التابع اللوغاريتمي الطبيعي Ln

ملاحظة $f(x) = \ln x$

① f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

② $\ln(1) = 0$

③ $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

④ $\ln(x)$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	▨	+	+	+	+
$f(x)$	▨	قيم سالبة	0	قيم موجبة ↗	

⑤ $0 < x < 1$ ومنه $\ln x < 0$

$x > 1$ ومنه $\ln x > 0$

⑥ مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي دائماً مجالات مفتوحة

⑦ متراجحة ← درجة ثانية ← جداء أقواس
نستخدم جدول إشارة لها

تمرين أوجد D_f مجموعة التعريف

$\boxed{1}$ $f(x) = \ln(x-3)$

$\boxed{2}$ $f(x) = \ln(1-x)$

الحل

$\boxed{1}$ $x-3 > 0$

$x > 3$

$]3,+\infty[$

$\boxed{2}$ $1-x > 0$

$1 > x$

$]-\infty,1[$

$\boxed{3}$ $f(x) = \ln(x^2-3x-4)$

$x^2-3x-4 > 0$

$(x-4)(x+1) > 0$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
	+ +		0	− − −	0	+ +	
	محققة			غير محققة		محققة	

$]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

$\Rightarrow D =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

③ $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$]0,+\infty[\longleftarrow x > 0$

$\ln(1)=0 \longleftarrow 0 \neq \ln x$

$x \neq 1$

المقام لا ينعدم

$D =]0,+\infty[\setminus \{1\}$

④ $\ln|x+1| - \ln|x-1|$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$

⑤ $\ln(1-x)$

$1-x > 0$

$]-\infty,1[\Longleftarrow 1 > x$

⑥ $\ln(x-3)$

$x-3 > 0$

$]3,+\infty[\Longleftarrow x > 3$

②

④ $f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{7-x}\right)$

الحل $\frac{x+4}{7-x} > 0$

x	$-\infty$		-4		7		$+\infty$
بسط		− − −	0	+ + +	+	+	
مقام		+ + +	+	+	0	− −	
الكسر		− − −	0	+ +	‖	− − −	
		غير محققة		محققة		غير محققة	

$]-4, 7[$

تمرين عين قيم x التي تجعل المقدار معرفاً

① $\ln x^2$

الحل $x^2 > 0$

محققة بشرط $x \neq 0$

$D = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

② $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

الحل $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\longleftarrow \frac{1}{x}$

$1+x > 0 \longleftarrow \ln(1+x)$

$x > -1$

$]-1,+\infty[$

x	-∞ 2 3 +∞
بسط	- - - - 0 + + +
مقام	+ + 0 - - - - -
كسر	- - ‖ + + 0 - - -
	غير محققة ‖ محققة غير محققة

]2, 3[

تمرين

حل المعادلات التالية

① $Ln(-3x) = Ln(x^2-4)$

$-3x > 0$

$(x-2)(x+2) > 0 \Leftarrow x^2-4 > 0$

x	-∞ 0 +∞
-3x	+ + + 0 - - - - -
	محققة غير محققة

$]-\infty, 0[$

x	-∞ -2 2 +∞
x^2-4	+ + + 0 - - - 0 + + +
	محققة غير محققة محققة

$]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$\Rightarrow D_f =]-\infty, -2[$

⑦ $Ln(x^2 - 3x + 2)$

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x - 1)\cdot(x-2) > 0$

x	-∞ 1 2 +∞
	+ + 0 - - 0 + + +
	محققة غير محققة محققة

$D =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

⑧ $Ln(x^2 + 4x)$

$x^2 + 4x > 0$

$x(x+4) > 0$

x	-∞ -4 0 +∞
	+ + 0 - - - 0 + +
	محققة غير محققة محققة

$]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

9 $Ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

$\frac{x-3}{2-x} > 0$

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$-3x = x^2-4$

$0 = x^2+3x-4$

$0 = (x+4)(x-1)$

إما $x = -4 \in D$ مقبول

أو $x = 1 \notin D$ مرفوض

$\boxed{2}$ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$x > 0 \Leftarrow 2x > 0$

$(x-1)(x+1) > 0 \Leftarrow x^2-1 > 0$

x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$
$2x$	$- - - - 0 + + + +$
	▨ محققة
x^2-1	$+ + 0 - - - 0 + +$
	محققة ▨ محققة

$D =]1, +\infty[$

$\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$2x = x^2-1$

$0 = x^2-2x-1$

$\Delta = b^2-4a.c = 4-4(1)(-1)$

$= 4+4 = 8 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

الحلان مختلفان

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2+2\sqrt{2}}{2(1)}$

$x_1 = 1+\sqrt{2} \in D$ مقبول

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2-2\sqrt{2}}{2(1)}$

$x_2 = 1-\sqrt{2} \notin D$ مرفوض

$\boxed{\sqrt{2} \simeq 1{,}4}$

$\boxed{3}$ $\ln(x-2) = \ln 2$

$x > 2 \Leftarrow x-2 > 0$

$]2, +\infty[$

$\ln(x-2) = \ln 2$

$x-2 = 2$

$\boxed{x = 4} \in D$

مقبول $\Leftarrow$

④ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

الأول $x-2>0$

الثاني $x^2-2>0$

$(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})>0$

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad +\infty$
$x-2$	$- - - - - - - - 0 + +$
	////////////////// محققة
x^2-2	$+ + 0 - - 0 + + +$
	محققة ///// محققة

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

$x-2 = x^2-2$

$0 = x^2-x$

$0 = x(x-1)$

إما $\boxed{x=0} \notin D$ مرفوض

أو $\boxed{x=1} \notin D$ مرفوض

تمرين حل المتراجحات التالية

① $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

الأول $2x>0$

الثاني $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$

x	$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$
$2x$	$- - - - 0 + + +$
	////////// محققة
x^2-1	$+ + 0 - - - - 0 + +$
	محققة ////// محققة

$D =]1, +\infty[$

$2x \geq x^2-1$

$0 \geq x^2-2x-1$

$\Delta = b^2-4a\cdot c = 4-4(1)(-1)$

$= 4+4 = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \in D$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \notin D$

x	$1 \longleftrightarrow 1+\sqrt{2} \quad +\infty$
x^2-2x-1	// $- - - - 0 + + + +$
	محققة //////

مجموعة الحلول $S =]1, 1+\sqrt{2}[$

$0 \geq x^2-2x-1$

المتراجحة سالبة

أي السالب مقبول

② $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

$x-2>0$ | $2x-1>0$

$x>2$ | $2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	$- - - - - 0 + + +$			
	▨ محققة			
$2x-1$	$- - - 0 + + + + +$			
	▨ محققة			

$D =]2, +\infty[$

$x-2 \leqslant 2x-1$

$0 \leqslant 2x-x+2-1$

$0 \leqslant x+1$

$\boxed{-1 \leqslant x}$

x	2	$+\infty$
$x+1$	$+ + + + + +$	
	محققة	

مجموعة الحلول $S =]2, +\infty[$

③ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$

$1+\frac{2}{x} > 0$ | $x>0$

$\frac{x+2}{x} > 0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	$- - - - - 0 + +$			
	▨ محققة			
بسط	$- - - 0 + + + + +$			
مقام	$- - - - - 0 + +$			
كسر	$+ + 0 - - - \| + +$			
	محققة ▨ محققة			

$D =]0, +\infty[$

$1+\frac{2}{x} \geqslant x$

$\frac{x+2}{x} \geqslant x$

$x+2 \geqslant x^2$

$0 \geqslant x^2-x-2$

سالبة $0 \geqslant (x-2)(x+1)$

x	0	2	$+\infty$
	D		
x^2-x-2	▨ $- - - 0 + + +$		
	محققة ▨		

$S =]0, 2]$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Subject : المدرس محمد إدريس / /

خواص هامة

① $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

② $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

③ $\ln(x)^{n} = r \cdot \ln x$

④ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

⑤ $\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \ln x$

حيث $x > 0 \quad y > 0$

$r \in N$

تمرين بسط الأعداد التالية

$A = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$= \ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \ln(1) = 0$

$B = \ln \frac{1}{16}$

$= \ln(1) - \ln(16)$

$= 0 - \ln(16)$

$= -\ln(16)$

④ $\ln x \leq \ln(x^2 - 2x)$

$x > 0$

$x^2 - 2x > 0$

$x(x-2) > 0$

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
x	− − −		0	+ +		+ +
	//////			محققة		
x^2-2x	+ + +		0	− − −	0	+ + +
	محققة			//////		محققة

$D =]2, +\infty[$

$x \leq x^2 - 2x$

الترابحة $0 \leq x^2 - 3x$

موجبة $0 \leq x(x-3)$

x	2		3	$+\infty$
x^2-3x	//////	− − −	0	+ + +
		//////		محققة

$S = [3, +\infty[$

سؤال اثبت أنّ

$$\underbrace{\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})}_{L_1} = \underbrace{0}_{L_2}$$

$$L_1 = \ln\left((2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})\right)$$

$$= \ln(4-3) = \ln 1 = 0$$

سؤال : قارن x , y

① $x = \ln 5$

$y = \ln 2 + \ln 3$

$y = \ln(2\times 3) = \ln(6)$ اكبر $>$

$y > x$

② $x = 2\cdot\ln 3$

$y = 3\ln 2$

$x = \ln 3^2 = \ln 9$

$y = \ln 2^3 = \ln 8$] $x > y$

سؤال بسط A , B

$$A = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$$

$$= \ln 567 - \ln 72 - (\ln 7 - \ln 8) - \ln 27$$

$$= \ln 567 - \ln 72 - \ln 7 + \ln 8 - \ln 27$$

Ln سالب ← بالمقام

⑧ Ln موجب ← بالبسط

$$C = \frac{1}{2}\cdot\ln\sqrt{2}$$

$$= \ln\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln\sqrt{\sqrt{2}}$$

تمرين

أكتب بدلالة Ln5 Ln2

$$C = \ln 250$$

$$= \ln(2\times 5^3)$$

$$= \ln 2 + \ln 5^3$$

$$= \ln 2 + 3\ln 5$$

$$A = \ln 50$$

$$= \ln(5\times 5\times 2)$$

$$= \ln(5) + \ln(5) + \ln(2)$$

$$= 2\ln 5 + \ln 2$$

$$D = \ln\frac{16}{25} = \ln 16 - \ln 25$$

$$= \ln 2^4 - \ln 5^2$$

$$= 4\ln(2) - 2\ln(5)$$

سؤال أثبت صحة المساواة

$\boxed{1}$ $Ln(1+x) = ln\, x + Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$L_2 = Ln\, x + Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= Ln\left[x \times \left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$= Ln\left(x + \frac{x}{x}\right)$

$= Ln(x+1) = L_1$

$\boxed{2}$ $Ln(1+x^2) = 2\, Ln x + Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$L_2 = 2\, Ln x + Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= Ln\, x^2 + Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= Ln\left(x^2 \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= Ln\left(x^2 + \frac{x^2}{x^2}\right)$

$= Ln(x^2+1)$

$= L_1$

$A = Ln \frac{567\times 8}{72\times 7\times 27}$

$= ln \frac{81 \times 8}{72 \times 27}$

$= Ln \frac{81}{9\times 27} = Ln \frac{9}{27}$

$= Ln \frac{1}{3} = -Ln 3$

$B = Ln\sqrt{216} + Ln\sqrt{75} - Ln 15 - ln\sqrt{27}$

$= \frac{1}{2} Ln 216 + \frac{1}{2} Ln 75 - Ln 15 - \frac{1}{2} Ln 27$

$= \frac{1}{2} Ln(8\times 27) + \frac{1}{2} Ln(15\times 5) - Ln 15 - \frac{1}{2} ln 27$

$= \frac{1}{2} Ln 8 + \underline{\frac{1}{2} Ln 27} + \frac{1}{2} Ln 5 + \underline{\frac{1}{2} Ln 15} - \underline{Ln 15} - \underline{\frac{1}{2} ln 27}$

$= \frac{1}{2} Ln 8 + \frac{1}{2} Ln 5 - \frac{1}{2} Ln 15$

$= \frac{1}{2} Ln 8 + \frac{1}{2} Ln 5 - \frac{1}{2} ln(3\times 5)$

$= \frac{1}{2} Ln 8 + \underline{\frac{1}{2} Ln 5} - \frac{1}{2} Ln 3 - \underline{\frac{1}{2} Ln 5}$

$= \frac{1}{2} Ln 8 - \frac{1}{2} Ln 3$

Subject : المدرس محمد إدريس

تمرين 1

حل المعادلات والمتراجحات

① $2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$x > 0 \longrightarrow]0, +\infty[$

$x + 4 > 0$

$x > -4 \longrightarrow]-4, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$\ln x^2 = \ln\big((x+4) \cdot (2x)\big)$

$x^2 = 2x^2 + 8x$

$0 = x^2 + 8x$

$0 = x(x+8)$

إما $\boxed{x = 0} \notin D$ مرفوض

أو $\boxed{x = -8} \notin D$ مرفوض

$\boxed{2}$ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

$x + 11 > 0 \longrightarrow x > -11$

$]-11, +\infty[$

$x + 3 > 0 \longrightarrow x > -3$

$]-3, +\infty[$

$x + 2 > 0 \longrightarrow x > -2$

$]-2, +\infty[$

$\Rightarrow D =]-2, +\infty[$

$\ln(x+11) = \ln\big((x+3) \cdot (x+2)\big)$

$x + 11 = x^2 + 2x + 3x + 6$

$0 = x^2 + 4x - 5$

$0 = (x+5)(x-1)$

إما $x = -5 \notin D$ مرفوض

أو $x = 1 \in D$ مقبول

$\boxed{3}$ $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$5 - x > 0 \longrightarrow 5 > x$

$]-\infty, 5[$

$x - 1 > 0 \longrightarrow x > 1$

$]1, +\infty[$

$D =]1, 5[$

$\ln 3 \leq \ln[(5-x) \cdot (x-1)]$

$3 \leq 5x - 5 - x^2 + x$

$0 \leq -x^2 + 6x - 8$

نضرب سالب

$0 \geq x^2 - 6x + 8$

$0 \geq (x-2)(x-4)$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
		$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
		//////		تحقق		//////	

$S = [2, 4]$

Subject : .... / /

$\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

$x^2 = 2x^2+8x$

$0 = x^2+8x$

$0 = x(x+8)$

إما $x=0$

أو $x=-8$

$\boxed{6}$ $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

$x+11 > 0 \Rightarrow x > -11$

$]-11, +\infty[$

$(x+3)(x+2) > 0$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
	+ + +		0	− −	0	+ + +	
	تحقق			//////////		تحقق	

$]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

$D_f =]-11, -3[\cup]-2, +\infty[$

$x+11 = x^2+2x+3x+6$

$0 = x^2+4x-5$

$0 = (x+5)(x-1)$

إما $x=-5$

أو $x=1$

مدرس

حل

تدريس

$\boxed{4}$ $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6)+\ln(x+1)$

$x-6 > 0 \Rightarrow x > 6$ الحل

$]6, +\infty[$

$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$]-1, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]6, +\infty[$

$\ln(4\times 2) = \ln[(x-6)(x+1)]$

$8 = [x^2+x-6x-6]$

$0 = x^2-5x-6-8$

$0 = x^2-5x-14$

$0 = (x-7)(x+2)$

إما $x=7$ مقبول $\in D$

$x=-2$ مرفوض $\notin D$

$\boxed{5}$ $2.\ln x = \ln(2x^2+8x)$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$2x^2+8x > 0$

$2x[x+4] > 0$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
	+ + +		0	− −	0	+ + +	
	تحقق			//////////		تحقق	

$]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

$\boxed{8}$ $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$3x^2 - x > 0$

$x[3x-1] > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
		$+++$	0	$--$	0	$+++$	
		تحقق		//////////		تحقق	

$]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

$\Rightarrow Df =]\frac{1}{3}, +\infty[$

$\ln(3x^2-x) \leq \ln(2 \times x)$

$3x^2 - x \leq 2x$

$3x^2 - 3x \leq 0$

$3x[x-1] \leq 0$

x	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
	▨	$----$	0	$+++$
		تحقق		//////////////

$S =]\frac{1}{3}, 1]$

المدرس محمد ادريس

$\boxed{7}$ $\frac{1}{2} \cdot \ln 2x = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0$

$]0, +\infty[$

$3 - x > 0 \Rightarrow 3 > x$

$]-\infty, 3[$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$]-1, +\infty[$

$Df =]0, 3[$

$\ln 2x^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

نربع الطرفين

$2x = \frac{9-6x+x^2}{x+1}$

$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

إما $x = -9$ مرفوض

أو $x = 1$ مقبول

Subject : .... / /

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$= 49 - 4(3)(-6)$

$= 49 + 72$

$= 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7+11}{6} = 3$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7-11}{6} = \frac{-2}{3}$

x	1		3		$+\infty$
		− − −	0	+ + +	
		//////////		مقبول	

$S = [3, +\infty[$

المدرس ماهر أدريس

$\boxed{10}$ $3.\operatorname{Ln} x > \operatorname{Ln}(3x-2)$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow 3x > 2$

$x > \frac{2}{3}$

$\Rightarrow]\frac{2}{3}, +\infty[$

$D_f =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$\operatorname{Ln} x^3 > \operatorname{Ln}(3x-2)$

$x^3 > 3x - 2$

$x^3 + 3x - 2 > 0$

$\boxed{9}$ $\operatorname{Ln}(6x+4) \leq \operatorname{Ln}(3x^2-x-2)$

$6x + 4 > 0$

$6x > -4 \Rightarrow x > \frac{-4}{6}$

$x > \frac{-2}{3}$

$\Rightarrow]\frac{-2}{3}, +\infty[$

$3x^2 - x - 2 > 0$

$a = 3 \quad b = -1 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$= 1 - 4(3)(-2)$

$= 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+5}{6} = 1$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-5}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		1		$+\infty$
		+ +	0	− − −	0	+ + +	
		مقبول		//////////		مقبول	

$]-\infty, \frac{-2}{3}[\cup]1, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]1, +\infty[$

$6x + 4 \leq 3x^2 - x - 2$

$0 \leq 3x^2 - 7x - 6$

$\boxed{a = 3}$ $\boxed{c = -6}$

$\boxed{b = -7}$

13

Subject :

سؤال

أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المساواة

$\boxed{1}$ $\ln(x^2-x) = \ln x + \ln(x-1)$

$x^2 - x > 0$

$x(x-1) > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
	+ +		0	− −	0	+ +	
	تحقق			//////////		تحقق	

$]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$]1, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]1, +\infty[$

مدرس محمد أدريس

$x^3 - 3x + 2 = 0$ / /

نجرب $\boxed{x = 1}$

$1^3 - 3(1) + 2 \overset{?}{=} 0$

$1 - 3 + 2 \overset{?}{=} 0$

$0 = 0 \Rightarrow$ نقسم على $\boxed{x-1}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 2 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 3x + 2 \\
 & \ominus x^3 \oplus x^2 \quad \oplus \\
\hline
 & + x^2 - 3x + 2 \\
 & \ominus x^2 \oplus x \\
\hline
 & -2x + 2 \\
 & \oplus 2x \ominus 2 \\
\hline
 & 0 + 0
\end{array}
$$

$(x-1) \cdot (x^2 + x - 2) > 0$

$(x-1)(x+2)(x-1) > 0$

$(x-1)^2 \cdot (x+2) > 0$

-2 x	$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	▨	+ + +	0	+ + +	
0 $(x+2)$	▨	+ +	+	+ +	
الجداء	▨	+ +	0	+ +	
		تحقق		تحقق	

$S =]\frac{2}{3}, +\infty[\setminus \{1\}$

Subject : $\text{Ln}\, x = m \Rightarrow e^{\text{Ln}\, x} = e^{m} \Rightarrow \boxed{x = e^{m}}$

④ $\text{Ln}(1-x) = -2$

اكمل

$1 - x > 0 \Rightarrow 1 > x$

$]-\infty, 1[$

$e^{\text{Ln}(1-x)} = e^{-2}$

$1 - x = e^{-2}$

$1 - e^{-2} = x$

$\boxed{1 - \frac{1}{e^{2}} = x}$

$1 - \frac{1}{9} = x \Leftarrow \boxed{e = 2{,}7}$ $\simeq 3$

$\boxed{\frac{8}{9} = x} \in D$ مقبول $\Leftarrow$

المدرس محمد إدريس

⑤ $\text{Ln}(1-2x) = -2$

$1 - 2x > 0 \Rightarrow 1 > 2x$

$\frac{1}{2} > x \Rightarrow]-\infty, \frac{1}{2}[$

$e^{\text{Ln}(1-2x)} = e^{-2}$

$1 - 2x = \frac{1}{e^{2}}$

$1 - \frac{1}{e^{2}} = 2x$

$\div 2$ $\Leftarrow$

$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2}} = x}$

② $\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \text{ln}(x-1) - \text{Ln}(x+2)$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow]1, +\infty[$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow]-2, +\infty[$

$\frac{x-1}{x+2} > 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
بسط		− − −	−	− −	0	+ + +	
مقام		− − −	0	+ + +	+	+ +	
كسر		+ + +	‖	− − −	0	+ +	
		تحقق		//////		تحقق	

$]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]1, +\infty[$

تمرين

حل المعادلات

① $\text{Ln}\, x = 0$

ندخل $e \Rightarrow e^{\text{ln}\, x} = e^{0}$

$x = e^{0} = 1$

② $\text{Ln}\, x = 1$

$\Rightarrow e^{\text{Ln}\, x} = e^{1}$

$x = e$

③ $\text{Ln}\, x = 2$

$\Rightarrow e^{\text{Ln}\, x} = e^{2}$

$x = e^{2}$

Subject :

$\boxed{\ln e = 1}$

/ /

⑥ $(\ln x)^2 = 16$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

إما $\ln x = +4$

$\Rightarrow x = e^4 \in D$ مقبول

أو $\ln x = -4$

مقبول $x = e^{-4} = \frac{1}{e^4} \in D$

⑦ $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

إما $\ln x - 1 = 0$

$\ln x = 1$

مقبول $x = e^1 = e$

أو $\ln x + 2 = 0$

$\ln x = -2$

مقبول $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

حل المتراجحة $\ln(2-x) \geq 1$

$2 - x > 0 \Rightarrow 2 > x$

$]-\infty, 2[$

$\Rightarrow e^{\ln(2-x)} \geq e^1$

$2 - x \geq e$

$\boxed{2 - e \geq x}$

$]-\infty, 2-e[$

$\Rightarrow S =]-\infty, 2-e[$

المدرس محمد الدراسي

⑧ $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$]2, +\infty[$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$]-1, +\infty[$

$\Rightarrow D_f =]2, +\infty[$

$\ln \frac{x-2}{x+1} = 2$

$\frac{x-2}{x+1} = e^2$

$e^2 \cdot x + e^2 = x - 2$

$e^2 \cdot x - x = -2 - e^2$

$x[e^2 - 1] = -2 - e^2$

$x = \frac{-2 - e^2}{e^2 - 1}$ سالب / موجب $\notin D_f$

مرفوض

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$ مشتق المضمون / المضمون

هل المتراجحة

$$\ln \frac{1}{x} > 2$$

$$\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$]0, +\infty[$$

$$e^{\ln \frac{1}{x}} > e^{2}$$

$$\frac{1}{x} > e^{2}$$

نقلب ونغير إشارة المتراجحة

$$\frac{x}{1} < \frac{1}{e^{2}}$$

$$\boxed{x < \frac{1}{e^{2}}}$$

$$]-\infty, \frac{1}{e^{2}}[$$

$$\Rightarrow S =]0, \frac{1}{e^{2}}[$$

$$\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{\frac{-1}{x^{2}}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x}$$

$$[\ln(\sin x)]' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

سؤال: أثبت أن f إشتقاقي على I ثم أوجد f'

① $F(x) = \ln(1+x^{2})$

$I = R$

$1+x^{2} > 0$

$D = R$

ومنه f إشتقاقي على I

$$f' = \frac{2x}{1+x^{2}}$$

② $F(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

$I =]2, +\infty[$

الحل

$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$]2, +\infty[$

$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$]-2, +\infty[$

$\Rightarrow Df =]2, +\infty[$

ومنه f إشتقاقي على I

$$f' = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1(x+2) - 1(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{4}{x^{2}-4}$$

③ $F(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$I =]1, +\infty[$

الحل

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

نحتاج جدول

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1)=0} \Leftarrow$$

$I =]e,+\infty[$

/ /

⑤ $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

$\ln(\ln x) > 0$

$\ln(\ln x) > \ln(1)$

$\ln x > 1$

$\Rightarrow e^{\ln x} > e^{1} \Rightarrow \boxed{x > e}$

$]e,+\infty[$

ومنه f إشتقاق على I

$$f'(x) = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)}$$

$$= \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)'}$$

$$= \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln(\ln x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

$$= \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
بسط	− −	−	− −	0	+ + +	
مقام	− − −	0	+ +	+	+ + +	
كسر	+ +	▨	− −	0	+ + +	
	محققة	▨	▨		محققة	

$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\Rightarrow I =]1,+\infty[$ ومنه f إشتقاق على

$$F'(x) = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{x+1}}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

④ $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left[1+\frac{1}{x}\right]$

$I =]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{0-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}}{x+1} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$$

المدرس
محمد

Subject: $\dfrac{x.\text{Ln}x - x - 1}{x}$

$$= \frac{\text{Ln}x}{x+1}$$

$$= \frac{\dfrac{x.\text{Ln}x - x - 1}{x}}{\text{Ln}x\,(x+1)}$$

$$= \frac{x.\text{Ln}x - x - 1}{x.\,\text{Ln}x\,(x+1)}$$

"ملاحظة هامة جداً"

المدرس محمد إدريس

1. $\lim\limits_{x \to 0} \text{Ln}x = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\text{Ln}x} = +\infty$ كبير صغير

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{Ln}x}{x} = 0$

5. $\lim\limits_{x \to 0} x.\text{Ln}x = 0$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Ln}(x+1)}{x} = 1$

$$f(x) = \text{Ln}\left(\frac{x+1}{\text{Ln}x}\right)$$

⑥ $I =]1, +\infty[$

الحل

$$\frac{x+1}{\ln x} > 0$$

البسط ينعدم عند -1

المقام » عند 1 لأن $\text{Ln}(1) = 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
بسط		− − −	0	+		+		+ +	
مقام	▨	▨	▨	▨	▨	− −	0	+ +	
كسر	▨	▨	▨	▨	▨	− −	‖	+ + +	

محققة

$D =]1, +\infty[$

ومنه f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{x+1}{\text{Ln}x}\right)'}{\dfrac{x+1}{\text{Ln}x}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1)\text{Ln}x - \frac{1}{x}(x+1)}{(\text{Ln}\,x)^2}}{\dfrac{x+1}{\text{Ln}x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{Ln}x - \frac{x+1}{x}}{(\text{Ln}x)^2}}{\dfrac{x+1}{\text{Ln}x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{Ln}x - \frac{x+1}{x}}{\text{Ln}\,x}}{x+1}$$

$\boxed{\ln(1)=0}$

Subject : / /

④ $\lim_{x\to 0}\left[(x^2-x).\ln x\right]$

$= 0.\ln 0 = 0 \times -\infty$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to 0}\left[(x-1)\,x.\ln x\right]$

$= \left[(0-1)(0)\right] = 0$

برهنة رقم ⑤

⑤ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

طريقة أولى

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2}$

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

برهنة رقم ③

المدرس محمد أبو ريس

⑥ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

طريقة ثانية

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x}.\sqrt{x})} = \lim \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(+\infty)$

$= +\infty$

برهنة رقم ③

$\boxed{7}$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = 1$

تمرين أوجد نهاية التوابع.

① $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = \frac{1}{0}+\ln 0$

$= +\infty - \infty$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\ln x}{x}\right)$

برهنة رقم ⑤

$= \frac{1+0}{0} = +\infty$

② $\lim_{x\to +\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right)$

$= +\infty - \infty$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to +\infty}\ln\frac{2x+1}{x+2} = \ln 2$

③ $\lim_{x\to +\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$= +\infty\ln(1+0)$

$= +\infty(0)$ عدم تعيين

$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$

برهنة رقم ⑥

Subject :

$\boxed{\text{Ln } 0 = -\infty}$

تمرين أوجد D_f ثم النهايات

① $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$

الحل:

$D =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0 - \ln 0}{0} = \frac{+\infty}{0}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}$$ عدم تعين

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 - 0) = 1$$

مبرهنة رقم ④

② $f(x) = x - \ln x$

الحل

$D =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 - \ln(0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$ عدم تعين

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[1 - \frac{\ln x}{x} \right]$$

$$= +\infty [1 - 0] = +\infty$$

مبرهنة رقم ④

③ $f(x) = x + x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

الحل:

$$1 + \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x+1}{x} > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
بسط		− − −	0	+ + +	+	+ +	
مقام		− − − −	−	− −	0	+ + +	
كسر		+ + +	0	− − −	‖	+ + +	
		محققة				محققة	

$D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

المدرس محمد ادريس

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \infty \ln(1)$$

$$= -\infty - \infty(0)$$ عدم تعين

تغير متحول

$$\frac{1}{x} = u \longrightarrow x = \frac{1}{u}$$

$$x \to -\infty \longrightarrow u \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u} \ln(1+u) \right]$$

$$= \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{u} + \frac{\ln(1+u)}{u} \right]$$

$$= \frac{1}{0} + 1 = -\infty + 1 = -\infty$$

Subject :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty \times +\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x . Lnx}{x\left[1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$$

⑤ $$F(x) = \frac{1}{Ln x}$$

$$D =]0,+\infty[\setminus [1]$$

اكل ?

$\boxed{Ln(1)=0}$

مدرس محمد ادريس

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{1}{Ln 0} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{1}{Ln(1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{1}{Ln(1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -1+(-1) Ln\left(1+\frac{1}{-1}\right)$$

$$= -1 - Ln(0) = -1+\infty$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0+0 Ln\left(1+\frac{1}{0}\right)$$

$$= 0 Ln(+\infty) = 0 \times +\infty$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to 0} \left[x + x Ln \frac{x+1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} [x + x Ln(x+1) - x Ln x]$$

برهنات قوة

$$= 0 + 0 - 0$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u} Ln(1+u)\right]$$

$$= \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{u} + \frac{Ln(1+u)}{u}\right]$$

$$= +\infty + 1 = +\infty$$

برهنة

④ $$f(x) = \frac{x . Ln x}{x+1}$$

$$D =]0,+\infty[$$

اكل ?

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{0}{0+1} = 0$$

مبرهنة رقم ⑤

$$\boxed{(-\infty)(+\infty) = -\infty}$$

Subject : / /

$= +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{1+1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{1+1}{0+} = +\infty$

⑧ $f(x) = x + Ln(x+1) - Ln x$

$x+1 > 0$

$x > -1$

$]-1, +\infty[$

اكل

$x > 0$

$]0, +\infty[$

$\Rightarrow D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 + Ln(0+1) - Ln(0)$

$= 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = x + Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= +\infty + Ln(1)$

$= +\infty + 0 = +\infty$

⑨ $f(x) = \frac{Ln x}{x}$

$D =]0, +\infty[$

اكل

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{-\infty}{0} = -\infty$

المدرس محمد أبو العيس

⑥ $f(x) = Ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$\frac{x+1}{x-4} > 0$

اكل

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
بسط		$-$	0	$+$		$+$	
مقام		$-$		$-$	0	$+$	
كسر		$+$	0	$-$	‖	$+$	
		تحقق		▨		تحقق	

$D =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = Ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = Ln\left(\frac{0}{-5}\right) = Ln(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = Ln\left(\frac{5}{0}\right) = Ln(+\infty) = +\infty$

⑦ $f(x) = \frac{x+1}{Ln x}$

اكل

$D =]0, +\infty[\setminus [1]$

$\boxed{Ln 1 = 0}$ [illegible]

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{0+1}{Ln 0} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{Ln x} + \frac{1}{Ln x} \right]$

[illegible] صفحة / رقم ③

$\boxed{\ln(0) = -\infty}$ $\boxed{\ln(1) = 0}$

Subject :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$ مبرهنة

⑩ $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

$D =]0, +\infty[$ الكل

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{1}{0^+} + \ln 0$$

$$= +\infty - \infty$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty)$$

$$= 0 + \infty$$

$$= +\infty$$

كدرس % على حد ذرس

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1 + x \ln x}{x}$$ مبرهنة

$$= \frac{1 + 0}{0^+} = +\infty$$

⑪ $F(x) = x \cdot (1 - \ln x)$

$D =]0, +\infty[$ الكل

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 \, (1 + \infty) = 0(+\infty)$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - x \ln x = 0 - 0 = 0$$ مبرهنة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - \infty)$$

$$= +\infty(-\infty) = -\infty$$

⑫ $F(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$D =]0, +\infty[$ الكل

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{1}{0^+}(-\infty - 1)$$

$$= +\infty(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty}(+\infty - 1)$$

$$= 0(+\infty)$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$ مبرهنة

$$= 0 - \frac{1}{+\infty} = 0$$

سؤال 1 ، $I =]0,+\infty[$

$$f(x) = x+1 - \frac{\ln x}{x}$$

① لماذا $d: y = x+1$ مقارب لـ C

② ادرس الوضع النسبي

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}$

$= 0$ مبرهنة

⇐ d مقارب مائل عند $+\infty$

② $f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	▨	$+ + +$ 0	$- - - -$
الوضع النسبي	▨	C فوق Δ	C تحت Δ

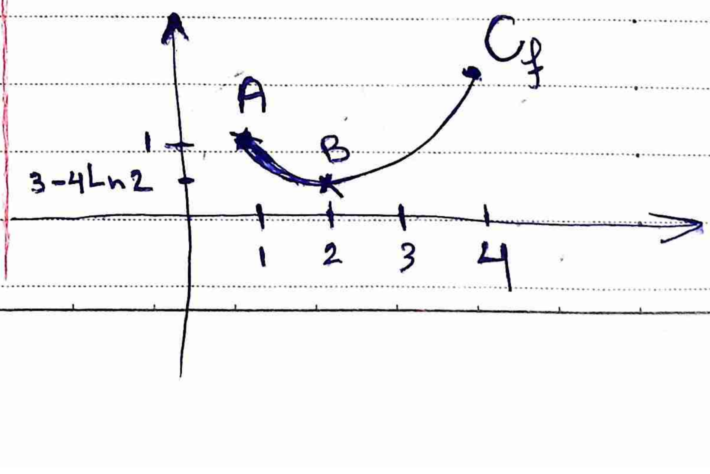
المدرس محمد ادريس

سؤال $I = [1,4]$

$$f(x) = ax+b+c\ln x$$

① اثبت ان f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$

② اوجد a، b، c ثم اكتب عبارة $f(x)$



الحل

$D = \mathbb{R} \cap]0,+\infty[$

$=]0,+\infty[$

$\boxed{1}$

$[1,4] \in]0,+\infty[$

⇐ f اشتقاقي على D

⇐ f اشتقاقي على I

$f'(x) = a + c\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{2}$

$A(1,1) \in C_f$

$1 = a+b+c\ln(1)$

$\boxed{1 = a+b}$ .... *

$B(2, 3-4\ln 2) \in C_f$

$\boxed{3-4\ln 2 = 2a+b+c\ln 2}$ ...**

قيمة حدية $f(2) = 3-4\ln 2$

$\Rightarrow f'(2) = 0$

***... $\boxed{a + c\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$

$\boxed{1-a = b}$ من * نجد

$c\left(\frac{1}{2}\right) = -a$ من *** نجد

$\Rightarrow \boxed{c = -2a}$

نعوض في **

Subject : $\boxed{\text{تمرين}}$

U_n متتالية معرفة على N^*

$n \geqslant 1$

$U_n = Ln\left[\frac{n+1}{n}\right]$

① أوجد نهاية U_n

② $S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n$

$\boxed{a}$ أثبت $S_n = Ln(n+1)$

$\boxed{b}$ أوجد نهاية S_n

$n \geqslant 1$

---

① $\lim_{n \to +\infty} Ln\left[\frac{n+1}{n}\right] = Ln(1) = 0$

U_n متقاربة من الصفر

② $E(n) : S_n = Ln(n+1)$

نبرهن صحة $E(1)$

$L_1 = S_1 = U_1 = Ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = Ln2$

محققة

$L_2 = Ln(1+1) = Ln(2)$

نفرض صحة $E(n)$

الفرض $S_n = Ln(n+1)$

الدرس ⑥ ملخص الدرس

$\boxed{3 - 4Ln2 = 2a + b + cLn2}$ **

$3 - 4Ln2 = 2a + (1-a) + (-2a) Ln2$

$3 - 4Ln2 = 2a + 1 - a - 2a Ln2$

$3 - 4Ln2 - 1 = 2a - a - 2a Ln2$

$2 - 4Ln2 = a - 2aLn2$

$2(1 - 2Ln2) = a(1 - 2Ln2)$

$\boxed{2 = a}$

ومنه

$a + c\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$2 + c\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$c\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

$\boxed{C = -4}$

$\boxed{1 - a = b}$

$1 - 2 = b$

$\boxed{-1 = b}$

$\Rightarrow f(x) = ax + b + CLnx$

$f(x) = 2X - 1 - 4LnX$

نبرهن صحة $E(n+1)$

/ /

الطلب $\boxed{S_{n+1} = \ln(n+2)}$

$L_1 = S_{n+1}$

$= \underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_n} + U_{n+1}$

$= S_n + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$= \ln\left[(n+1) \times \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]$

$= \ln(n+2) = L_2$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(+\infty + 1) = +\infty$

سؤال

$\Delta : y = x - 1$

$f(x) = x - x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

أثبت أن Δ مقارب للخط البياني عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \left[x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x-1)\right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[-x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1\right]$

$= \left[-\infty \cdot \ln(1+0) + 1\right]$

$= -\infty\,(0)$ عدم تعيين

$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u}$

$x \to +\infty \Rightarrow u \to 0$

$= \lim_{u \to 0} \left[-\frac{1}{u} \cdot \ln(1+u) + 1\right]$

$= \lim_{u \to 0} \left[-\frac{\ln(1+u)}{u} + 1\right]$

مبرهنة

الدرس 25 نهاية الدرس

$= -1 + 1 = 0$

$\Leftarrow \Delta$ مقارب مائل عند $+\infty$

سؤال

$I = [0, +\infty[$

$$f(x) \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

هل f اشتقاقي عند $x = 0$

الحل / /

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x(1-\ln x)$$

$$= 0(1+\infty)$$

$$= 0(+\infty)$$ عدم تعيين

مبرهنة

$$= \lim_{x\to 0} x - \boxed{x\ln x}$$

$$= 0 - 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

f ⟵ اشتقاقي عند $x=0$

تمرين

ادرس تغيرات f وارسم منحنى C

$$f(x) = x - x.\ln x$$

الحل

$D =]0, +\infty[$

f معرف ومشتق على D

مبرهنة

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

نقطة مقاربة $(0,0)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - (+\infty)\ln(+\infty)$$

$= +\infty - \infty$ عدم تعيين

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left[1 - \ln x\right]$$

$$= +\infty\left[1 - \ln(+\infty)\right]$$

$$= +\infty\left[-\infty\right] = -\infty$$

الدرس [illegible] الدرس

$$f'(x) = 1 - \left[(1).\ln x + \frac{1}{x}(x)\right]$$

$$= 1 - \left[\ln x + 1\right]$$

$$= 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$$f'(x) = 0$$

$$-\ln x = 0$$

$$0 = \ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 - (1).\ln(1)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Subject : تمرين

/ /

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{Ln} x}{x}$$

ادرس تغيرات f وارسم منحنى C

f معرف وقابل للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = +\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1-\infty}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ عدم تعين

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \boxed{\frac{\operatorname{Ln} x}{x}}$$ مبرهنة

$$= \frac{1}{+\infty} - 0$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x}\cdot x - (1)\cdot[1-\operatorname{Ln} x]}{x^2}$$

$$= \frac{-1 - 1 + \operatorname{Ln} x}{x^2}$$

$$= \frac{-2 + \operatorname{Ln} x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$

$-2 + \operatorname{Ln} x = 0$

$\operatorname{Ln} x = 2$

مدرس محمد ادريس

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	▨	0	↗	1	↘		$-\infty$

نقطة مساعدة للرسم

نفرض $y=0$

$\Rightarrow 0 = x - x\operatorname{Ln} x$

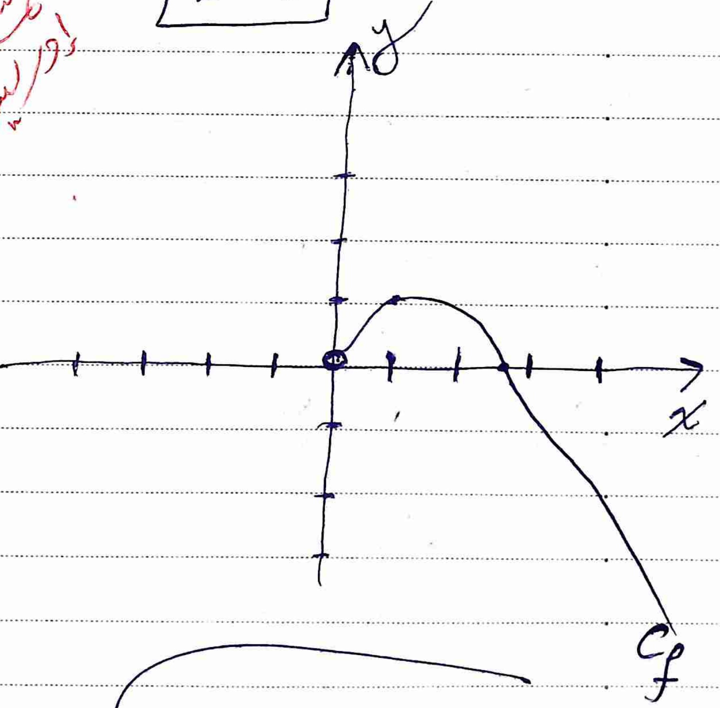
$x \cdot \operatorname{Ln} x = x$

$\operatorname{Ln} x = 1$

$\Rightarrow e^{\operatorname{Ln} x} = e^1$

$\boxed{x = e}$

$e \simeq 2,7$



$e^2 \simeq (2,7)^2 \simeq 8,5$

$e \simeq 2,7$

$\frac{-1}{e^2} \simeq \frac{-1}{8,5}$

سؤال:

$F(x) = \frac{Lnx}{x}$

ادرس تغيرات f ونظم جدول وارسم C

الحل

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{Ln0}{0} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$ مبرهنة

المدرس جوهر ادريس

$F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1) \cdot Lnx}{x^2}$

$F'(x) = \frac{1 - Lnx}{x^2}$

$F'(x) = 0$

$1 - Lnx = 0$

$1 = Lnx$

$e^1 = e^{lnx}$

$\boxed{e = x}$

㉚ $F(e) = \frac{ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{3}$

$e^{Ln x} = e^2$

$\boxed{x = e^2}$

$f(e^2) = \frac{1 - Ln e^2}{e^2} = \frac{1-2}{e^2}$

$= \frac{-1}{e^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	▨	$+\infty$ ↘	$\frac{-1}{e^2}$	↗	0

نقطة مساعدة للرسم

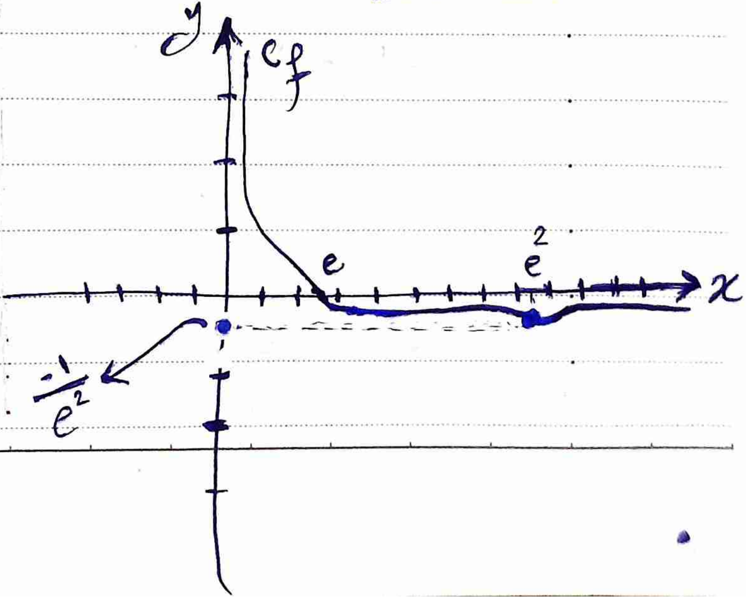
$y = 0$

$0 = \frac{1 - Lnx}{x}$

$0 = 1 - Lnx$

$Lnx = 1$

$e^{Lnx} = e^1 \Rightarrow \boxed{x = e}$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot Ln(+\infty) = +\infty$$

$$F'(x) = (1) \cdot Ln x + \frac{1}{x} \cdot x$$
$$= Ln x + 1$$
$$F'(x) = 0$$
$$Ln x + 1 = 0$$
$$Ln x = -1$$
$$e^{Ln x} = e^{-1}$$
$$x = e^{-1}$$
$$\boxed{x = \frac{1}{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right) \cdot Ln\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{1}{e} Ln(e^{-1})$$
$$= \frac{1}{e}(-Lne) = \frac{1}{e}(-1)$$
$$= \frac{-1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$- - -$	0	$+ + + + +$	
$f(x)$	▨	$0 \searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

نقطة مساعدة

$x . Ln x = 0 \leftarrow \boxed{y = 0}$

$$Ln x = \frac{0}{x}$$

$$Ln x = 0 \Rightarrow e^{Ln x} = e^{0}$$
$$\boxed{x = 1}$$

$$(1, 0)$$

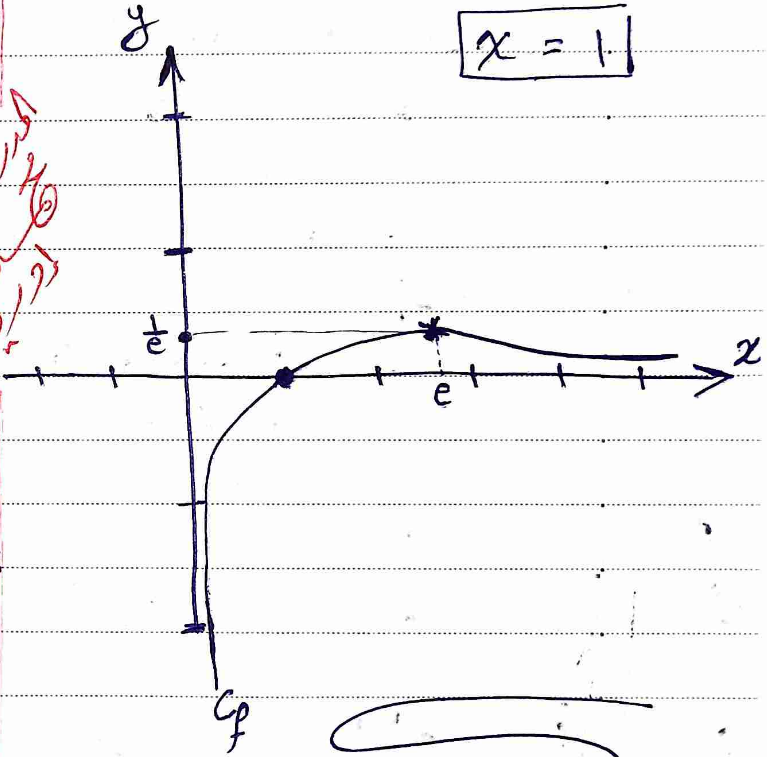
x	0		e		$+\infty$
$F'(x)$	▨	$+ +$	0	$- - -$	
$F(x)$	▨	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

نقطة مساعدة للرسم

$y = 0$

$$\Rightarrow \frac{Ln x}{x} = 0 \Rightarrow Ln x = 0.$$
$$e^{Ln x} = e^{0}$$
$$\boxed{x = 1}$$

المدرس محمد ادريس



تمرين

$$F(x) = x . Ln x$$

ادرس تغيرات f وارسم Cf مخطط

f معرفة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x . Ln x = 0$$

سنتوقف هنا

$\boxed{Ln(0) = -\infty}$ $\boxed{Ln(1) = 0}$

$f'(x) = 2x - 8 + 6\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{2x^2 - 8x + 6}{x}$

$f' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)\cdot(x-1) = 0$

إما $\boxed{x = 3}$

$\Rightarrow f(3) = 9 - 24 + 8 + 6Ln(3)$

$= -7 + 6Ln(3)$

$= -7 + 6(1)$

$= -1$

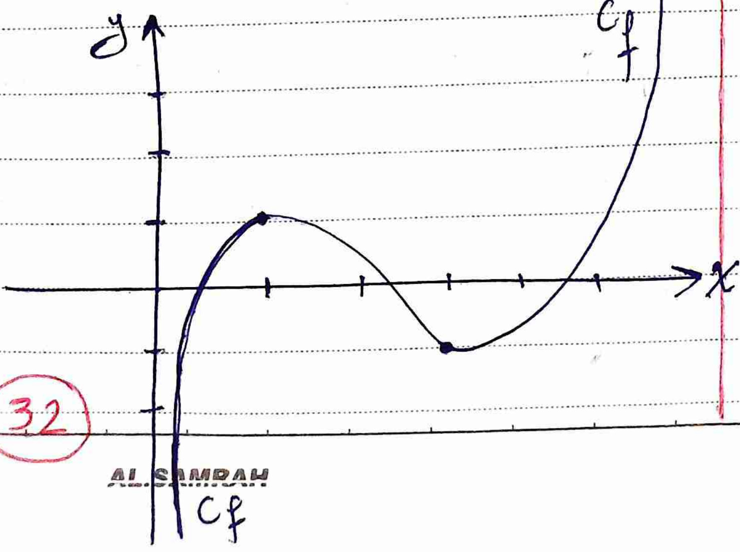
أو $\boxed{x = 1}$

$f(1) = 1 - 8 + 8 + 6Ln(1)$

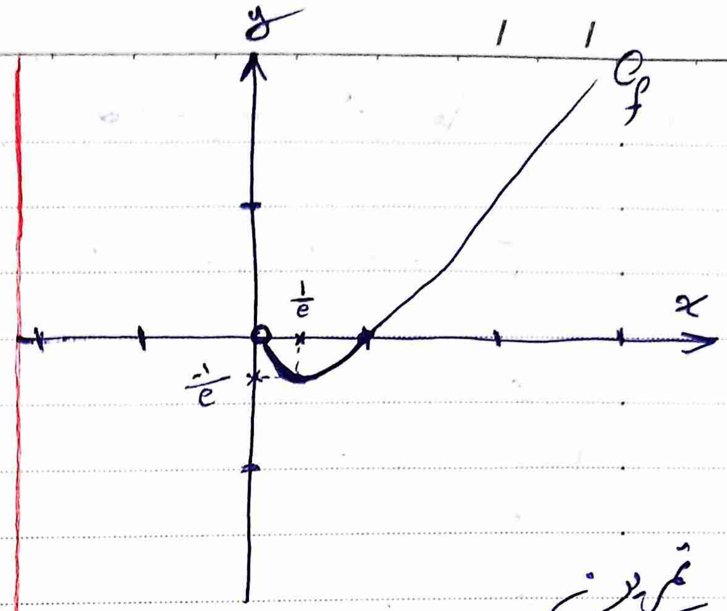
$= 1 + 6(0)$

$= 1$

x	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+ + + \; 0$	$- - - \; 0$	$+ + +$
$f(x)$	▨ $-\infty$ ↗	1 ↘	-1 ↗	$+\infty$



الدرس ⑳ [illegible]



تمرين

$f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6Ln x$

ادرس تغيرات f وارسم خطها البياني

الحل

f معرف وقابل للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 - 0 + 8 + 6Ln(0)$

$= 8 + 6(-\infty) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty + \infty$

$= +\infty - \infty$ عدم تعيين

$= \lim_{x \to +\infty} x\left[x - \frac{8}{x} + \frac{8}{x} + 6\frac{Ln x}{x}\right]$ مبرهنة

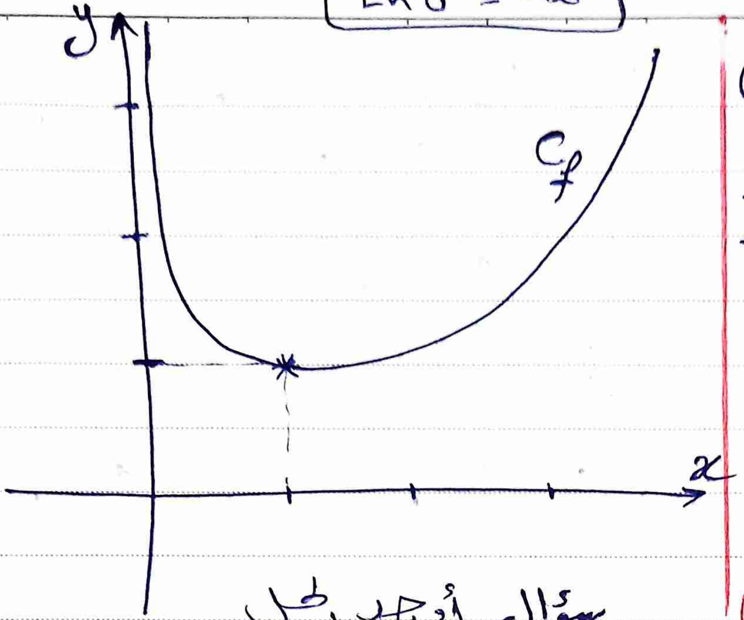
$= +\infty[+\infty - 0 + 0 + 0]$

$= +\infty[+\infty] = +\infty$

$\boxed{-\ln(0) = +\infty}$

Subject :

$\boxed{\ln 0 = -\infty}$



سؤال أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

$x > 0 \qquad y > 0$

الحل: من الثانية $\ln x + \ln y = \ln 3$

$\ln(x \cdot y) = \ln 3$

$x \cdot y = 3 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{3}{y}}$

نعوض بالأولى

$\dfrac{3^2}{y^2} + y^2 = 10$

$\Rightarrow 3^2 + y^4 = 10y^2$

$y^4 - 10y^2 + 9 = 0$

المدرس محمد ادريس

سؤال 1

$f(x) = x - \ln x$

ادرس تغيرات f وارسم خطها Cf

الحل f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 - \ln(0) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \dfrac{\ln x}{x}\right]$ → مبرهنة

$= +\infty[1 - 0]$

$= +\infty$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$

$f(1) = 1 - \ln(1)$

$= 1 - 0 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	

Subject : من الأول

$\boxed{Y = 7 - 2X}$

$3X - 5(7-2X) = 4$ نعوض بالثانية

$3X - 35 + 10X = 4$

$13X = 35 + 4$

$13X = 39 \Rightarrow X = \frac{39}{13} = 3$

$\Rightarrow \ln x = 3$

$e^{\ln x} = e^3$

$\boxed{x = e^3}$

$Y = 7 - 2X$

$Y = 7 - 2(3)$

$Y = 7 - 6 = 1$

$\Rightarrow \ln y = 1$

$\Rightarrow e^{\ln y} = e^1$

$\boxed{y = e}$

كريس محمد أدريس

$(x^2-9)(x^2-1) = 0$

إما $x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = +3}$, $\boxed{x = -3}$

السالب مرفوض

أو $x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = +1}$, $\boxed{x = -1}$

السالب مرفوض

$\boxed{x = +3}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{y}$

$3 = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow \boxed{y = 1}$

$\boxed{x = +1}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow 1 = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{1} = 3}$

سؤال

$2.\ \ln x + \ln y = 7$

$3.\ \ln x - 5\ln y = 4$

$y > 0$ $x > 0$

أوجد الحل المشترك لحل المعادلتين.

نفرض

$\boxed{X = \ln x}$

$\boxed{Y = \ln y}$

$2X + Y = 7$

$3X - 5Y = 4$

Subject : سؤال / حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} (\ln x)\times(\ln y) = -12 \\ \ln(x\cdot y) = 1 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{cases} (\ln x)\times(\ln y) = -12 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\ln x = X}$ $\boxed{\ln y = Y}$

$$\begin{cases} (X)\times(Y) = -12 \\ X + Y = 1 \end{cases}$$

من الثانية نعوض

$\boxed{X = 1 - Y}$

$$(1-Y)\times(Y) = -12$$

$$-Y^2 + Y = -12$$

$$0 = Y^2 - Y - 12$$

$$0 = (Y-4)(Y+3)$$

إما $\boxed{Y = 4} \Rightarrow \ln y = 4$

$$e^{\ln y} = e^4$$

$$\boxed{y = e^4}$$

$$\Rightarrow (X)\times(Y) = -12$$

$$(X)\times(4) = -12$$

$$\boxed{X = -3}$$

$$\Rightarrow \ln x = -3$$

$$e^{\ln x} = e^{-3}$$

$$\boxed{x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}}$$

أو $Y = -3$

$$\Rightarrow \ln y = -3$$

$$e^{\ln y} = e^{-3}$$

$$\boxed{y = e^{-3} = \frac{1}{e^3}}$$

$$\Rightarrow (X)\cdot(Y) = -12$$

$$X\cdot(-3) = -12$$

$$\boxed{X = 4}$$

$$\ln x = 4 \Rightarrow e^{\ln x} = e^4$$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^4}$$

المدرس عبد إدريس

Subject : ②

مسألة ٤ $I =]-1,1[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

① أثبت أنّ f تابع فردي

② أثبت أنّ f اشتقاقي على I

③ ادرس تغيرات f على $[0,1[$

④ ارسم الخط C_f

الحل

① أياً كانت $x \in I$

فإنّ $-x \in I$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1-(-x)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1+x}{-x+1}\right)$$

خاصة

[طلعت بالناقص وقلبت بالكسر]

$$= -f(x)$$

ومنه f تابع فردي

⟸ C_f متناظر بالنسبة للمبدأ $(0,0)$

f معرّف واشتقاقي على I

f اشتقاقي على $[0,1[$

$$f(0) = \ln\left(\frac{0+1}{1-0}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \ln\left(\frac{1+1}{1-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right)$$

$$= \ln(+\infty) = +\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي

0^+ لأنّ (Ln ضمن $[0,1[$ موجب)

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x}$$

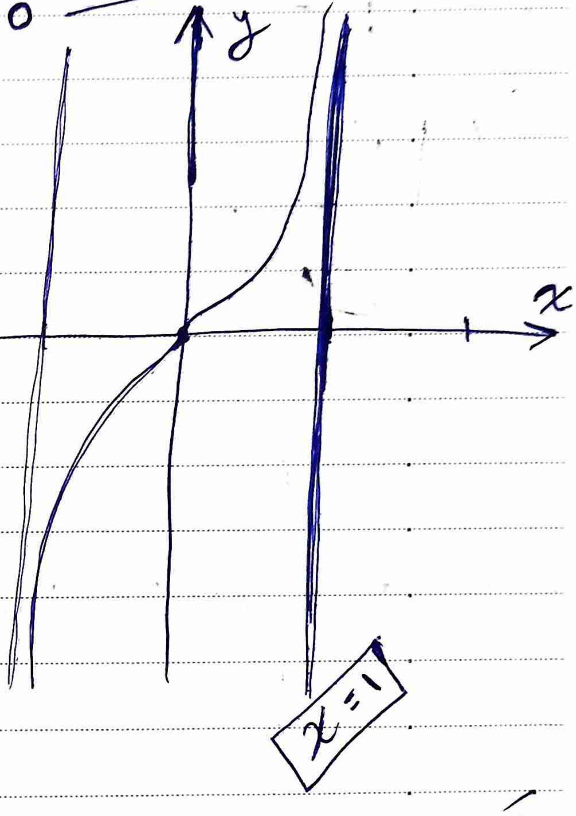
$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x)+(x+1)}{(x+1)\cdot(1-x)}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(1-x)} > 0$$

⟸ f متزايد

x	0				1
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	▨
$f(x)$	0		$\nearrow$	$+\infty$	▨



تمرين

$$f(x) = \text{Ln}(1-x^2)$$

$$I =]-1,1[$$

ادرس تغيرات f على I وارسم C_f

f معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \text{Ln}(1-(-1)^2)$$
$$= \text{Ln}(0) = -\infty$$

مقارب شاقولي $\boxed{x=-1}$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \text{Ln}(1-1^2) = -\infty$$

مقارب شاقولي $x=1$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

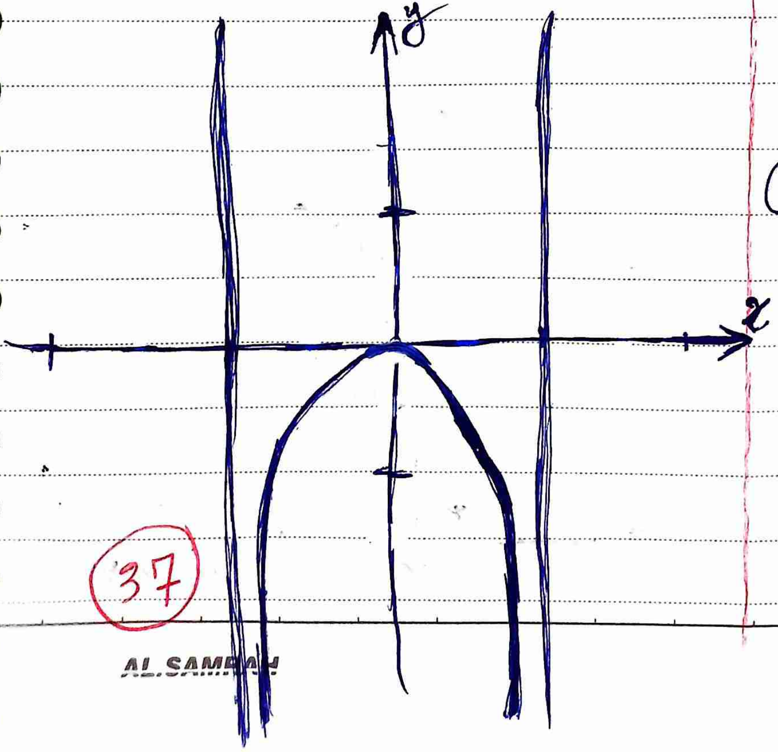
$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0$$
$$x = \frac{0}{-2} = 0$$

$$f(0) = \text{Ln}(1-0) = 0$$

[illegible]

x	-1		0		1
$f'(x)$	▨	$+\ +$	0	$-\ -$	▨
$f(x)$	▨ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ▨

$f(0)=0$ قيمة حدية كبرى



تمرين $I =]0, +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

ادرس تغيرات f وارسم خطها C_f

الحل

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \ln\left(\frac{0}{0+1}\right)$$

$$= \ln(0) = -\infty$$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي

منبسط
مستقيم

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}}$$

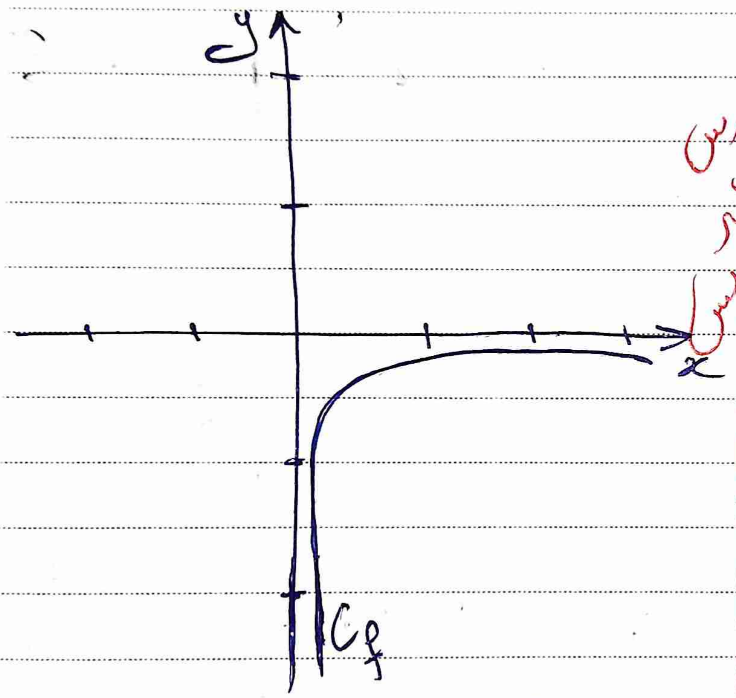
$$= \frac{\frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$f'(x) > 0$ لا ينعدم

x	0				$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	+	+	+
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗			0



مدرس و محور أوراس

Subject :

$\boxed{\ln(1) = 0}$

مسألة :

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f على $]1, +\infty[$

② أثبت أن y_Δ لـ $y_\Delta = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ C ، Δ

④ ارسم C ، Δ

⑤ ماهو عدد حلول المعادلة $f(x) = 6$

الحل

$\frac{x}{x-1} > 0$ وبطها بجدول

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
بسط		− − −	0	+ +		+ +	
مقام		− −		− − −	0	+ +	
كسر		+ +	0	− −	‖	+ +	

مقبول ////////// مقبول

$$D =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

f إشتقاقي على D ومنه f إشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 2 + 2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)$$

$$= 2 + 2(+\infty) = +\infty$$

$\boxed{x = 1}$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 2\ln(1) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{-1}{(x-1)}}{x}$$

المدرس حسن أدريس

$$= 1 + \frac{-2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1) - 2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$$

ونضع $f'(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2) \cdot (x + 1) = 0$$

(39)

إما $\boxed{x = 2}$

$f(2) = 3+2\ln 2$

أو $\boxed{x = -1}$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $I =]1,+\infty[$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$- - -$ 0 $+ + +$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$ $3+2\ln 2$ $\nearrow +\infty$	

4,4

[illegible]

②

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_\Delta\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2\ln(1) = 0$$

③

$$f(x) - y_\Delta = 2.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

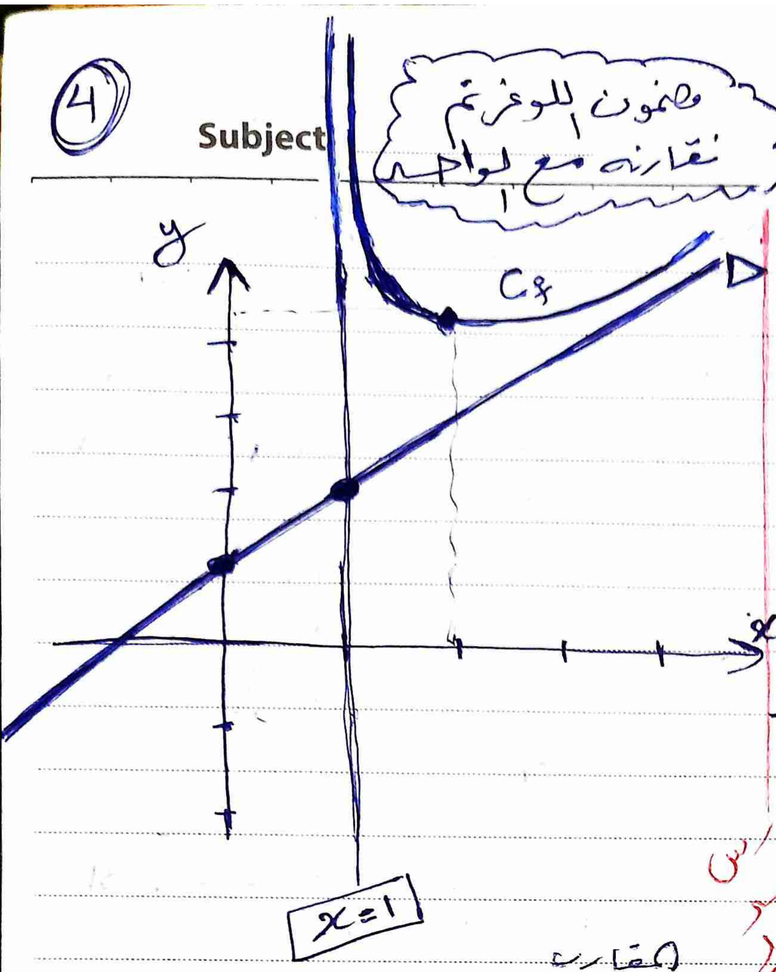
$$\frac{x}{x-1} > 1 \qquad I =]1,+\infty[$$

مضمون اللغريتم $> 1 \Rightarrow$ اللوغريتم موجب

$\Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0$

C فوق Δ

④ **Subject**



مضمون اللوغريتم نقارنه مع الواحد

مقارب $y = x+1$

x	y	
0	1	(0,1)
1	2	(1,2)

$3+2\ln 2 = 3+2(0,7) = 4,4$

⑤

$f(x) = 6$

f مستمر ومتناقص تماماً على $]1,2[$

$6 \in f(]1,2[) =]4,4,+\infty[$

⇐ للمعادلة

$f(x) = 6$ حل وحيد في $]1,2[$

40

AL SAMRAH

f مستمر ومتزايد تماماً على $]2,+\infty[$

$$6 \in f(]2,+\infty[) =]4{,}4 , +\infty[$$

← المعادلة $f(x)=6$ لها حل وحيد على $]2,+\infty[$

← المعادلة لها حلان مختلفان

مسألة ٤

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

① أوجد D_f

② أثبت أن $A(2,0)$ مركز تناظر

③ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً

④ ارسم C والمقاربات

الحل

①
$$\frac{x-1}{3-x} > 0$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
بسط		−	0	+	+	+	
مقام		+	+	+	0	−	
كسر		−	0	+	‖	−	
		//////		تحقق	▨	//////	

$$D =]1,3[$$

المدرس حسام لى دروس

② إذا كانت $x \in D$

نثبت $(2x_A - x) \in D$

$(4-x) \in D$

$$f(2x_A - x) + f(x) = 2y_A$$

$$f(4-x) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 2(0)$$

$$f(4-x) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0$$

$$f(4-x) = \ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0$$

$$-\ln\left(\frac{-1+x}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0$$

محققة $0 = 0$

$\Rightarrow$ A مركز تناظر

③ f معرف على $]1,3[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \ln\left(\frac{1-1}{3-1}\right) = \ln 0 = -\infty$$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي

$$\boxed{Ln(1) = 0}$$

تمرين : C خط بياني معرّف على R^{*+}

$$f(x) = ax+b+\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

A(1,0) تقطع من C والمماس للخط البياني C يوازي المستقيم d

$$d: \ y = 3x+2$$

المطلوب تعين a , b

الحل نعوض A بالتابع

$$0 = a(1)+b+Ln(1)\cdot\frac{1}{1}$$

$$\boxed{0 = a+b}$$

المماس // المستقيم

$\Rightarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم

$$f'(x) = 3$$

مشتق جداء

$$f'(x) = a + \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2}\cdot \ln x\right)$$

$$f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = a + \frac{1}{1^2} - \frac{\ln 1}{1^2}$$

$$f'(1) = a + 1 - 0$$

$$= a+1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = Ln\left(\frac{3-1}{0^+}\right) = Ln\left(\frac{2}{0^+}\right)$$

$$= Ln(+\infty) = +\infty$$

$\boxed{x = 3}$ مقارب شاقولي

$$f(x) = Ln(x-1) - Ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{-1}{3-x}$$

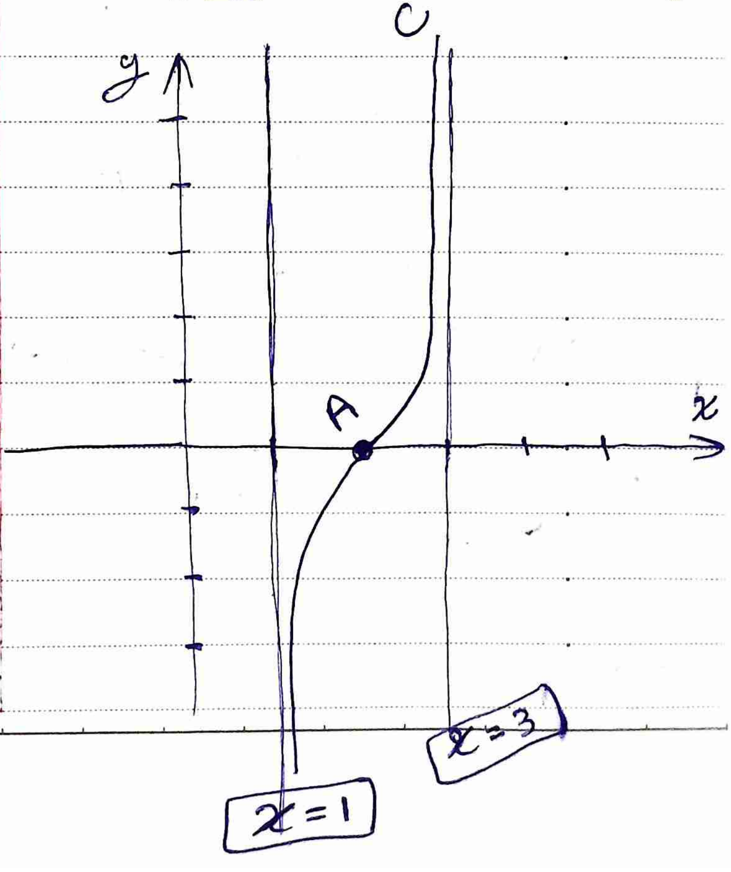
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x}$$

$$= \frac{3-x+x-1}{(x-1)\cdot(3-x)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$

المدرس مجدي إدريس

x	1		3
$f'(x)$	▨	+ + + + +	▨
$f(x)$	▨	$-\infty$ ↗ $+\infty$	▨



$f'(x) = 3$

$f'(1) = 3$

$a+1 = 3$

$\boxed{a = 3-1 = 2}$

$\boxed{0=a+b} \Rightarrow 0 = 2+b$

$\boxed{-2 = b}$

$$\boxed{f(x) = 2x-2+\ln x \cdot \frac{1}{x}}$$

سؤال: عيّن العدد m الحقيقي

ليكون للمعادلة

$x^2-2x+\ln(m+1)=0$

جذران مختلفان

$\Delta > 0 \Leftarrow$ جذران مختلفان

$b^2-4a.c > 0$

مضمون اللوغارتم > 0

$m+1 > 0$

$m > -1 \Rightarrow m \in]-1,+\infty[$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=-2}$ $\boxed{c=\ln(m+1)}$

$4-4(1)(\ln(m+1)) > 0$

نقسم على 4

$1-\ln(m+1) > 0$

$1 > \ln(m+1)$

$e^1 > e^{\ln(m+1)}$

$e > m+1$

الدرس الخامس

$\boxed{e-1 > m}$

$m \in]-\infty, e-1[$

$S =$ تقاطع المجموعتين

$=]-1, e-1[$

مسألة:

$f(x) = x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$

① أوجد D_f

② $I =]0,+\infty[$ ادرس تغيرات f على I

③ أثبت أن المستقيم $d: y = x-\ln 2$ مقارب لـ C عند $+\infty$

④ ادرس الوضع النسبي لـ C ومقاربه d

⑤ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]1,2[$

⑥ ارسم C ومقارباته

①

$$2+\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{2x+1}{x}>0$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
بسط		$-\ -\ -$	0	$+\ +$		$+\ +$	
مقام		$-\ -\ -$		$-\ -$	0	$+\ +\ +$	
كسر		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	‖	$+\ +\ +$	
		مقبول		//////////		مقبول	

$$D_f=]-\infty,\frac{-1}{2}[\cup]0,+\infty[$$

②

$$I=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0-\ln\left(2+\frac{1}{0^+}\right)$$

$$=-\ln(+\infty)=-\infty$$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty-\ln\left[2+\frac{1}{+\infty}\right]$$

$$=+\infty-\ln(2+0)$$

$$=+\infty-\ln 2$$

$$=+\infty$$

f اشتقاقي على I

$$f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x)=x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$f(x)=x-\left(\ln(2x+1)-\ln x\right)$$

المدرس محمد عسكر لدروس

Subject: $f'(x)=1-\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)$

$$=1-\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x(2x+1)-2\cdot x+(2x+1)}{x(2x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+x-2x+2x+1}{x(2x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)}>0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	‖	$-\infty\ \nearrow$	$+\infty$

③

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)$$

$$=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)-x+\ln 2\right)$$

$$=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)+\ln 2\right)$$

مسيطرة ←

$$=-\ln(2)+\ln(2)=0$$

⇐ مقارب مائل

④

$$f(x) - y_{\Delta} = \left(-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) + \ln 2\right)$$

تطبيق خواص

$$= \ln 2 - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$= \ln \frac{2}{\frac{2x+1}{x}}$$

$$= \ln \frac{2x}{2x+1} < 0$$

$1 >$ الكسر $\Rightarrow$ المقام $>$ البسط

$\Leftarrow$ C تحت Δ

⑤

$$f(1) = 1 - \ln(2+1)$$
$$= 1 - \ln 3$$
$$= 1 - 1{,}09$$
$$= -0{,}09 < 0$$

$\boxed{\ln 3 = 1{,}09}$

$$f(2) = 2 - \ln\left(2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= 2 - 0{,}9$$
$$= 1{,}1 > 0$$

$\boxed{\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}9}$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

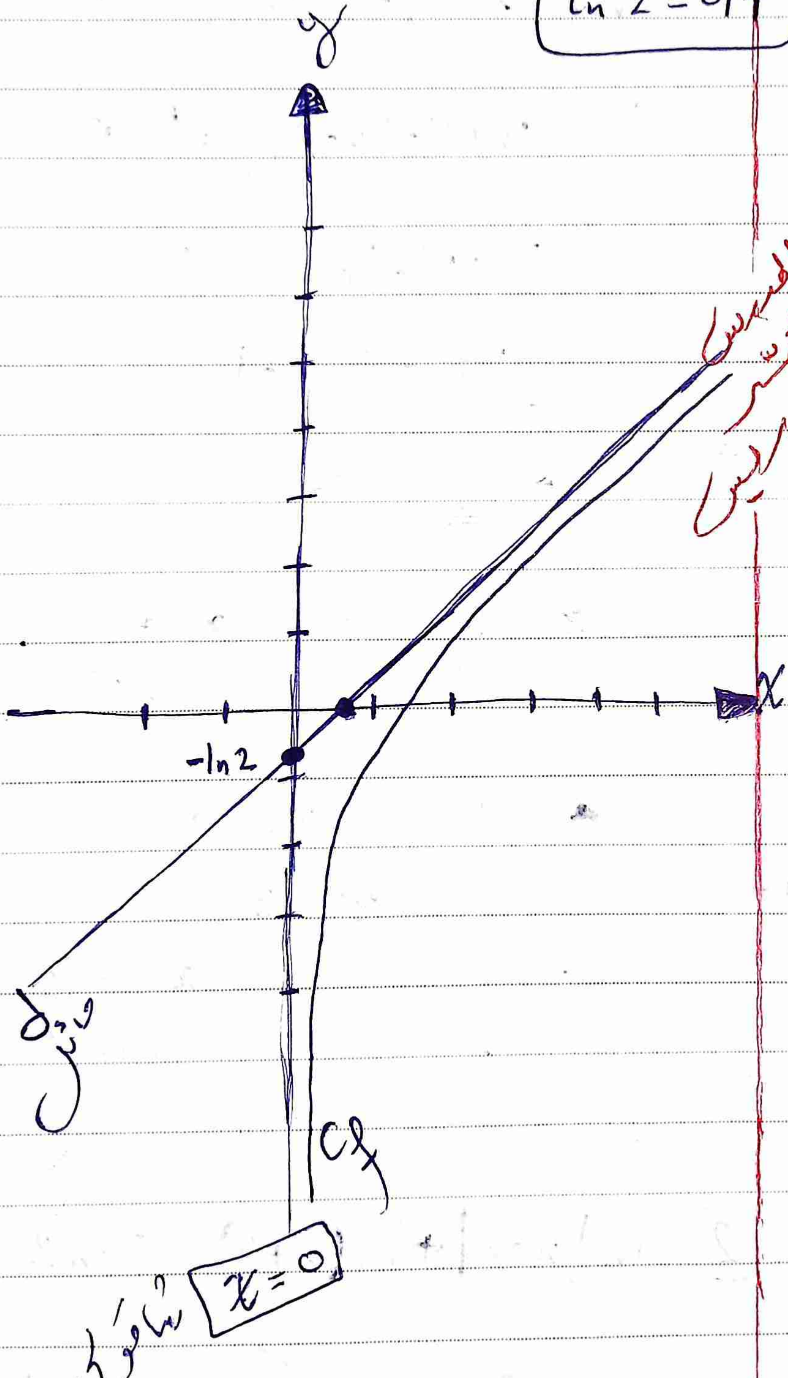
و f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$\Rightarrow$ المعادلة لها حل وحيد

⑥ $\boxed{d : y = x - \ln 2}$

x	y	نقطة
0	$-\ln 2$	$(0, -\ln 2)$
$+\ln 2$	0	$(\ln 2, 0)$

$\boxed{\ln 2 = 0{,}7}$



المهندس محمد لودريس

45

Subject:

تمرين هام : حل المعادلات والمتراجحات

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

الحل

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\mp 2\}$

$\ln(|x+2| \cdot |x-2|) = 0$

$\ln(|x+2| \cdot |x-2|) = \ln(1)$

$|x+2| \cdot |x-2| = 1$

$|x^2 - 4| = 1$

إما $x^2 - 4 = 1$

$x^2 = 5$

$x = -\sqrt{5}$ مقبول

$x = +\sqrt{5}$ مقبول

أو $x^2 - 4 = -1$

$x^2 = 3$

$x = -\sqrt{3}$ مقبول

$x = +\sqrt{3}$ مقبول

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

الحل

$x \neq 2$

$x + 4 > 0$

$x > -4$

$]-4, +\infty[$

$\Rightarrow D =]-4, +\infty[\setminus \{2\}$

$\ln|x-2| = 3\ln 2 - \ln(x+4)$

$\ln|x-2| = \ln 2^3 - \ln(x+4)$

$\ln|x-2| = \ln \frac{8}{x+4}$

$|x-2| = \frac{8}{x+4}$

إما $x - 2 = + \frac{8}{x+4}$

$\Rightarrow (x-2)(x+4) = 8$

$x^2 + 4x - 2x - 8 = 8$

$\boxed{x^2 + 2x - 16 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$\Delta = 4 - 4(1).(-16)$

$\Delta = 4 + 64 = 68 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{17}}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$2\sqrt{17}$

$= -1 + \sqrt{17}$

$\simeq -1 + 4,2 \simeq 3,2$

مقبول

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-2-2\sqrt{17}}{2} = -1 - \sqrt{17}$

$\simeq -1 - 4,2 = -5,2$

مرفوض

المدرس محمد إدريسي

أولا

Subject:

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2} = +1$$

$$2x^2+x-3 = +x^2$$

$$x^2+x-3=0$$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=1}$ $\boxed{c=-3}$

$$\Delta = b^2-4a.c$$

$$= 1-4(1).(-3)$$

$$\Delta = 1+12 = 13$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13} \simeq 3,5$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3,5}{2} = \frac{2,5}{2}$$

$\boxed{x_1 = 1,5}$ مقبول

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3,5}{2}$$

$\boxed{x_2 = -2,5}$ مقبول

أو

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2} = -1$$

$$2x^2+x-3 = -x^2$$

$$3x^2+x-3=0$$

$\boxed{a=3}$ $\boxed{b=1}$ $\boxed{c=-3}$

$$\Delta = b^2-4a.c$$

$$= 1-4(3).(-3)$$

$$\Delta = 1+36 = 37$$

$$\sqrt{\Delta} \simeq 6$$

المدرس محمد ادريسي

أو

$$x-2 = -\frac{8}{x+4}$$

$$\Rightarrow (x-2).(x+4) = -8$$

$$x^2+4x-2x-8 = -8$$

$$x^2+2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$\boxed{x=0}$ مقبول

$\boxed{x=-2}$ مقبول

③ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$2x+3 \neq 0$ $\quad$ $x-1 \neq 0$

$2x \neq -3$ $\quad$ $x \neq 1$

$x \neq \frac{-3}{2}$ $\quad$ $x \neq 0$

اكمل ؟

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-3}{2}, 0, 1\right\}$$

$$\ln|(2x+3).(x-1)| = \ln|x^2|$$

$$\ln|2x^2-2x+3x-3| = \ln|x^2|$$

$$\ln|2x^2+x-3| - \ln|x^2| = 0$$

$$\cancel{\ln}\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2}\right| = \cancel{\ln}(1)$$

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2}\right| = 1$$

Subject:

أو $\ln x = -1$

$e^{\ln x} = e^{-1}$

$\boxed{x = \frac{1}{e}}$

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
	▨	$++$	0	$---$	0	$+++$	
	▨	محققة		//////////		محققة	

$S =]0, \frac{1}{e}[\cup]e^3, +\infty[$

تمرين

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

① تحقق أنّ $P(-1) = 0$

② أثبت أنّ $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1) \cdot Q(x)$ حيث Q كثير حدود من الدرجة الثانية

③ حل المتراجحة $P(x) \leq 0$

④ استفد من الطلبات السابقة بحل المتراجحة

$2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

المدرس محمد عمر دوريس

$x_1 = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-6}{2(3)}$

$\boxed{x_1 = -1,1}$ مقبول

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+6}{2(3)}$

$\boxed{x_2 = 0,8}$ مقبول

④ $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

الحل

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

إما $\ln x = 3$

$e^{\ln x} = e^3$

$\boxed{x = e^3}$ مقبول

أو $\ln x = -1$

$e^{\ln x} = e^{-1}$

$\boxed{x = \frac{1}{e}}$ مقبول

⑤ $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$

الحل

$x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) \geq 0$

إما $\ln x = 3$

$e^{\ln x} = e^3$

$\boxed{x = e^3}$

Subject: المتراجحة سالبة

الحل ① $p(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2$

$= -2 + 5 - 1 - 2$

$= 0$

② $\boxed{X=-1}$ جذراً ⟸ $\boxed{x+1}$ عامل

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+3x-2 \\ x+1 & 2x^3+5x^2+x-2 \\ & \ominus 2x^3 \ominus 2x^2 \\ \hline & 0+3x^2+x-2 \\ & \ominus 3x^2 \ominus 3x \\ \hline & 0-2x-2 \\ & \oplus 2x \oplus 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

المدرس محمد ادريس

$p(x) = (x+1)\cdot(2x^2+3x-2)$

③ $p(x) \leq 0$

$(x+1)\cdot(2x^2+3x-2) \leq 0$

إما $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

أو $2x^2+3x-2=0$

$\boxed{a=2}$ $\boxed{b=3}$ $\boxed{C=-2}$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$= 9-4(2)\cdot(-2)$

$\Delta = 9+16 = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = -2$

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad +\infty$
الأول	— — — — 0 + + + +
الثاني	+ + 0 — — — 0 + +
الجداء	— — — 0 + + 0 — — 0 + +
	محققة ▨ محققة ▨

$S =]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}]$

④ $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$x > 0$

$]0, +\infty[$

$2x+5 > 0$

$2x > -5$

$x > \frac{-5}{2}$

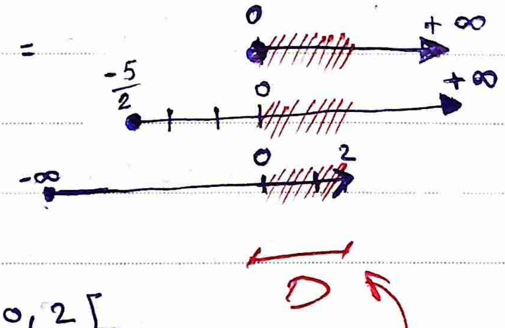
$]\frac{-5}{2}, +\infty[$

$2-x > 0$

$2 > x$

$]-\infty, 2[$

$\Rightarrow D_f =$



$D =]0, 2[$

[illegible]

49

Subject: $\boxed{\ln(1) = 0}$

$$2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$$

$$\ln x^2 + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$$

$$\ln\left(x^2 \cdot (2x+5)\right) \leqslant \ln(2-x)$$

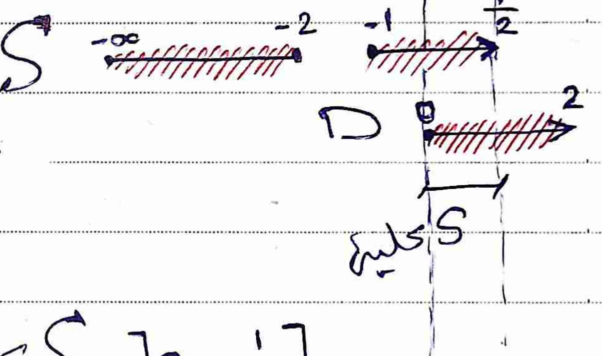
$$x^2 \cdot (2x+5) \leqslant (2-x)$$

$$2x^3 + 5x^2 \leqslant 2 - x$$

$$\underbrace{2x^3 + 5x^2 + x - 2}_{p(x)} \leqslant 0$$

$$p(x) \leqslant 0$$

S كلية $= D \cap S$



S كلية $= \left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

① أوجد Df والمقاربات

② ادرس تغيرات f

③ ارسم C والمقاربات

الحل ①

$$D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \frac{1}{0^-}$$

< مبرهنت كنده 0

$$= -\infty$$

$\boxed{x = 0}$ شاقولي

الصفر سالب لأن]0,1[بهذا المجال يكون اللوغارتم سالب

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{1}{1 \cdot \ln(1)} = \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{x = 1}$ مقارب شاقولي

المدرس محمد الدرايسي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty \ln(+\infty)}$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\boxed{y = 0}$ مقارب أفقي

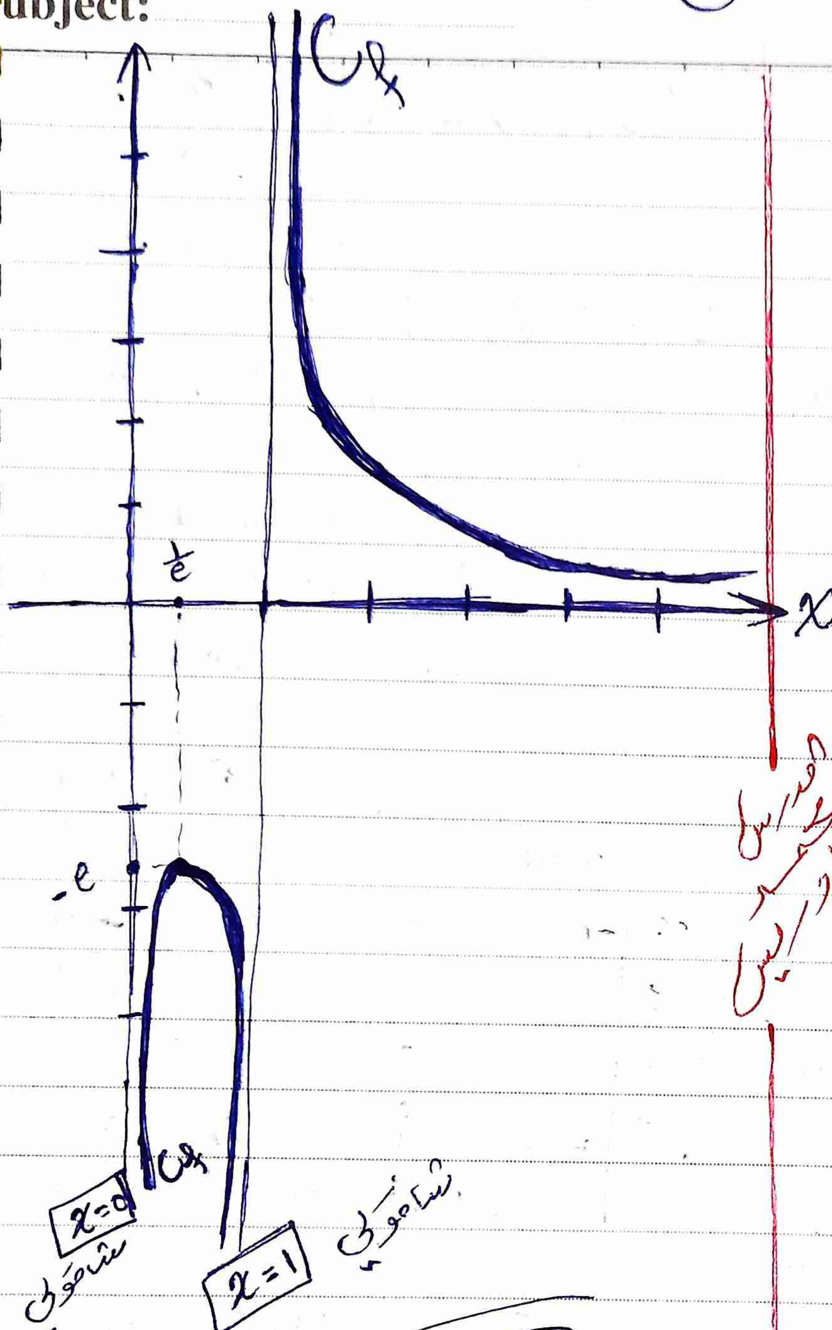
② f معرّف واشتقاقي على D

$$f'(x) = \frac{-(x \cdot \ln x)'}{(x \cdot \ln x)^2}$$

$$\text{مشتق مقلوب} = \frac{-\text{مشتق المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

Subject:

٣



تمرین حل کردن

$$f'(x) = \frac{-(1 \cdot \ln x \cdot + \frac{1}{x} \cdot x)}{(x \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{-(\ln x + 1)}{(x \cdot \ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-\ln x - 1 = 0$$

$$-1 = \ln x$$

$$e^{-1} = e^{\ln x}$$

$$\boxed{\frac{1}{e} = x}$$

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\frac{1}{e} \cdot \ln(\frac{1}{e})}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e} \cdot \ln(e^{-1})} = \frac{1}{\frac{1}{e}(-1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{e}} = \frac{e}{-1} = -e$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + +$	0	$- -$ ▨ $- - - -$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-e$	↘ $-\infty$ ▨ $+\infty$ ↘	0

Subject: فسير

مسألة (1) : $I =]0,+\infty[$

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أوجد D_f

② أثبت أن f متزايد على I

③ أثبت أن $y_\Delta = x - 4$ مقارب مائل عند $+\infty$

④ ادرس الوضع النسبي لـ C ، Δ

⑤ ارسم C ، Δ

الحل ①

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
بسط		− − −		− − −	0	+ + +	
مقام		− −	0	+ +		+ +	
كسر		+ + +	‖	− − −	0	+ +	
		محققة	‖	//////		محققة	

$$D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$$

② $I =]0,+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0 - 4 + \ln\left(\frac{0}{0+1}\right)$$

$$= 0 - 4 + \ln(0)$$

$$= -4 + (-\infty)$$

$$= -\infty$$

شاقولي ⇐ $\boxed{x = 0}$

المدرس محمد سمير دراريس

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

اشتقاق f على I

$$f(x) = x - 4 + \ln x - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$= 1 + \frac{x+1-x}{x(x+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

⇐ f متزايد تماما على I

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+ + + +	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

③

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln(1) = 0$$

⇐ y_Δ مقارب مائل

$I =]1,+\infty[$

Subject: تمرين :

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

① أوجد D_f

② أثبت أنّ f متزايد تماماً على I

③ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

④ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

الحل :

$x^2-1 > 0$

$(x-1)(x+1) > 0$ ①

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1	$+$	$+$	0	$- - -$	0	$+$	$+$ $+$
	محققة			//////////			محققة

$D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$I =]1,+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln((+\infty)^2)$$ ②

$$= +\infty + \ln(+\infty)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 1 + \ln(0)$$

$$= 1 - \infty = -\infty$$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي

f اشتقاقي على $I =]1,+\infty[$

المدرس محمد عمر إدريس

$f(x) - y_\Delta = \ln \frac{x}{x+1} < 0$ ④

كون البسط أصغر من المقام

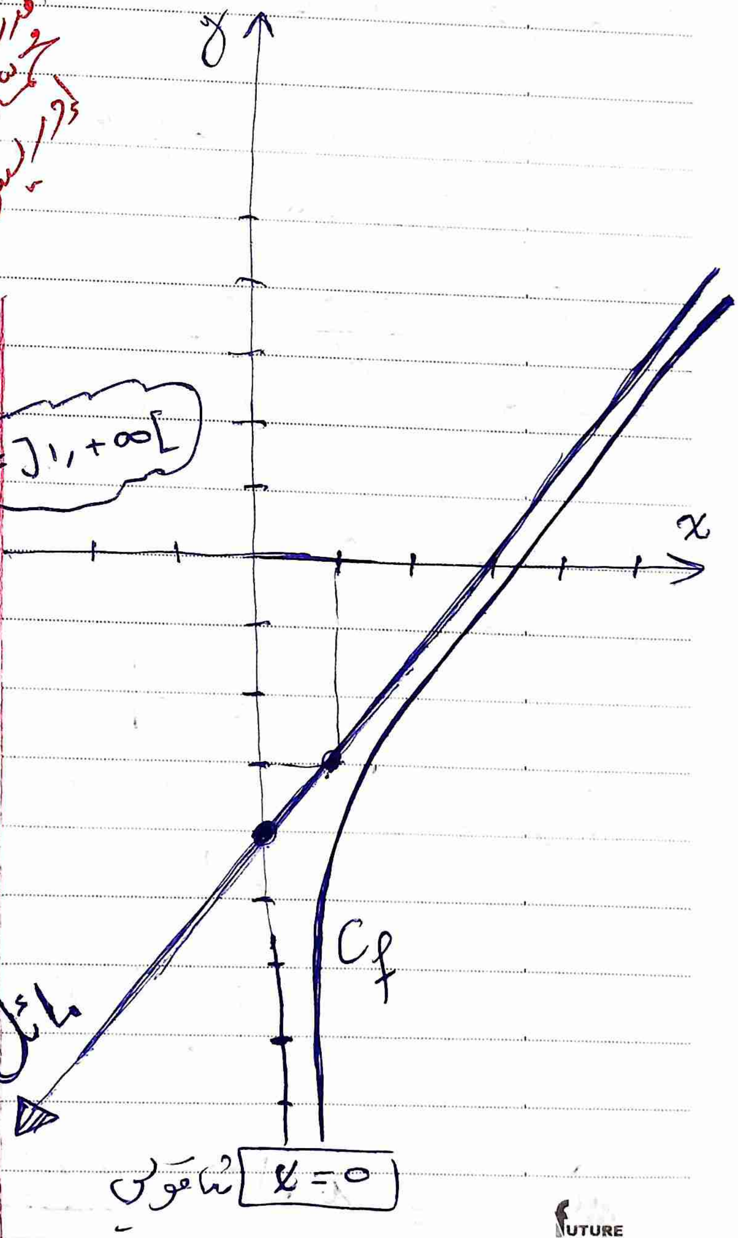
⟸ الكسر أصغر من واحد

⟸ ln سالب

⟸ C تحت Δ

$y_\Delta = x - 4$ ⑤

x	y	نقطة
0	-4	(0, -4)
1	-3	(1, -3)



Subject: مسائل

دورة ٥/١٩

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

① أوجد Df

② ادرس تغيرات f

③ أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x=1$

④ ارسم C والمقاربات والمماس

---

① $D =]0, +\infty[$

② f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{\ln 0}{0^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$ مبرهنة

$\boxed{y=0}$ مقارب افقي

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1 - 2 \cdot \ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} \geqslant 0$$

⇐ f متزايد تماماً على I

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+ + + + +	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

③ f مستمر ومتزايد تماماً على المجال

$$]1, \sqrt{1+\frac{1}{e}}[$$

المدرس
محمد ادريس

$$0 \in f\left(]1, \sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) =]-\infty, \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1[$$

$$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{e}}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(1+\frac{1}{e} - 1\right)$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln e^{-1}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1$$

⇐ للمعادلة حل وحيد

④ من الطلب السابق نجد

$$1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$$

Subject: T معادلة المماس ③

$\boxed{x = 1} \Rightarrow f(1) = \frac{\ln 1}{1}$

$f(1) = 0$

$A(1,0)$

$m = f'(1) = \frac{1-2.\ln(1)}{1^3}$

$m = 1-2(0) = 1$

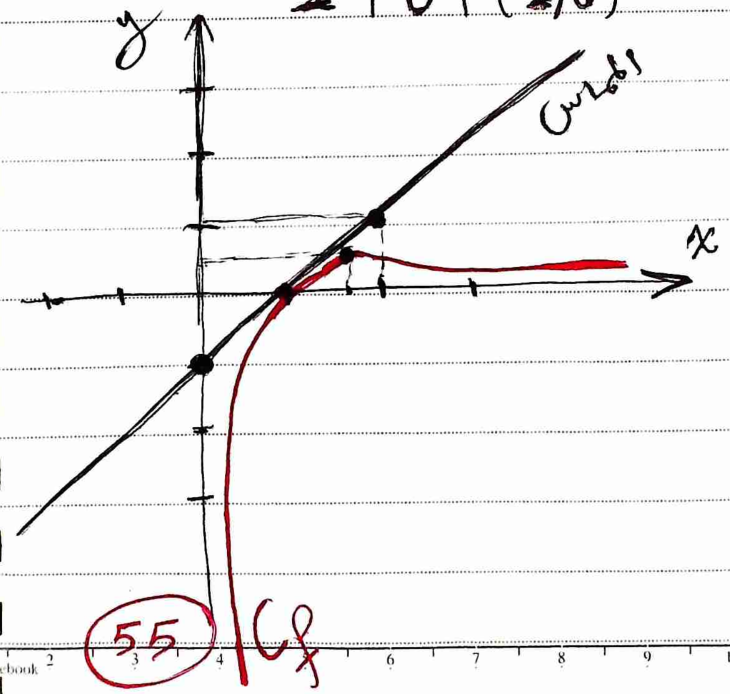
$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 0 = 1(x-1)$

$$\boxed{y = x-1}$$

④ المماس

x	y	نقطة
0	-1	(0,-1)
1	0	(1,0)



المدرس محمد عز ادريس

$f'(x) = \frac{1-2.\ln x}{x^3}$

$f'(x) = 0$

$1-2.\ln x = 0$

$1 = 2.\ln x$

$\frac{1}{2} = \ln x$

$e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln x}$

$e^{\frac{1}{2}} = x$

$$\boxed{\sqrt{e} = x}$$

$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}$

$= \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e}$

$= \frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+ + +	0	— — —	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0