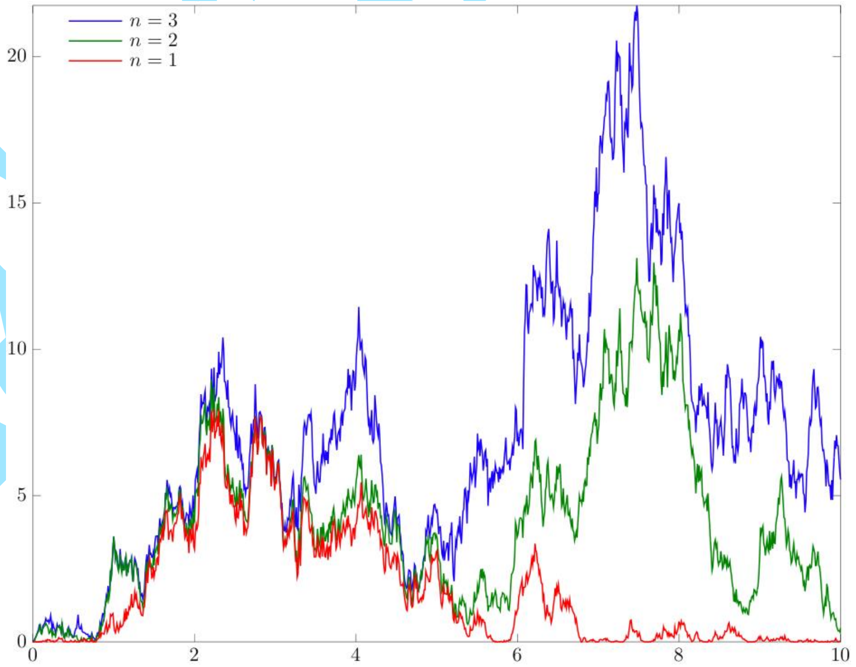
# المحاضرة الثالثة

## السنة الثالثة – إحصاء رياضي

## طوريات عشوائية (1)




مدرس المقرر د. هادية طهماز

**تعريف**: بفرض ... $X_1, X_2,$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة بالتوزيع وتتوزع

وفق توزيع برنولي:

$$P(X_n = 0) = 1 - p \ , P(X_n = 1) = p$$

عندئذ تدعى أسرة كل المتغيرات العشوائية $\{X_n; n \geq 1\}$ بطوري برنولي.

- لو أردنا وصف هذا الطوري لوجدناه بحالات منفصلة وزمن منفصل، أي أن:

$$T = \{0,1,2, \dots\} \ \ , E = \{0,1\}$$

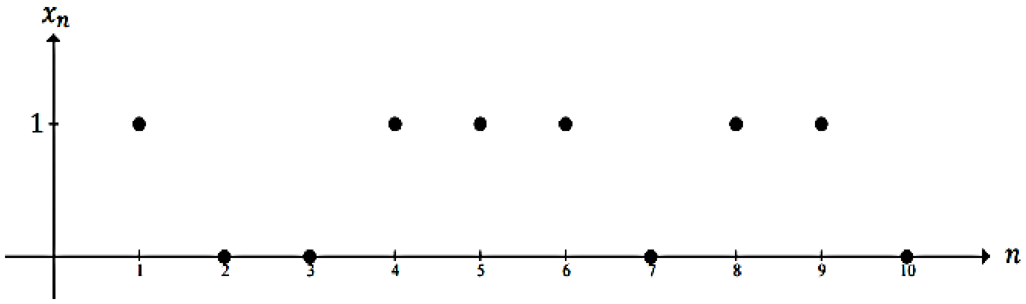
نعلم أنه في تجربة برنولية لو رمينا قطعة نقود عدة مرات نحصل على أحد الوجهين،

ففي حال حصلنا على الوجه H نعتبره القيمة 1 وفي حال الحصول على الوجه T

*نعطيه القيمة 0*، فمثلاً يبين الجدول التالي أحد مسارات طوري برنولي:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النتيجة | H | T | T | H | H | H | T | H | H |
| $X_n$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

يمكن أن نمثله بيانياً بالشكل التالي:




## طوري الإشارة:

**تعريف:** ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشوائي فيه المتغيرات $\{X_t\}$ ترصد عدد الإشارات أو الأحداث التي تقع أو تحدث خلال فترة زمنية $[0,t]$، عندئذ تكون مجموعة قيم هذا الطوري هي $\mathbb{N}^0$ وهو فضاء الحالة، ونفترض أن هذا الطوري ذو تزايدات في المجموعة $\mathbb{N}^0$ عندئذ يدعى هذا الطوري بطوري الإشارة.

## افتراضات:

1- إن الطوري العشوائي $\{X_t\}_{t\in T}$ ذو تزايدات مستقلة، عندئذ في حال كان هذا الطوري طوري إشارة فإن التزايدات المستقلة له تعني أن عدد الإشارات الواردة خلال الفترات الزمنية المتعاقبة هي متغيرات عشوائية مستقلة.

2- إن الطوري العشــوائي $\{X_t\}_{t\in T}$ ذو تزايدات متجانســة، هذا يعني أنه لو كان الطوري العشوائي طوري إشارة فالتزايدات المتجانسة له تعني ورود عدد معين من الإشارات خلال فترات زمنية متساوية الطول تساوي مقدار ثابت.

3- سنفترض أن هذا الطوري يحقق العلاقتين التاليتين:

$$1 - \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{w(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda > 0$$

$$2 - \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1 - w_0(\Delta t) - w_1(\Delta t)}{\Delta t} = O(\Delta t)$$

علماً أن $w_i(\Delta t)$ هي فترة زمنية طولها $\Delta t$ تأتي فيها i إشارة، أي:

$$w_i(\Delta t) := P(X_{\Delta t} - X_0 = i)$$

$$3 - \quad 1 - w_0(\Delta t) - w_1(\Delta t) = O(\Delta t)$$

هذا يعني أنه لو كان $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري إشارة فإن $w_i(\Delta t)$ تعني احتمال حصولنا على i إشارة خلال فترة زمنية بطول $\Delta t$ وأما $O(\Delta t)$ تحقق العلاقة التالية:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

أي أن $O(\Delta t)$ مقدار لامتناهي في الصغر بالنسبة لـ $\Delta t$.

من العلاقة (1) السابقة ينتج لدينا:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{w_1(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda > 0$$

$$\Longrightarrow w_1(\Delta t) = \lambda . \Delta t + O(\Delta t)$$

يعني أنه من أجل طوري الإشـــارة فإن احتمال ورود إشـــارة واحدة خلال فترة زمنية قصيرة جداً بطول $\Delta t$ هي من رتبة $\lambda . \Delta t$.

أما من العلاقة (2) السابقة نستنتج أن:

$$1 - w_0(\Delta t) - w_1(\Delta t) = O(\Delta t)$$

وهذا العلاقة تعني أنه من أجل طوري الإ شارة يكون احتمال ورود ا شارتين على الأقل خلال فترة زمنية قصـــيرة جداً $\Delta t$ هو من رتبة $O(\Delta t)$ والذي يمثل مقدار صـــغير جداً يمكن اهماله.

## طوري بواسون المتجانس:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشـــوائي منقطع بفضـــاء حالة $\mathbb{N}^0$، عندئذ يقال عن هذا الطوري إنه طوري بواســـوني متجانس بوســـيط $\lambda$ إذا كان من أجل كل $t \geq 0$ العلاقة التالية محققة:

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

**مبرهنة:**

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشـــوائي من طوريات الإشـــارة، فإذا كان هذا الطوري يحقق الافتراضـــات (1) و(2) و (3) كذلك تحقق العلاقة $P(X_0 = 0) = 1$، عندئذ سيكون هذا الطوري بواسوني متجانس.

**البرهان:**

من الافتراضين الأول والثاني وخاصية الاستقلال يمكن أن نكتب من أجل $\Delta t > 0$ ما يلي:

$$w_0(t+\Delta t) = w_0(t).w_0(\Delta t) \qquad \dots(1)$$

$$w_i(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{i} w_{i-k}(t)\,.\,w_k(\Delta t) \quad \dots(2)$$

ولدينا من الافتراض الثالث العلاقة الأولى:

$$w_1(\Delta t)=\ \lambda.\Delta t+O(\Delta t) \qquad \dots(3)$$

وكذلك من العلاقة الثانية من نفس الافتراض:

$$1-w_0(\Delta t)-w_1(\Delta t)=O(\Delta t) \qquad \dots(4)$$

$$\Longrightarrow w_0(\Delta t)=1-w_1(\Delta t)-O(\Delta t)$$

وبتعويض (3) في العلاقة الأخيرة نجد:

$$w_0(\Delta t)=1-\ \lambda.\Delta t-O(\Delta t) \qquad \dots(5)$$

من (1) و (5) ينتج لدينا العلاقة التالية:

$$\frac{w_0(t+\Delta t)-w_0(\Delta t)}{\Delta t}=-\lambda w_0(\Delta t)-\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}w_0(\Delta t)\dots(6)$$

من العلاقتين (2) و (5) نستنتج ما يلي:

$$\frac{w_i(t+\Delta t)-w_i(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=-\lambda w_i(\Delta t)+\lambda w_{i-1}(\Delta t)-\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}\sum_{k=1}^{2} w_k(\Delta t)\ldots(7)$$

بأخذ نهاية طرفي العلاقتين (6) و (7) فنحصل على المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

الأولى:

$$\acute{w}_0(t)=-\lambda w_0(t)\Rightarrow\frac{\acute{w}_0(t)}{w_0(t)}=-\lambda$$

والحل العام لهذه المعادلة التفاضلية مع العلم أن الشرط الابتدائي لها

هو: $w_0(0)=P(X_0=0)=1$

$$w_0(t)=e^{-\lambda t}$$

الثانية:

$$\acute{w}_i(t)=-\lambda w_i(t)+\lambda w_{i-1}(t)$$

والحـــل العـــام للمعادلـــة التفاضـــلية الثانيـــة مـــع العلـــم أن الشـــرط الابتـــدائي

لها $w_0(0) = P(X_0 = 0) = 1$ هو:

$$w_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}\, e^{-\lambda t}$$

وبالتالي حســـــب تعرف طوري بواســـــون المتجانس نجد أن طوري الإشـــــارة المحقق

للافتراضات الثلاثة هو طوري بواسوني متجانس وبهذا يتم المطلوب.