بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين

حل تمارين المقرر 101 ريض differential calculus

Chapter 3

إعداد د. عبد الله بن عثمان المغيره (أستاذ مشارك بجامعة الملك سعود سابقاً والآن متقاعد)

أعزائي طلاب وطالبات السنة الأولى المشتركة ؛ إن رأيتم أن هذا العمل مفيد فالرجاء إخبار زملائكم فالدال على الخير كفاعله

أرحب بآرائكم ومقترحاتكم وللتواصل بريد الكتروني

elmo1502@hotmail.com

لا تنسوني من دعائكم بارك الله فيكم

المحتويات — رقم الصفحة

حل تمارين (3.1) EXERCISES 2

حل تمارين (3.2) EXERCISES 21

حل تمارين (3.3) EXERCISES

حل تمارين (3.4) EXERCISES

حل تمارين (3.5) EXERCISES

حل تمارين (3.6) EXERCISES

حل تمارين (3.7) EXERCISES

Section 3.1

حل تمارين (3.1) EXERCISES صفحة 238 و 239 في الكتاب

قبل حل التمارين سنورد بعض المصطلحات

maximum value of a function

القيمة العظمى للدالة أي أكبر قيمة للدالة في فترة معينة

وإذا لم تحدد الفترة فهذا يعني أن الفترة هي جميع الأعداد الحقيقية أي R

minimum value of a function

القيمة الصغرى للدالة أي أقل قيمة للدالة في فترة معينة

the maximum and minimum values of a function are called **extreme** values or **extrema** of the function

القيم العظمى والصغرى معاً للدالة تسمى القيم القصوى أو فقط القصوى

the maximum and minimum values of a function are called absolute (or global) maximum and minimum

القيم العظمى والصغرى معاً للدالة تسمى العظمى أو الصغرى المطلقة

THEOREM (Extreme value Theorem)

If f is a continuous function defined on a closed interval I=[a,b]

Then f attains its maximum and minimum values on I

نظرية (نظرية القيمة القصوى)

إذا كانت f دالة متصلة معرفة على الفترة المغلقة I=[a,b] فإن f تحقق قيمها العظمى والصغرى في هذه الفترة I

Definition

Let c be in the domain of a function f ,

$a)\ f(c)\ is\ a\ \boldsymbol{local}\ maximum\ of\ f\ if\ there\ exists\ an\ open$

$interval\ (a,b)$containing c such that $f(c) \geq f(x)$

$for\ all\ x\ in\ (a,b)$

$b)\ f(c)\ is\ a\ local\ minimum\ of\ f\ if\ there\ exists\ an\ open$

$interval\ (a,b)$containing c such that $f(c) \leq f(x)$

$for\ all\ x\ in\ (a,b)$

تعريف

إذا كانت c في مجال الدالة f فإن

a) (f(c هي قيمة عظمى **محلية** للدالة f إذا كان يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحوي c وبحيث أن $f(c) \geq f(x)$ لكل x في (a,b)

b) (f(c هي قيمة صغرى **محلية** للدالة f إذا كان يوجد فترة مفتوحة (a,b)

تحوي c وبحيث أن $f(c) \leq f(x)$ لكل x في (a,b)

Definition

Let f be a function defined at c , then c is a critical number of f if either $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ does not exist.

The point $(c, f(c))$ is caled a critical point

تعريف

إذا كانت f دالة معرفة عند c فإن c عدد حرج للدالة f إذا كانت $f'(c) = 0$

أو أن $f'(c)$ غير موجودة أي غير معرفة . تسمى النقطة ((c,f(c بالنقطة الحرجة

Theorem

If f has a local maximum or minimum at x=c ,then c is a critical number of f.

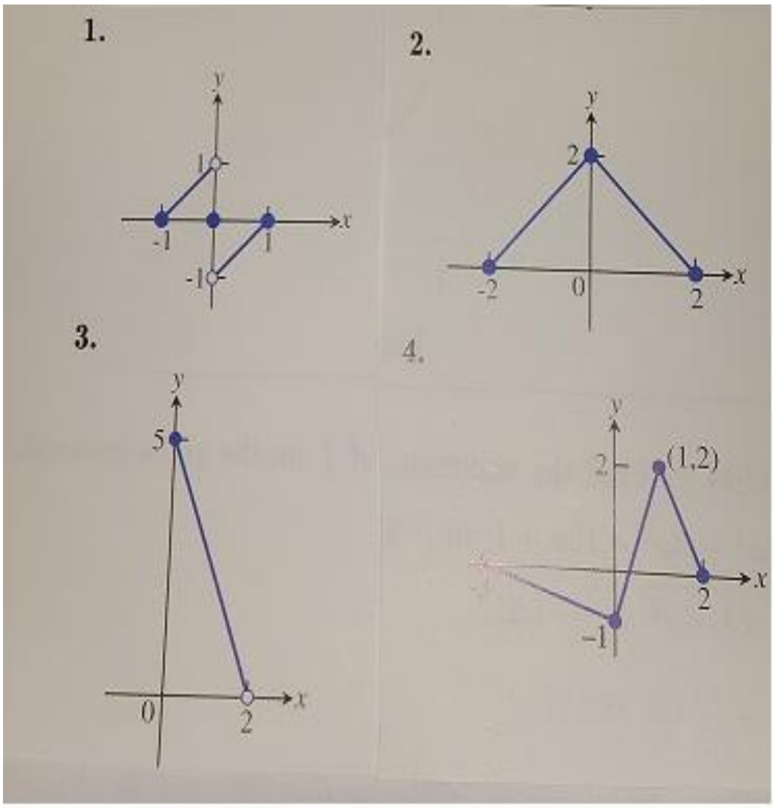
نظرية

إذا كان للدالة f قيمة محلية عظمى أوصغرى عند x=c فإن c تكون عدداً حرجاً للدالة f

In Exercises 1-4 find the absolute extreme values and where they occur

في التمارين 1-4 أوجد القيم القصوى المطلقة وأين تكون

أي أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة



إذا كان الشكل غير واضح فانظر الشكل في الكتاب صفحة 238

1.

الدائرة البيضاء تعني أن الدالة غير معرفة عند هذه النقطة

أكبر عدد هو العدد 1 ولكن الدالة غير معرفة عند النقطة (0,1) أي لايوجد قيمة عظمى

أصغر عدد هو العدد 1- ولكن الدالة غير معرفة عند النقطة (0,-1) أي لايوجد قيمة صغرى ويكون الجواب

No absolute extreme values

Or no absolute maximum and no absolute minimum

2.

absolute maximum is f(0)= 2 and it occur at (0,2)

absolute minimum is f(2)=0 and f(-2)=0 and it occur at (2,0) and (-2,0)

3.

absolute maximum is f(0)= 5 and it occur at (0,5)

no absolute minimum

4.

absolute maximum is f(1)= 2 and it occur at (1,2)

absolute minimum is f(0)= -1 and it occur at (0,-1)

In Exercises 5-14 ,find the critical numbers of the function

في التمارين 5-14 أوجد الأعداد الحرجة للدالة

5. $f(x) = 2x^4 - 64x + 100$

إذا كانت f دالة معرفة عند c فإن c عدد حرج للدالة f إذا كانت $f'(c) = 0$

أو أن $f'(c)$ غير موجودة أي غير معرفة . تسمى النقطة (c,f(c) بالنقطة الحرجة

$f'(x) = 8x^3 - 64$, $\qquad 8x^3 - 64 = 0 , 8x^3 = 64$

$x^3 = 8 , x = 2$

the critical numbers of the function is 2

$f'(x)\ is\ defined\ for\ all\ real\ numbers$

6. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2 = x} = x\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f'(x) = x(\frac{1}{2}((1 - x^2)^{\frac{-1}{2}})(-2x) + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}(-x^2 + 1 - x^2)$$

$$= (1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}(1 - 2x^2) = \frac{(1 - 2x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(1 - 2x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0\ , 1 - 2x^2 = 0 , 2x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\ , x = \sqrt{\frac{1}{2}}\ , or\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$f'(x)\ \ is\ not\ defined\ at\ x = 1\ and\ x = -1$

the critical numbers of the function are $\sqrt{\frac{1}{2}}\ ,-\sqrt{\frac{1}{2}}\ , 1, -1$

$$7.\ f(a) = \frac{a-1}{a^2-a+1}$$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f'(a) = \frac{(a^2-a+1)(1)-(a-1)(2a-1)}{(a^2-a+1)^2}$$

$$= \frac{a^2-a+1-2a^2+3a-1}{(a^2-a+1)^2}$$

$$= \frac{-a^2+2a}{(a^2-a+1)^2}\ \ , -a^2+2a=0\ , a(2-a)=0$$

$$a=0\ \ or\ \ 2-a=0\ , a=2$$

$$a^2-a+1 = a^2-a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

$$= (a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ \ , (a-\frac{1}{2})^2 \geq 0\ , (a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$so\ \ f'(a)\ is\ defined\ for\ all\ real\ number$

the critical numbers of the function $are\ \ a=0\ , a=2$

$$8.\ f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-4)$$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x)+(x^2-4)(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})$$

$$= x^{\frac{-1}{3}}(2x^2+\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3})$$

$$= x^{\frac{-1}{3}}\left(\frac{6x^2 + 2x^2 - 8}{3}\right) = \frac{8x^2 - 8}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$8x^2 - 8 = 0$, $\quad x^2 = 1$, $\quad x = 1 \; or \; x = -1$

$$f'(0) = \frac{8x^2 - 8}{0} = ???$$

$f'(x)$ *does not exist at* $x = 0$

critical numbers of the function *are* $x = -1, x = 0, x = 1$

9. $f(x) = 4x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = 4\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right) - 2\left(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}\right) = \frac{20}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$= \frac{x^{\frac{-1}{3}}}{3}(20x - 4) = \frac{20x - 4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$20x - 4 = 0$, $\quad x = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$$f'(0) = \frac{20x - 4}{0} = ???$$

$f'(x)$ *does not exist at* $x = 0$

critical numbers of the function *are* $x = 0$, $x = \frac{1}{5}$

10. $f(x) = |4x - 3|$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & , \; x \geq \frac{3}{4} \\ \\ -4x + 3 & , \; x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \\ \\ -4 \end{cases}$$

$f'(x)$ *does not exist at* $x = \dfrac{3}{4}$

critical numbers of the function *is* $x = \dfrac{3}{4}$

11. $f(t) = |25 - t^2| = \sqrt{(25 - t^2)^2} = \; (25 - t^{2)^{\frac{1}{2}}}$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f'(t) = \frac{1}{2}(\,(25 - t^2)^2)^{\frac{-1}{2}}(\,2(25 - t^2)(-2t))$$

$$= -2t(25-t^2)^{-1}(25-t^2) = \frac{-2t(25-t^2)}{(25-t^2)}$$

$= -2t \quad , t \neq -5 \;\; and \;\; t \neq 5$

$-2t = 0 \quad , t = 0$

$t \neq$

تعني أن $f'(t)$ غير معرفة عند هذين العددين أي ليست موجودة

critical numbers of the function $are \;\; t = -5 \, , t = 0 \, , t = 5$

12. $f(x) = x - sinx$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$f'(t) = 1 - cosx \, , 1 - cosx = 0 \;\; , \qquad cosx = 1$

$x = 2n\pi \;\; , n \; is \; integer$

critical numbers of the function $are \; x = 2n\pi \;\; , n \; is \; integer$

13. $f(x) = 3 - 5cosx$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$f'(x) = -5(-sinx) = 5sinx$

$5sinx = 0 \;\; , \qquad sinx = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \;\; , -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots \, ,$

$x = n\pi \; n \;\; , is \; integer$

critical numbers of the function $are\ x = 2n\pi\ \ , n\ is\ integer$

14. $f(x) = 4x - tanx$

أنظر الملاحظة في التمرين 5

$$f'(x) = 4 - sec^2x$$

$$4 - sec^2x = 0\ \ , sec^2x = 4\ \ , secx = \pm 2$$

$$cosx = \pm\frac{1}{2}$$

عندما $cosx = \frac{1}{2}$ فهذا يعني أن x في الربع الأول أو الرابع

عندما x في الربع الأول (لا تنسى $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = (\cos(60^o)$)

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

عندما x في الربع الرابع

$$x = -\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

عندما $cos x = -\frac{1}{2}$ فهذا يعني أن x في الربع الثاني أو الثالث

عندما x في الربع الثاني

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

عندما x في الربع الثالث

$$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$$

critical numbers of the function *are*

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi\ , \frac{5\pi}{3} + 2n\pi\ , \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\ , \frac{4\pi}{3}\ + 2n\pi\ , n\ is\ integer$$

In Exercises $15 - 22$, *find the absolute extrema of f on the given interval* .

في التمارين 15-22 أوجد القيم المطلقة القصوى (القيم المطلقة العظمى والصغرى) للدالة f في الفترة المعطاة

لا تنسى

absolute extrema
= absolute maximum and absolute minimum values

لا حظ أن جميع الفترات المعطاة في التمارين هي فترات **مغلقة** closed intervals

لإيجاد القيم المطلقة العظمى والصغرى على فترة **مغلقة** [a,b] نقوم بما يلي:-

1) نوجد قيمة الدالة عند x=a (أي بداية الفترة) أي نعوض عن كل متغير في الدالة بالعدد a , نفرض أن العدد الناتج هنا هو c1

2)) نوجد قيمة الدالة عند x=b (أي نهاية الفترة) أي نعوض عن كل متغير في الدالة بالعدد *b* , نفرض أن العدد الناتج هنا هو c*2*

3) نوجد الأعداد الحرجة للدالة (critical numbers) في هذه الفترة , ونوجد قيمة الدالة لكل عدد حرج أي نعوض عن كل متغير في الدالة بالعدد الحرج

4) تكون القيمة المطلقة العظمى هي أكبر عدد من الأعداد السابقة وتكون القيمة المطلقة الصغرى هي أصغر عدد من الأعداد السابقة

$15. f(x) = 3x^2 - 6x + 3 \;\; on \; [0,3]$

$1)\; f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$

$2)\; f(3) = 27 - 18 + 3 = 12$

$3)\;\; f'(x) = 6x - 6 = 0\,, 6x = 6\,, x = 1$

$critical\ number\ is\ x = 1$

$f(1) = 3 - 6 + 3 = 0$

$the\ numbers\ are\ 0{,}3{,}12$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ f(3) = 12$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(1) = o$

$16. f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1 \;\;\; on\; [-1{,}4]$

$1)\; f(-1) = -1 - 6 - 9 + 1 = -15$

$2)\; f(4) = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$

3) $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$3t^2 - 12t + 9 = 0 \;\; , t^2 - 4t + 3 = 0 \, , (t-1)(t-3)$

$critical\ number\ are\ \ t = 1, t = 3$

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

$the\ numbers\ are - 15{,}5{,}5{,}1$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ f(4) = 5$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(-1) = -15$

$17. f(w) = w^4 - 2w^2 + 3\ \ on\ \ [-2{,}2]$

$f(-2) = 16 - 8 + 3 = 11$

$f(2) = 16 - 8 + 3 = 11$

$f'(w) = 4w^3 - 4w\ \ ,\ \ 4w^3 - 4w\ = 0\ ,4w(w^2 - 1) = 0$

$w = 0\ \ 0r\ w^2 - 1, w^2 = 1\ , w = 1\ or\ w = -1$

$critical\ number\ are\ 0, -1{,}1$

$f(0) = 3\ \ , f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2\ , f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$the\ numbers\ are\ 11{,}11{,}3{,}2{,}2$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ f(2) = f(-2) = 11$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(1) = f(-1) = 2$

$18. f(t) = t^{\frac{1}{3}}(8-t)\ 0n\ [0,8]$

$f(0) = 0(8-0) = 0$

$f(8) = 2(8-8) = 2(0) = 0$

$f'(t) = t^{\frac{1}{3}}(-1) + (8-t)(\frac{1}{3}t^{\frac{-2}{3}})$

$= t^{\frac{-2}{3}}\left(-t + \frac{8-t}{3}\right) = t^{\frac{-2}{3}}\left(\frac{(-3t+8-t}{3}\right) = \frac{8-4t}{3t^{\frac{2}{3}}}$

$f'(t)\ is\ not\ defined\ at\ t = 0\ so\ \ 0\ is\ critical\ number$

$8 - 4t = 0\ ,\qquad t = 2$

$critical\ numbers\ are\ 0{,}2$

$f(0) = 0(8-0) = 0$

$f(2) = 2^{\frac{1}{3}}(8-2) = 2^{\frac{1}{3}}(6) = 6\sqrt[3]{2}$

$the\ numbers\ are\ 0{,}0{,}0{,}6\sqrt[3]{2}$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ f(2) = 6\sqrt[3]{2}$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(0) = 0$

$19. f(x) = \frac{x}{x^2+1}\quad on\ [0,2]$

$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$

$$f(2) = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$1 - x^2 = 0\ , x^2 = 1\ , x = 1\ \ or\ x = -1$

$critical\ numbers\ are\ -1,1$

$f(-1) = \frac{1}{2}\quad ,\qquad f(1) = \frac{1}{2}$

$the\ numbers\ are\ \ 0\ , \frac{2}{5}\ , \frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ \ f(2) = \frac{1}{2}$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(0) = 0$

$20. f(x) = 2 - |x|\ \ on\ \ [-1,3]$

$f(-1) = 2 - |-1| = 2 - 1 = 1\ ,\qquad f(3) = 2 - |3| = 1 - 3 = -2$

$f(x) = 2 - \sqrt{x^2} = 2 - (x^2)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -(\frac{1}{2}\left(x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left)(2x)\right) = -\frac{x}{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{x} = -1\ ,\ x \neq 0$

$f'(t)\ is\ not\ defined\ at\ x = 0\ so\ \ 0\ is\ critical\ number$

$f(0) = 2$

$the\ numbers\ are\ 1, -2,2$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ \ f(0) = 2$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(3) = -2$

$21. f(t) = sin^2 t + cost \quad on \quad [0,2\pi]$

$f(0) = sin^2 0 + cos0 = 0 + 1 = 1$

$f(2\pi) = sin^2(2\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$

$f'(t) = 2sint\ cost - sint = sint(2cost - 1)$

$sint(2cost - 1) = 0\ , \qquad sint = 0\ , \qquad t = 0\ or\ t = 2\pi$

$or\ \ t = \pi$

$or\ \ 2cost - 1 = 0\ \ , cost = \frac{1}{2}\ \ , \qquad t = \frac{\pi}{3}\ \ or\ t = -\frac{\pi}{3}$

$critical\ numbers\ are\ \ 0, 2\pi, \pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$f(0) = sin^2 0 + cos0 = 0 + 1 = 1$

$f(2\pi) = sin^2(2\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$

$f(\pi) = sin^2\pi + cos\pi = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sin^2\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = sin^2\frac{-\pi}{3} + cos\frac{-\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\sin(-x) = -sinx\ \ , sin^2(-\boldsymbol{x}) = \sin(-x)\sin(-x)$

$= -\sin(-x)\,(-\sin(-x)) = sin^2(-\boldsymbol{x})\ \ , \qquad \boldsymbol{cos}(-x) = cosx$

$the\ numbers\ are\ 1,1,1,1,-1,\frac{5}{4},\frac{5}{4}$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ \ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{4}$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(\pi)=-1$

$22.f(x)=2\sqrt{3}x+4sinx\ \ 0n\quad[0,2\pi]$

$f(0)=0+0=0$

$f(2\pi)=2\sqrt{3}(2\pi)+0=4\sqrt{3}\,\pi$

$f'(x)=2\sqrt{3}+4cosx=0\ ,\qquad 4cosx=-2\sqrt{3}$

$cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,\qquad x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}\quad or\ \ x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{6}$

Cosx سالب إي أن x في الربع الثاني أو الثالث

$critical\ numbers\ are\ \ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{7\pi}{6}$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{6}\right)+4sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{6}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}+2$

$=\frac{5\sqrt{3}\pi+6}{3}$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{6}\right)+4sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{6}\right)+4\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}-2=\frac{7\sqrt{3}\pi-6}{3}$

$the\ numbers\ are\ \ 0,4\sqrt{3}\pi\,,\frac{5\sqrt{3}\pi+6}{3}\ ,\frac{7\sqrt{3}\pi-6}{3}$

$the\ absolute\ maximum\ value\ is\ f(2\pi)=4\sqrt{3}\pi$

$the\ absolute\ minimum\ value\ is\ f(0)=0$

23. $\mathit{Find\ the\ value\ of\ } k \mathit{\ so\ that\ } f(x) = x^2 + \frac{x}{k}$

$\mathit{has\ a\ critical\ number\ } x = 3$

أوجد قيمة k بحيث أن $f(x) = x^2 + \frac{x}{k}$ لها عدد حرج x=3

$f'(x) = 2x + \frac{1}{k}$, $2(3) + \frac{1}{k} = 0$, $\frac{1}{k} = -6$,, $k = -\frac{1}{6}$

24. $\mathit{Let\ } f(x) = x^2 + ax + b$. $\mathit{Find\ values\ of\ } a \mathit{\ and\ } b \mathit{\ such\ that}$

$f(1) = 3$ $\mathit{is\ an\ extreme\ value\ of\ } f \mathit{\ on\ } [0,2]$.

إذا كانت $f(x) = x^2 + ax + b$ فأوجد قيم a و b وبحيث أن f(1)=3 هي قيمة قصوى للدالة f على الفترة [0,2]

$f(1) = 1 + a + b = 3$, $a + b = 2$

$a = 2 - b \qquad (1)$

$f'(x) = 2x + a$

$2(3) + a = 3$, $6 + a = 3$, $a = -3$

$\mathit{from}\ (1)$

$-3 = 2 - b$, $b = 5$

Section 3.2

حل تمارين (3.2) EXERCISES صفحة 247 و 248 و 249 في الكتاب

قبل حل التمارين نورد بعض النظريات التي تساعدنا في الحل

$\boldsymbol{R0lle's\ Theorem}$

$Let\ f\ be\ a\ function\ defined\ on\ a\ closed\ interval\ \ [a,b]\ that\ satisfies$

$the\ following\ properties:$

$a.\ \ f\ is\ continuous\ on\ the\ closed\ interval\ \ [a,b]$

$b.\ \ f\ is\ defferentiable\ \ on\ the\ open\ interval\ \ (a,b)$

$c.\ f(a)=f(b)$

$\boldsymbol{Then\ there\ is\ at\ least\ anumber\ c\ in\ (a,b)\ such\ that\ f'(c)=0}$

نظرية رول

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مغلقة [a,b] وتحقق الخواص الآتية :-

a) f متصلة على الفترة المغلقة [a,b]

b) f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

c) f(a)=f(b)

فإنه يوجد على الأقل عدد c في (a,b) بحيث أن $f'(c)=0$

Mean value theorem

Let f be a function defined on a closed interval $[a,b]$ that satisfies the following properties :

a. f *is continuous on the closed interval* $[a,b]$

b. f *is defferentiable on the open interval* (a,b)

Then there is a number c in (a,b) such that

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مغلقة [a,b] وتحقق الخواص الآتية :-

a) f متصلة على الفترة المغلقة [a,b]

b) f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث أن

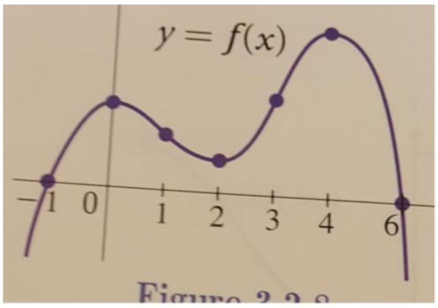
$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$1. Verify\ \ that\ the\ function\ f\ in\ the\ graph\ below\ satisfies$

$the\ conditions\ of\ rolle'theorem\ on\ the\ interval\ [-1,6]$

$then\ find\ the\ values\ of\ c\ such\ that\ f'(c) = 0$

تحقق أن الدالة f التي في الرسم الأسفل تحقق شروط نظرية رول على الفترة [-1,6] ثم أوجد قيم c بحيث أن $f'(c) = 0$



$f\ is\ defined\ on\ [-1,6]\ no\ white\ circle$

$f\ is\ continuous\ on\ [-1,6]\ no\ white\ circle$

$f\ is\ defferentiable\ \ on\ the\ open\ interval\ (-1,6)$

$f(-1) = 0 = f(6)$

$c = 0\ ,2\ ,4$

$\mathbf{2}.\,Explain\ why\ functions\ g, h\ and\ k\ shown\ in\ the\ graph\ below\ do\ not\ satisfies\ the\ conditions\ of\ rolle'theorem\ on\ the\ interval\ [2,4]$

وضح لماذا الدوال h, g و k الموضحة في الشكل الأسقل لا تحقق شروط نظرية رول على الفترة]2,4[

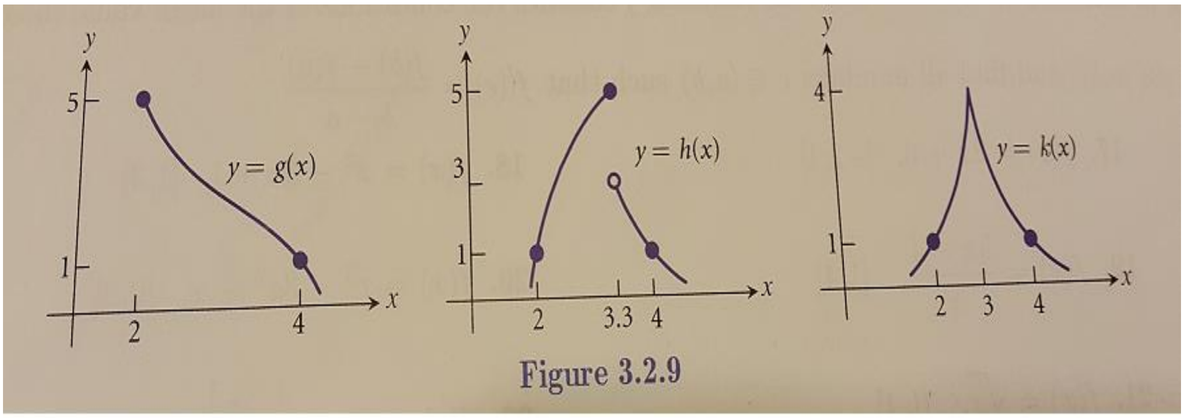


Figure 3.2.9

$in\ \ g(x)\quad f(2) = 5\,, f(4) = 1\ so\ f(2) \neq f(4)$

$in\ h(x)\ \ h(x)\ is\ not\ continuous\ \ at\ \ 3.3\ \ white\ circle$

$in\ k(x)\ \ k(x)\ is\ not\ deffirentiable\ at\ 3$

$In\ \ Exercises\ 3-7\ determine\ whether\ Rolle's\ Theorem\ can\ be\ applied\ to\ f\ on\ the\ indicated\ interval\ [a,b]$

في التمارين 3-7 حدد فيما إذا كانت نظرية رول يمكن تطبيقها على f في الفترة المحددة [a,b]

3. $f(x) = 2 - |x+1|$, $[-2,0]$

$$f(x) = 2 - \sqrt{(x+1)^2} = 2 - ((x+1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\,((x+1)^2)^{\frac{-1}{2}}(2(x+1))$$

$$= -\frac{x+1}{((x+1)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(-1) = -\frac{-1+1}{((-1+1)^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{0}{0}$$

$-1\ in\ (-2,1)\quad so\ f\ is\ \ not\ differentiable\ \ at\ x = -1$

$no\ it\ can\ not\ be\ applied$

4. $f(x) = |x+1|$, $[0,2]$

$f(0) = |0+1| = 1$, $\qquad f(2) = |2+1| = 3$

$so\ \ f(0) \neq f(2)$

$no\ it\ can\ not\ be\ applied$

5 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad ,[-2,2]$

$$f(0) = \frac{1}{0}$$

$f\ is\ not\ defined\ at\ x = 0\ \ so\ f\ is\ not\ continuous\ at\ x = 0$

$0\ in\ [-2,2]$

$no\ it\ can\ not\ be\ applied$

6. $f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad , [0,3]$

$f\ is\ polynomial\ \ so\ f\ is\ continuous\ and\ differentiable$

$f(0) = 4 \quad , \qquad f(3) = 9 - 9 + 4 = 4$

$f(0) = f(4)$

$yes\ \ it\ can\ \ be\ applied$

7. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad , [-1,1]$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(0) = \frac{2}{0}$$

$0\ in\ (-1,1) \quad so\ f\ is\ \ not\ differentiable\ \ at\ x = 0$

$no\ it\ can\ not\ be\ applied$

$In\ Exercises\ 8-9\ find\ the\ x-intercepts\ of\ the$

$function\ , and\ show\ that\ there\ is\ a\ number\ c\ between\ the$

$the\ two\ x-intercepts\ such\ that\ f'(c)=0$

في التمارين 8-9 أوجد قواطع محور x للدالة f ووضح أنه يوجد عدد c بين القاطعين بحيث أن $f'(c)=0$

$8. f(x)=x^2-4x+3$

$x^2-4x+3=0\ ,\qquad (x-3)(x-1)=0$

$(x-3)=0\ ,\ \ x=3\ \ or\ (x-1)=0\ , x=1$

$the\ two\ x-intercepts\ are\ \ 3{,}1$

$between\ the\ two\ x-intercepts\ are\ \ the\ interval\ [1{,}3]$

$f(1)=1-4+3=0\ \ , f(3)=9-12+3=0$

$f(1)=f(3)\ and\ f\ is\ continuous\ and\ differentiable$

$for\ all\ real\ numbers\ because\ f\ is\ polynomial$

$applying\ \ Rolle's\ theorem\ \ there\ is\ a\ number\ c\ between\ the$

$the\ two\ x-intercepts\ such\ that\ f'(c)=0$

$f'(x)=2x-4$

$f'(c)=2c-4=0\ ,\qquad 2c=4\ \ , c=2$

$9. f(x) = x(x-2)$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \ , \quad or \ (x-2) = 0 \ , x = 2$

$the \ two \ x - intercepts \ are \ \ 0{,}2$

$between \ the \ two \ x - intercepts \ are \ the \ interval \ [0{,}2]$

$f(0) = 0 \ , f(2) = \ 0$

$f(0) = f(2) \ and \ f \ is \ continuous \ and \ differentiable$

$for \ all \ real \ numbers \ because \ f \ is \ polynomial$

$applying \ \ Rolle's \ theorem \ \ there \ is \ a \ number \ c \ between \ the$

$the \ two \ x - intercepts \ such \ that \ f'(c) = 0$

$f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(c) = 2c - 2 = 0 \ , \qquad 2c = 2 \ , c = 1$

$In \ Exercises \ 10 - 15 \ , show \ that \ the \ function \ f \ satisfies$

$the \ conditions \ of \ Rolle's \ theorem \ on \ [a,b] \ and \ find \ all$

$numbers \ c \ \epsilon (a,b) such \ that \ f'(c) = 0$

في التمارين 10-15 وضح أن الدالة f تحقق شروط نظرية رول في [a,b]
وأوجد كل الأعداد c في (a,b) بحيث أن $f'(c) = 0$

$10. f(x) = 3 , [-3,3]$

$this\ is\ a\ constant\ function\ \ so\ it\ is\ continuous\ and$

$differentiable\ on\ (-3,3)$

$f(-3) = 3\ \ , f(3) = 3\ \ so\ f(-3) = f(3)$

$f'(x) = 0\ \ ,\qquad so\ f'(c) = 0\ \ , 0 = 0$

$0 = 0\ is\ true\ so\ c = all\ numbers\ in\ (-3,3)$

$11. f(x) = x^2 - 2x - 2\ \ , [0,2]$

$f(x)\ is\ a\ polynomial\ so\ it\ is\ continuous\ and\ differentiable$

$for\ all\ real\ numbers$

$f(0) = -2\ \ ,\qquad f(2) = 4 - 4 - 2 = -2$

$so\ f(0) = f(2)$

$f'(x) = 2x - 2\ \ ,\qquad f'(c) = 2c - 2 = 0\ \ , 2c = 2 , c = 1$

$12. f(x) = x^4 - 2x^3\ \ \ , [0,2]$

$f(x)\ is\ a\ polynomial\ so\ it\ is\ continuous\ and\ differentiable$

$for\ all\ real\ numbers$

$f(0) = 0\ \ ,\qquad f(2) = 16 - 16 = 0$

$so\ f(0) = f(2)$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$4c^3 - 6c^2 = 0 \ \ , c^2(4x-6) = 0 \ , c = 0 \ or \ c = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$0 \ not \ in \ (0,2) \ so \ only \ \ c = \frac{3}{2}$$

$13. f(x) = \sin x \ , \quad [0, \pi]$

$f(x) \ is \ continuous \ and \ differentiable \ for \ all \ real \ numbers$

$f(0) = \sin 0 = 0 \quad , \qquad f(\pi) = \sin \pi = 0$

$f(0) = f(\pi)$

$f'(x) = \cos x \ , \ f'(c) = \cos c \ = 0$

$$c = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$so \ the \ only \ value \ for \ c \ in \ \ (0, \pi) is \ \ c = \frac{\pi}{2}$$

$$14. f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , [\frac{1}{3}, 3]$$

$f \ is \ not \ \ continuousonly \ only \ at \ x = 0 \ so \ f \ is \ \ continuous$

$$on \ [\frac{1}{3}, 3]$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$f \ is \ not \ differentiable \ only \ \ at \ x = 0$

$so\ f\ is\ differentiable\ on\ (\frac{1}{3},3)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}+3=\frac{4}{3}$

$f(3)=3+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f(3)$

$f'(x)=1+\frac{-1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f'(c)=\frac{c^2-1}{c^2}=0\ ,\ \ c^2-1=0\ \ ,c\neq 0$

$c^2=1\ ,\qquad c=1\ or\ c=-1$

$-1\ not\ in\ \left(\frac{1}{3},3\right)$

$so\ c=1$

$15.\ f(x)=x(x-1)(x-2)\ \ ,\qquad [0,2]$

$f(x)=x^3-3x^2+2x$

$f(x)\ is\ a\ polynomial\ so\ it\ is\ continuous\ and\ differentiable$

$for\ all\ real\ numbers$

$f(0)=0\ ,\qquad f(2)=0$

$so\ \ f(0)=f(2)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2$$

$$3c^2 - 6c + 2 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(3)(2)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$c = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad or \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \quad < 2$$

$$or \ \ c = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} < 2$$

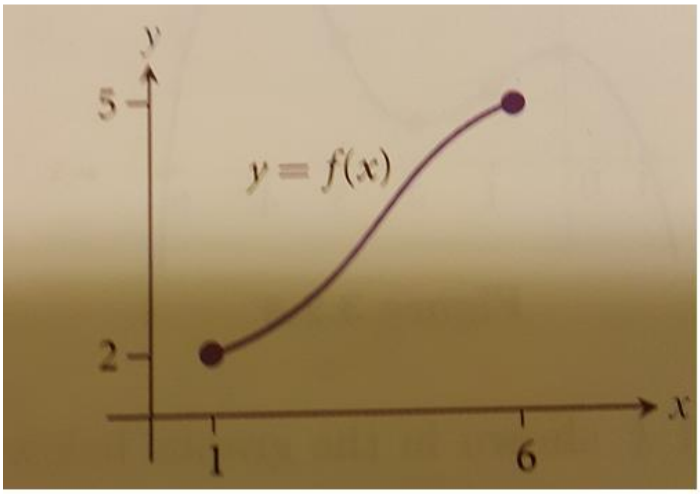
$$so\ c = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \quad and \ \ c = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

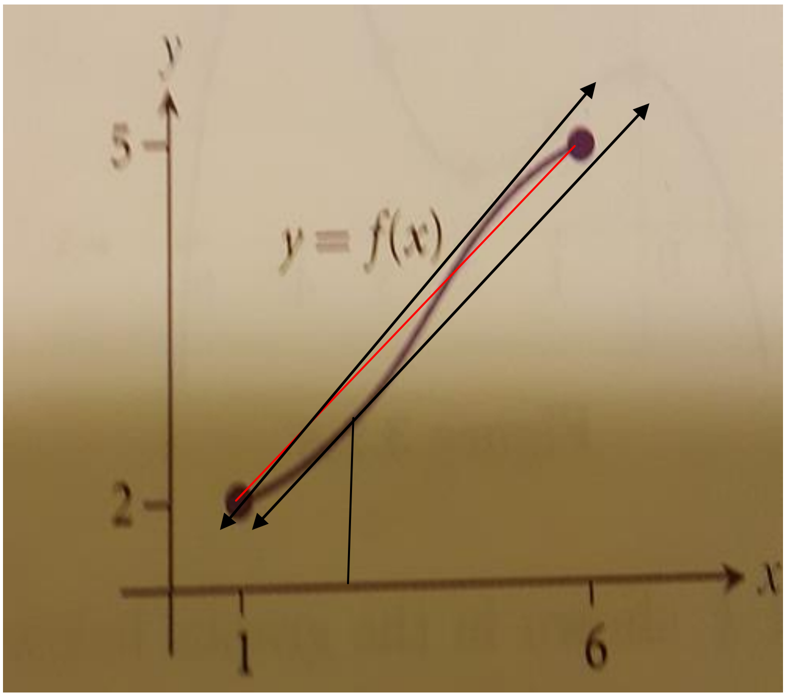
16. *Verify that the function f shown in the graph below satisfies the conditions of mean value theorem on the interval $[1,6]$. Then estimate the value of c such that*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تحقق أن الدالة f الموضحة في الشكل الأسفل تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [1,6] ثم قدر قيمة c بحيث أن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$





$no\ white\ circles\ and\ no\ corners$

$so\ it\ is\ continuous\ on\ [1,6]\ and\ differentiable\ on\ (1,6)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{5 - 2}{6 - 1} = \frac{3}{5}$$

$c = 2\ and\ c = 4$

$In\ Exercises\ 17 - 22\ , show\ that\ the\ function\ f\ satisfies$

$the\ conditions\ of\ mean\ value\ theorem\ on\ [a, b]\ and\ find\ all$

$numbers\ c\ \epsilon(a, b) such\ that\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

في التمارين 17-22 وضح أن الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [a,b] وأوجد كل الأعداد c في (a,b) بحيث أن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$