# طرائق البرهان

(١) البرهان بالمباشر: $P \longrightarrow Q$

نفرض أن $P$ صائبة ونبرهن أن $Q$ صائبة.

(٢) البرهان بالمكافئ العكسي: نعلم أن $(P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P)$

نفرض أن $Q$ خاطئة ونبرهن أن $P$ خاطئة

(٣) البرهان بالتناقض: اثبات العبارة $P$

نفرض أن $P$ خاطئة ونبرهن أنه يوجد تناقض $C$

مثال من نوع $(\neg P \wedge P)$ أو $(Q \wedge \neg Q)$

(٤) البرهان البديل: $(P \to (Q \vee R) \equiv P \wedge \neg Q \to R)$

نفرض أن $P$ صائبة, $Q$ خاطئة ونبرهن أن $R$ صائبة

(٥) الاستقراء

## (1) البرهان بالمباشر

### مثال (1,47) ص 25

برهن على أن مربع أي عدد فردي يجب أن يكون فردي.

**الحل:** نبرهن: إذا كان $x$ عدد فردي فإن $x^2$ عدد فردي.

نفرض أن $x$ عدد فردي.

فإنه يوجد $p \in \mathbb{Z}$ حيث $x = 2p+1$

فإن

$$\begin{aligned} x^2 &= (2p+1)^2 \\ &= (2p)^2 + 2(2p)\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 \\ &= 2(\underbrace{2p^2+2p}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \end{aligned}$$

فإن $x^2$ عدد فردي.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تعريف: ليكن $a \in \mathbb{Z}$ , $a \neq 0$

$(a \in \mathbb{Z}^*)$

وليكن $b \in \mathbb{Z}$

$a$ قاسم للعدد $b$ ونرمز له $a|b$

اذا وجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $b = ak$ $\left(\frac{b}{a} = k\right)$

مثال: $3|9$ , $2\nmid 3$ , $-15 \nmid 3$

$-3|-15$ $(-15 = (-3)\cdot 5)$

ملاحظة: (1) $1|1$

لكل $a \in \mathbb{Z}^*$ فان $a|a$ $(a = a\cdot 1)$

$a|-a$ $(-a = a\cdot(-1))$

(2) ليكن $a, b \in \mathbb{Z}^*$

$(a|b\ ,\ b|a) \Longleftrightarrow \left(\begin{matrix} a = b \\ a = -b \end{matrix}\right)$

مبرهنة (1,2) ص 51

ليكن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $a|b$ ، $a|c$ فإن $a|(bx+cy)$ لكل $x,y \in \mathbb{Z}$

الحل: نفرض أن $a|b$ ، $a|c$

فإنه يوجد $k,p \in \mathbb{Z}$ حيث $b = a \cdot k$ ، $c = a \cdot p$

فإن لكل $x,y \in \mathbb{Z}$ لدينا

$bx = akx$ و $cy = apy$

فإن $bx+cy = \underline{a}kx + \underline{a}py$

$= a(kx+py)$

و $kx+py \in \mathbb{Z}$

فإن $a|(bx+cy)$ لكل $x,y \in \mathbb{Z}$

مبرهنة (1,3) ص 2؟

اذا كان $a|b$ , $b|c$ فإن $a|c$

الحل: نفرض $a|b$ , $b|c$

فإنه يوجد $k,p \in \mathbb{Z}$ حيث $b = a \cdot k$ , $c = b \cdot p$

فإن $c = bp = (a \cdot k)p = a \cdot (kp)$

ولدينا $k \cdot p \in \mathbb{Z}$

فإن $a|c$

## (٢) البرهان بالمكافئ العكسي

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

البرهان بالمكافئ العكسي هو أن نفرض أن النتيجة خاطئة ونبرهن أن المقدمة خاطئة

مثال (1,50) ص 53

إذا كان $n^2$ عدد صحيحاً زوجياً فإن $n$ عدد صحيح زوجي.

الحل: المكافئ العكسي للعبارة هو:

إذا كان $n$ عدد صحيح غير زوجي فإن $n^2$ عدد صحيح غير زوجي

نفرض أن: $n$ عدد صحيح فردي.

فإن $n^2$ عدد صحيح فردي (حسب المثال (1,47) ص 50)

مثال (1,53) ص 55

لكل عدد صحيح $x$، إذا كان $3|x^2$ فإن $3|x$

الحل: نفرض أن $3\nmid x$ ( $x$ عدد صحيح )

فإنه يوجد $k\in\mathbb{N}$ حيث $x=3k+1$ أو $x=3k+2$

إذن $x^2=(3k+1)^2$ أو $x^2=(3k+2)^2$

$$x^2=(3k)^2+2(3k)\cdot 1+1^2$$
$$=9k^2+6k+1$$
$$=3\underbrace{(3k^2+2k)}_{\in\mathbb{N}}+\boxed{1}$$

$$x^2=(3k)^2+2(3k)2+2^2$$
$$=9k^2+12k+4 \quad (3+1)$$
$$=3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{\in\mathbb{N}}+\boxed{1}$$

إذن $3\nmid x^2$

## (٣) البرهان بالتناقض

لنبرهن أن العبارة $P$ صائبة: نفرض أن $P$ خاطئة
ونبرهن وجود تناقض.

### مثال (١،٤٤) ص ٤٤

لكل عددين صحيحين $x, y$
إذا كان كل منهما عدد صحيحا زوجيا، أو ليس كلاهما متساويان

الحل: ملاحظة:

$$\neg P \equiv \neg(A \rightarrow B)$$
$$\equiv \neg(\neg A \vee B)$$
$$\equiv A \wedge \neg B$$

نفرض أن $x$ و $y$ كل منهما عدد صحيح زوجي وأولي $x \neq y$

$x = 2k$ و $y = 2p$ ، $x$ و $y$ عدد أولي

فإن $x = 2$ و $y = 2$

فإن $x = y$ ، نعلم أن $x \neq y$ وهذا تناقض

وبالتالي:

## مثال (1,55) ص 56 و 57

أثبت أن $\sqrt{3}$ عدد غير كسري.

**الحل:** نفرض أن $\sqrt{3}$ عدد كسري.

بأنه يوجد $x, y \in \mathbb{N}$ ، $\sqrt{3} = \frac{x}{y}$

ونفرض أن $gcd(x,y) = 1$

فإن: $3 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ بأن $x^2 = 3y^2$

بأن $3 \mid x^2$ فإن $\boxed{3 \mid x}$

فإنه يوجد $p \in \mathbb{N}$ ، $x = 3p$

بأن $x^2 = 9p^2$ ونعلم $x^2 = 3y^2$

بأن $3y^2 = 9p^2$

بأن $y^2 = 3p^2$ فإن $3 \mid y^2$

فإن $\boxed{3 \mid y}$

فإن $gcd(x,y) \geq 3$ وافترضنا: $gcd(x,y) = 1$

وهذا تناقض

وبالتالي $\sqrt{3}$ عدد غير كسري.

## (٤) البرهان البديل:

لبيان: $P \to Q \vee R \equiv P \wedge \neg Q \to R$

نفرض أن $P$ صائبة، $Q$ خاطئة، ونبرهن على أن $R$ صائبة.

ونحصل على: أن إذا كان $P$ صائبة فإن $Q$ أو $R$ صائبة.

### مثال (١،٣٧) ص ٥٩

لكل عددين حقيقيين $a$ و $b$، إذا كان $ab=0$ فإن $a=0$ أو $b=0$

**الحل:** نفرض أن $ab=0$ و $a \neq 0$

فإن $1 \cdot b = \left(\frac{1}{a} a\right) \cdot b = \frac{1}{a} (ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$

فإن $b=0$

مثال (1,28) ص 41

إذا كان $\alpha$ جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$ حيث $c \in \mathbb{Z}$

فإنه، إما أن $\alpha$ عدد صحيح أو $\alpha$ عدد غير كسري

الحل: نفرض أن $\alpha$ جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$

$c \in \mathbb{Z}$ $(c \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ و نفرض أن $\alpha$ عدد كسري.

فإن $\alpha = \frac{a}{b}$ , $a, b \in \mathbb{N}$

و $\alpha^2 - c = 0$

فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = c$ فإن $\frac{a^2}{b^2} = c$

فإن $a^2 = c b^2$

فإن $b^2$ قاسم $a^2$

فإن $b$ قاسم $a$ فإنه يوجد $p \in \mathbb{N}$ , $a = b \cdot p$

فإن $\alpha = \frac{a}{b} = p$ , $p \in \mathbb{N}$

فإن $p$ عدد صحيح.

و بالتالي إذا كان $\alpha$ جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$

حيث $c \in \mathbb{Z}$ فإن $\alpha$ عدد صحيح أو $\alpha$ عدد غير كسري

# (٥) الاستقراء الرياضي

نبرهن أن $\forall n \geq m, P(n)$

## المبدأ الأول

| | |
|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $k+1$ | $P(k+1)$ |
| $k$ | $P(k)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $m+2$ | $P(m+2)$ |
| $m+1$ | $P(m+1)$ |
| $m$ | $P(m)$ |

نبرهن $P(m)$ صائبة

نفرض $k \geq m$ ، $P(k)$ صائبة

ونبرهن أن $P(k+1)$ صائبة

النتيجة: $\forall n \geq m, P(n)$