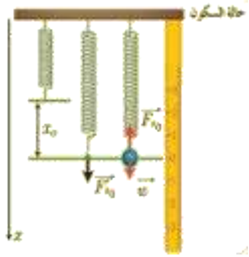
النواس المرن

تعريفه: نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K يتصل به جسم صلب كتلته m يقوم بحركة اهتزازية على جانبي نقطة ثابتة تدعى مركز الاهتزاز .

- عند وصل النهاية السفلية للنابض بجسم صلب نلاحظ أن النابض يستطيل بمقدار x0 ومن ثم يصبح مركز العطالة c ساكناً في **مركز الاهتزاز (التوازن) o.**
- **x0 استطالة سكونية :** وهي بعد مركز عطالة الجسم الصلب عن مركز الاهتزاز (التوازن) عند سكون مركز العطالة .
- نوثر على النهاية السفلية للنابض بقوة شد وضمن حدود مرونة النابض بحيث يستطيل النابض مسافة $\bar{x}$ (المطال) ثم نترك النابض يهتز فنلاحظ أن النابض يهتز على جانبي مركز التوازن لهذا نقول ان حركة الجسم الصلب حركة اهتزازية .
- **المطال $\bar{x}$:** هو البعد الجبري لمركز عطالة الجسم الصلب عن مركز التوازن .

دراسة تحريكية : برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة F=-KX .

1) **حالة السكون:** يستطيل النابض مسافة x0 بعد تعليق الجسم فيه ثم **يتوازن الجسم** بتأثير قوتين :



قوة ثقله $\overrightarrow{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_{S_0}$،

وبما أن **الجسم ساكن:**

$$\sum \vec{F}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{W}+\vec{F}_{S_0}=\vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W-F_{S_0}=0$$

$$W=F_{S_0} \quad ❶$$

تؤثر في **النابض** قوة شد $\vec{F}'_{S_0}$ التي تسبب له الاستطالة x0

$$F'_{S_0}=kx_0$$

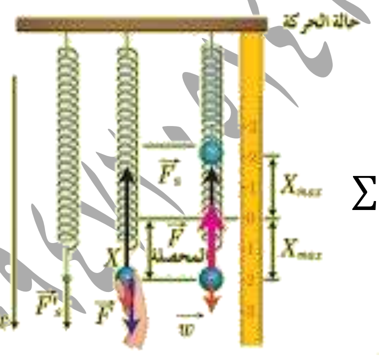
لكن $F_{S_0}=F'_{S_0}$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❶ نجد أن: $W=kx_0$

حيث x_0 الاستطالة السكونية للنابض .

2) **حالة الحركة:** القوى الخارجيّة المؤثّرة في مركز عطالة الجسم: قوة الثقل $\overrightarrow{W}$ و قوّة توتّر النابض $\vec{F}_S$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني :



$$\sum \vec{F}=m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}=\overrightarrow{W}+\vec{F}_S=m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحوَ الأسفل:

$$\sum F=W-F_S=ma \quad ❷$$

0988440574
0947205146

تؤثرُ في النابضُ قوة شد $\overrightarrow{F'_s}$ التي تسبب له الاستطالة

$x_0 + \bar{x}$ إذاً: $F'_s = k(x_0+\bar{x})$

لكن $F_s = F'_s$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❷ نجد: $\sum F = kx_0 - k(x_0+\bar{x}) = m\bar{a}$

$$\sum F = kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\bar{a}$$

$$F = -k\bar{x} = m\bar{a}$$

نتيجة: إنّ محصّلة القوى الخارجيّة المؤثّرة في مركز عطالة الجسم في كلّ لحظةٍ هي **قوّة إرجاعٍ** لأنّها **تُعيد** الجسمَ إلى **مركز الاهتزاز** دوماً، وهي تتناسب **طرداً** مع المطال x **وتعاكسه** بالإشارة.

استنتاج طبيعة حركة النوّاس المرن:

برهن أنّ حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النواس المرن غير المتخامد حركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة ثم استنتج الدور الخاص لهذا النواس.

البرهان: إنّ محصّلة القوى الخارجيّة التي يخضعُ لها مركزُ عطالة الجسم تُعطى بالعلاقة:

$$\bar{F} = m\bar{a} = -K\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

وهي $(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}$ .... ❶

معادلةٌ تفاضليّةٌ من **المرتبة الثانية** تقبلُ **حلاً جيبياً** من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ ......❷

وهو الشكل العام للتابع الزمنيّ للمطال (الموضع) حيث:

$\bar{x}$ المطالُ أو موضعُ الجسم في اللحظة t ويقدر بالمتر m .

X_{max} سعة الحركة وتقدّرُ بالمتر m مقدار **ثابت وموجب** .

ω_0 النبض الخاص للحركة ويقدر بالـ rad.s^{-1} مقدار **ثابت وموجب**

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ طورُ الحركةَ في اللحظة t .

$\bar{\varphi}$ الطورُ الابتدائيُّ في اللحظة t=0 ويقدّرُ بالـ rad وهو **مقدار ثابت**

للتحقّق من صحّة الحلّ **نشتقّ** تابع المطال **مرّتين** بالنسبة للزمن

$$(x)'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2\bar{x} \quad .... ❸$$

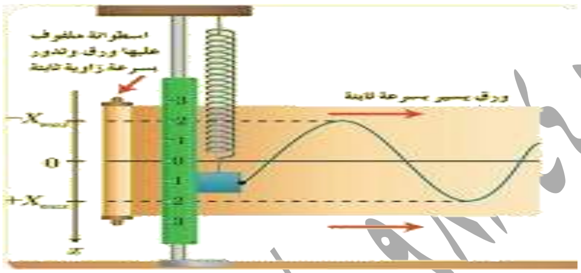
بالمقارنة بين (❶) و (❸) نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقّقٌ لأنّ k,m موجبان .

نتيجة: إنّ حركةَ النوّاس المرن هي هزازة جيبيّة توافقيّة انسحابيه بسيطة.



استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصّ للنوّاس المرن:

بما أنّ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواةِ نجدُ: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتالي:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهي علاقةُ الدّورِ الخاصّ للنوّاس المرن غيرِ المُتخامدِ.

من العلاقةِ السّابقةِ أستنتجُ أنّ الدورَ الخاصّ:

1) **لا يتعلّقُ** بسعةِ الاهتزاز X_{max} .

2) يتناسبُ **طرداً** مع الجذرِ التربيعيّ لكتلةِ الجسمِ المهتزّ m .

3) يتناسبُ **عكساً** مع الجذرِ التربيعيّ لثابتِ صلابةِ النابض k .

0947205146
0988440574

توابعُ حركةِ النوّاس المرن:

1) تابعُ المطال: الشكل العام لتابع المطال

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن بفرض أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $x = +X_{max}$ في اللحظة $t=0$ بالتالي:

$$X_{max} = X_{max} \cos(\bar{\varphi})$$

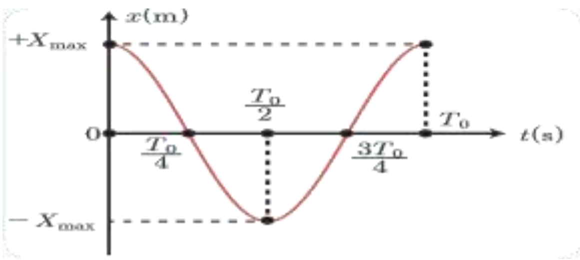
$$\cos(\bar{\varphi}) = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$$

بالتالي: $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t)$

- أكمل الجدول التالي:

t	O	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

- ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور.



- أحددُ مطال الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t = X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{2}$$

$$x = X_{max}\cos 3\pi = -X_{max}$$

أستنتج: المطال أعظميّ (طويلة) في الموضعين الطرفيّين $x = |\pm X_{max}|$.

المطال معدومٌ في مركز الاهتزاز $x = 0$.

2) تابعُ السرعة:

إنّ تابعَ السرعةِ هو المشتقّ الأوّل لتابع المطال بالنسبة للزمن.

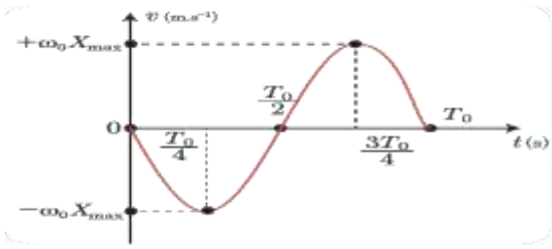
$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$$

- أكمل الجدول الآتي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

- ارسم المنحني البياني لتغيّرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور.



- أحدّدُ قيمةَ سرعة الجسم، وجهةَ حركتِهِ في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$.

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t) = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\omega_0 X_{max}$$

الجسم الصلب يتحرك بعكس الاتجاه الموجب للمحور الشاقولي الموجه نحو الأسفل

أستنتج: السرعة أعظميّة (طويلة) $v = |\pm \omega_0 X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الاهتزاز.

- السرعةُ معدومة $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيّين).

3) تابع التسارع:

إنّ تابعَ التسارع هو المشتقُّ الأوّل لتابع السرعةِ بالنسبة للزمن، وهو المشتقُّ الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن.

$$\bar{a} = (v)'_t = (x)''_t$$

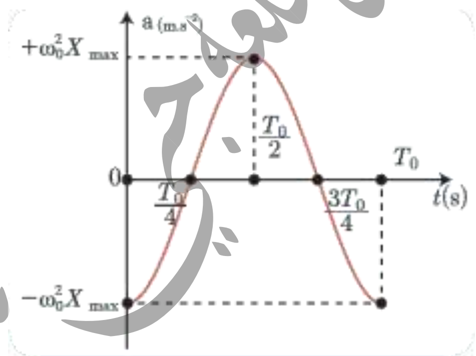
$$\bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

$$\boxed{\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}}$$

- أكمل الجدول التالي:

t	O	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

- ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور .



- أحدّد قيمة تسارع الجسم في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$:

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{2}\right)$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(5\pi) = +\omega_0^2 X_{max}$$

استنتج: التسارعُ أعظميٌّ (طويلة) $a_{max} = |\pm\omega_0^2 X_{max}|$

عند المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيّين) .

- التسارعُ معدوم $a = 0$ عند المرور في مركز الاهتزاز .

- التسارعُ غيرُ ثابتٍ تتغيّرُ قيمتُه بتغيّر المطال .

الطاقةُ في الحركةِ التوافقيّةِ البسيطة:

إن الطاقة الميكانيكيّة للنوّاس المرنِ هي مجموعُ الطاقتين الكامنة والحركيّة:

$$E_{tot} = E_p + E_k \;.........(1)$$

الطاقةُ الكامنة المرونيّة للنابض هي $E_P = \frac{1}{2}Kx^2$

نعوّض تابع المطال:

$$E_P = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الطاقةُ الحركيّة للجسم هي $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ نعوّض تابع السرعة:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض في (1) :

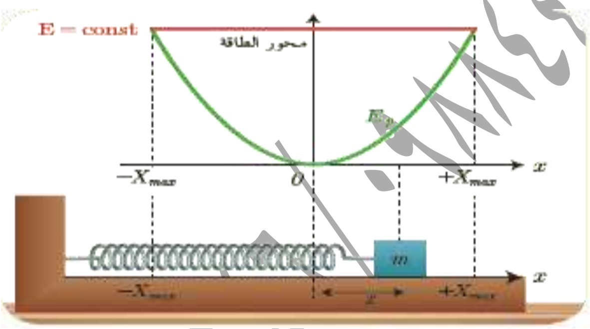
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن: $k = m\omega_0^2$

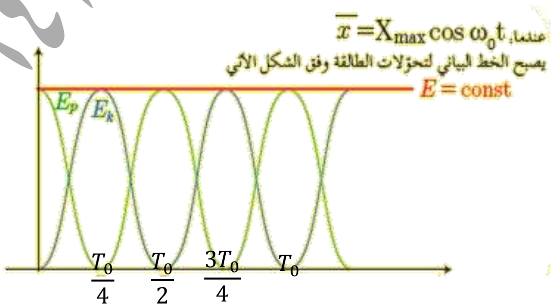
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}kX_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2[\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})]$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = const}$$



تمثّل الطاقة الكامنة المرونية بقطع مكافئ ذروته O بينما تمثّل الطاقة الميكانيكية بخط مستقيم يوازي محور المطالات.

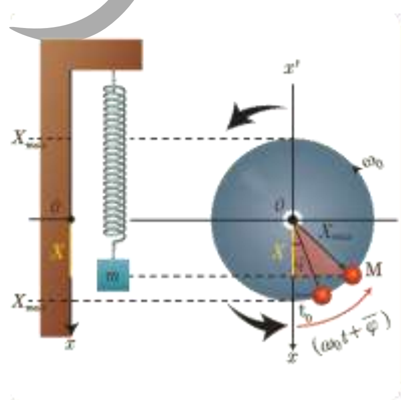


- أحدِّدُ المواضعَ التي تكون فيها كل من الطاقتين الحركيّة والكامنة المرونية: عظمى ومعدومة.

الجواب: تنعدم الطاقة الحركية في الوضعين الطرفيين بسبب انعدام السرعة وتكون عظمى في مركز الاهتزاز وذلك لأن السرعة عظمى عندئذ.

كما تنعدم الطاقة الكامنة المرونية في وضع التوازن بسبب انعدام المطال وتكون عظمى في الوضعين المتطرفين وذلك لأن المطال أعظمي عندئذ.

العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل):



مَثّل فرينل الحركة الجيبية التوافقية البسيطة بشعاع:

- الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة $t = 0$

- طور الحركة $(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t.

- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة M.

- سعة الحركة X_{max} هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران.

- مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x'x}$ وهو متغير بتغير الزمن.

- النسبة $\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$

- التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لذلك تُسمّى الحركة جَيبيّة انسحابيّة (توافقيّة بسيطة).

تطبيق: نوّاس مرن أفقي مؤلّف من جسم ونابض مرن تابعه الزمني $x = 0.1\cos(\pi t + \pi)$،

المطلوب:

1) حدّدْ ثوابت الحركة لهذا النوّاس.
2) احسبْ دوره T_0
3) حدد موضع المتحرك (الجسم) وجهة حركته في لحظة بدء الزمن.

الحل: 1) نكتبُ التابع الزمني للنوّاس المرن

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \pi)$$

بالمقارنة نجدُ: المطال الأعظمي: $X_{max} = 0.1m$

النبض $\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$ و الطورُ الابتدائي للحركة (عند اللحظة $t = 0$) هو $\bar{\varphi} = +\pi\ rad$

2) حسابُ الدور الخاص: من العلاقة:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

0988440574
0947205146

3) $t=0 \Rightarrow x = 0.1\cos\pi = -0.1m$

أي المتحرك في مطاله الأعظمي السالب في لحظة بدء الزمن.

ـ لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{2}S$

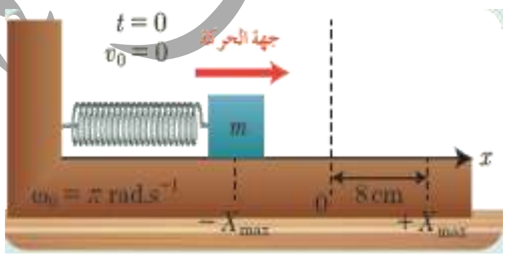
$$\bar{x} = 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) = 0.1\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0m$$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من المطال الأعظمي السالب إلى وضع التوازن.

اختبر نفسي:

أولًا – اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1. تابعُ المطال الذي يصفُ حركة الهزازة الجيبيّة في الشكل المجاور هو:



A. $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t+\pi)$
B. $\bar{x} = 8\cos(\pi t+\pi)$
C. $\bar{x} = 0.008\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$
D. $\bar{x} = 0.8\cos(\pi t)$

الإجابة الصحيحة: A) $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t+\pi)$

توضيح اختيار الإجابة: شروط البدء:

$$v_0 = 0\ ,\ x = -X_{max}\ ,\ t = o$$

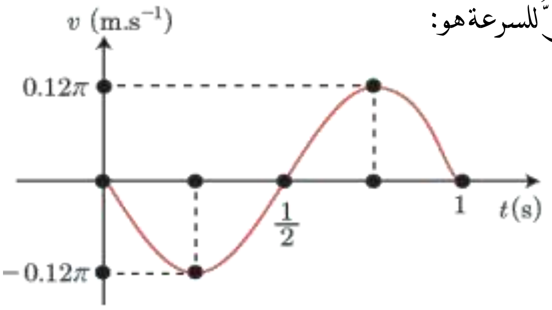
نبدل في التابع الزمني للمطال:

$$-0.08 = 0.08\cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \bar{\varphi} = \pi\ rad$$

$$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0.08\cos(\pi t+\pi)$$

2. الرسمُ البياني جانبًا يمثّل تغيّرات السرعة مع الزمن لجسمٍ مرتبطٍ بنابضٍ مرنٍ يتحرّك بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطة، فيكون التابعُ الزمنيّ للسرعة هو:



A. $\bar{v} = 0.06\pi\cos\pi t$
B. $\bar{v} = -0.06\pi\cos 2\pi t$
C. $\bar{v} = -0.12\pi\sin 2\pi t$
D. $\bar{v} = 0.12\pi\sin\pi t$

الإجابة الصحيحة: c) $\bar{v} = -0.12\pi\sin 2\pi t$

- $T_0 = 1s\ ,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad\ s^{-1}$
- $v_{max} = \omega_0 X_{max} \Rightarrow$
$$X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06m$$
- نبدل $(t=0\ ,\ v=0)$ في التابع الزمني للسرعة

فنجد: $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

$$0 = -2\pi \times 0.06\ \sin(0+\bar{\varphi}) \Rightarrow$$
$$-0.12\pi\sin(\bar{\varphi}) = 0$$

إما: $\bar{\varphi} = 0\ rad$ الحل **مقبول** لأنه **يحقق السرعة سالبة**

في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{4}s$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi}) \Rightarrow$$

$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06\sin\left(2\pi\frac{1}{4}+0\right) = -0.12\pi\ m.s^{-1}$$

أو: $\bar{\varphi} = \pi\ rad$ الحل **مرفوض** لأنه **يحقق السرعة موجبة**

في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{4}s$

$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$

$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi\frac{1}{4} + \pi\right) = -0.12\pi \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$= +0.12\pi \quad m.s^{-1}$

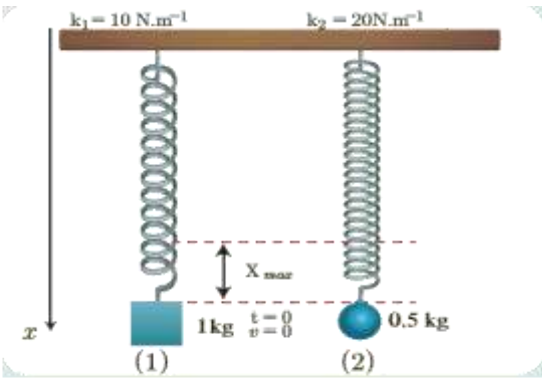
3. يمثّل الشكل ❶ هزّازتان توافقيّتان (1) و (2) تنطلقان من الموضع نفسه وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:

A. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

B. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

C. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$.

D. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$.



الشكل ❶

الإجابة الصحيحة: D)

للهزازتين ($x=+X_{max}$ $v=0$ $t=0$) بالتالي فإن $\varphi=0$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \pi \ rad.s^{-1}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{20}{0.5}} = \sqrt{40} = 2\pi \ rad.s^{-1}$$

1) $x_1 = X_{max}\cos\omega_{01}t \Rightarrow x_1 = X_{max}\cos 3\pi = -X_{max}$

2) $x_2 = X_{max}\cos\omega_{02}t \Rightarrow x_2 = X_{max}\cos 6\pi = +X_{max}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

1) أثبت صحة العلاقة $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقيّة البسيطة.

البرهان: $E_K = E - E_P$

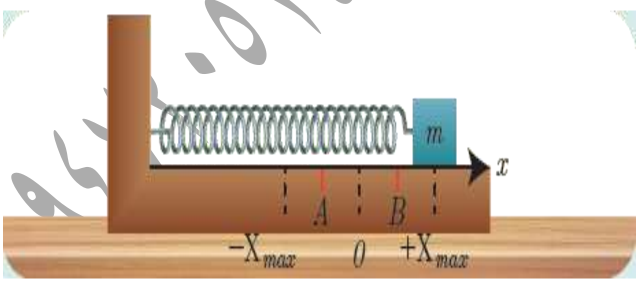
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{(X_{max}^2 - x^2)}$$

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

2) نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه، ويُربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرّك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل المجاور

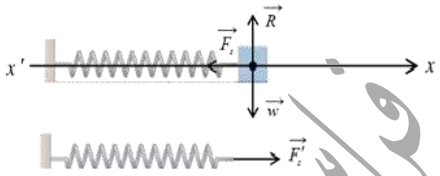


نشدّ الجسم مسافة أفقيّة مناسبة، ونتركه دون سرعةٍ ابتدائيّة. المطلوب:

a. ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

b. استنتجْ علاقةَ الطاقة الحركيّة للجسم بدلالة X_{max} في كلٍّ من الموضعين A وB

$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ و $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$.



a.القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة الثقل: $\vec{W}$ – قوة رد فعل السطح: $\vec{R}$ – قوة توتر النابض: $\vec{F_s}$ ،

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجّه كما في الشكل:

$$-F_s = ma$$

تؤثر على النابض قوة شد $\vec{F'_s}$ التي تسبّب له الاستطالة x

حيث: $F'_s = F_s = k\bar{x}$ (لأنها قوى داخلية)

بالتعويض نجد: $-k\bar{x} = m(\bar{x})''_t$

$$x''_t = -\frac{k}{m}(\bar{x}) \quad .....(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \quad .....(2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأنّ k,m موجبان.

حركة الجسم هي حركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b.استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max}:

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$$

عندما : $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ فإن:

$$E_{k_a} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}kX_{max}^2\right) = \frac{3}{8}kX_{max}^2$$

أي: $E_{k_a} = \frac{3}{4}E_{tot}$

عندما : $\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$: فإن:

$$E_{k_B} = \frac{1}{2}K(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kX_{max}^2\right) = \frac{1}{4}kX_{max}^2$$

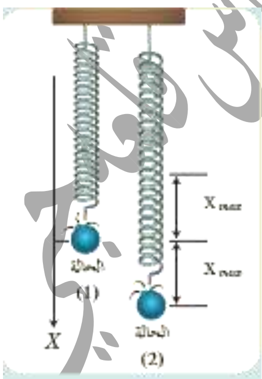
أي: $E_{k_B} = \frac{1}{2}E_{tot}$

النتيجة: بزيادة القيمة المطلقة للمطال **تزداد الطاقة الكامنة المرونية وتقل الطاقة الحركية.**

3) جسمٌ معلّقٌ بنابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهمل الكتلة حلقاتهُ متباعدةٌ يهتزُّ بدوره الخاصِّ، ما نوعُ حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا ؟

a- مركز الاهتزاز، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب؟

b- المطال الأعظميّ الموجب؟



لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = const$$

- الانفصال في مركز الاهتزاز: قذف شاقولي نحو الأعلى لأنّ الجسم مزود بسرعة ابتدائية شاقولية للأعلى والحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ولهذه الحركة طوران: طور صعود متباطئة بانتظام وطور هبوط متسارعة بانتظام.
- الانفصال في المطال الأعظمي الموجب: سقوط حر لأنّ السرعة الابتدائية للجسم معدومة والحركة مستقيمة متسارعة بانتظام.

ثالثاً: حُلَّ المسائلَ الآتيةَ:

في جميع المسائل: ($4\pi = 12.5$ ، $\pi^2 = 10$ ، $g = 10m.s^{-1}$)

المسألة الأولى: تتألّفُ هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابيةٌ من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابتِه $k = 10N.m^{-1}$، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحملُ في طرفه الآخر جسماً كتلتُه m،

ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة: $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$.

المطلوب: 1) أوجدْ قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.

2) احسبْ كتلة الجسم m.

3) احسب قيمةَ السّرعة في موضعٍ مطالُه $x = 6cm$، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجب للمحور.

4) حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.

الحل: 1) $\bar{x} = 0.1\,cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

بالمطابقة مع الشكل العام: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نجد: $X_{max} = 0.1m$ ، $\omega_0 = \pi\ rad\ s^{-1}$ ، $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}rad$

حساب T_0: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2S$

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10}$

$$\Rightarrow m = 1\ kg$$

3) $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$v = \pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.06)^2} = \pi\sqrt{10^{-2} - 36\times10^{-4}}$$

$$= \pi\sqrt{100\times10^{-4} - 36\times10^{-4}} = \pi\sqrt{64\times10^{-4}}$$

$$v = 8\pi\times10^{-2} = 0.25m.s^{-1}$$

4) لحظة بدء الزمن t=0 وبالتالي:

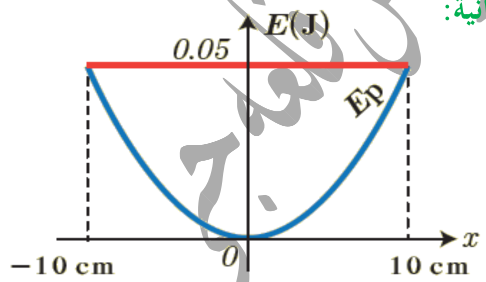
$\bar{x} = 0.1\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

ـ لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{2}S$

$$\bar{x} = 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 0.1\cos(\pi) = -0.1m$$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من وضع التوازن إلى المطال الأعظمي السالب.

المسألة الثانية:



يوضّح الرسمُ البياني تغيّراتِ الطاقةِ الكامنةِ المرونيةِ بتغيّرِ الموضعِ لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلّفةٍ من نابضٍ مرنٍ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته 0.4 kg

1) استنتجْ قيمةَ ثابت صلابة النابض .

2) احسبْ الدورَ الخاصّ للحركة .

3) احسبْ قيمةَ السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل: 1) $E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{X_{max}^2}$

$$k = \frac{2(0.05)}{(10\times10^{-2})^2} \Rightarrow k = 10N.m^{-1}$$

2) $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = \frac{4\pi}{10} = 0.4\pi$

$$T_o = \frac{12.5}{10} = 1.25\ S$$

3) في مركز الاهتزاز ينعدم المطال x=0 بالتالي:

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2} = \omega_0 X_{max}$$

لكن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1.25} = \frac{8\pi}{5} = \frac{25}{5} = 5\ rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow v = 5\times0.1 = 0.5\ m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: تشكّلُ هزّازةٌ توافقيّةٌ بسيطةٌ من جسمٍ كتلتُهُ $m = 1\ kg$ معلّقٌ بطرفِ نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ فينجزُ 10 هزات في $10s$ ، ويرسمُ في أثناءِ حركتهِ قطعةً مستقيمةً طولها $16\ cm$. المطلوب:

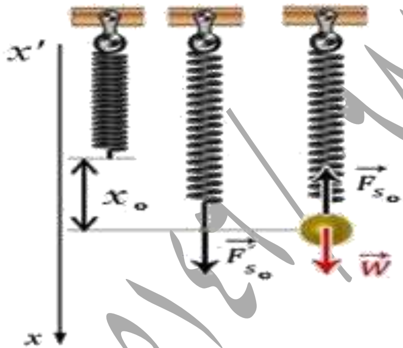
1) استنتجْ قيمةَ الاستطالةِ السكونيّةِ لهذا النابض، ثمّ احسبْ قيمتها .

2) احسبْ قيمةَ السرعة العظمى (طويلة) .

3) احسبْ قيمةَ التسارعِ في مطال $x = 6cm$.

4) احسبِ الطاقةَ الكامنةَ المرونيّةِ في موضع مطاله $x = -4cm$ واحسب الطاقةَ الحركيّةَ عندئذٍ .

الحل:



1) القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في حالة السكون: قوة الثقل: $\vec{W}$ و قوة توتر النابض: $\vec{F}_{S_0}$

$$\sum\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل كما في الشكل:

$$W - F_{S0} = 0$$

$$W = F_{s0}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

تؤثر على النابض القوة $\overrightarrow{F'}_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0 حيث:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$$

بالتعويض في (1) نجد: $mg = kx_0$

$$\boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$$

لنحسب T_0: $T_0 = \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}} = \frac{10}{10} \Rightarrow T_0 = 1\,s$

حساب k: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{(T_0)^2} = \frac{40\times1}{1} = 40\,N.m^{-1}$

تنويه: يمكن حساب k من القانون $\boxed{k=\omega_0^2\, m}$

نعوّض: $x_0 = \frac{1\times10}{40} = 0.25\,m$

2) حساب قيمة السرعة العظمى (طويلة):

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad.s^{-1}$$

$$X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الصلب}}{2} = \frac{0.16}{2} = 0.08\,m$$

$$v_{max} = 2\pi\times0.08 = 0.16\pi = 0.5\,m.s^{-1}$$

3) قيمة التسارع في مطال $\bar{x} = +6\,cm$:

$$\bar{a} = -\omega_0^2\bar{x} = -(2\pi)^2\times6\times10^{-2} = -2.4\,m.s^{-2}$$

4) $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times40\times(-0.04)^2 = 0.032J$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}(40)(0.08)^2 = 0.128J$$

$$E = E_P + E_K \Rightarrow E_K = E - E_P = 0.128 - 0.032 = 0.096\,J$$

المسألة الرابعة: تهتزّ كرةٌ معدنيّة كتلتُها m بمرونةِ نابضٍ شاقوليّ مهملِ الكتلة، حلقاتُه متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 16\,N.m^{-1}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورُها الخاصّ $1s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1\,m$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالُها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب. المطلوب:

1) استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العامّ.

2) عيّنْ لحظتَي المرور الأوّلِ والثالثِ للكرة في موضع التوازن، ثم احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالُها $x = +0.1m$

3) احسبْ كتلة الكرة.

الحل: 1) $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$, X_{max} = 0.1\,m$$

نعوض شروط البدء $(x = \frac{X_{max}}{2} , t = 0)$ في التابع الزمني:

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3}rad \text{ أو } \bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}rad$$

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $(t=0)$ السرعة:

$$\bar{v}_0 = -\omega_0 X_{max}\, sin(\bar{\varphi})$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{3}rad: \; v_0 = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{3}) < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالب

$\varphi = -\frac{\pi}{3} rad : v_0 = +\omega_0 X_{max} \sin(\frac{\pi}{3}) > 0$

الحل مرفوض يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني:

$\bar{x} = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

2) في موضع التوازن x=0:

$$0 = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow \left(2t + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = \frac{1}{6} + k \Rightarrow t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}$$

المرور الأول: $k = 0$ بالتالي: $t = \frac{1}{12} s$

المرور الثالث: $k = 2$ بالتالي: $t = \frac{13}{12} s$

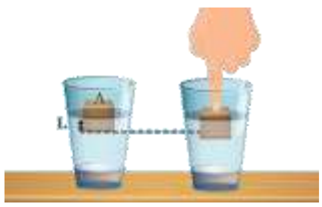
شدّة قوة الارجاع: $F = -kx = -16 \times 0.1 = -1.6\ N$

وشدتها : F=1.6N

3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40}$

$\Rightarrow m = 0.4\ kg$

التفكير الناقد:



لدينا كأس فيه ماء كتلته الحجمية ρ_{H2O} يوضع فيه مكعب خشبي كتلته m_{wood} وكتلته الحجمية ρ_{wood} حيث $\rho_{H2O} > \rho_{wood}$ ومساحة سطحه A فيطفو وهو بحالة توازن وقد برز جزء منه فوق سطح الماء. عند التأثير بقوة شاقولية على المكعب الخشبي ليغمر كلياً بالماء ثمّ يترك فجأة. ما نوع حركة المكعب الخشبي؟

الجواب: في حالة السكون تتساوى شدّة قوة ثقل المكعّب الخشبي مع شدّة دافعة أرخميدس المؤثّرة عليه فتكون محصلة القوى المؤثّرة معدومة. وعند التأثير على المكعب الخشبي بقوة شاقولية جهتها نحو الأسفل يتغير الحجم المغمور من المكعب الخشبي فتتغير شدة دافعة أرخميدس لتصبح محصلة القوى متناسبة مع الإزاحة X ومعاكسة لها بالجهة وهي ما تسمّى قوة الإرجاع فتكون الحركة : حركة جيبية انسحابية.

----انتهى البحث----