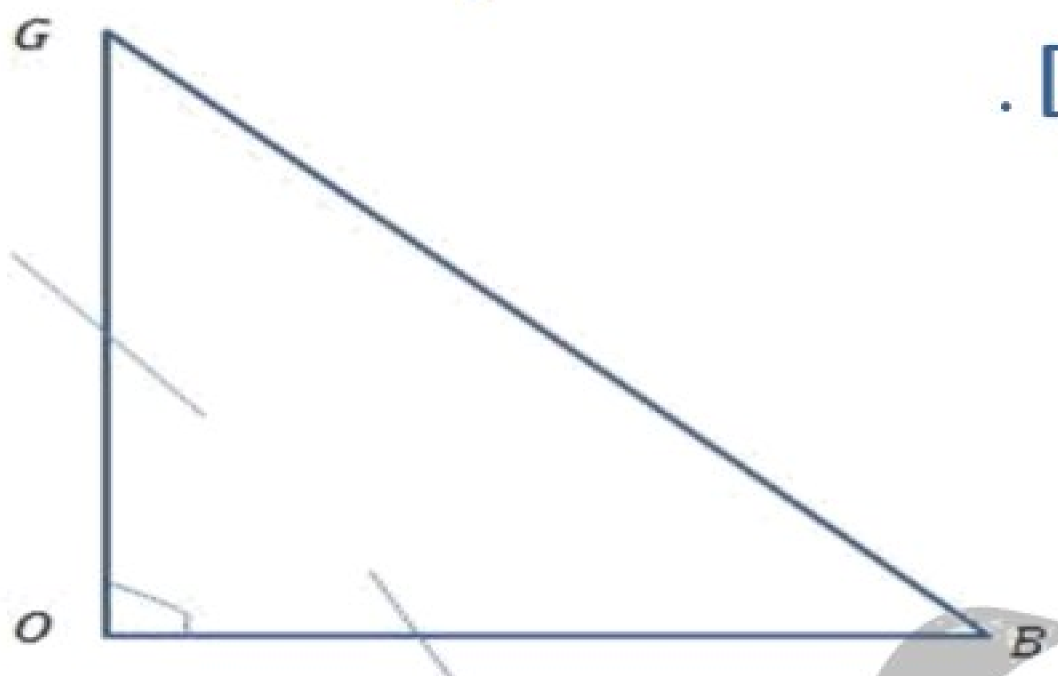
$$O(x_0, y_0, z_0)$$

حيث:

$$x_0 = \frac{x_D + x_F}{2} = 2$$
$$y_0 = \frac{y_D + y_F}{2} = 2$$
$$z_0 = \frac{z_D + z_F}{2} = 2$$

ومنه: $O(2,2,2)$.

لنوجد الزاوية من الجداء السلمي نحلل الشكل[الزاوية المطلوبة] .

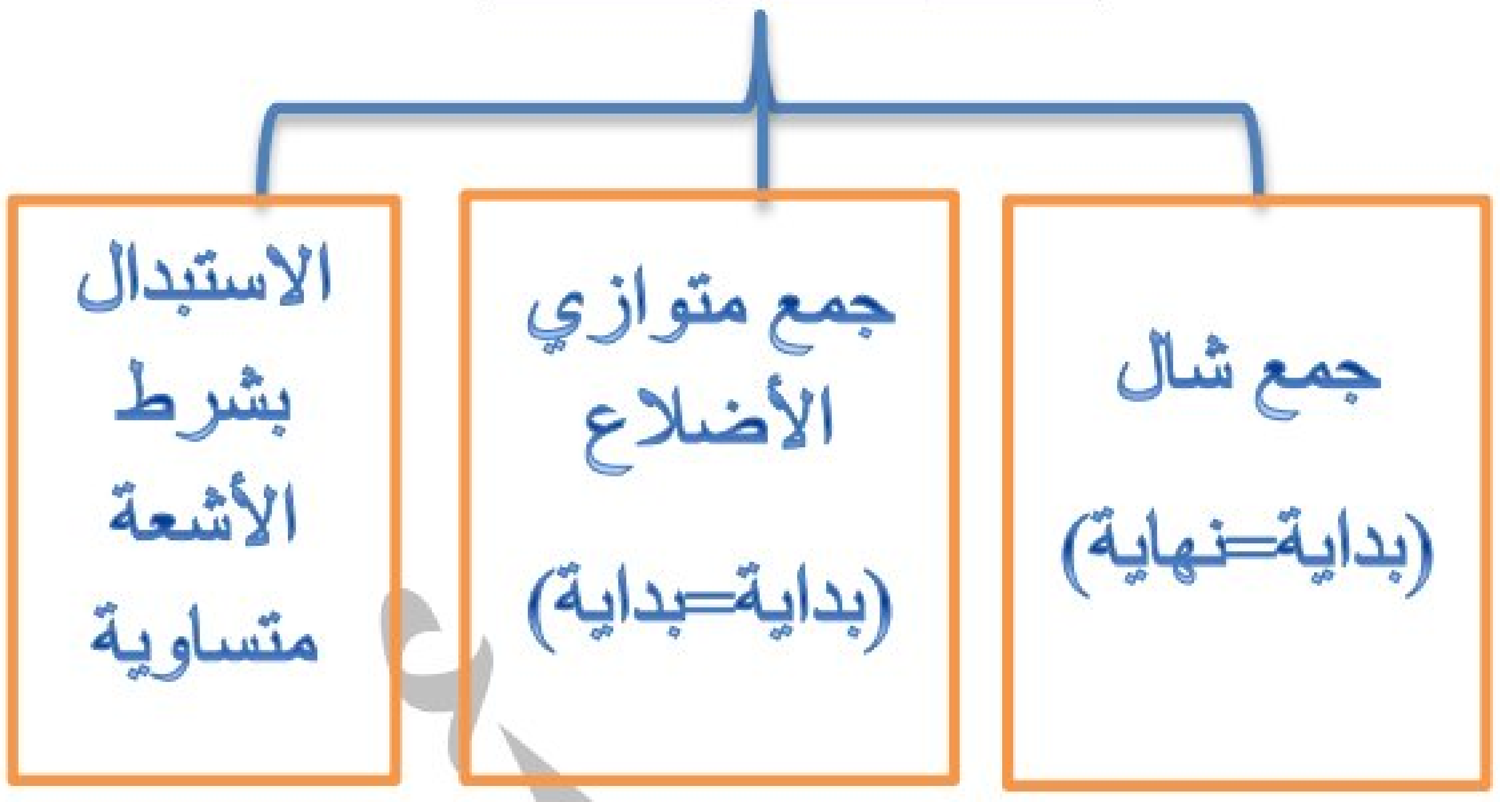


$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OG}|.|\overrightarrow{OB}|.\cos\theta$$
$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OG}|.|\overrightarrow{OB}|}$$
$$\overrightarrow{OG}(-2,2,2) \quad , \quad \overrightarrow{OB}(2,2,-2)$$
$$|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\Longrightarrow |\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = -4 + 4 - 4 = -4$$
$$\cos\theta = -\frac{4}{2\sqrt{3}.2\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

ثانياً المركز $O(2,2,2)$ و لدينا $A(4,0,0)$.

$$R = \overrightarrow{AO} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OG}$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$$

العمليات على الأشعة

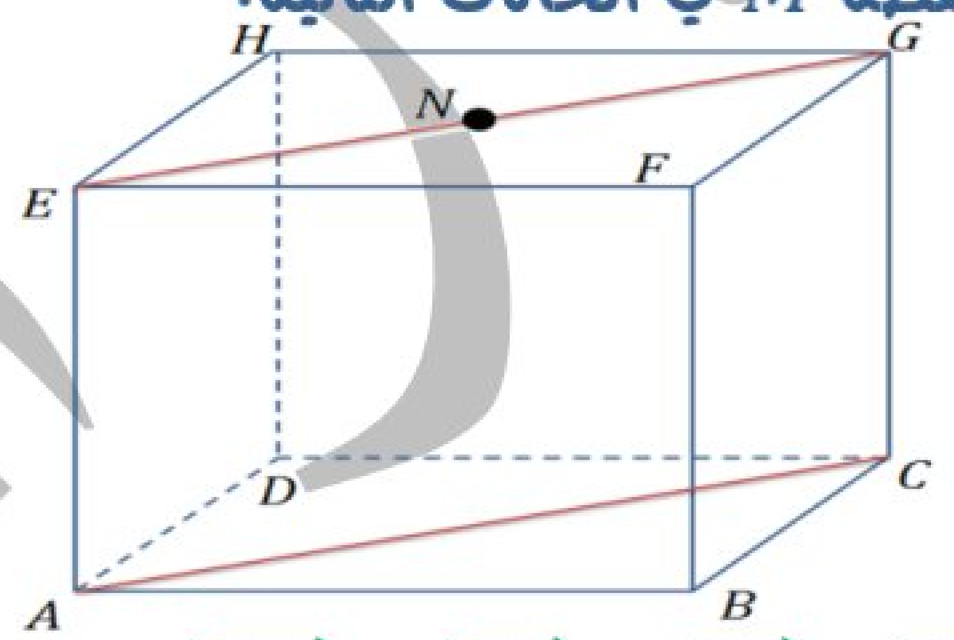


ملاحظة:

الشعاع ذو الإشارة السالبة يُعكس لنعود إشارته موجبة.

مثال:

وضع النقطة M في الحالات التالية:



$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}$

نستبدل للأسهل:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}$$

ومنه M تنطبق على G.

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

نستبدل للأسهل:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$$

ومنه N تنطبق على M.

تمرين:

K نقطة من BC تحقق: $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{KC}$.

إن I منتصف KD و G منتصف AI .

1] جد الأمثال α,γ,δ ليكون G هو م.أ.م للنقاط التالية:

$$(A,\alpha),(B,1),(C,\gamma),(D,\delta)$$

2] عين M التي تحقق:

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AK}$$

الحل:

لدينا من المعطيات:

$$\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{KC}\ \Rightarrow \overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

نجعل K بالبداية ونضرب بـ[−]:

$$\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

ومنه K هي م.أ.م للنقاط: $(C,2),(B,1)$

ومنه: $\gamma=2$ ، بالتالي: $(K,3)$.

إن I منتصف KD ومنه I م.أ.م للنقاط:

$$(D,3),(K,3)$$

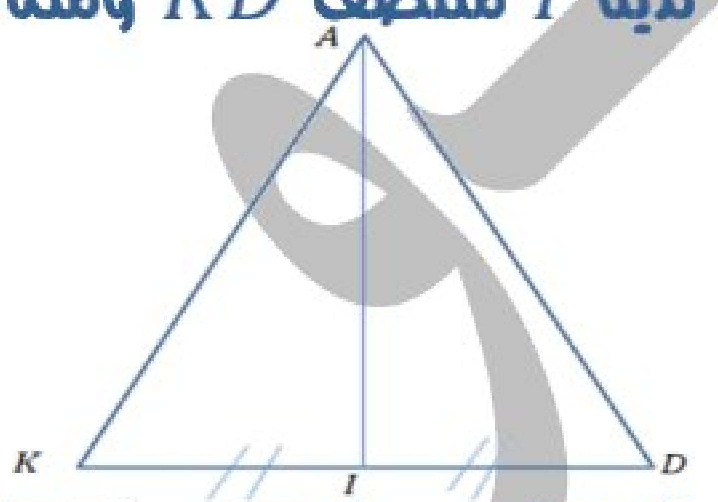
وبالتالي: $\delta=3\Rightarrow(I,6)$

بما أن G منتصف AI ومنه G م.أ.م للنقاط:

$$(A,6)\ ,(I,6)$$

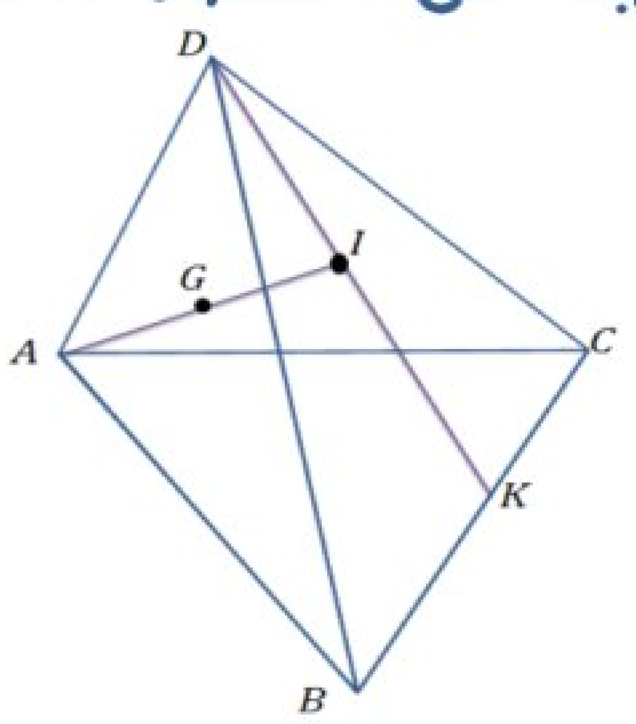
ومنه: $\alpha=6$

لنحلل الشكل: لدينا I منتصف KD ومنه:



$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AK}\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI}$$

ومنه M تنطبق على I منتصف DK .



تمرين:

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A، النقطة J منتصف ED .

ولدينا $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس حيث:

$$\overrightarrow{AB}=3\vec{i} \quad , \overrightarrow{AC}=4\vec{i}$$

1] جد إحداثيات النقاط J,E,B,C,D .

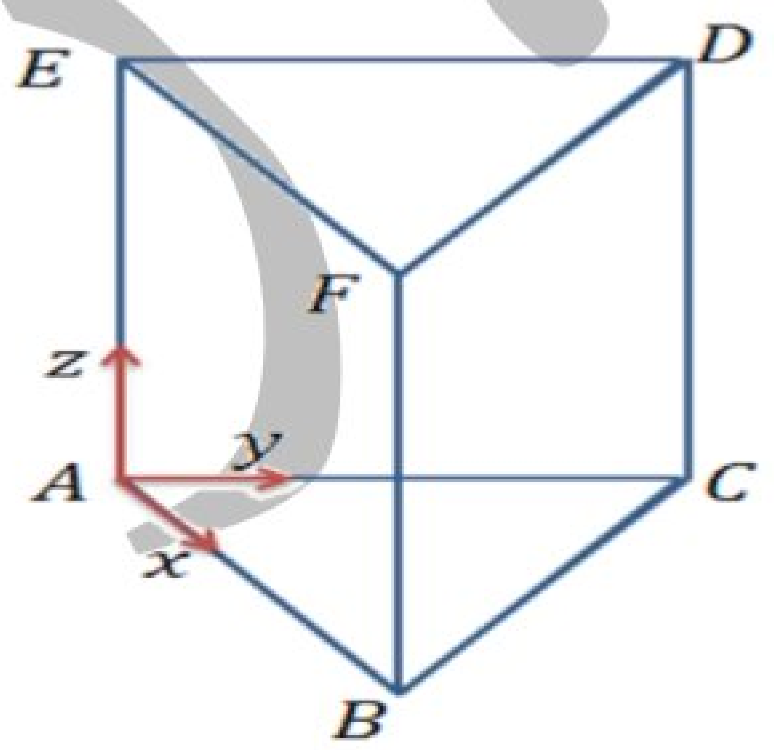
2] جد معادلة المستوي $[JBC]$.

3] اعط تمثيلاً وسيطياً لـ JC .

4] احسب بعد E عن المستوي JBC .

5] عين K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(J,2) \ , \ (B,1) \ , \ (C,2)$$



الحل:

1] الإحداثيات:

$$C(0,4,0) \ , B(3,0,0), D(0,4,4)$$
$$E(0,0,4) \ , J(0,2,4)$$

2] بفرض: $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{BC}(-3,2,4) \ , \ \overrightarrow{BJ}(-3,2,4)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow -3a+4b=0 \ \ldots(1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{BJ}=0 \Rightarrow -3+3b+4c=0 \ldots(2)$$

بفرض $\mathrm{b}=3$ نعوض في (1) :

$$-3a+12=0 \Rightarrow a=4$$

نعوض في (2) :

$$-12+6+4c=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

ومنه:

$$\vec{n}\left(4,3,\frac{3}{2}\right)$$

نضرب بـ (2) فنجد:

$$\vec{n}(8,6,3) \ , \ B(3,0,0)$$

نعوض بمعادلة المستوي [هنا]:

$$8(x-3)+6(y-0)+3(z-0)=0$$
$$8x-24+6y+3z=0$$
$$8x+6y+3z-24=0$$

3] إن: $C(0,4,0) \ , \ J(0,2,4)$ بالتالي:

$$\vec{u}=\overrightarrow{JC}=(0,2,-4)$$

ومنه:

$$JC=\begin{cases} x=0+0t \\ y=4+2t \\ z=0-4t \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

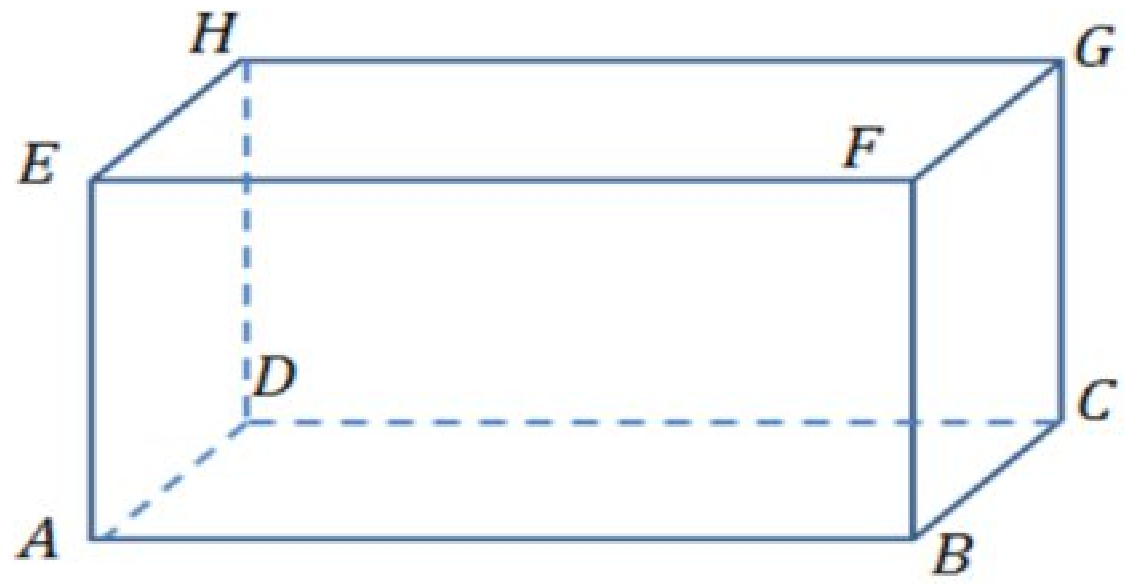
4] حساب البعد:

$$\mathrm{d(E,P)}=\frac{|8\mathrm{x}+6\mathrm{y}+3\mathrm{z}-24|}{\sqrt{64+36+9}}$$
$$=\frac{12}{\sqrt{109}}$$

5]

$$x_K=\frac{\alpha.x_C+\beta.x_B+\gamma.x_J}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$=\frac{2\times0+1\times3+2\times0}{5}=\frac{3}{5}$$
$$y_K=\frac{\alpha.y_C+\beta.y_B+\gamma.y_J}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$=\frac{2\times4+1\times0+2\times2}{5}=\frac{12}{5}$$
$$z_K=\frac{\alpha.z_C+\beta.z_B+\gamma.z_J}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{8}{5}$$
$$\Rightarrow K\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5},\frac{8}{5}\right)$$

تمرين:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

$$BC = CG = 1 \,,\ AB = 1$$

I منتصف AB:

$$\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$$

أوجد:

١] احداثيات الرؤوس و I.

٢] معادلة المستوي (IFH).

٣] بعد G عن المستوي (IFH).

٤] بعد G عن المستقيم (IH).

٥] هل ينتمي مسقط النقطة G على (IFH) إلى (IH).

الحل:

١] الإحداثيات:

$$A(0,0,0)\,,B(2,0,0),C(2,1,0)$$
$$D(0,1,0),E(0,0,1),F(2,0,1)$$
$$G(2,1,1),H(0,1,1)\,,I(1,0,0)$$

٢] نفرض أن $\vec{n}(a,b,c\,)$ ومنه:

$$\overrightarrow{IF} = (1,0,1)$$
$$\overrightarrow{IH} = (-1,1,1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{IF} = 0 \Rightarrow \boxed{a + c = 0} \ldots(1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{IH} = 0 \Rightarrow \boxed{-a + b + c = 0} \ldots(2)$$

بفرض $\boxed{c = -1}$ يكون:

نعوض في (1) :

$$a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

نعوض في (2) :

$$-1 + b - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$
$$\vec{n}(1,2,-1) \quad , \quad I(1,0,0)$$

ومنه:

$$1(x-1) + 2(y-0) - 1(z-0) = 0$$
$$x + 2y - z - 1 = 0$$

٣)

$$d(E,P) = \frac{|x+2y-z-1|}{\sqrt{1+4+1}}$$
$$= \frac{|2+2-1-1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

٤)

$$I(1,0,0)$$
$$\overrightarrow{IH} = \vec{u} = (-1,1,1)$$
$$IH = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

N مسقط G على المستقيم:

ومنه N تحقق المعادلات الوسيطية:

$$\mathrm{N}(1-\mathrm{t},\mathrm{t},\mathrm{t})$$
$$G(2,1,1)$$
$$\overrightarrow{GN}(-1-t, t-1, t-1)$$
$$\overrightarrow{GN}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 1 + t + t - 1 + t - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$
$$[GN] = \sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

٥] بما أن بعد G عن المستوي لا يساوي بعدها عن المستقيم فالمسقط على المستوي لا ينتمي للمستقيم.

انتهت الأوراق الذهبية في الأشعة

للأبحاث الثلاث

ارجو من الله التوفيق

وانتظروا الأوراق الذهبية القادمة

دمتم سالمين

أ. رام عبدو

رقم موبايل: 0947 459 007

✅تم جمع الملفات بواسطة::

بوت سلسلة التفوق التعليمية ⬇️

t.me/Salemalhmdan3Bot

سلسلة التفوق
التعليمية