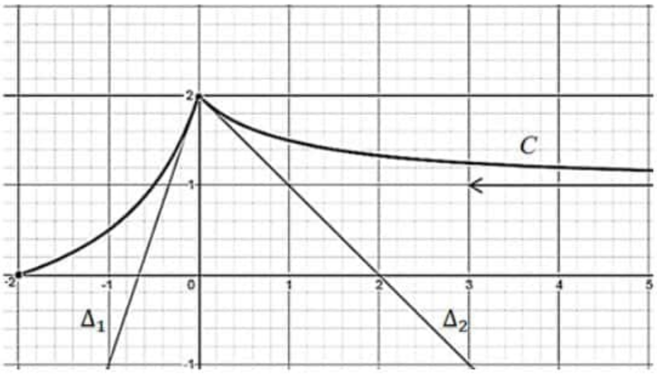
الرياضيات:	**امتحان نصفي للثانويّة العامّة – العام الدراسي 2020-2021** (الفرع العلمي) **الصفحة الأولى**	**الاسم:** **الرقم:** **المدة: ثلاث ساعات** **الدرجة: ستمئة**

أولاً : أجب عن أربعة فقط من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على $]-2,+\infty[$ ، المطلوب :

١- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $f(-2)$.

٢- دل على القيم الحدّية للتابع f مبيّناً نوعها .

٣- جد $f'(0^+)$ و $f'(0^-)$.

٤- أوجد $f([-2,+\infty[)$.

السؤال الثاني: نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,0,1)$, $B(0,1,3)$ **المطلوب** :

١- جد نقطة C على محور الراقم متساوية البعد عن A و B . ٢- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

السؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{x-2}{|x|+1}$. **المطلوب** :

١- اكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

٢- ادرس استمراريّة التابع عند $x_0=0$. ٣- ادرس قابليّة اشتقاق التابع عند $x_0=0$.

السؤال الرابع :

لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$, $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتان وفق :

$$x_n=y_n+\frac{2}{n+1} \quad \text{و} \quad y_n=4-x_n$$

١- ادرس اطّراد المتتاليتين x_n و y_n . ٢- أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$, $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

السؤال الخامس : نتأمل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=2x-\sin x$. **المطلوب** :

١- ادرس تغيّرات $f(x)$ و نظّم جدولاً بها . ٢- أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

ثانياً: حل ثلاثة فقط من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : نعتبر المتتالية u_n المعرّفة على $\mathbb{N}$ وفق : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$ **المطلوب** :

١- أثبت من أجل $n\geq0$ أنّ : $0\leq u_n<1$.

٢- ادرس اطّراد المتتالية u_n ثمّ علّل تقاربها .

٣- لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ بحيث $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ أثبت أنّ المتتالية v_n هندسيّة ، و اكتب عبارة v_n بدلالة n .

٤- استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. المطلوب :

١- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ أوجد عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$.

٢- احسب $f'(x)$ و استنتج $g'(x)$ حيث $g(x)=f(x^2)$ محدّداً مجموعة تعريف $g'(x)$.

٣- أثبت من أجل $n\geq1$ أنّ المشتق من الرتبة n للتابع f يعطى بالصيغة : $f^{(n)}(x)=\frac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$.

التمرين الثالث : نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(0,1,2)$ و المستقيم d الممثّل بالمعادلات الوسيطيّة :

$$d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

١– أوجد إحداثيّات النقطة 'A المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d .

٢– اكتب معادلة الكرة التي مركزها A و تمسّ المستقيم d .

٣– اكتب معادلة المستوي الذي يحوي d و يمرّ بالنقطة A .

التمرين الرابع : نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,1,-2)$, $B(0,1,-1)$, $C(-1,-1,2)$, $D(3,5,-8)$

١– أثبت أنّ النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة .

٢– أثبت أنّ النقاط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد .

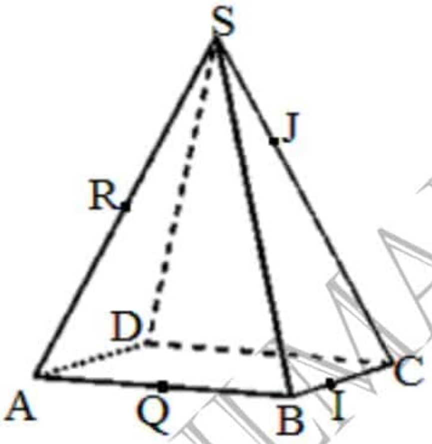
٣– استنتج أنّ النقطة D هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) حيث α , β , γ أعداد حقيقيّة يُطلَب تعيينها .

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $(S\text{-}ABCD)$ هرم منتظم طول حرفه 1 ، قاعدته المربع $ABCD$

النقطتان I و J تحقّقان $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

Q و R منتصفات $[AB]$ و $[AS]$ بالترتيب ، **المطلوب** :



١– احسب $\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AS}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$.

٢– أثبت أنّ $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{BQ} + 3\overrightarrow{BI}$

٣– أثبت أنّ المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان .

٤– استنتج أنّ النقاط I , R , Q , J تقع في مستوٍ واحد .

٥– أثبت أنّ المستقيمين (QR) و (IJ) متوازيان .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}$ **و المطلوب** :

١– احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

٢– ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

٣– اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ ، تيقّن أنّ النقطة $A(2,0)$ تنتمي إلى T .

٤– في معلم متجانس ارسم المماس T و الخط البياني C .

٥– ناقش بحسب قيم العدد الحقيقيّ m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

٦– استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع : $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x+2}$.

–انتهت الأسئلة–

حل النموذج التجريبي - فصل أول 2021

أولاً:

السؤال الأول:

1- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $f(-2) = 0$

2- $f(-2)=0$ قيمة صغرى محلياً

$f(0)=2$ قيمة كبرى محلياً

3- $f'(0^+)$ يساوي ميل نصف المماس Δ_2

نختار نقطتين $A(0,2)$ $B(2,0)$

$$m_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

ومنه $\boxed{f'(0^+) = -1}$

$f'(0^-)$ يمثل ميل نصف المماس Δ_1

نختار النقطتين $A(0,2)$ $C(-1,-1)$

$$m_1 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-2}{-1-0} = 3$$

ومنه $\boxed{f'(0^-) = 3}$

4- $f([-2,+\infty[) = [0,2]$

السؤال الثاني:

1- $C(0,0,z)$

$CA = CB$

$\Longleftrightarrow \quad CA^2 = CB^2$

$\cancel{1^2} + 0^2 + (z-1)^2 = 0^2 + \cancel{1^2} + (z-3)^2$

$(z-1)^2 = (z-3)^2$

$z^2 - 2z + 1 = z^2 - 6z + 9$

$4z = 8 \Rightarrow \underline{z=2}$

$\boxed{C(0,0,2)}$

2- نفرض $M(x,y,z)$

$MA = MB$

$\Longleftrightarrow \quad MA^2 = MB^2$

$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} - 2z + 1$
$= \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 + \cancel{z^2} - 6z + 9$

$-2x - 2z + 2 = -2y - 6z + 10$

$\boxed{x - y - 2z + 4 = 0}$

ط² أكتب معادلة المستوي الذي ناظمه
$\vec{n} = \vec{AB}(-1,1,2)$
ويمر بالنقطة $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$ منتصف $[AB]$.

السؤال الثالث:

1-
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & ; \ x > 0 \\[2mm] \dfrac{x-2}{1-x} & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

2- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{x-2}{x+1}\right] = -2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \frac{0-2}{1-0} = -2$$

بما أن $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

فالتالي f مستمر عند الصفر.

E3 معدل التغير:

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x-2}{|x|+1}+2}{x}$$

من أجل $x>0$:

$$t(x) = \frac{\frac{x-2}{x+1}+2}{x}$$

$$= \frac{x-2+2(x+1)}{x(x+1)}$$

$$t(x) = \frac{x-2+2x+2}{x(x+1)} = \frac{3}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} t(x) = 3 = f'(0^+)$$

أما من أجل $x<0$:

$$t(x) = \frac{\frac{x-2}{-x+1}+2}{x}$$

$$t(x) = \frac{x-2+2(-x+1)}{x(-x+1)}$$

$$= \frac{x-2+2-2x}{x(-x+1)} = \frac{-1}{-x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} t(x) = -1 = f'(0^-)$$

فالتالي f غير اشتقاقي عند الصفر لأن

$$f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

السؤال الرابع:

$$y_n = 4 - \left(y_n + \frac{2}{n+1}\right)$$

$$2y_n = 4 - \frac{2}{n+1}$$

$$\boxed{y_n = 2 - \frac{1}{n+1}}$$

$$x_n = 4 - y_n = 4 - 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{x_n = 2 + \frac{1}{n+1}}$$

E ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

التابع f متناقص تماماً على $[0,+\infty[$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

ليكن التابع g المعرف على $[0,+\infty[$ وفق

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

التابع g متزايد تماماً على $[0,+\infty[$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

2- $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ، $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً } الشرط الأول محقق .

$$x_n - y_n = \frac{2}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{n+1}\right] = 0$$

الشرط الثاني محقق .

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

السؤال الخامس :

1- f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq -\sin x \leq 1$$

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$$

$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة .

$$\lim_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة .

$$f'(x) = 2 - \cos x$$

لكن $-1 \leq \cos x \leq 1$

ومنه $f'(x) > 0$

أي الدالة f متزايدة تماماً .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+ + +
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2- f معرف ومستمر ومطرد تماماً على $\mathbb{R}$ فهو معرف ومستمر ومطرد تماماً على أي مجال جزئي منها كذلك بالنسبة إلى المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{\pi}{2}) = -\pi + 1 < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \pi - 1 > 0 \end{array}\right\} f(-\tfrac{\pi}{2}) \cdot f(\tfrac{\pi}{2}) < 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

ثانياً

التمرين الأول :

1- نعتبر الخاصية E :

$E(n)$: $\quad 0 \leq u_n < 1$

$E(0)$ محققة لأن :

$$0 \leq u_0 = 0 < 1$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

من الفرض $\quad 0 \leq u_n < 1$

ليكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+3) - (3x+1)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} > 0$$

فالدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

ومنه $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$

$$0 \leq \frac{1}{3} \leq \frac{3u_n+1}{u_n+3} < 1$$

$$0 \leq u_{n+1} < 1$$

فالفرضية صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$

وقد أثبتنا ذلك بالتراجع.

2

$$u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - u_n$$

$$= \frac{3u_n+1-u_n(u_n+3)}{u_n+3}$$

$$= \frac{\cancel{3u_n}+1-u_n^2-\cancel{3u_n}}{u_n+3}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$$

وبما أن $0 \leq u_n < 1$

$$\Rightarrow 1-u_n > 0$$

ومنه $u_{n+1}-u_n > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n+1-(u_n+3)}{3u_n+1+(u_n+3)}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n+1-u_n-3}{3u_n+1+u_n+3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{1}{2}\,\frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = -1$

$$v_n = v_0 q^n$$

$$\boxed{v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

4

$$v_n = \frac{(u_n+1)-2}{u_n+1}$$

$$v_n = 1-\frac{2}{u_n+1}$$

$$\frac{2}{u_n+1} = 1-v_n$$

$$u_n+1 = \frac{2}{1-v_n}$$

$$u_n = \frac{2}{1-v_n}-1$$

$$\boxed{u_n = \frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}-1}$$

بما أن $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1+0}-1 = 1$

حل المعادلة $f(x)=x$ فيكون $l=1$

التمرين الثاني :

1] $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

حيث $\varepsilon = \frac{1,1 - 0,9}{2} = 0,1$

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < 0,1$$

$$\left|\frac{x+1-x+1}{x-1}\right| < 0,1$$

$$\frac{2}{|x-1|} < 0,1$$

$$\frac{|x-1|}{2} > 10$$

$$|x-1| > 20$$

من أجل $x > 1$:

$$x-1 > 20$$

$$x > 21$$

ومنه $A = 21$ أو أي عدد حقيقي أكبر من 21 .

2] $f'(x) = \frac{(1)(x-1) - (1)(x+1)}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2x f'(x^2)$$

$$g'(x) = 2x \frac{-2}{(x^2-1)^2}$$

g اشتقاقي من أجل $x^2 \neq 1$

أي أن $g'(x)$ معرف على المجال

$$]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

3] $E(n)$: $f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

$E(1)$ محققة لأن :

$$f^{(1)}(x) = \frac{2(-1) \cdot 1!}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = f'(x)$$

نفرض صحة $E(n)$ أي نفرض أن

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

نبرهن صحة $E(n+1)$:

$$\left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{0 - (n+1)(x-1)^n \cdot 2(-1)^n n!}{\left((x-1)^{n+1}\right)^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}(n+1)!(x-1)^n}{(x-1)^{2n+2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$E(n+1)$ محققة.

فالقضية صحيحة مهما كان $n \geq 1$.

التمرين الثالث: $\boxed{1}$

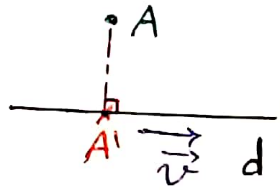
A' تنتمي إلى المستقيم d فهي تحقق:

$$A'(1, 2+t, 3-t)$$

عندئذ:

$$\overrightarrow{AA'}(1, 1+t, 1-t)$$

لكن: $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{v} = 0$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 1 + t - 1 + t = 0$$

$$2t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$$

نعوض في المعادلات الوسيطية:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{A'(1, 2, 3)}$$

$\boxed{2}$

$$r = AA' = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2}$$

$$r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

معادلة الكرة من الشكل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

حيث $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3}$$

$\boxed{3}$ نفرض أن ناظم المستوي $\vec{n}(a, b, c)$

$$\vec{n} \cdot \vec{v_d} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 + b - c = 0 \qquad \boxed{b = c} \text{ — } ①$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a + b + c = 0} \text{ — } ②$$

لنفرض $b=1$ عندئذ $c=1$ و $a=-2$

$$\vec{n}(-2, 1, 1)$$

معادلة المستوي من الشكل:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$-2(x-0) + (y-1) + (z-2) = 0$$

$$\boxed{-2x + y + z - 3 = 0}$$

التمرين الرابع:

$\boxed{1}$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}(-1, 0, 1) \\ &\overrightarrow{AC}(-2, -2, 4) \end{aligned}\right\} \quad \frac{-1}{-2} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{1}{4}$$

المركبات ليست متناسبة فالشعاعان غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

$\boxed{2}$ يجب تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b.\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+2b\\-2a+4b\\4a-6b\end{pmatrix}$$

بالمطابقة:

$-1=-2a+2b$ ... (1)

$0=-2a+4b$ ... (2)

$1=4a-6b$ ... (3)

من (2): $a=2b$

نعوض في (1): $-1=-2b$

$b=\frac{1}{2}$

ومنه $a=1$

نعوض في (3) للتحقق:

$1=4-6(\frac{1}{2})$ محققة

$4-3=1$

إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

فالأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً، فالنقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد.

$\boxed{3}$ من العلاقة:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\cancel{\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{DB}=\cancel{\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$2\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$

ومنه:

$\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

فالنقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,-2)$

أي $\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=-2$

ثالثاً: المسألة الأولى:

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{AS}=(-\overrightarrow{SB})(-\overrightarrow{SA})$

$=\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SA}=SB.SA.\cos A\hat{S}B$

$=(1)(1)\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=SA.SC.\cos A\hat{S}C$

لكن: $AC^2=AB^2+BC^2$

$AC^2=1+1 \Rightarrow AC=\sqrt{2}$

وبالتالي نلاحظ أن:

$AC^2=AS^2+SC^2$

بالتالي حسب عكس فيثاغورث المثلث ASC قائم في S ولدينا $A\hat{S}C=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=(1)(1)\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\boxed{2}$ $l_1=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{DS}$

$=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BD}$

$l_2=2\overrightarrow{BQ}+3\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$

(قطر متوازي الأضلاع المنشأ عليهما)

ومنه $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{BQ} + 3\overrightarrow{BI}$

3) من العلاقة $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين

$(B,2)$ $(C,1)$

من العلاقة $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين

$(S,2)$ $(C,1)$

R منتصف $[AS]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(S,2)$ $(A,2)$

Q منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$ $(A,2)$

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ $(B,2)$ $(C,1)$ $(S,2)$

فحسب الخاصية التجميعية مركز أبعاد تناسبية للنقطتين $(Q,4)$, $(J,3)$

إذن G تقع على (QJ) ---- ①

وحسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين

$(R,4)$, $(I,3)$

فالنقطة G تقع على (IR) ---- ②

من ① و ② نجد أن المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان في النقطة G.

4) بما أن المستقيمين (IR) و (QJ) متقاطعان فالنقاط I, R, Q, J تقع في مستوٍ واحد.

5)
$$\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$$
$$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \quad +$$
$$\overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB})$$
$$\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$$
$$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{SB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{SB}$$
$$(IJ) \parallel (SB) \ldots ①$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SR}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BS}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BS}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$$
$$(QR) \parallel (SB) \ldots ②$$

من ① و ② المستقيمان (IJ) و (QR) متوازيان

حسب النتيجة (المستقيمان المتوازيان لثالث متوازيان)

المسألة الثانية

1) $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

بما أن $x<0$ فإن : $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

بما أن $x>0$ فإن $|x|=+x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$y=-1$ مقارب أفقي لـ C_f في جوار $-\infty$ ،

$y=1$ مقارب أفقي لـ C_f في جوار $+\infty$

إشارة المقام:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C_f

في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}(x+1) - \sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2}$$

بالإصلاح:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - \left((x+1)^2+1\right)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} < 0$$

التابع f متناقص تماماً على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

3) معادلة المماس من الشكل:

$$T:\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

3- $f(0)=\sqrt{2}$, $f'(0)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

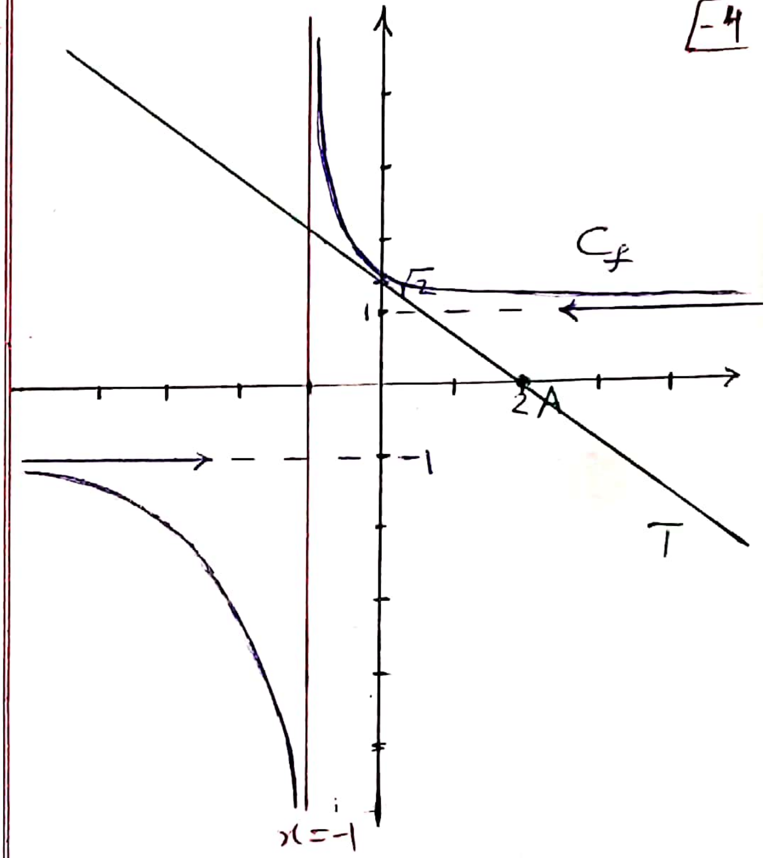
$$\boxed{T:\ y=\frac{-1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}}$$

نعوض $x=2$:

$$y=\frac{-2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$$

فالنقطة $A(2,0)$ تنتمي إلى T.

4-



5- نناقش حالتين :

- $m\in[-1,1]$

المعادلة $f(x)=m$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- $m\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلاً وحيداً.

6-

$$g(x)=\frac{\sqrt{(x+2)^2+1}}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1}$$

نلاحظ أن $g(x)=f(x+1)$

C_1 ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $-\vec{i}$

عبدالملك خيرالله