الجلسة الامتحانية
لمادة الرياضيات

يتضمن أبحاث النهايات و الاشتقاق و التابع اللوغاريتمي و التابع الأسي و التكامل

إعداد المدرس عدي الخميس

السؤال الأول :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق

$$f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$$

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوجد عدداً A يحقّق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

2) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

3) عين التابع المشتق f' للتابع f و استنتج مشتق

$$k(x)=\frac{-2\ln x+1}{\ln x+3}$$

4) نرمز بالرمز g إلى التابع المعرّف على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$

أثبت أنّ g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I .

5) اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي فاصلتها 1 و احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.2)$.

6) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$ ؟

السؤال الثاني :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$

1) أثبت أنّ f زوجي و دوري يقبل 2π دوراً له .

2) أثبت أنّ $f'(x)=6\cos x\sin x(1-2\cos x)$

عند كل عدد حقيقي x .

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق

$$f(x)=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}$$

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x-4$ مقارب مائل للخط C بجوار $\pm\infty$

و ادرس الوضع النسبي بين C و مقاربه Δ على المجال $]0,\pi[$.

السؤال الرابع :

f هو التابع المعرّف على المجال $]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{2x+\cos x}{x-1}$$

1) أثبت أنّ $\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$ أياً يكن $x>1$.

2) استنتج نهاية f عند $+\infty$.

السؤال الخامس :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\frac{2}{2-\cos x}$$

1) أثبت أنّ f محدود .

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2-\cos x}$.

السؤال السادس :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ وفق

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

1) أوجد الأعداد a ، b ، c التي تحقّق

$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ أياً تكن $x\in I$.

2) احسب قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)dx$.

السؤال السابع :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اكتب ثلاثي الحدود (x^2+2x+4) بالصيغة القانونية .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط C .

المدرس عدي الخميس

السؤال الثامن :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$.

2) استنتج أنّ الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يُطلب إيجاد معادلته .

3) ادرس الوضع النسبي للخط C و المقارب Δ .

السؤال التاسع :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل التابع f مستمراً على $\mathbb{R}$ ؟

السؤال العاشر :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x} & ;x\neq 0\\ 2 & ;x=0\end{cases}$$

أثبت أنّ التابع f مستمر عند الصفر .

السؤال الحادي عشر :

يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x

ليكن f التابع المعرّف على $\left[\frac{1}{2},2\right[$ وفق

$$f(x)=\frac{(x-1)E(x)}{x}$$

1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$) .

2) هل f مستمر على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right[$ ؟

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

السؤال الثاني عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$$

عيّن a و b إذا علمت أنّ الخط C يقبل مماساً d معادلته $y=x-1$ في النقطة $A(2,1)$ منه .

السؤال الثالث عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,2]$ وفق

$$f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x=2$ و فسر النتيجة هندسياً .

2) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها

3) ارسم المماسات و ارسم C .

السؤال الرابع عشر :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$.

السؤال الخامس عشر :

C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

عيّن a و b لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه .

السؤال السادس عشر :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

أثبت بالتدريج أنّ المشتق من المرتبة n يُعطى بالصيغة

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad ;(x\neq 1)$$

السؤال السابع عشر :

C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

1) عيّن a ، b ، c ليُكتب f بالشكل

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

2) أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C .

3) ادرس الوضع النسبي بين الخط C و المقارب d .

4) أثبت أنّ النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للخط C .

السؤال الثامن عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

و $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)$.

2) استنتج أنّ الخط C يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً Δ في جوار $-\infty$ يُطلب إيجاد معادلة له .

3) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط C .

السؤال التاسع عشر :

حل المعادلات و المتراجحات الآتية :

- $e^{2x+1}<e^{-x^2+4}$
- $e^{2x}-e^{x}-6=0$
- $e^{x}+4e^{-x}\le 5$
- $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$
- $4^{x}+2^{x+1}-3=0$
- $e^{2x}-3e^{x+1}+2e^{2}=0$
- $e^{x}+\frac{e}{e^{x}}=1+e$
- $\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1}=-2$
- $\ln\left(x^2-4\right)\le\ln(-3x)$
- $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\ge\ln x$
- $\ln\left(x^2-3x\right)\ge 2\ln(6-x)$
- $\ln 3\le\ln(5-x)+\ln(x-1)$
- $(\ln x)^2=16$
- $(\ln x)^2-2\ln x-3\ge 0$
- $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

السؤال العشرون :

1) أثبت أنّ $\ln(1+x)\le x$ أياً يكن $x>-1$.

2) أثبت أنّ $\ln(x)\le x-1$ أياً يكن $x>0$.

السؤال الحادي و العشرون :

1) حل المعادلة التفاضلية $y'+5y=0$ و الخط C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$.

2) حل المعادلة التفاضلية $y'+y=1$ ثم عيّن حلها f الذي يحقّق $f(-1)=2$.

3) حل المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ و ميل المماس في النقطة التي فاصلتها (-2) من الخط C للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

السؤال الثاني و العشرون :

- ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{x}-1$

احسب $f(0)$ ، $f'(0)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}$.

- ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\cos x$

احسب $f(\frac{\pi}{3})$ ، $f'(\frac{\pi}{3})$ و استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

- ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

احسب $f(0)$ ، $f'(0)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$.

السؤال الثالث و العشرون :

f و g تابعان معرفان على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x-1+e^{x}\ ,\ g(x)=\frac{2x}{x^{2}+1}$$

1) أثبت أنّ C_f و C_g متماسان في المبدأ ثم اكتب معادلة المماس المشترك d .

2) احسب $I=\int_0^1 f(x)dx$ ، $J=\int_0^1 g(x)dx$.

السؤال الرابع و العشرون :

احسب $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

السؤال الخامس و العشرون :

احسب التكاملات الآتية :

$$I_1=\int_0^2 |x^2-1|dx \qquad I_9=\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$$

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx \qquad I_9=\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$$

$$I_3=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos x}\,dx \qquad I_{10}=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{x}}dx$$

$$I_4=\int_0^1 \left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx \qquad I_{11}=\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$I_5=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx \qquad I_{12}=\int_0^1 \frac{x}{e^{x}}dx$$

$$I_6=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\tan x\,dx \qquad I_{13}=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

$$I_7=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x\,dx \qquad I_{14}=\int_0^{\pi/3} x\sin 3x\,dx$$

$$I_8=\int_{-2}^{-1}\frac{2x-1}{x-1}dx \qquad I_{15}=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$I_8=\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2+x}dx \qquad I_{16}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$$

السؤال السادس و العشرون :

جد تابعاً أصلياً F للتابع f على I :

- $f(x)=x\cos x \quad , I=\mathbb{R}$
- $f(x)=x^2\ln x \quad , I=]0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4} \quad , I=]-\infty,-2[$
- $f(x)=\ln x \quad , I=]0,+\infty[$

السؤال السابع و العشرون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\ln\left(2+e^{x}\right)$$

1) أثبت أنّ $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-x}\right)$ أياً تكن $x\in\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ للخط C مقاربين أحدهما أفقي و الآخر مائل Δ اكتب معادلة لكل منهما .

3) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

4) أثبت أنّ f متزايد تماماً ثم احسب $f(\mathbb{R})$.

السؤال الثامن و العشرون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x+2+x\,e^{x}$$

1) بيّن أنّ للخط C مقارباً مائلاً Δ بجوار $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ و xx' و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

السؤال التاسع و العشرون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x-1+\frac{4}{e^{x}+1}$$

1) أثبت أنّ $\Delta: y=x+3$ مقارب مائل للخط C بجوار $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

2) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع yy' .

السؤال الثلاثون :

f معرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1) جد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّ $\Delta: y=x-1$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

المدرس عدي الخميس

السؤال الحادي و الثلاثون :

ليكن f التابع المعرّف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) أثبت أنّ $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

2) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .

3) ارسم Δ ثم ارسم C .

4) استنتج رسم C' الخط البياني للتابع

$$g(x)=-1-x+2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

السؤال الثاني و الثلاثون :

أثبت أنّ للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أنّ $\alpha\in]-1,0[$.

السؤال الثالث و الثلاثون :

C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,3]$ وفق

$$f(x)=x\sqrt{3-x}$$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل فإنه يولّد مجسماً دورانياً S .

1) ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل و يمر بالنقطة $I(x,0)$ ؟

2) عيّن $A(x)$ مساحة هذا المقطع بدلالة x ثم استنتج V حجم المجسم S .

السؤال الرابع و الثلاثون :

ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+\ln(x+1)-\ln(x)$$

1) أثبت أنّ $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$.

2) ادرس الوضع النسبي بين الخط C و المقارب Δ .

السؤال الخامس و الثلاثون :

ليكن كثير الحدود $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$

1) تحقّق أنّ $P(-1)=0$ واستنتج أنّ $P(x)=(x+1)Q(x)$

2) حل المتراجحة $P(x)\le 0$.

3) استنتج حلول المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\le\ln(2-x)$

السؤال السادس و الثلاثون :

نفترض وجود تابع f معرّف على $\mathbb{R}$ و يحقّق

$$|f(x)+3|\le\frac{3+E(x)}{x^2+1}$$

جد نهاية f عند $+\infty$.

السؤال السابع و الثلاثون :

نفترض وجود تابع f معرّف على $]0,+\infty[$ و يحقّق

$$|f(x)+2|\le\frac{2+\sin x}{x^2}$$

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}$ أياً كانت $x>0$.

2) استنتج نهاية f عند $+\infty$.

السؤال الثامن و الثلاثون :

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$
- أثبت صحة المتراجحة أياً كانت $x>1$:

$$\ln(x-1)<2\ln x-1$$

- أثبت أنّ أياً يكن $x\in\mathbb{R}$ $e^x\ge x+1$.
- $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ و $J=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

احسب $J+I$ ثم I و استنتج I .

السؤال التاسع و الثلاثون :

f التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$

1) أثبت أنّ f اشتقاقي عند الصفر .

2) جد $f'(x)$ ثم استنتج مجموعة تعريف f' .

3) استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{\cos x}\ln(1+\cos x)$ على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$.

السؤال الأربعون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5}$

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]1,2[$ ثم أوجد قيمة α جبرياً .

3) استنتج مشتق $g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$.

السؤال الحادي و الأربعون :

ليكن f التابع المعرّف على $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$$

1) ادرس تغيّرات f على I .

2) استنتج أنّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$.

السؤال الثاني و الأربعون :

ليكن f التابع المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

1) جد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .

السؤال الثالث و الأربعون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^3-x+2}{x^2-1}$$

1) عيّن A و B ليكون $f(x)=x+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$.

2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

3) جد $S(\lambda)=\int_2^{\lambda}(f(x)-y_{\Delta})dx$ ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$.

السؤال الرابع و الأربعون :

C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right) & ;x>0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

1) أثبت أنّ f اشتقاقي عند الصفر و فسّر النتيجة هندسياً .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) ليكن T مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه جد معادلة لهذا المماس ثم باستعمال التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبيّة للعدد $f(1.2)$.

السؤال الخامس و الأربعون :

اشرح لماذا تتفق إشارة $\left(e^x-\frac{4}{e^x}\right)$ مع إشارة $\left(e^x-2\right)$ ثم حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$.

السؤال السادس و الأربعون :

C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$$

1) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .

2) اكتب معادلة المماس لـ C في النقطة التي ينعدم فيها $f''(x)$.

السؤال السابع و الأربعون :

ادرس تغيّرات التابع f على $\mathbb{R}$ و ارسم خطه البياني C

$$f(x)=x\,2^x$$

السؤال الثامن و الأربعون :

نتأمّل المعادلة التفاضليّة $y'+3y=2e^{-x}$

عيّن العدد a ليكون التابع $f(x)=ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية .

السؤال التاسع و الأربعون :

ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)$$

7) أثبت أنّ f يُكتب بالصيغة

$$f(x)=2x+\ln\left(1-e^{-x}\right)$$

8) بيّن أنّ $\Delta: y=2x$ مقارب مائل للخط C .

9) ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

10) ارسم Δ و C .

11) جد مجموعة تعريف $h(x)=e^{f(x)}$.

12) استنتج C_g رسم الخط البياني للتابع g حيث

$$g(x)=\ln\left(e^{2x+2}-e^{x+1}\right)$$

السؤال الخمسون :

ليكن f التابع المعرّف على $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[=I$ وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

1) أثبت أنّ النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C .

2) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

3) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

4) اكتب معادلة كل مماس يوازي المستقيم $4y+x=0$.

5) ارسم الخط C .

6) استنتج رسم C' الخط البياني للتابع

$$g(x)=\ln(x-3)-\ln(x-1)$$

7) لتكن $(u_n)_{n\geq 4}$ معرّفة وفق $u_n=f(n)$

نضع $s_n=u_4+u_5+\ldots+u_n$

أثبت أنّ $s_n=\ln\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

على الطالب مراجعة ما يلي في النهايات و الاشتقاق
تدرب/46 ، تدرب/54 ، 61/1 ، 13+70/14 ، 71/16
94/2 ، 109/24
لوغاريتمي و أسي و تكامل 154/3 ، 158/10 ، 165/3
172/4 ، 178/25 ، 194/2 ، 203/5 ، 243/2 (حجم)
حالات المساحة الهامة

السؤال الحادي و الخمسون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

1) بيّن أنّ التابع f فردي .

2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

3) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ و ليكن α .

4) اكتب معادلة المماس T للخط C في المبدأ .

5) ادرس الوضع النسبي بين C و T .

6) ارسم T ثم ارسم C .

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

السؤال الثاني و الخمسون :

C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1) بيّن أنّ المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل للخط C .

2) ادرس الوضع النسبي بين الخط C و المقارب Δ .

3) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

4) أثبت أنّ $f(x)+f(-x)=-2$ ثم استنتج أنّ النقطة $I(0,-1)$ مركز تناظر للخط C .

5) ارسم في معلم متجانس المستقيم Δ و الخط C .

6) استنتج C_g الخط البياني للتابع g المعرّف وفق

$$g(x)=-2x+1-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

السؤال الثالث و الخمسون :

C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$$

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) استنتج أنّ $\ln(x)<2\sqrt{x}$ أياً كانت $x>0$.

3) ارسم في معلم متجانس الخط C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

5) استنتج رسم C_1 حيث $f_1(x)=2\left(\sqrt{x}-1\right)-\ln(x)$.

السؤال الرابع و الخمسون :

ليكن g التابع المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$g(x)=2x^2+1-\ln(x)$$

و ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على I وفق :

$$f(x)=2x-2+\frac{\ln(x)}{x}$$

1) ادرس اطّراد g و استنتج أنّ $g(x)>0$.

2) أثبت أنّ $\Delta: y=2x-2$ مقارب مائل للخط C .

3) ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

4) أثبت أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم نظّم جدولاً بتغيّرات f .

5) ارسم Δ ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و Δ و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

السؤال الخامس و الخمسون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=(2-x)e^x$$

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α في $\mathbb{R}$ عيّنه .

3) اكتب معادلة المماس d لـ C في نقطة فاصلتها تعدم $f''(x)$.

4) ارسم d و C .

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و محوري الإحداثيات.

6) عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V ، عيّن الأعداد $a\ ,b\ ,c$ حتى يكون التابع

$$F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$$

تابعاً أصلياً للتابع $(f(x))^2$ ، و استنتج قيمة V .

7) أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y'-y=-e^x$$

8) استنتج C' رسم الخط البياني للتابع g حيث

$$g(x)=\frac{x+2}{e^x}$$

السؤال السادس و الخمسون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

1) جد $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))$.

2) جد مجالاً I مركزه 1 يحقّق $f(x)>10^4$ أياً تكن $x\in I\setminus\{1\}$.

السؤال السابع و الخمسون :

ليكن f التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

1) هل f اشتقاقي عند $x=0$ ؟

2) استنتج مجموعة تعريف f' .

3) احسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$.

4) استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{\cos x}\sin(\cos x)$ على المجال $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$.

السؤال الثامن و الخمسون :

ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=1+2\frac{\ln x}{x}$

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$.

3) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة فاصلتها $x=1$.

4) ارسم في معلم واحد المقاربات و المماس T ثم ارسم C .

السؤال التاسع و الخمسون :

ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

2) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة فاصلتها $x=1$.

3) احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$.

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً ثم عيّنه .

5) ارسم في معلم واحد المقاربات و المماس T ثم ارسم C .

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=e^2$.

7) استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

المدرس عدي الخميس

السؤال الستون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1) أثبت أنّ f تابع فردي .
2) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .
3) اكتب معادلة المماس T للخط C في المبدأ O .
4) ادرس الوضع النسبي بين C و T ثم ارسمهما في معلم واحد.
5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' و المستقيمين $x=1$ و $x=-1$.
6) عيّن عبارة التقابل العكسي $f^{-1}(x)$ ثم ارسم خطه البياني.

السؤال الحادي و الستون :

أثبت أنّ $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ ثم احسب $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

السؤال الثاني و الستون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$

1) أوجد الأعداد الحقيقيّة a,b,c التي تحقّق

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2) احسب $\int_{-3}^{0} f(x)dx$.

السؤال الثالث و الستون :

أثبت صحّة المساواة $\cos^2 x\sin^2 x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)$

ثم احسب $\int_0^{\pi/2}\cos^2 x.\sin^2 x\,dx$.

السؤال الرابع و الستون :

ليكن f التابع المعرّف على $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$$

1) عين العددين الحقيقيّين A,B بحيث

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

2) استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f .

السؤال الخامس و الستون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-2x+xe^{-x}$

1) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.
2) احسب $\int_1^{\ln 2}(f(x)-y_\Delta)dx$.

السؤال السادس و الستون :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\frac{1}{1+e^x}$

1) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .
2) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و المستقيم Δ و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

السؤال السابع و الستون :

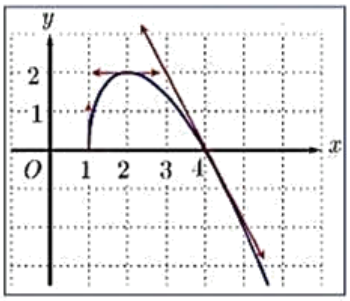
ليكن f التابع المعرّف على $I=]-1,3[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$$

1) أثبت أنّ f اشتقاقي على I .
2) ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .
3) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في I ثم عيّنه جبرياً .
4) أثبت أنّ النقطة $A(1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C .
5) اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة $A(1,0)$ و ادرس وضع C بالنسبة إلى T .
6) في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C_f .

المدرس عدي الخميس

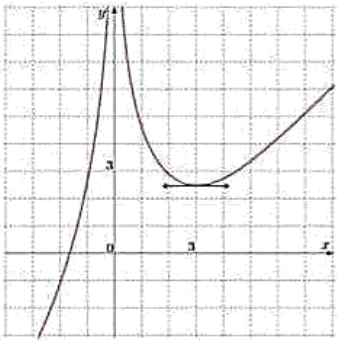
f تابع مُعرَّف على $]-\infty, 1]$ خطّه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور . **المطلوب :**



1) هل f اشتقاقي عند $x = 1$ ؟ علّل إجابتك .
2) احسب كلّاً من $f(2)$ و $f'(2)$ و $f(4)$ و $f'(4)$.
3) اكتب معادلة المماس للخطّ C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 4$.
4) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟
5) ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.
6) نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

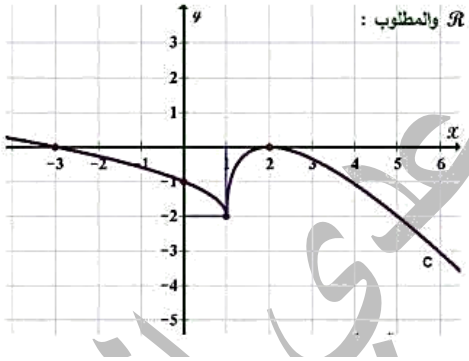
السؤال الأول:

نتأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$



1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة كل مقارب وجدته لـ C.
2- احسب $f'(3)$.
3- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$
4- هل التابع f زوجي؟

في الشكل المرسوم جانبا ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ والمطلوب :



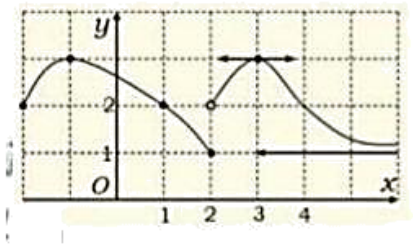
① جد $f'(2), f(1), f(0)$
② هل التابع f قابل للاشتقاق عند $\mathcal{X} = 1$ ؟ علّل إجابتك
③ ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟ حددها واذكر نوعها
④ ما عدد حلول المعادلة $f(\mathcal{X}) = -1$ ؟
و ما حلول المعادلة $f(\mathcal{X}) = 0$ ؟
⑤ ما قيم $\mathcal{X}$ التي تحقق $f(\mathcal{X}) \geq 0$
و ما قيم $\mathcal{X}$ التي تحقق $f'(\mathcal{X}) \geq 0$
⑥ اكتب معادلة المماس للخط البياني C عند $\mathcal{X} = 2$

السؤال الثامن و الستون :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 3$	$\nearrow 5$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$

1) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C .
3) هل يقبل الخط C مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ ؟ علل.
4) دل على القيم الحدية محلياً و بين نوعها .
5) هل $f(1)$ قيمة حدية محلياً ؟ علل .
6) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
7) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
8) ما هي مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ ؟
9) هل f اشتقاقي عند $x = 1$ ؟ علل إجابتك .
10) ما هي صورة المجال $]1,3[$ ؟
11) أوجد $f(]-\infty,-2[)$.
12) اكتب معادلة المماس الأفقي للخط C عند $x = -2$.
13) ما مجموعة تعريف كل من
$h(x) = \ln(f'(x))$ ، $g(x) = \sqrt{f'(x)}$
14) قارن بين صورتَي 2023 و 2024 .
15) أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]3,+\infty[$
16) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 10$ ؟
17) أوجد D_f و $f(D_f)$.
18) أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(f(x))$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$.

ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً والمعرف على المجال $]-2,+\infty[$ والذي يقبل المستقيم $y=1$ مقاربا أفقياً في جوار $+\infty$



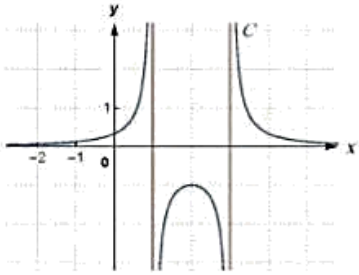
❶ جد $\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

❷ هل f اشتقاقي عند 2 ؟

❸ جد $f(3), f'(3)$. وجد معادلة للمماس عند 3.

❹ دل على القيم الحدية المحلية للتابع f

1 – في الشكل المجاور تمثيل بياني لتابع f والمطلوب :



① – ما عدد حلول المعادلة $f(x)=-2$ ؟

② – أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$

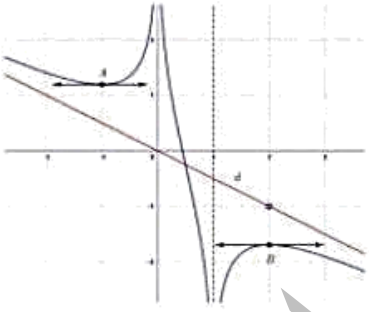
③ – أوجد $f(2), f'(2)$ واستنتج معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x=2$

④ – احسب $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)+1}{x-2}$

⑤ – أوجد $f(]1,3[)$

التمرين 1 :

تأمل الشكل المرسوم جانبا ,



الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}\{0,1\}$ والمطلوب :

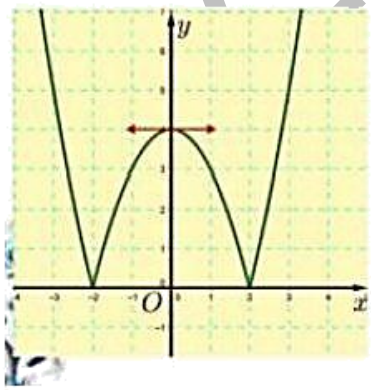
❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

❷ جد $f'(2)$ و $f'(-1)$

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

❹ اكتب معادلة المقارب المائل d

تجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ كم حلا للمعادلة $f(x)=2$ ؟

❷ احسب قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=0$ ؟

❸ عين صورة المجال $I=[-2,2]$ وفق f.

❹ كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f