جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

المحاضرة المسجلة الأولى

الرياضيات للإدارة

د. رائد الخصاونة

محتوى المقرر

- صمم هذا المقرر بهدف تقديم بعض الأساليب الرياضية التي يحتاج إليها طالب الاقتصاد والعلوم الإدارية في دراسته للظواهر الاقتصادية وتحليلها بطريقة كمية بهدف الوصول إلى حل لها. حيث يهدف هذا المقرر إلى تعريف الطالب بأساسيات التفاضل والتكامل وكيفية استخدامها في حل المشكلات الاقتصادية والإدارية. وذلك من خلال التعرف على الدوال بأنواعها المختلفة وكيفية حساب النهاية لها و البحث في اتصالها ومن ثم إيجاد الاشتقاق لها وتحديد القيم العظمى و الصغرى بالإضافة إلى إيجاد التكامل المحدود وغير المحدود وأساليب التكامل المختلفة في التطبيقات الاقتصادية.

محتوى المقرر

- يحتوي هذا المقرر على الموضوعات التالية:

الفصل الأول: الدوال

- الأزواج المرتبة
- الضرب الديكارتي
- العلاقة والدالة
- انواع الدوال
- معادلة الخط المستقيم

محتوى المقرر

الفصل الثاني: الرياضيات المالية

- معدل الربح البسيط
- معدل الربح المركب

الفصل الثالث: النهايات والاتصال

- قوانين النهايات
- الاتصال
- تطبيقات اقتصادية

محتوى المقرر

الفصل الرابع: التفاضل

- قوانين الاشتقاق
- مشتقات بعض من الدوال المختلفة.
- تطبيقات التكامل (القيم العظمى والصغرى- فترات التزايد والتناقص - التحدب والتقعر).
- تطبيقات اقتصادية (الإيراد الحدي، التكلفة الحدية والربح الحدي).

محتوى المقرر

- الفصل الخامس: التكامل
- التكامل غير المحدود
- التكامل المحدود
- تطبيقات على التكامل المحدود (المساحات)
- تطبيقات اقتصادية (الإيراد الكلي، التكلفة الكلية، الربح الكلي)

جدول توزيع الدرجات

البنود	الدرجة
تحميل المحاضرات والمادة العلمية أو مشاهدتها والبث المباشر	١٠
الواجبات	١٠
الاختبار الفصلي	١٠
الاختبار النهائي	٧٠
المجموع	١٠٠

الفصل الأول: الدوال (المجموعات)

أولا: المجموعات

- تعريف ١.١: لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$, فإن عدد عناصر المجموعة A يرمز له بالرمز $n(A)$.

- مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$، فإن

$$n(A)=5$$

- مثال: إذا كانت $\{\quad\}=\emptyset=B$ حيث B هي المجموعة الخالية فإن

- $$n(B)=0$$

الفصل الأول: الدوال (المجموعات)

- مثال: إذا كانت $C = \{1,3,s,t\}$ فإن

$$n(C) = 4$$

- المجموعة $A = \{1,2,3,4, \dots\}$ تسمى مجموعة غير محدودة
- أما المجموعة $B = \{1,3,5,7,9\}$ فهي مجموعة محدودة (معدودة)
- نلاحظ أيضا أن $\{2,6\} = \{6,2\}$ ترتيب العناصر في أي مجموعة غير ضروري

الفصل الأول: الدوال (المجموعات)

- تعريف ٢.١ : مجموعة القوى لمجموعة ما.

مجموعة القوة للمجموعة X هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة X، ويرمز لمجموعة القوة الخاصة بالمجموعة X على الصورة : $P(X)$.

مثال: أوجد مجموعة القوى للمجموعة $X = \{a,b,c\}$؟

الحل:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

الفصل الأول: الدوال (المجموعات)

- ملاحظة: إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي n من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية الممكن الحصول عليها يساوي 2^n.

مثال: إذا كانت $A = \{1,2\}$، فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة A

هو $2^2 = 4$

أما مجموعة المجموعات الجزئية من A فهي:

$$P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبة)

- تعريف ١.٣: الأزواج المرتبة

وتكتب على الصورة (x,y) حيث يسمى المتغير x بالإحداثي السيني

أو (المسقط الأول) ويسمى المتغير y بالإحداثي الصادي أو (المسقط الثاني).

مثال:

$$(-1, -2) \text{ ،} (3, -5)$$

$$\underset{\text{الاحداثي السيني}}{-1},\ \underset{\text{الاحداثي الصادي}}{-2} \qquad \underset{\text{المسقط الأول}}{3},\ \underset{\text{المسقط الثاني}}{-5}$$

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبة)

ملاحظات على الأزواج المرتبة:

الترتيب ضروري ← $(x,y) \neq (y,x)$

مثال: $(2,5) \neq (5,2)$

وإذا كان $(x,y) = (a,b)$ فإن

$x = a, y = b$

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبة)

<u>مثال:</u> إذا كان $(x+1, y-2) = (3, -1)$، أوجد قيمة كل من x, y؟

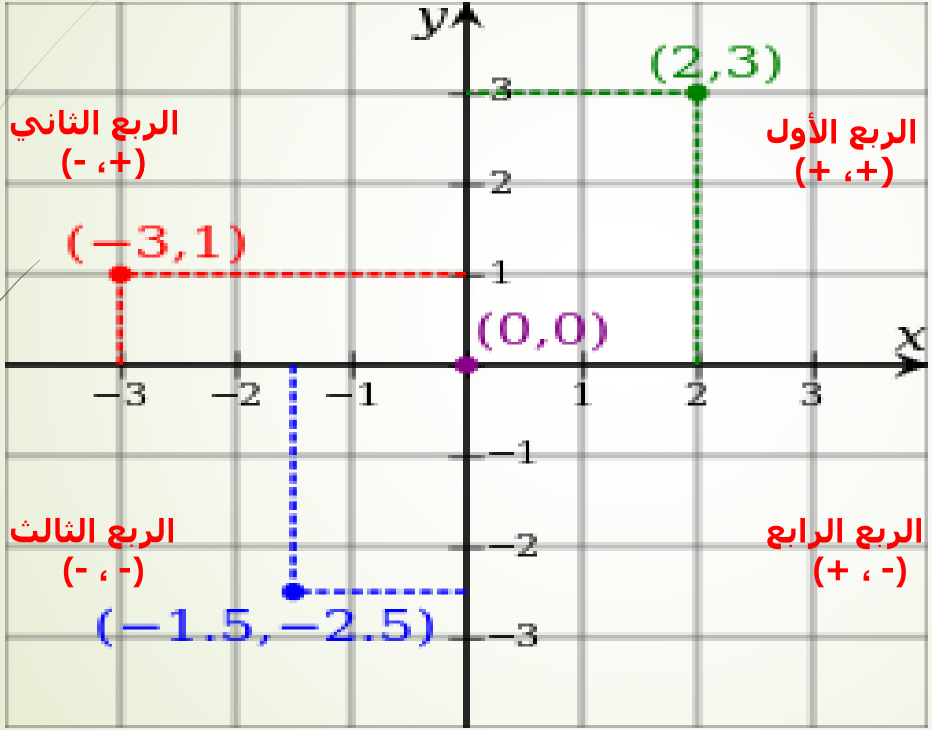
الحل:

$$x + 1 = 3$$
$$x = 3 - 1 = 2$$

$$y - 2 = -1$$
$$y = -1 + 2 = 1$$

الفصل الأول: الدوال (المستوى الديكارتي)

يمكن تمثيل الأزواج المرتبة على المستوى الديكارتي (المستوى البياني) كما في الشكل التالي:



الفصل الأول: الدوال (الضرب الديكارتي)

- تعريف ٤.١: الضرب الديكارتي

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B ورمزه $(A \times B)$ بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B. بالرموز

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

الفصل الأول: الدوال (الضرب الديكارتي)

مثال: إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B=\{-3,1,4\}$

فأوجد $A\times B$ و $B\times A$ ؟

الحل:

$$A\times B=\{(-2,-3),(-2,1),-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$$

$$B\times A=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$$

لاحظ أن $A\times B\neq B\times A$

الفصل الأول: الدوال (الضرب الديكارتي)

مثال: إذا كانت $A=\{1,2\}$ و $B=\{x,y,w\}$

فأوجد $A\times B$ و $B\times A$ ؟

الحل:

$$A\times B=\{(1,x),(1,y),(1,w),(2,x),(2,y),(2,w)\}$$

$$B\times A=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(w,1),(w,2)\}$$

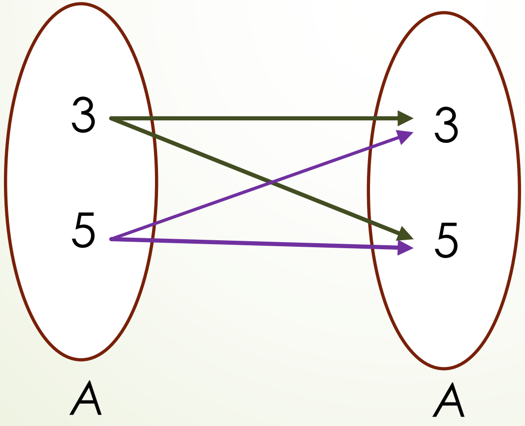
الفصل الأول: الدوال (الضرب الديكارتي)

مثال: إذا كانت $A=\{3,5\}$

فأوجد $A\times A$ ؟

الحل:

$$A\times A=\{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$$



الفصل الأول: الدوال (الضرب الديكارتي)

- ملاحظة: عدد عناصر الضرب الديكارتي لمجموعتين =

عدد عناصر المجموعة الأولى × عدد عناصر المجموعة الثانية

بالرموز.

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

مثال: إذا كان عدد عناصر المجموعة $A = 3$ وعدد عناصر المجموعة

$B = 4$ فإن عدد عناصر الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 4 = 12$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- **إذا كانت $A = \{x,y,z\}$، $B = \{-1,1\}$، أوجد كل مما يلي:**

١- $n(A)$

٢- $A \times B$

٣- $B \times B$

٤- $P(A)$

٥- $P(B)$

- **إذا كان $(2x + 5,10) = (3, -3y - 2)$،**

فأوجد قيمة كل من x,y ؟

- **حدد موقع كل من الأزواج التالية على المستوى البياني**

١- $(-2, -3)$

٢- $(2, -3)$

٣- $(-2,3)$

٤- $(2,3)$

انتهت المحاضرة المسجلة الأولى

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

المحاضرة المسجلة الثانية

الرياضيات للإدارة

د. رائد الخصاونة

الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- **تعريف: العلاقة**

هي ارتباط بين بعض أو كل من عناصر مجموعة ببعض أو كل من عناصر مجموعة أخرى.

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{1,2,4\}$، $Y = \{1,2,3,4,5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a + 2$

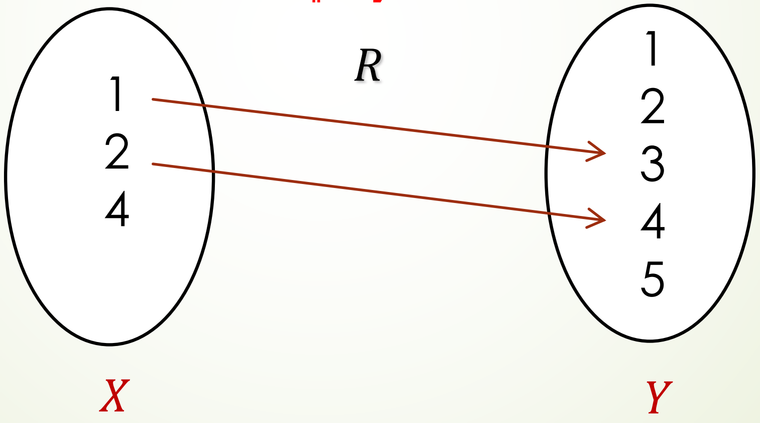
حيث $a \epsilon X$ و $y \in b$، اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: الصفحة التالية

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

$$R = \{(1,3), (2,4)\}$$

المخطط السهمي



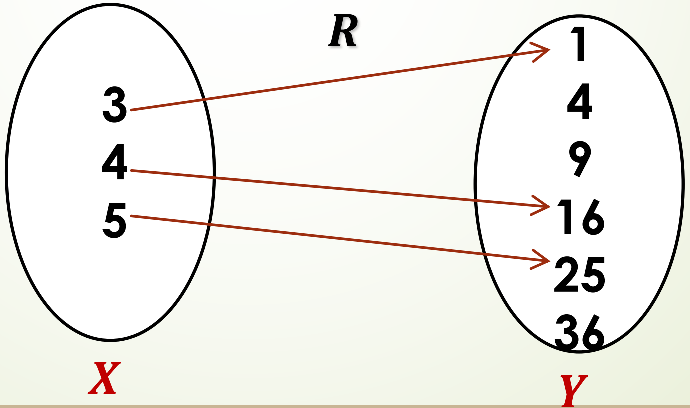
لاحظ أن العدد ٤
من المجموعة X
لا يمكن أن يرتبط
بأي عدد من
المجموعة Y
وذلك لان ٤+٢=٦
والعدد ٦ لا ينتمي
الى المجموعة Y

الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{3,4,5\}$، $Y = \{1,4,9,16,25,36\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a^2$ حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: $R = \{(3,9),(4,16),(5,25)\}$



الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- تمرين: إذا كان لدينا $X = \{0,1,2,3\}$، $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: a $b = 1 + a$ حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

❑ تعريف: الدالة

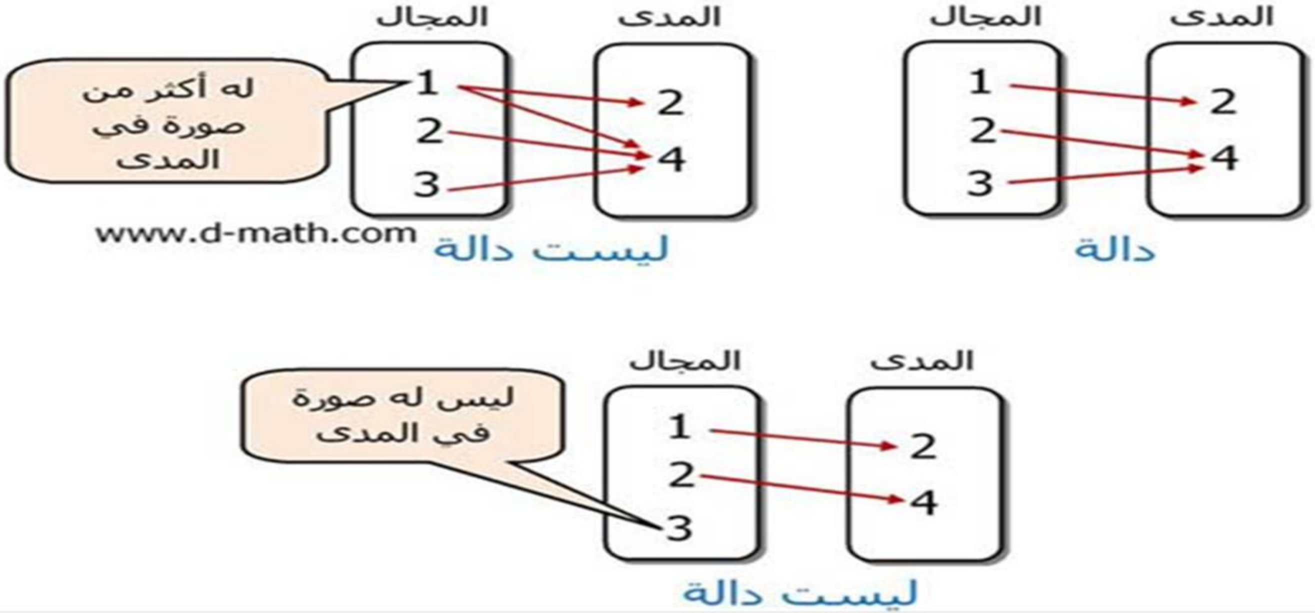
إذا كانت A,B مجموعتين، فإن f دالة من A الى B بمعنى $(f: A \to B)$ إذا كانت f مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد y واحدة تنتمي الى B.

تسمى y قيمة الدالة عند x ويرمز لها بالرمز $y = f(x)$، كما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل والمتغير y بالمغير التابع.

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

الدالة:

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3\}$، $B = \{4,8,12\}$ وكانت.

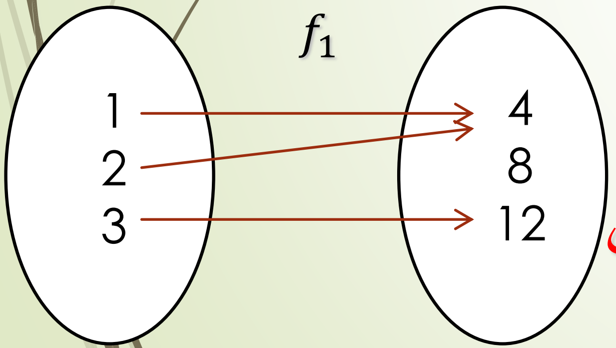
$f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و $f_2 = (1,4),(2,8)\}$

و $f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فأي من f_1 و f_2 و f_3 يعتبر دالة؟

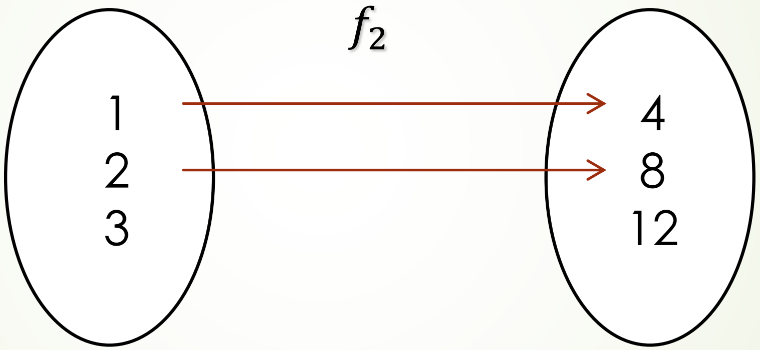
الحل: f_1 يعتبر دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما ان عناصر f_1 مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$.

المخطط السهمي



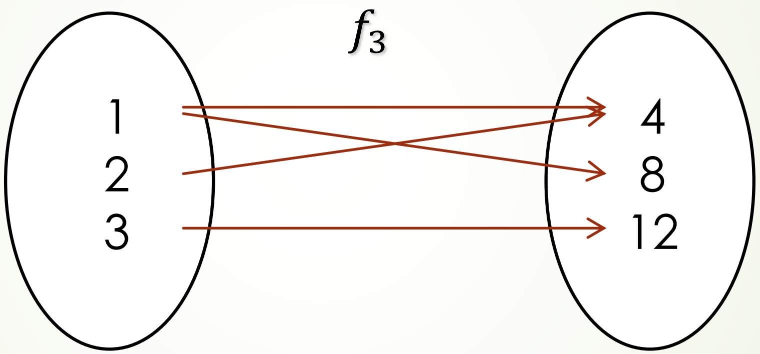
الفصل الأول: الدوال (الدالة)

f_2 ليست دالة لان العدد $3 \in A$. ولكن ليس له صورة في B.



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

f_3 ليست دالة لان العدد $1 \in A$. ولكن اكثر من صورة في B.



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- ملاحظة» إذا كانت f دالة من A الى B، فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل (مدى) الدالة.

$$f: A \to B$$

عناصر المجال   عناصر المجال المقابل

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

- مثال: إذا كانت $A = \{1,2\}$، $B = \{3,4,5,6\}$ وكانت

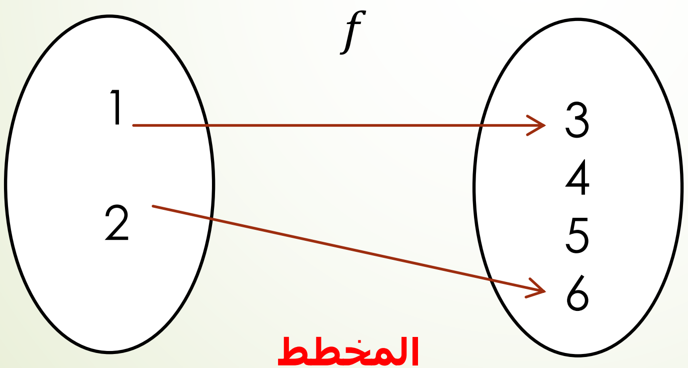
$$f = \{(1,3),(2,6)\}$$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجال والمدى؟

الحل:

عناصر المجال = $\{1,2\}$

عناصر المدى=$\{3,6\}$



المخطط السهمي

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. $R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$
2. $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$
3. $R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$
4. $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$
5. $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
6. $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$

الفصل الأول: الدوال (الدالة – كثيرات الحدود)

- انواع الدوال: سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من انواع الدوال وهي الدالة الحقيقية، وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f: R \to R$

تعريف: كثيرات الحدود

تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التي تكتب على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقيقية وتسمى المعاملات أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود ممثلة بأعلى أس.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- ومن الأمثلة على كثيرات الحدود

١ – كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5$$

$$f_2(x) = -2$$

المدى

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$ أما مداها فهو

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

٢ – كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = -2\,x + 3$$

معامل x

الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 1.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الجدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثانية (وتسمى بالدالة التربيعية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x^2$$

القيمة = -١
ولا يكتب

$$f_2(x) = -2\,x^2 - x + 5$$

معامل x^2 — معامل x — الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 2

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الجدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 3x^3 - x^2 - 4$$

$$f_2(x) = -2\,x^3 - 3\,x^2 - 5x + 1$$

معامل x^3 معامل x^2 معامل x الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$،

كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 3.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

❑ ايجاد قيمة دالة:

يمكن ايجاد قيمة أي عدد أو متغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أو المتغير بدل المتغير x في تلك الدالة.

مثال: إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$، فأوجد

$(i)\ f(2)$

$(ii)\ f(-1)$

$(iii)\ f(a)$

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- الحل:

$$(i)\ \ f(2)=2^2+4\times 2-3=4+8-3=9$$

$$(ii)\ \ f(-1)=(-1)^2+(4\times -1)-3=1-4-3=-6$$

$$(iii)\ \ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- تمرين: إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$، فأوجد

$(i)\ f(0)$

$(ii)\ f(-4)$

الفصل الأول: الدوال (العمليات على الدوال)

- تشمل العمليات الثنائية على الدوال خمسة عمليات:

١- الجمع $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

٢- الطرح $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

٣- الضرب $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

٤- القسمة $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

٥- التركيب $(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$

وهنالك عملية احادية هي معكوس الدالة f ورمزها f^{-1} وتعرف كالآتي:

إذا كانت $y = f(x)$ دالة فان معكوس الدالة يعني إيجاد x كدالة في y أي $x = f^{-1}(y)$.

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- مثال: إذا كانت $f(x) = 3x + 5$، $g(x) = x^2+1$، فأوجد

$i - (f + g)(x)$

ii - $(f - g)(x)$

iii - $(f \times g)(x)$

iv - $(\frac{f}{g})(x)$

v - $(fog)(x)$

vi - $f^{-1}(x)$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

الحل:

$$(i)(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3x+5+x^2+1$$
$$= x^2+3x+6$$

$$(i)(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 3x+5-(x^2+1)$$
$$= 3x+5-x^2-1 = 3x-x^2+4$$

$$(iii)(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = (3x+5)(x^2+1)$$
$$= 3x^3+3x+5x^2+5$$
$$= 3x^3+5x^2+3x+5$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

الحل:

$$(iv)\quad \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

نعوض قيمة

$$\boxed{g(x)=x^2+1}$$

بدلا من

$$f(x)=3\,x+5$$

$$(v)\,(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2+1)=3(x^2+1)+5$$

$$=3x^2+3+5$$

$$=3x^2+8$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

(vi)- $f^{-1}(x)$

نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدالة بالرمز $f(x)$ أو y

- لإيجاد معكوس دالة $f^{-1}(x)$ فإننا نقوم بكتابتها على الصورة $y = 3x + 5$

ثم نعيد كتابتها على صورة x كدالة في y من خلال استخدام العمليات الجبرية المختلفة.

$$3x = y - 5 \longrightarrow x = \frac{y-5}{3} \longrightarrow f^{-1} = \frac{y-5}{3}$$

نقل المتغير x الى الطرف الأخر

قسمة الطرف الأيمن على معامل x

فيكون المعكوس مساويا للطرف الايمن

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- تمرين: إذا كانت $f(x) = 3x^2$، $g(x) = x+1$، فأوجد

$i - (f+g)(x)$

ii - $(f \times g)(x)$

v - $(fog)(x)$

vi - $g^{-1}(x)$

انتهت المحاضرة المسجلة الثانية

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

المحاضرة المسجلة الثالثة

الرياضيات للإدارة

د. رائد الخصاونة

الفصل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)

تعريف: تزايد وتناقص الدالة على فترة

تكون الدلة $f(x)$ دالة متزايدة على فترة معينة إذا حققت الشرط التالي

إذا كانت $x_2 < x_1$، فإن $f(x_2) < f(x_1)$، حيث x_1، x_2 قيم عشوائية من داخل الفترة.

وتكون الدلة $f(x)$ دالة متناقصة على فترة معينة إذا حققت الشرط التالي

إذا كانت $x_2 < x_1$، فإن $f(x_2) > f(x_1)$، حيث x_1، x_2 قيم عشوائية من داخل الفترة.

الفصل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)

مثال: أي من الدوال التالية دوال متزايدة، متناقصة أم غير ذلك؟

$1 - \ f(x) = 2$

$2 - \ f(x) = 2x + 1$

$3 - \ f(x) = 1 - 2x$

نلاحظ أنه لم يتم تحديد فترة في هذا السؤال وبالتالي فإن هذه الدوال معرفة على جميع الاعداد الحقيقية

الحل: ١- لاحظ أن الدالة الأولى دالة ثابتة حيث أن

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 2$$

اما عندما

$$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2$$

(نلاحظ ان الناتج في كلا الحالتين لم يتغير)

الفصل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)

٢- لاحظ أن الدالة الثانية دالة متزايدة لأن $f(x) = 2x + 1$

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

اما عندما

$$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2(2) + 1 = 5$$

اختيار قيمة x_1, x_1 هو عشوائي من بين مجموعة الاعداد الحقيقية

٣- لاحظ أن الدالة الثالثة دالة متناقصة لأن $f(x) = 1 - 2x$

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 2(1) = -1$$

اما عندما

$$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 1 - 2(2) = -3$$

$$1 < 2 \qquad -1 > -3$$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- تمرين: بين أي من الدوال التالية دوال متزايدة، متناقصة أم غير ذلك

$$1-\ f(x)=-\frac{1}{2}$$

$$2-g(x)=3-5x$$

$$3-h(x)=2x+7$$

الفصل الأول: الدوال (الدالة الصريحة والدالة الضمنية)

❑ الدالة الصريحة والدالة الضمنية

تعريف: الدالة الصريحة هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة $y = f(x)$

مثال: $f(x) = 5 - x^2 + 2x$

$$y = 2x - 3$$

نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدالة بالرمز $f(x)$ أو y

تعريف: الدالة الضمنية هي الدالة التي تكون على الصورة $f(x, y) = 0$

مثال: $x^2 + y^2 = 1$

$$3x - 2y + 5 = 0$$

الفصل الأول: الدوال (الدالة الصريحة والدالة الضمنية)

- يمكن في بعض الاحوال تحويل الدالة الضمنية الى دالة صريحة، والمثال التالي يوضح ذلك:
- مثال: حول كل من الدوال التالية إلى دوال صريحة:

i) $3x+4y-12=0 \rightarrow 4y=12-3x \rightarrow y=\frac{12-3x}{4}$

ii) $2x^2+y^2=25 \rightarrow y^2=25-2x^2 \rightarrow y=\sqrt{25-2x^2}$

iii) $x^2-xy-1=0 \rightarrow xy=x^2-1 \rightarrow y=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- تمرين: بين أي من الدوال التالية دوال صريحة وأيها ضمنية

1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y - x = 3 - 5x$

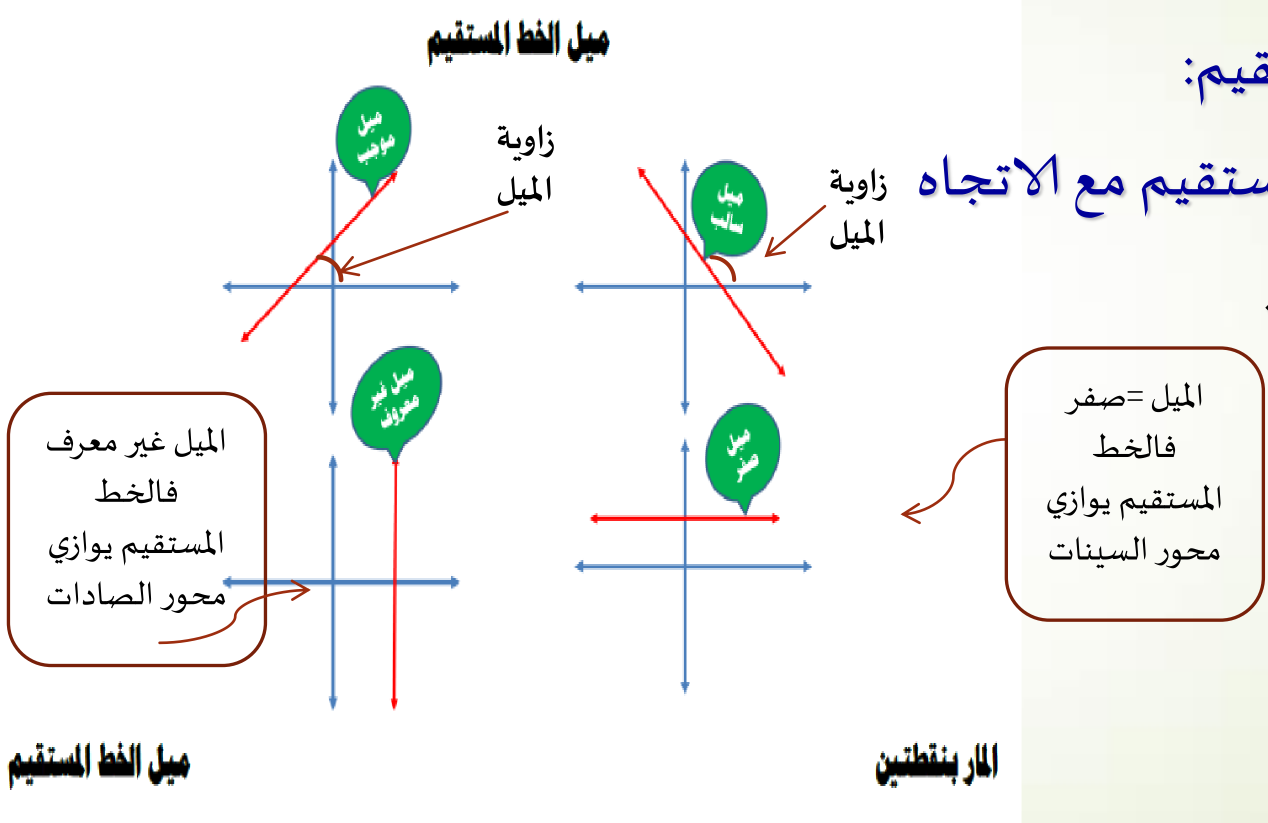
3) $x = 2y + 2$

- تمرين: حول كل من الدوال التالية الى دوال صريحة

1) $2y - 3x = 6$

2) $y - 3x = 2y + 6x - 6$

الفصل الأول: الدوال (زاوية الميل)



- زاوية ميل الخط المستقيم:

هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات x.

الفصل الأول: الدوال (ميل الخط المستقيم)

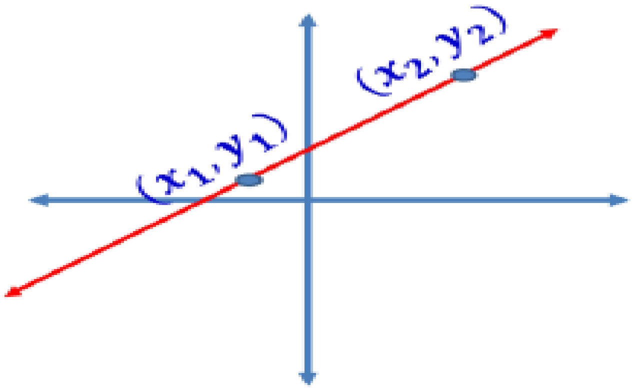
- ميل الخط المستقيم: ورمزه m

تعريف: ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_2, y_2)،(x_1, y_1) هو

فرق الصادات

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 \neq x_2$$



الفصل الأول: الدوال (ميل الخط المستقيم)

- مثال: أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقاط التالية:

1) $(1,3), (-3,-5)$

2) $(-2,4), (4,-5)$

الحل:

1) $$m = \frac{-5-3}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

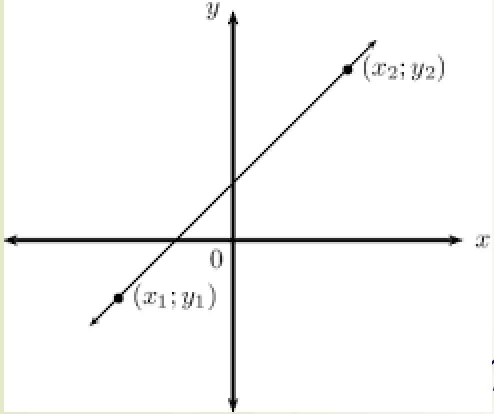
2) $$m = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

- اشكال معادلة الخط المستقيم:

أولا: معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,2), (2,3)$؟

الحل: نجد الميل أولا من خلال قانون الميل السابق:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

نلاحظ أن ميل المستقيم يساوي معامل x

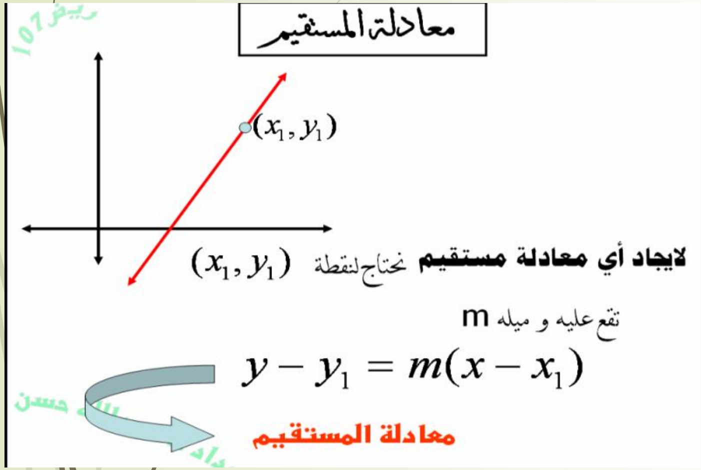
وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$y - 2 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1 + 2 \rightarrow y = x + 1$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

ثانيا: معادلة الخط المستقيم الذي علم ميله m ويمر بالنقطة (x_1, y_1) هي نفس المعادلة الخاصة بالحالة السابقة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



مثال: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, -3)$ وميله = -2؟

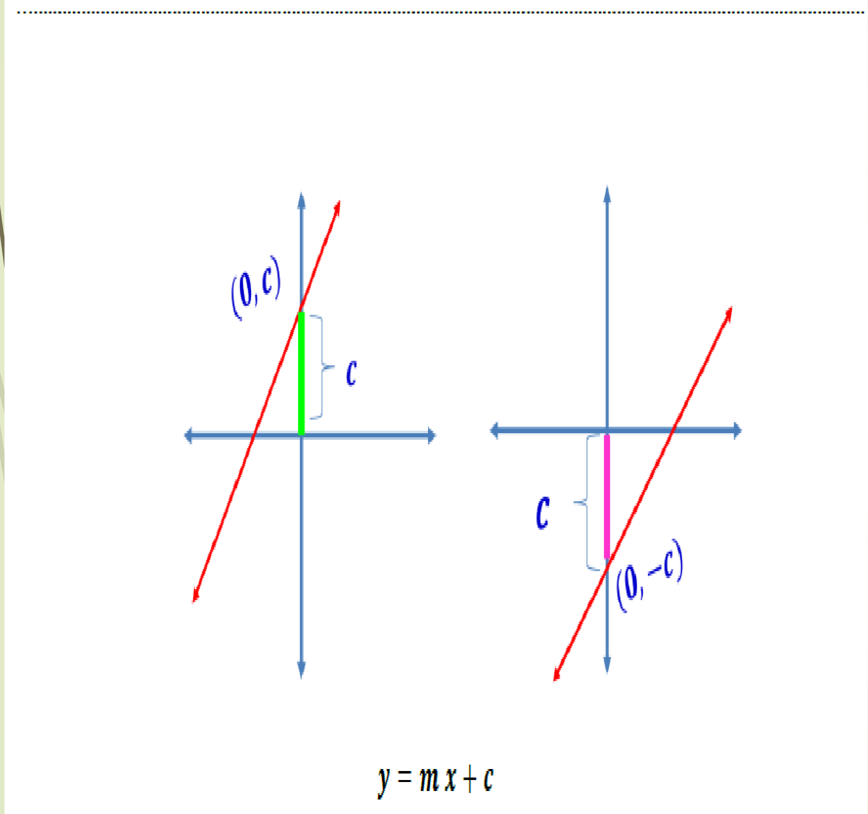
الحل:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 3 = -2(x + 2)$$
$$\rightarrow y + 3 = -2x - 4$$
$$\rightarrow y = -2x - 7$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

ثالثا: معادلة الخط المستقيم علم فيه الميل والمقطع الصادي (نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات) ولتكن c هي:

$$y = mx + c$$



مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = 3$ ومقطعه الصادي $c = -2$؟

الحل:

$$y = mx + c$$

$$y = 3x - 2$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

مثال: أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم $2x + 3y = 6$

الحل: لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة :

$$y = mx + c$$

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

ومنها الميل يساوي

$$m = -\frac{2}{3}$$

والمقطع الصادي

$$c = 2$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

٤. تمرين: أوجد معادلة كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة (1,-2) وميله $m = -3$

ب- المستقيم المار بالنقطة (3,4) وميله صفر

ج- المستقيم المار بنقطة الأصل وميله 2

د- المستقيم المار بالنقطتين (3, 4) و (7,2)

هـ- المستقيم الذي ميله $m = -2$ ومقطعه الصادي $c = 3$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

- تمرين: أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيمات التالية:

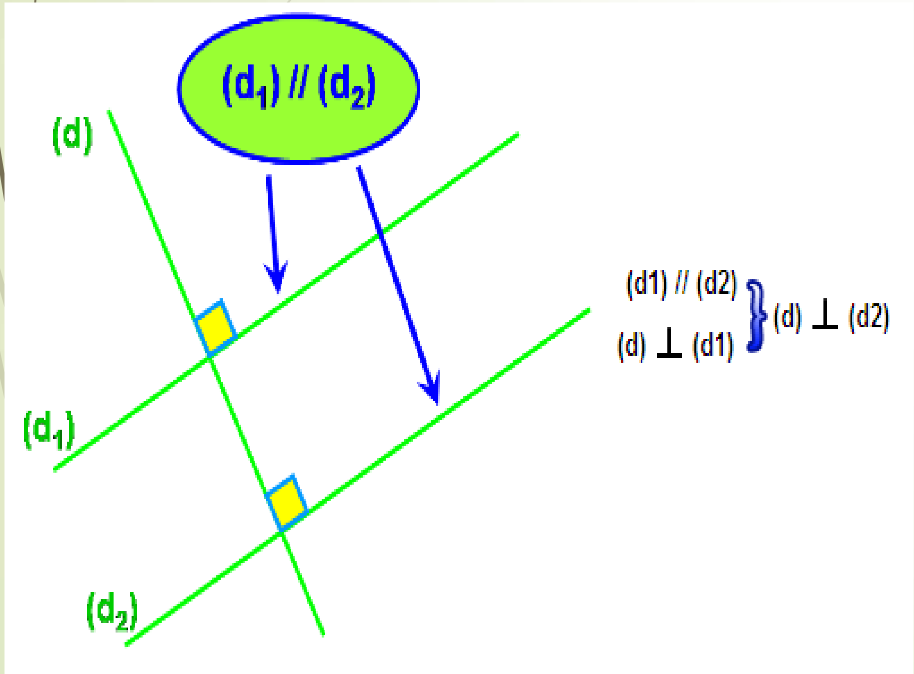
١- $2y - 4x = 6$

٢- $2x - y + 5 = 0$

الفصل الأول: الدوال (التوازي والتعامد)

- تعريف: نقول بأن المستقيمان d_1, d_2 متوازيان إذا وفقط اذا كان ميلهما متساوي $m_2 = m_1$، ويكون المستقيمان d_1, d_2 متعامدان إذا كان

$$m_1 \times m_2 = -1$$



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

مثال: هل المستقيمان $y - 2 = -4x$ و $y = -4x + 1$

متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك ؟

الحل: نجد ميل المستقيم الأول والثاني والذي يساوي معامل x وذلك

بعد كتابتهما على الصورة العامة $y = ax + c$

$$y - 2 = -4x \rightarrow y = -4x + 2 \rightarrow m_1 = -4$$

$$y = -4x + 1 \rightarrow m_2 = -4$$

نلاحظ أن $m_1 = m_2$ فالمستقيمان متوازيان.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

مثال: هل المستقيمان $y = -2x - 9$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$

متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك ؟

الحل: نجد ميل المستقيم الأول والثاني والذي يساوي معامل x وذلك بعد كتابتهما

على الصورة العامة $y = ax + c$.

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

$$y = -2x - 9 \rightarrow m_2 = -2$$

لاحظ ان كلاهما
مكتوبان على
الصورة العامة

نلاحظ أن $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times -2 = -1$ فالمستقيمان متعامدان.

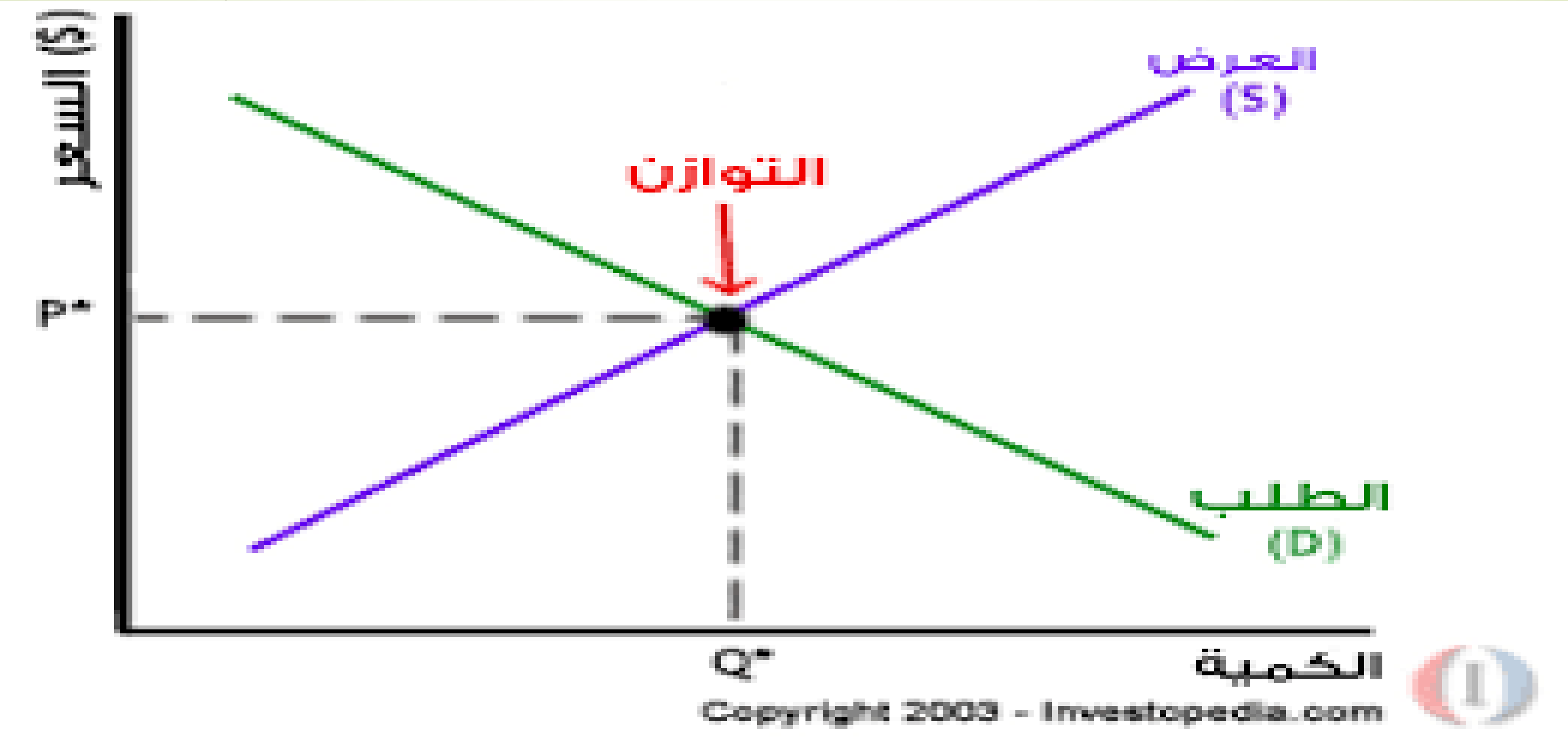
الفصل الأول: الدوال (تطبيقات اقتصادية)

دالة العرض والطلب:

- تعريف: دالة العرض هي كمية السلع أو الخدمات التي يعرضها منتجوها عند كل مستوى مرتقب من الأسعار، في مدة زمنية محددة.
- تعريف: دالة الطلب هي كمية السلع أو الخدمات التي يرغب المستهلكون في الحصول عليها عند كل مستوى مرتقب من الأسعار، وذلك في مدة زمنية محدودة.
- تعريف: نقطة التوازن: وهي النقطة التي تقع عند تقاطع الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة عند سعر يمثل سعر التوازن وهو السعر الذي يقبل به العارضون وفي الوقت ذاته يكون مقبولا من قبل المستهلكين.

الفصل الأول: الدوال (تطبيقات اقتصادية)

- دالة الطلب والعرض



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

مثال: أوجد نقطة التوازن إذا علمت أن دالتي العرض والطلب هما:

دالة العرض: $y = 3x + 5$

دالة الطلب: $y = 25 - 2x$

الحل: عند نقطة التوازن في السوق: الطلب = العرض

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

وبتعويض قيمة $x = 4$ في دالة العرض (أو الطلب) فإننا نحصل على

$$y = 3(4) + 5 = 17$$

وبالتالي فإن نقطة التوازن هي: $(4,17)$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

تمرين: أوجد نقطة التوازن إذا علمت أن دالتي العرض والطلب هما:

دالة العرض: $y = 5x + 10$

دالة الطلب: $y = 26 - 3x$

انتهت المحاضرة المسجلة الثالثة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

المحاضرة المسجلة الرابعة

د. رائد الخصاونة

الرياضيات للإدارة

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

تمارين وتدريبات على الفصل الأول:

١- إذا كانت $f(x) = 2$ فإن ... $4 \times f(3) =$

أ) 2 ب) 4 ج) 3 د) 8

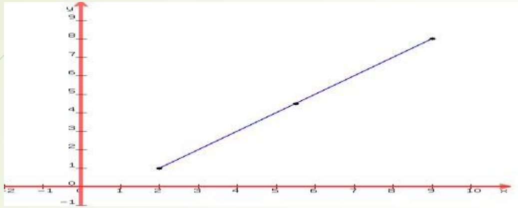
٢- الدالة $f(x) = x - 2x^2 + 5x^4$ كثيرة حدود من الدرجة

أ) الثانية ب) الرابعة ج) الأولى د) الثالثة

٣- معادلة الخط المستقيم الذي ميله = -2 ويمر بنقطة الاصل هي

أ) $y = -2$ ب) $y = 2$ ج) $x = -2$ د) $x = 2$

الفصل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)



٤- ميل الخط المستقيم في الشكل المجاور هو قيمة

أ) موجبة　　ب) سالبة　　ج) صفر　　د) غير معرفة

٥- إذا كانت $f(x) = \{(1,2),(-2,5),(2,4)\}$ تمثل دالة، فإن مداها يساوي

أ) $\{1,2\}$　　ب) $\{1,-2,2\}$　　ج) $\{2,4,5\}$　　د) $\{-2,2\}$

٦- الدالة $y = x - 1$ تمثل دالة

أ) صريحة　　ب) خطية　　ج) من الدرجة الأولى　　د) جميع ما ذكر

ـل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)

٧- إذا كان $(2x,y) = (4,1)$، فإن قيمة ... $= x + y$

أ) 3 ب) 4 ج) 2 د) غير ذلك

٨- إذا كانت $X = \{1,7,9\}$ تمثل مجموعة ما، فإن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من المجموعة X يساوي

أ) 3 ب) 6 ج) 8 د) 9

٩- الدالة $y = x - 3$ تمثل دالة

أ) متزايدة ب) متناقصة ج) تربيعية د) ثابتة

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

١٠- مستقيم ميله = -٢ ومقطعه الصادي = -١ فإن معادلته هي

أ) $y = 2x - 1$ ب) $y = -2x + 1$ ج) $y = -2x - 1$ د) $y = -2x + 1$

١١- إذا كانت $Y = \{1\}$ تمثل مجموعة ما، فإن ... $Y \times Y =$

أ) $(1,1)$ ب) $\{(1,1)\}$ ج) 1 د) $\{1,1\}$

١٢- إذا كانت $f(x) = x - 3$ وكانت $g(x) = x^2$، فإن $gof(x) = \cdots$

أ) $x^2 - 3$ ب) $(x-3)^2$ ج) $x^3 - 3x^2$ د) $x^3 - 3x$

١٣- اعتماد على السؤال السابق، فإن $\cdots = (f \times g)(x)$

أ) $x^2 - 3$ ب) $(x-3)^2$ ج) $x^3 - 3x^2$ د) $x^3 - 3x$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط والربح المركب)

- **تعريف الربح (الفائدة):** هو ذلك المبلغ الذي يزيد عن المبلغ الاصلي (رأس المال في بداية العملية الاستثمارية) سواء كان المبلغ الاصلي مبلغ مستثمر أو مقترض خلال فترة زمنية معينة وفي العادة تكون بالسنوات، ويقسم الربح الى قسمين:

١- **الربح البسيط (الفائدة البسيطة):** وهو تلك الفائدة التي يجنيها الشخص الذي يودع امواله في البنك بهدف استثمارها بحيث يتم احتساب الربح على المبلغ الاصلي في كل سنة أو الفائدة التي يجنيها البنك نتيجة اقراضه مبلغ مالي معين لشخص ما.

ويعطى بالصيغة التالية:

$$\underbrace{I}_{\text{مقدار الربح}} = \underbrace{P}_{\text{اصل المبلغ}} \times \underbrace{r}_{\text{معدل الفائدة}} \times \underbrace{t}_{\text{المدة بالسنوات}}$$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- أما جملة المبلغ (وهو اصل المبلغ مضاف إليه مقدار الربح) فيعطى بالصيغة التالية:

S: Sum

P: Principle Amount

I: Interest earned

r: Simple Interest Rate

t: Time

$$S = P + I$$

$$S = \underbrace{P}_{\text{اصل المبلغ}} + \underbrace{(P \times r \times t)}_{\text{مقدار الربح}}$$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- مثال: أودع شخص مبلغ 5000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة مقداره 5% سنويا لمدة ثلاث سنوات، أوجد مقدار الربح وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 5000, \qquad r = 0.05, \qquad t = 3$$

$$I = P \times r \times t = 5000 \times 0.05 \times 3 = 750\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 5000 + 750 = 5750\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- مثال: اقترض محمد مبلغ 30000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة مقداره 12% سنويا لمدة عشر سنوات، أوجد مقدار الربح البسيط وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 30000, \qquad r = 0.12, \qquad t = 10$$

$$I = P \times r \times t = 30000 \times 0.12 \times 10 = 3600\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 30000 + 3600 = 33600\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

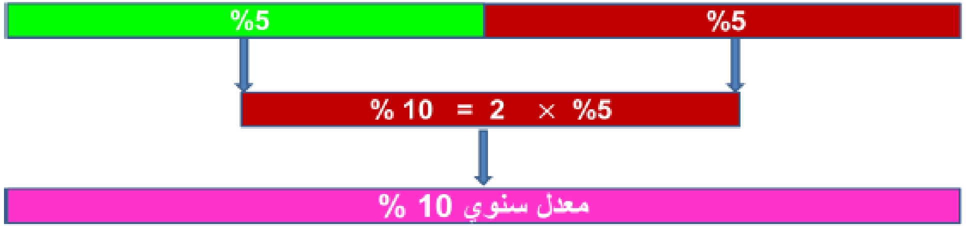
الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- ملاحظة: احيانا قد يعطى معدل الربح (الفائدة) بمعدل غير سنوي، مثل نصف سنوي أو شهري أو ثلث سنوي (كل اربعة أشهر) وفي هذه الحالة يجب تحويله إلى معدل سنوي كالآتي:

الحالة الأولى: نصف سنوي

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل نصف سنوي ←	المعدل النصف سنوي × 2 ←	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل نصف سنوي فان المعدل السنوي -

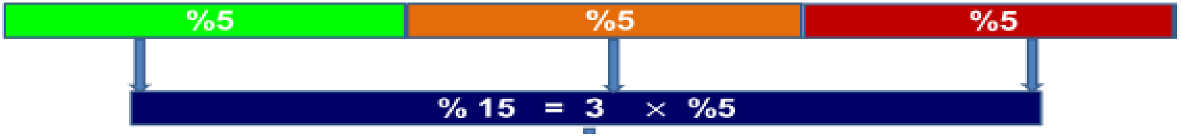


الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

الحالة الأولى: معدل ثلث سنوي (كل أربعة شهور):

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ثلث سنوي كل أربعة شهور	المعدل الثلث سنوي × 3	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل ثلث سنوي فان المعدل السنوي -



الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

الحالة الثالثة: معدل شهري

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل شهري	المعدل الشهري × 12	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 2 ٪ معدل شهري فان المعدل السنوي = ...

%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2	%2

%2 × 12 = % 24

معدل سنوي % 24

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- مثال: اقترض احمد مبلغ 5000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة نصف سنوي مقداره 4% لمدة 6 سنوات، أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ؟

الحل:

$$P = 5000, r = 0.04 \times 2 = 0.08, \qquad t = 6$$

$$I = P \times r \times t = 5000 \times 0.08 \times 6 = 2400\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 5000 + 2400 = 7400\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- مثال: اودع شخص مبلغ 8000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة ثلث سنوي مقداره 3% لمدة 4 سنوات، أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 5000, r = 0.03 \times 3 = 0.12, \qquad t = 4$$

$$I = P \times r \times t = 8000 \times 0.09 \times 4 = 2880\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 8000 + 2880 = 10880\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- ملاحظة: احيانا قد تكون المدة t بالأشهر وليست بالسنوات، وفي هذه الحالة يجب تحويلها الى سنوات من خلال تقسيمها على 12 (عدد شهور السنة الواحدة).

فمثلا، اذا كانت مدة الاستثمار = 18 شهرا، فإن المدة بالسنوات هي $t = \frac{18}{12}$

أما إذا كانت مدة الاستثمار = 30 شهرا، فإن المدة بالسنوات هي $t = \frac{30}{12}$

وهكذا ....

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

مثال: اودع شخص مبلغ 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة سنوية مقدارها 7% لمدة 9اشهر، أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

$$P = 2000, \qquad r = 0.07, \qquad t = \frac{9}{12}$$

$$I = P \times r \times t = 2000 \times 0.07 \times \frac{9}{12} = 105\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 2000 + 105 = 2105\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

الربح المركب: هي عملية اضافة الربح (الفائدة) على اصل المبلغ في السنة الأولى ليصبح لدينا رأس مال جديد ومن ثم حساب الربح على هذا المبلغ في السنة الثانية واضافته على جملة المبلغ وهكذا حتى نهاية المدة بالسنوات، ونلاحظ أن الربح المتحقق في هذه الطريقة يكون أكبر من الربح البسيط. ويعطى قانون الربح المركب بالصيغة التالية:

$$S = P \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t}$$

حيث n: بالسنوات، S: جملة المبلغ

أما مقدار الربح المركب فيمكن ايجاده من خلال الفرق بين جملة المبلغ واصل المبلغ كالآتي:

$$I = S - P$$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

ملاحظات على قيمة الفائدة المركبة (r):

١) إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل سنوي، فإنها تعطى مرة واحدة في السنة

٢) $(n = 1)$.

٣) إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل نصف سنوي، فإنها تعطى مرتين في السنة في السنة بمعنى $(n = 2)$.

٤) إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل ثلث سنوي، فإنها تعطى ثلاث مرات في السنة

٥) $(n = 3)$

٦) إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل شهري، فإنها تعطى ١٢ مرة في السنة $(n = 12)$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

مثال: أودع خالد مبلغ 5000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة سنوية مقدارها 8% لمدة 3 سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$S = P \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t}$$

$$S = 5000 \times \left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^{1 \times 3} = 6298.5$$

مقدار جملة المبلغ بعد ثلاث سنوات

$$I = S - P = 6298.5 - 5000 = 1298.5\ Riyal$$

مقدار الربح المركب بعد ثلاث سنوات

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

مثال: أودع شخص مبلغ 7000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية مقدارها 10% لمدة 5 سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$S = P \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t}$$

$$S = 7000 \times \left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2\times5} = 11402$$

مقدار جملة المبلغ بعد خمس سنوات

$$I = S - P = 11402 - 7000 = 4402\ Riyal$$

مقدار الربح المركب بعد خمس سنوات

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

مثال: اقترض شخص مبلغ 12000 ريال من أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة ثلث سنوية مقدارها 7% لمدة 6 سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$S = P \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t}$$

$$S = 12000 \times \left(1 + \frac{0.07}{3}\right)^{3 \times 6} = 18{,}175.6$$

مقدار جملة المبلغ بعد ست سنوات

$$I = S - P = 18{,}175.6 - 12000 = 6{,}175.6\ Riyal$$

مقدار الربح المركب بعد ست سنوات

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (تمارين ومسائل)

السؤال الأول: الفائدة المركبة لمبلغ 1000 ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة مركبة نصف سنوية مقدارها 5% لمدة ثلاث سنوات يساوي ....

السؤال الثاني: الفائدة البسيطة لمبلغ 1000 ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة بسيطة سنوية مقدارها 5% لمدة 20 شهر يساوي ....

السؤال الثالث: الفائدة المركبة لمبلغ 5000 ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة مركبة شهرية مقدارها 1% لمدة اربع سنوات يساوي ....

السؤال الرابع: الفائدة البسيطة لمبلغ 5000 ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة بسيطة شهرية مقدارها 1% لمدة اربع سنوات يساوي ....

انتهت المحاضرة المسجلة الرابعة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح