اللآلئ المضيئة في العلاقات الرياضية.

حل الأنشطة والتمارين العامة..

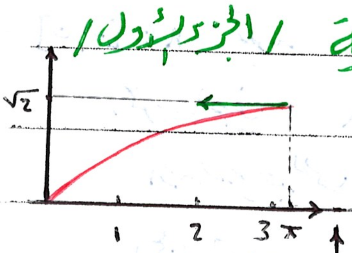
للجزئين..

لطلاب دورة ٢٠٢٠...

المدرس: محمد شعبان الصباغ / هـ: ٠٩٤٣٤٢١٣١٥٩

أستاذ الرياضيات لمدارس المتفوقين

النهايات والاستمرار



تدريب 54 ! $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$

1) ما مجموعة التعريف ؟ هل f مستمر على D_f

2) بين أن التابع f زوجي ويقبل 2π دوراً له ؟

4) ليكن g مقصور f على المجال $[0,\pi]$

أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني

5) استنتج الخط البياني لـ f على $[-2\pi,2\pi]$

ما مجموعة تعريف f' .

الحل: f معرف من أجل $1-\cos x\geq 0$

$\cos x\leq 1$ وهي محققة أي أن $D_f=\mathbb{R}$

2) f هو عبارة عن تركيب تابعين $1-\cos x$ و $\sqrt{x}$ وكل منهما مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}$

3) $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1-\cos x}=f(x)$

أي أن f تابع زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

$f(x+2\pi)=\sqrt{1-\cos(x+2\pi)}=\sqrt{1-\cos x}$

$=f(x)$

أي أن f تابع دوري دوره 2π .

4) $f(x)=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt2\left|\sin\frac{x}{2}\right|$

في المجال $[0,\pi]$ لدينا $\sin\frac{x}{2}\geq 0$ أي أن

$g(x)=\sqrt2\sin\frac{x}{2}$ $\quad [0,\pi]$

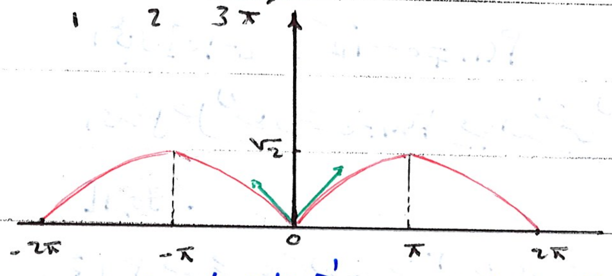
$f'=\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

في المجال $[0,\pi]$

$f'=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{x}{2}$ ومنه f اشتقاقي على $[0,\pi]$

$g'(x)=\sqrt2\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{x}{2}$

أي أن g اشتقاقي على $[0,\pi]$



نستنتج من الرسم أن f' غير معرف عند (0)

أي f' غير معرف عند $0+2\pi k$ $\quad k\in Z$

لدينا f تابع دوري دوره 2π .

تدريب 61 ! $\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x-\cos x$

1) احسب $f(0)$ ، $f(\frac{\pi}{2})$ واستنتج أنه يوجد α يحقق $f(\alpha)=0$

2) اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$

3) استنتج أن كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي للمجال $]0,1[$

4) برهن أن التابع $f(x)=x-\cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ ، واستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]0,1[$

1) بما أن f مستمر ولدينا $f(0)=-1$ ، $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ من مبرهنة القيم الوسطى يوجد $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ يكون حلاً للمعادلة $f(x)=0$

2) $f(x)=0\Rightarrow x-\cos x=0$

$\Rightarrow x=\cos x\in[-1,1]$

3) لدينا $x\in]0,1[$ $\quad f(0)\times f(1)<0$ $\quad f(0)=-1$ ، $f(1)=1-\cos(1)$

وبسبب الاستمرار f فإنه يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha\in]0,1[$

أ. محمد حسون الصباغ "0932413159"

$x \in [-1,0]$ يكون x سالب و $\cos x$ موجب

مجموع سالبين أي $f(x) = x - \cos x$

أي لا يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل في

المجال $[-1,0]$. كما أن $f(1) \neq 0$

ولكن حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي للمجال

$]0,1[$.

٤) f هو مجموع تابعين متزايدين على $]0,1[$

فهو متزايد تماماً على المجال ذاته، فهو ينعدم

مرة على الأكثر على هذا المجال أي أن للمعادلة

$f(x)=0$ حل وحيد على الأكثر في المجال $]0,1[$

أنشطة ...

نشاط (1) $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ $\quad]0,+\infty[$

١) لماذا يكون المستقيم $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$

مقارباً للخط C في جوار $+\infty$ ؟

٢) بيّن الوضع النسبي لـ C و Δ .

$f(x) - y = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$

أي أن $y = x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$f(x) - y = \frac{1}{x} > 0$

أي C فوق Δ .

$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$ $\quad [0,+\infty[$

١) عيّن عددين b , c بحيث $f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$

٢) استنتج أن C يقبل مقارباً مائلاً Δ وبيّن وضع C

بالنسبة له.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+1 & x+3 \\ \hline -(2x^2+6x) & 2x-6 \\ -6x+1 & \\ -(-6x-18) & \\ 19 & \end{array}$$

$f(x) = 2x - 6 + \frac{19}{x+3}$

$b = -6 \quad c = 19$

ومنه $y = 2x - 6$ مقارب مائل لـ C

$\lim_{x \to +\infty} (f - y) = 0$

$f - y = \frac{19}{x+3} > 0$

أي C فوق Δ .

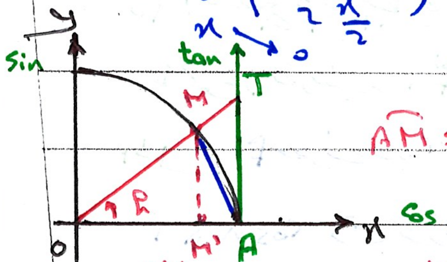
نشاط (٢) ١) احسب $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-(1-\cos x)}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[-2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2\right]$

$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}}\right)^2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= -2\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$



٢) $OA = 1$ $\quad \overset{\frown}{AM} = h$

* مساحة المثلث OAM ≤ مساحة القطاع OAM ≤ مساحة المثلث OAT

١) لماذا مساحة القطاع $OAM = \frac{h}{2}$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} r^2 h$ $\quad r = 1$

ومنه مساحة القطاع $OAM = \frac{1}{2} h$

٢) لماذا مساحة $OAM = \frac{1}{2} \sin h$

$S_{OAM} = \frac{1}{2} OA \times MM' = \frac{1}{2}(1) \times 1 \cdot \sin h$

$= \frac{1}{2} \sin h$

٣) لماذا مساحة المثلث $OAT = \frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$

$S_{OAT} = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan h$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$

٤) استنتج من * أن $\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$

* مساحة المثلث OAM ≤ مساحة القطاع OAM ≤ مساحة OAT

$\frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h} \geq \frac{1}{2} h \geq \frac{1}{2} \sin h$

$\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$

٥) استنتج أن $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$

لدينا $h \leq \frac{\sin h}{\cos h} \Rightarrow \cos h \times h \leq \sin h$

$\cos h \leq \frac{\sin h}{h}$ ... ①

لدينا $\sin h \leq h \Rightarrow \frac{\sin h}{h} \leq 1$ ... ②

من ① و ② نجد: $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$

الحل: وجدنا أنه $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

وحسب مبرهنة الإحاطة نجد أنه

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

وبما أن التابع $\frac{\sin x}{x}$ زوجي على $\mathbb{R}^*$

فالنهاية من اليسار عند (0) تساوي النهاية من اليمين عند (0) ونرمز بالشكل العام

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

تطبيق $\frac{5}{66}$: $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin x}$ احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$f(x) = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x - \cos x}{x\cdot \sin x}$$

$$= \frac{4\cos^3 x - 4\cos x}{x\cdot \sin x} = \frac{-4\cos x(1-\cos^2 x)}{x\cdot \sin x}$$

$$= \frac{-4\cdot\cos x\cdot \sin^2 x}{x\cdot \cancel{\sin x}} = -4\cos x\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -4(1)(1) = -4$$

~~~ * ~~~ * ~~~

$\frac{8}{69}$: P كثير حدود من الدرجة n يكتب بـ

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

اثبت أنه إذا كان n عدداً فردياً عندئذٍ يقبل P جذراً حقيقياً على الأقل..

• $a_n > 0$ عندئذٍ

• $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(a_n x^n) = +\infty$

إذن يوجد عدد حقيقي a يحقق $P(a) > 0$

• $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(a_n x^n) = -\infty$

إذن يوجد عدد حقيقي b يحقق $P(b) < 0$

وبما أن P مستمر على $[a,b]$ ويحقق $P(a)\times P(b) < 0$ فالمعادلة $P(x)=0$ لها حل c على الأقل $\in [a,b]$ وهو يحقق المطلوب

• $a_n < 0$ .. عندئذٍ نأخذ Q كثير حدود من الشكل $Q(x) = -P(x)$

أي يوجد عدد حقيقي c يحقق $Q(c) = 0$

يكون $P(c) = 0$ أيضاً

~~~ * ~~~ * ~~~

$\frac{21}{72}$: $f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$ $\mathbb{R}$

① نهايات f عند $\mp\infty$

② احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

③ a) استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يطلب إيجاد معادلتيهما..

وادرس الوضع النسبي لـ C بالنسبة لكل من Δ_1 و Δ_2

الحل: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$ عدم تعيين

$$f(x) = x - x\sqrt{\left|4-\frac{1}{x^2}\right|}$$

$$= x\left[1-\sqrt{\left|4-\frac{1}{x^2}\right|}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-2) = +\infty$$

• $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{|4x^2-1|}-2x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|4x^2-1|-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}-1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}\right) = 0$$

ومنه $\Delta_1: y = 3x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$4x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{2}$

$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|4x^2-1|}+2x\right)$$

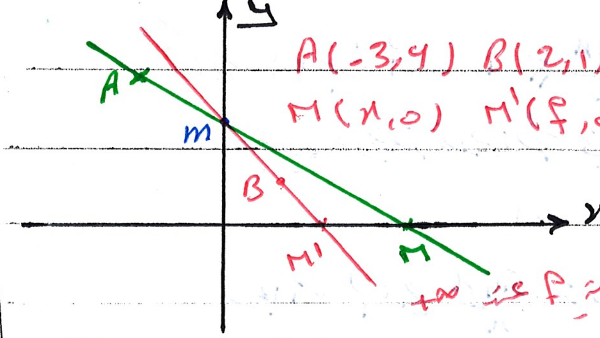
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}-1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x} = 0$$

ومنه $\Delta_2: y = -x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

ولدراسة الوضع النسبي للمقاربات ...

$\frac{38}{76}$

$A(-3,4)$ $B(2,1)$
$M(x,0)$ $M'(f,0)$



$\Delta_1 : y = 2x$

$f(x) - y_{\Delta_1} = \sqrt{|4x^2-1|} - 2x$

$f(x) - y_{\Delta_1} = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2-1|} = 2x$

نربع الطرفين من أجل $x > 0$

$|4x^2-1| = 4x^2$

إما $4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

أو $4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8}$

$x = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$ السالب مرفوض

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f - y_{\Delta_1}$	$+$	0	$-$

فوق Δ_1 ، $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ، تحت Δ_1

(C) و Δ_1 لهما نقطة تقاطع

$\Delta_2 : y = -2x$

$f(x) - y_{\Delta_2} = \sqrt{|4x^2-1|} + 2x$

$f(x) - y_{\Delta_2} = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2-1|} = -2x$

نربع الطرفين من أجل $x < 0$

$|4x^2-1| = 4x^2$

إما $4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

أو $4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8}$

$x = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$ الموجب مرفوض

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f - y_{\Delta_2}$	$-$	0	$+$

تحت Δ_2 ، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ، فوق Δ_2

(C) و Δ_2 لهما نقطة تقاطع

(1) أوجد نهاية f عند $+\infty$

عندما تسعى x إلى $+\infty$ يصبح المستقيم (AM) موازيًا لمحور الفواصل فتنطبق m على النقطة $C(0,4)$ (على استقامة واحدة مع A) والمستقيم (CB) معادلته

$y - y_B = m'(x - x_B)$; $m' = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-3}{2}$

$y = \frac{-3}{2}x + 4$ والمستقيم (CB) يقطع محور الفواصل في النقطة M' حيث $y = 0 \Rightarrow$

$0 = \frac{-3}{2}x + 4 \Rightarrow x_{M'} = \frac{8}{3} = f$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{8}{3}$

(2) أثبت أن $f(x) = \frac{8x}{3x-3}$

لتكن $m(0, y_m)$

$\vec{AM}(x+3, -4)$
$\vec{Am}(3, y_m - 4)$
مرتبطان خطيًا لأن A, m, M على استقامة واحدة

$\frac{x+3}{3} = \frac{-4}{y_m - 4} \Rightarrow (y_m - 4)(x+3) = -12 \Rightarrow y_m = \frac{4x}{x+3}$

$\vec{BM'}(f(x) - 2, -1)$
$\vec{Bm}\left(-2, \frac{3x-3}{x+3}\right)$
مرتبطان خطيًا

$\frac{f(x) - 2}{-2} = \frac{-1}{\frac{3x-3}{x+3}} = \frac{-x-3}{3x-3}$

ومنه $f(x) = \frac{8x}{3x-3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{8}{3}$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{8}{3}$ ، $y = \frac{8}{3}$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

تكون احداثيات M' هي $M'\left(\frac{8}{3}, 0\right)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي لأن المستقيم (MB) يصبح موازيًا لمحور الفواصل ولا يتقاطع معه.

(4) $g(x) = f(x)$ من أجل $x \neq -3$

$g(-3) = 2$

$\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} g(x) = g(-3) \Rightarrow$ إذن g مستمر عند النقطة (-3)

الاشتقاق

نشاط 98 : $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$ ، $]-1,+\infty[$

1) أحسب f' على $]-1,+\infty[$ وتحقق أن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$

$$f'(x)=\frac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$$

المقام موجب ومنه إشارة f' هي من إشارة البسط

2) $g(x)=2x^3-3x^2-1$ على $]-1,+\infty[$

a) ادرس تغيرات g

b) اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha\in]1{,}6\,,\,1{,}7[$

c) استنتج إشارة $g(x)$

a) g مستمرة ومطردة تماماً على $]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=-6$

$g'(x)=6x^2-6x$ ، $g'=0$

$x=0$ ، $g(0)=-1$

$x=1$ ، $g(1)=-2$

x	-1		0		1	α	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow 0$	$+\infty$

b) نلاحظ من جدول التغيرات أن g مستمرة ومطردة تماماً على $]1,+\infty[$ ، $0\in g(]1,+\infty[)$

إذن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α في $]1,\infty[$

$g(1{,}6)=0{,}51-1<0$

$g(1{,}7)=1{,}56-1>0$

$g(1{,}6)\times g(1{,}7)<0$

إذن $1{,}6<\alpha<1{,}7$ حسب مبرهنة القيم الوسطى

c) نلاحظ من جدول التغيرات أن $g<0$ على $]-1,\alpha[$ ، $g>0$ على $]\alpha,+\infty[$

3) من النتائج السابقة نظم جدول تغيرات f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4) معادلة المماس في النقطة A التي فاصلتها $x=0$ وادرس الوضع النسبي لـ C ومماسه Δ على $]-1,1[$

$f(0)=1$ ، $m=f'(0)=-1$

ومنه معادلة المماس $T: y=1-x$

ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-(1-x)=\frac{-x^3(1-x)}{x^3+1}$$

على المجال $]-1,1[$ المقام موجب إذن إشارة الفرق هي من إشارة البسط

x	-1		0		1	$+\infty$
$-x^3$		$+$	0	$-$		
$1-x$		$+$		$+$	0	
الفرق		$+$	0	$-$	0	
		C فوق T		C تحت T		

$(0,1)$ نقطة انعطاف

$(1,0)$ نقطة تقاطع C و Δ .

5) اثبت أن C يقع فوق المستقيم d الذي يمس C في النقطة التي فاصلتها $x=1$

$f(1)=0$ ، $f'(1)=-\frac{1}{2}$

ومنه معادلة المماس d هي $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)}$$

$(1-x)^2$ موجب

$1+x+x^2$ موجب لا تنعدم

x^3+1 موجب على $]-1,+\infty[$

$f-\frac{1}{2}(1-x)>0$ أي C فوق d

في حال تعذر تعيين إشارة f' جبرياً ندرس تغيرات تابع مساعد g ونستنتج منه الإشارة المطلوبة.

الملف العلمي الرياضي — أ. محمد حسن الصباغ ٠٩٣٣٤٢٣١١٥٩

تمرين 99

$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

1) a) تحقق أن f معرف على $[0,2]$

f معرف من أجل $x(2-x) \geq 0$

$x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 ,\ x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	
		سالب		موجب		سالب	

$D_f = [0,2]$

b) اثبت أن f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على المجال $]0,2[$

على المجال $]0,2[$ التابع $u(x) = x(2-x)$ اشتقاقي وموجب تماماً على $]0,2[$ إذن $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ اشتقاقي على $]0,2[$

$f(x) = x\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \sqrt{2x - x^2} + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\,x$$

$$= \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

2) احسب نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x(2-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

إذن f اشتقاقي عند (0) و $f'(0) = 0$

3) احسب نهاية $\frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ عندما $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \left(-x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) = -\infty$$

فالتابع f ليس اشتقاقي عند 2.

ولكن خط البيان يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = 2$

4) a) تغيرات f.

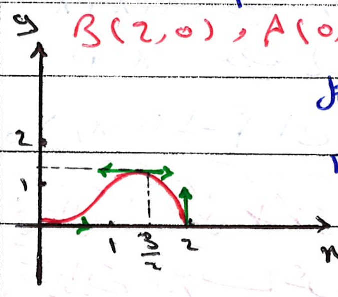
f معرف ومستمر على $[0,2]$ واشتقاقي على $[0,2[$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
f'	0	$+$	0	$-$	$\|$
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

b) عين المماسين في النقطتين $A(0,0)$, $B(2,0)$

في النقطة A المماس هو محور الفواصل

في النقطة B المماس هو المستقيم الذي معادلته $x = 2$



تمرين 100

$f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

1) تحقق أن f دوري دوره 2π وادرس الشفعية ثم استنتج أنه يكفي دراسة f على $[0,\pi]$

$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi)$

$= 2\sin x + 2\sin 2x = f(x)$

إذن f تابع دوري دوره 2π.

$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$

$= -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$

بما أن f تابع دوري دوره 2π وبما أن f تابع فردي وخط البيان متناظر بالنسبة للمبدأ لذلك يكفي دراسته على المجال $[0, \frac{T}{2}] = [0,\pi]$

2) اثبت أن $f' = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f' = 2\cos x + 2\cos 2x$

$= 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1)$

$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$

$= 2\left(2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\cos x + 1)\right)$

$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$

$f' = 0 \Rightarrow 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

إما $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

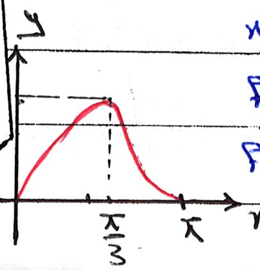
إما $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \notin [0,\pi]$

أو $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k$

$k = 0 \Rightarrow x = \pi \qquad f(\pi) = 0$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'	4		0		0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

المكتب العلمي الرياضي

أ. محمد عدنان الصباغ ٠٩٣٣٤٣١١٥٩

نشاط ١٠١ : ٦/ لإن التوجهات عدم التحقق من الصيغة

لتكن f عند نقطة a علينا أن

نحاول كتابة f بالشكل $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

حيث g اشتقاقي عند a عندئذٍ يكون

$$\lim_{x \to a} f(x) = g'(a)$$

مثال: $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

نهاية f عند الصفر ...

لنكتب $g(x) = \sqrt{x+4}$ $\quad a = 0$

$g(0) = 2 \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

$g'(0) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$$

$f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \qquad \frac{\pi}{4}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x - 1} \qquad 1$

نشاط ١٠٢ : الاشتقاق من اليمين واليسار

$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1} \qquad \mathbb{R}$

١) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$$

$$= \frac{x+2-2x-2}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0^+} t(x) = -1$$

إذن f قابل للاشتقاق من اليمين.

ومعادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني في النقطة A هي

$y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 2$

$m = \lim_{x \to 0^+} t(x) = -1$ ميلها

٢) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة نصف المماس

من اليسار في النقطة $A(0,2)$

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x}$$

$$= \frac{x+2+2x-2}{x(-x+1)} = \frac{3}{-x+1}$$

ومنه

$$\lim_{x \to 0^-} t(x) = 3$$

إذن f قابل للاشتقاق من اليسار

ومعادلة نصف المماس من اليسار للخط البياني في النقطة A هي

$y - 2 = 3(x - 0) \qquad y = 3x + 2$

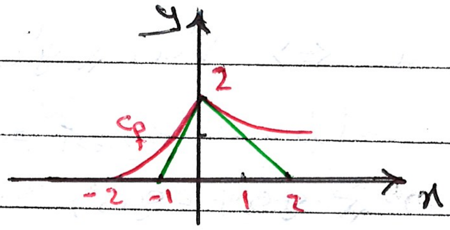
$m = \lim_{x \to 0} t(x) = 3$

٣) ارسم نصفي المماسين وارسم C على المجال $[-2,2]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{2+x}{-x+1} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ \frac{3}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases}$$

x	-2		0		2
f'		+	3 ‖ -1	−	
f	0	↗	2	↘	$\frac{4}{3}$



تمرين ١٠

لنتأمل تابعين f و g معرفين ومستمرين واشتقاقيين على المجال $[0,+\infty[$ و $g'(x) \geq f'(x)$ أكيد $x \geq 0$

بدراسة التابع h المعرف على $[0,+\infty[$

$$h(x) = f(x) - f(0) - g(x) + g(0)$$

أثبت أن $f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

لدينا $h(x) = f(x) - f(0) - g(x) + g(0)$

نشتق $h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$

إذن h تابع متناقص

إذن جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
h'	$-$	
h	0	$\searrow$

$h(x) \leq 0 \Rightarrow$

$f(x) - f(0) - g(x) + g(0) \leq 0$

$f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

حصص $\sin x$, $\cos x$

1a) أثبت أن $\sin x \leq x$, $x \geq 0$

بفرض $g(x) = x - \sin x$, $\mathbb{R}$

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

تابع متزايد على المجال $[0,+\infty[$ باعتبار أن $g(0) = 0$ أي $g(x) \geq 0$ ومنه

$x - \sin x \geq 0 \Rightarrow x \geq \sin x$

b) بإثبات $f(x) = -\cos x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$

برهن $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

محققة دائماً. لدينا $\cos x \leq 1$

$f'(x) = \sin x \qquad g'(x) = x$

لدينا $\sin x \leq x \Leftrightarrow f'(x) \leq g'(x)$

وحسب المبرهنة الأولى نجد أن

$f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

$-\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2} - 0$

أي $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

وبالتالي يكون $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

أياً كانت $x \geq 0$

2) a) أثبت أن $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, $x \geq 0$

نأخذ $f(x) = \sin x \qquad g(x) = x - \frac{x^3}{6}$

f و g اشتقاقيان على $[0,+\infty[$

$f'(x) = \cos x \qquad g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

وحسب الطلب السابق $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$f'(x) \geq g'(x)$ ومنه نجد

$f(x) - f(0) \geq g(x) - g(0)$

$\sin x - 0 \geq x - \frac{x^3}{6} - 0$

ومن الطلب السابق $x \geq \sin x$ ومنه

$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

$f(x) = \cos x \qquad f' = -\sin x$

$g' = -x + \frac{x^3}{6}$

وجدنا $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$

$\Rightarrow -\sin x \leq -x + \frac{x^3}{6} \Rightarrow f' \leq g'$

ومنه $f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

$\cos x - 1 \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1$

$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ ← (1)

ومن b $\quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ (2)

من (1) و (2): $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

وأخيراً نبين أن

$x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

$f(x) = \sin x$

$g' = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad f' = \cos x$

ومماثلة للسابق.

الملف العلمي الرياضي

أ. محمد حسين الصباغ ٠٩٣٤٣١١٥٩

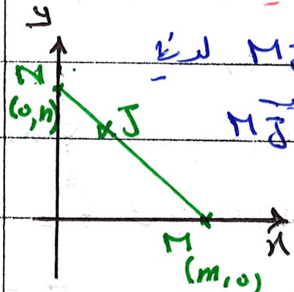
جلسات تحضيرية مكثفة للطلاب دورة

تمرين 11 ص106

$M(m,0)$ $\quad 0 \le m \le 3$

$N(0,n)$ $\quad n \ge 0$ $\quad MN = 3$

$MJ = 2$ ، عين المحل الهندسي للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$



لدينا $MJ = 2 \Rightarrow$

$\vec{MJ} = \frac{2}{3}\vec{MN}$

$\vec{MO} + \vec{OJ} = \frac{2}{3}(\vec{MO} + \vec{ON})$

$3\vec{MO} + 3\vec{OJ} = 2\vec{MO} + 2\vec{ON}$

$3\vec{OJ} = -\vec{MO} + 2\vec{ON} \Rightarrow$

$3\vec{OJ} = \vec{OM} + 2\vec{ON}$

المثلث OMN قائم في O ولدينا حسب فيثاغورث

$OM^2 + ON^2 = MN^2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 9$

$\Rightarrow n = \sqrt{9 - m^2}$

ونفرض $J(x,y)$ نعوض في *

$3x\vec{i} + 3y\vec{j} = m\vec{i} + 2n\vec{j}$

بالمطابقة $\Rightarrow m = 3x$ ① $\quad 2n = 3y$

نعوض ① في ② نجد ② $\quad 2\sqrt{9-m^2} = 3y$

$2\sqrt{9-9x^2} = 3y \Rightarrow 2\times 3\sqrt{1-x^2} = 3y$

ومنه $y = 2\sqrt{1-x^2}$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة J.

ومن ① $m = 3x \Rightarrow x = \frac{m}{3}$

لدينا حسب نص السؤال $m \in [0,3] \Rightarrow x \in [0,1]$

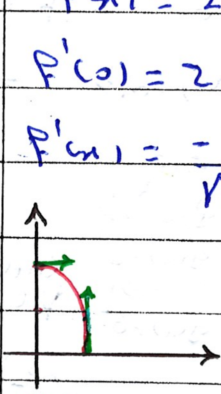
ولرسم المحل الهندسي للنقطة J ندرس تغيرات

$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ $\quad [0,1]$

$f'(0) = 2$ $\quad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad f' = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ $\quad f(0) = 2$



x	0		1
f'	0	−	‖
f	2	↘	0

تمرين 19 ص107

$x^2 - 2x + 4y^2 = 3$

اثبت أن C هو اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ، ثم ارسم C.

$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \Rightarrow$

$y^2 = \frac{-x^2+2x+3}{4}$

$y^2 \ge 0 \Rightarrow -x^2+2x+3 \ge 0$

$\Rightarrow (x+1)(3-x) \ge 0 \Rightarrow$ $\quad -1 \le x \le 3$

$-\infty$	-1		3	$+\infty$
−	0	+	0	−

$f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$

$x \in [-1,3]$ $\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$

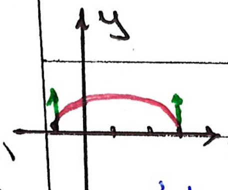
$f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$ $\quad [-1,3]$

$f(-1) = 0$ $\quad$ f معرف ومستمر على $[-1,3]$

$f(3) = 0$ $\quad f' = \frac{1}{2}\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

f اشتقاقي على $]-1,3[$

$f' = 0 \Rightarrow x = 1$ $\quad f_1(1) = 1$



x	-1		1		3
f'	‖	+	0	−	‖
f	0	↗	1	↘	0

نظير C_1 بالنسبة لمحور الفواصل هو C_2 لأنه

$f_2(x) = -f_1(x)$ أياً يكن $x \in [-1,3]$

ومنه $C_1 \cup C_2$ قطع ناقص.

تمرين 21 ص109

$f'(0) = 1$ $\quad f(0) = 0$

~~f متزايد على المجال $[0,\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$~~

فقط لكثير الحدود الخطوط البيانية

f متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$

ونأخذ الفقرة (1) لكن (0) هو الصحيح

$f'(x) = ax^2 + 1$ $\quad a \in \mathbb{R}^*_+$

نكامل ونعوض $f(0) = 0$ ان

$f(x) = bx^3 + x$

ت 33/111

$f(x) = x\cos x$

① احسب f' و f''

② اثبت مستخدماً البرهان بالتدريج

$f^{(n)}(x) = x\cos(x+\frac{n\pi}{2}) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

$f'' = -\sin x - (\sin x + x\cos x)$

$= -2\sin x - x\cos x$

من أجل $n=1$

$f'(x) = x\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x$

$= -x\sin x + \cos x$

والعلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $f^{(n)}(x) = x\cos(x+n\frac{\pi}{2}) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$

الطلب: $f^{(n+1)}(x) = x\cos(x+(n+1)\frac{\pi}{2}) + (n+1)\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x) = x\cos(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) + (n+1)\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

$= -x\sin(x+n\frac{\pi}{2}) + (n+1)\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

الإثبات: نشتق الفرض.

$(f^{(n)}(x))' = \cos(x+\frac{n\pi}{2}) - x\sin(x+\frac{n\pi}{2}) - n\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2}) - x\sin(x+\frac{n\pi}{2}) - n\sin(x+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2})$

$= \cos(x+\frac{n\pi}{2}) - x\sin(x+\frac{n\pi}{2}) + n\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x) = (n+1)\cos(x+\frac{n\pi}{2}) - x\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

والعلاقة محققة من أجل $(n+1)$ مهما يكن n

34/111

$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ ① أوجد a, b

② أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$

$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$2x = A(x+1) + B(x-1)$

نعوض $x=1$: A $2 = 2A \Rightarrow \boxed{A=1}$

نعوض $x=-1$: B $-2 = -2B \Rightarrow \boxed{B=1}$

$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{-2(x-1)(-1)}{(x-1)^4} + \frac{-2(x+1)(-1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$

ومنه نستنتج

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

35/112

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f(0)=0$

$g(x) = f(x) + f(-x)$

a) تحقق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$

واحسب $g'(x)$

b) احسب $g(0)$ واستنتج f فردي

لدينا f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ أيضاً

$g(x) = f + f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

لأنه مجموع تابعين كل منهما اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$g'(x) = f'(x) - f'(-x)$

$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

b) لدينا $f(0)=0 \Rightarrow g(0) = f(0) + f(0) = 0$

لدينا $g(x) = f(x) + f(-x) = 0$ لأن $g'=0$ و $g(0)=0$ إذن $g(x)=0$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ إذن f تابع فردي

[2] $h(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ ، $]0,\infty[$

a) تحقق أن h اشتقاقي على I وأوجد h' على I

b) أثبت أن $h(x) = 2f(1)$

c) استنتج أن $\lim f$ عند $+\infty = 2f(1)$

لدينا f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على $]0,\infty[$

$\frac{1}{x}$ اشتقاقي على R^* فهو اشتقاقي على $]0,\infty[$

ومنه $h(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

اشتقاقي على $]0,\infty[$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = 0$$

b) إذن h تابع ثابت على $]0,+\infty[$

$h(1) = 2f(1) \Rightarrow h(x) = 2f(1)$

c) لدينا $h(x) = 2f(1)$ من I

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2f(1)$ كونه ثابت

d) ماذا تستنتج بالنسبة للخط البياني C؟

الحل

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2f(1)$

$y = 2f(1)$ d مقارب أفقي لـ C في جوار $+\infty$

[3] لتكن $K(x) = f(\tan x) - x$

$J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) احسب K'، ماذا تستنتج

b) احسب $f(1)$

c) نظم جدول تغيرات f على R

d) ارسم المستقيمات المقاربة، ارسم المماسات في النقاط التي فواصلها ٠، ١، -١ ثم ارسم C

$$K'(x) = (1+\tan^2 x) f'(\tan x) - 1$$

$$= (1+\tan^2 x) \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 0$$

ومنه K تابع ثابت على J

$K(0) = f(0) - 0 = 0 \Rightarrow K(x) = 0$

$\Rightarrow f(\tan x) - x = 0 \Rightarrow$

$f(\tan x) = x$ ... *

للحصول على $f(1)$ نختار $x = \frac{\pi}{4}$ ونعوض في *

$f(\tan\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{4}$ ... II

c) لننظم جدول التغيرات ...

من الطلب الثاني لدينا $h(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$\Rightarrow f(x) = h(x) - f(\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) - \lim_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$$

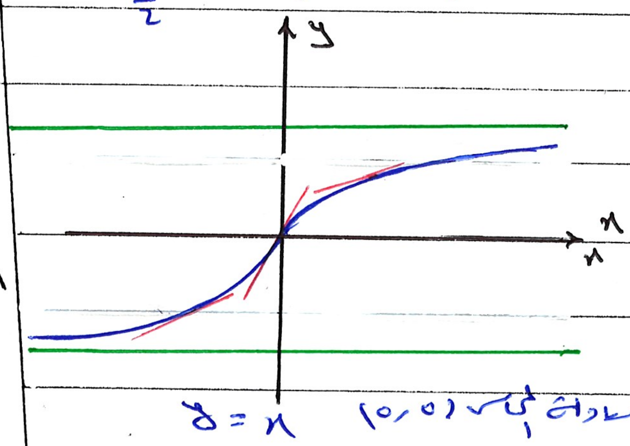
$= 2f(1) - f(0) = 2f(1)$ من I

$= 2(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$ من II

وبما أن f فردي فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

تم إدراج العدد ١ للجدول لحاجتنا إليه في حساب ميل المماس

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$	
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



معادلة المماس في $(0,0)$: $y = x$

" " $(1, \frac{\pi}{4})$: $y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4}$

" " $(-1, -\frac{\pi}{4})$: $y = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{\pi}{4}$

انتهى بحث النهايات والاشتقاق

الملف العلمي الرياضي
أ. محمد حسون الصباغ ٠٩٣٢٤٣١١٥٩

قراءة الخطوط البيانية وجدول التغيرات

أولاً: قراءة الخط البياني..

[1] مجموعة التعريف: هي حركات الخط البياني على محور $x'x$.

[2] صورة مجال (صورة مجموعة التعريف) أو المستقر الفعلي: هي حركات الخط البياني على $y'y$.

[3] $f'(x_0)$: ميل المماس في x_0

- إذا كان المماس أفقي تكون $f'(x_0)=0$
- " " " مائل نوجد قيمة المشتق من خلال نقطتين على المماس وذلك من خلال

$$m = f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

[4] $f(x_0)$: نقيم من x_0 عموداً فيتقاطع مع الخط البياني بنقطة نسقطها على المحور $y'y$ فيكون الناتج.

[5] ما عدد حلول المعادلة $f(x)=m$: نرسم المستقيم الأفقي $y=m$ ($// x'x$) فيتقاطع مع الخط البياني بعدد نقاط هو عدد الحلول.

[6] القيم الحدية: كبرى محلية، صغرى محلية، صغرى، كبرى

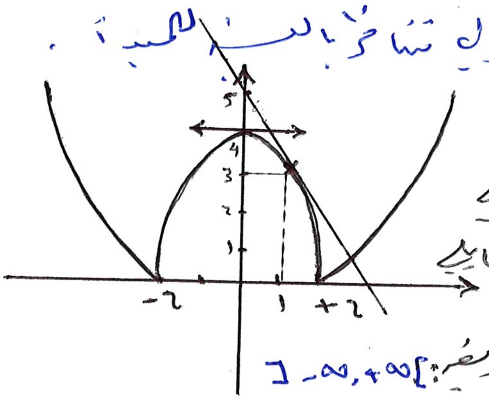
[7] هل f مستمر عند x_0: إذا كان منقطع عند x_0 فهو غير قابل للاشتقاق عند x_0.

[8] النهايات: $x \to +\infty$ نبحث عن y في اليمين
$x \to -\infty$ " " " في اليسار
$x \to a^+$ نبحث عن y في يمين $x=a$
$x \to a^-$ " " " في يسار $x=a$

[9] المقاربات: نبحث عن الخطوط التي يقترب منها الخط البياني من مستقيم.

[10] زوجي أم فردي: زوجي الخط البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.
فردي الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

تمرين شامل: لاحظ الخط البياني للتابع f أجب عما يلي



1) أوجد مجموعة التعريف: $]-\infty,+\infty[$

2) المستقر الفعلي للتابع $f(D)$: $[0,+\infty[$

3) $f(0)=4$ $f(2)=0$ $f(1)=3$

4) $f'(0)=0$ لأن المماس أفقي.

5) $f'(1)$ مماس عندها مائل نختار نقطتين $(0,5)$ $(1,3)$

$$f'(1)=\frac{5-3}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

6) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ أربعة حلول

7) " " " $f(x)=6$ ثلاثة حلول

8) ما عدد القيم الحدية وبين نوعها. ثلاثة

$f(-2)=0$ قيمة حدية صغرى
$f(2)=0$ " " صغرى
$f(0)=4$ " " كبرى

9) معادلة المماس في $x=0$: أفقي ولذلك معادلته $y=4$

10) هل f زوجي أم فردي: زوجي لأن الخط البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

محمد رحمون الصباغ ٠٩٣٤١٢١١٥٩

ثانياً: قراءة جدول التغيرات ..

1) مجموعة التعريف: من السطر الأول

2) المستقر الفعلي (مجموعة القيم): السطر الأخير

3) $f'(x)$: السطر الثاني.

4) $f(a)=b$
← سطر أول
← سطر ثالث

5) عدد حلول المعادلة $f(x)=m$
نستخدم m في السطر الثالث من الجدول

6) المقاربات:

∞ b

a ∞

$x=b$ مقارب شاقولي // $y'y$

$y=a$ مقارب أفقي // $x'x$

∞ ∞ يوجد احتمال وجود مقارب مائل.

7) الاطراد التابع: $f'>0$ متزايد تماماً

$f'<0$ متناقص تماماً.

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
f'		$+$		//////		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) مجموعة التعريف: $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

2) المستقر الفعلي: $\mathbb{R}$.

3) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$: حل وحيد.

4) $f(5)=1$ $f'(5)=0$

5) المقاربات الأفقية والشاقولية

$y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$.

$x=2$ مقارب شاقولي // $y'y$

$x=-2$ // // // $y'y$

6) هل يوجد إمكانية وجود مقارب مائل
لا يوجد

7) القيم الحدية: $f(5)=1$ قيمة حدية كبرى

كبرى $\nearrow\ \searrow$

صغرى $\searrow\ \nearrow$

عدد
كبرى $\searrow$
عدد

صغرى $\nearrow$

في حال وجود ∞ ليست قيمة حدية

$\searrow\ \searrow$ أو $\nearrow\ \nearrow$ ليست قيمة حدية

8) الاطراد التابع:

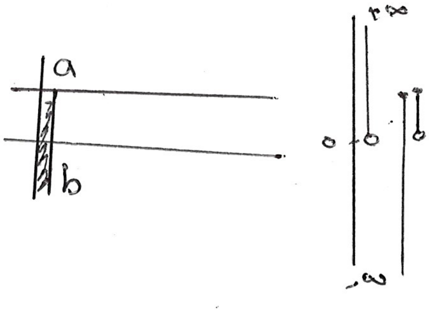
$]-\infty,-2[$ متزايد تماماً

$]2,5[$ // //

$]5,\infty[$ متناقص تماماً

الحالات محصورة من السطر الأول

(a,b) القطع مقاربة.



أ. محمد رسول الصباغ
٠٩٣٤١٣١١٥٩

الملتقى العلمي الرياضي
أ. محمد محمود الصباغ ٠٩٣٤٣١١٥٩

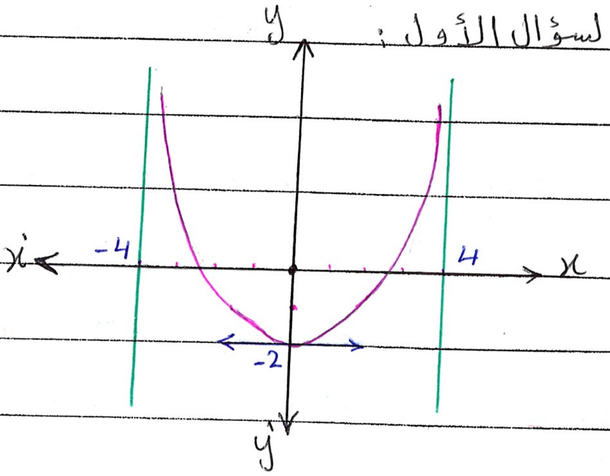
ملخص قراءة الخطوط البيانية وجدول التغيرات / حل أسئلة الدورات والنماذج الوزارية

مناقشة قراءة جدول التغيرات أو الخطوط البيانية

حل أسئلة الدورات المتعلقة بالخطوط البيانية وجدول التغيرات

الدورة الأولى لعام 2017

السؤال الأول:



نتأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$

1 احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -4} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} +4} f(x)$ واستنتج معادلة كل مقارب للخط C

2 احسب $f(0)$ و $f'(0)$

3 جد حلول المعادلة $f(x)=0$

الحل:

1 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -4} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} +4} f(x) = +\infty$

$x=4$ مقارب شاقولي

$x=-4$ مقارب شاقولي.

2 $f(0)=-2$

$f'(0)=m=0$

لأنه مماس أفقي.

3 نلاحظ أن حلول المعادلة $f(x)=0$

هي $x=-3$ ، $x=3$

4 أوجد D_f.

$D_f=]-4,4[$

5 أوجد $f(]-4,+4[)$.

$f(]-4,+4[)=[-2,+\infty[$

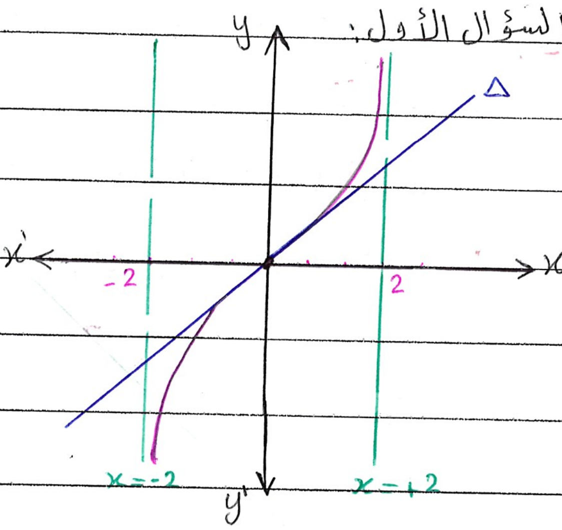
6 هل يملك التابع قيمة حدية، عيّنها.

يوجد قيمة حدية

$f(0)=-2$ قيمة حدية صغرى.

الدورة الثانية لعام 2017

السؤال الأول:



جلسات تحضيرية مكثفة لطلاب دورة ٢٠٢٠

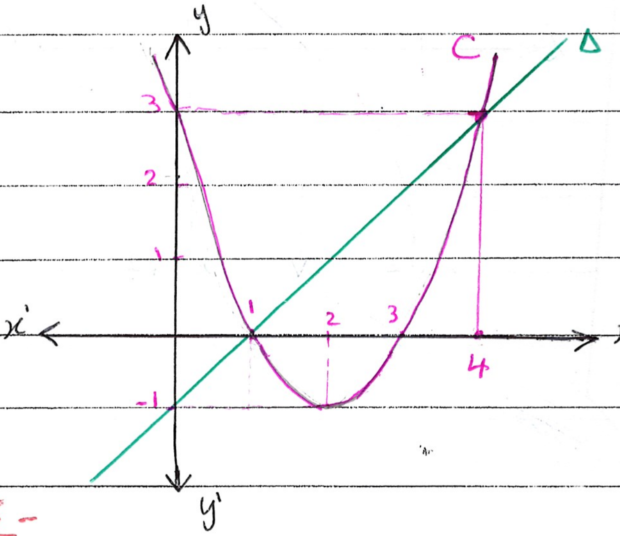
تأمل الشكل المرسوم حيث: C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,+2[= I$ والمطلوب:

1. احسب $\lim_{x \to -2} f(x)$ ، $\lim_{x \to 2} f(x)$
2. أوجد $f(0)$ ، $f'(0)$
3. هل التابع f فردي أم زوجي.
4. اكتب معادلة المماس Δ.

الحل:

1. $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$
2. $f(0) = 0$ ، $f'(0) = m = 1$ (منصف الربعين الأول والثالث)
3. فردي.
4. $\Delta : y = x$
5. أوجد D_f. $D_f =]-2,2[$
6. أوجد $f(]-2,2[)$. $f(]-2,2[) = \mathbb{R}$

الدورة الأولى لعام 2018



السؤال الأول:

تأمل الشكل المرسوم، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$، والمطلوب:

1. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.
2. جد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. ما حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$
4. اكتب معادلة المستقيم Δ.

الحل:

1. $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى.
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. $x = 1$ ، $x = 4$.
4. $\Delta : y = x + 1$
5. أوجد D_f. $D_f = \mathbb{R}$
6. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ ؟ حل وحيد.
7. اذكر مجال تناقص وتزايد التابع f ؟
   f متناقص تماماً على المجال $]-\infty, 2[$.
   f متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$.
8. حل المتراجحة $f(x) \leq 0$. $[1,3]$
   $f(x) > 0$: $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$
9. اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 2$. $y = -1$

أ. محمد الصباغ

حسابات جولة مكثفة للشهادة الثانوية ٢٠٢٠

٠٩٣٣٤٣٢١٥٩

المكتب العلمي الرياضي

الدورة الثانية لعام 2018

السؤال الأول:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1 جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع f

3 ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4 دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

الحل:

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

2 $y=2$

3 حلين.

4 $f(2)=-1$

الدورة الأولى لعام 2019

السؤال الأول:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ ، خطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1 جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C.

3 دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

4 احسب $f(]-1,2[)$.

الحل:

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2 $y=3$.

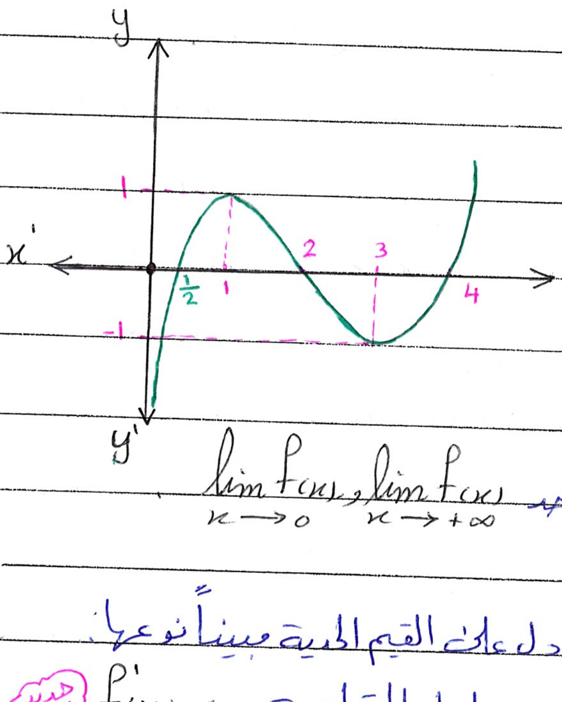
3 $f(-1)=-2$

4 $f(]-1,2[)=]-2,4[$

الدورة الثانية لعام 2019

السؤال الأول:

في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب:



1 جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2 دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

3 جد حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$ (جديد)

4 جد $f([1,3])$

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(1)=1$ قيمة محلية كبرى.

$f(3)=-1$ قيمة محلية صغرى.

3) ط1:

إن حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$ تقع ضمن المجال $[1,3]$ لأن الخط البياني للتابع f يبيّن أنه متناقص على هذا المجال.

"تذكرة:

f متناقص $\Longleftrightarrow f'<0$

f متزايد $\Longleftrightarrow f'>0$"

ط2:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $f'(x)\leq 0$

من أجل $x\in[1,3]$

4) $f([1,3]) = [-1,1]$

5) أوجد حلول المعادلة $f(x)\geq 0$.

$x\in[\frac{1}{2},2]\cup[4,+\infty[$

6) ناقش حلول المعادلة $f(x)=m$.

$m\in]-\infty,-1[$ حل وحيد

$m=-1$ حلين

$m\in]-1,1[$ ثلاث حلول

$m=1$ حلين.

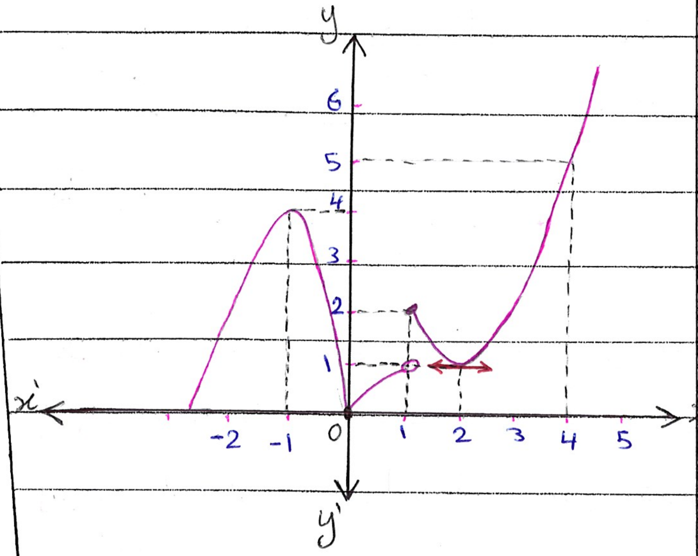
$m\in]1,+\infty[$ حل وحيد.

حل الأسئلة الوزارية المتعلقة بالخطوط البيانية وجدول التغيرات

النموذج الأول

السؤال الأول:

نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$.

2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>5$

3) هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع، علل إجابتك؟

4) ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=2$ ؟

6) أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$

الحل:

1) حل وحيد.

2) $x\in]4,+\infty[$

3) ليكن $D=]0,2[$.

$]0,2[\cap[1,+\infty[$

$[1,2[$

$f(x)\leq f(1)$

4 أربع قيم حدية .

5 $f'(2)=0$

لأنه لدينا مماس أفقي

6 غير اشتقاقي عند $(x=1)$ لأن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

غير اشتقاقي $\Longleftarrow$ غير مستمر

7 أثبت أن $f(2)$ قيمة حدية صغرى .

• $D =]1,3[$

• $]1,3[\cap [1,+\infty[$

$x \in]1,3[$

$f(x) \geq f(2)$

8 أوجد ما يلي :

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

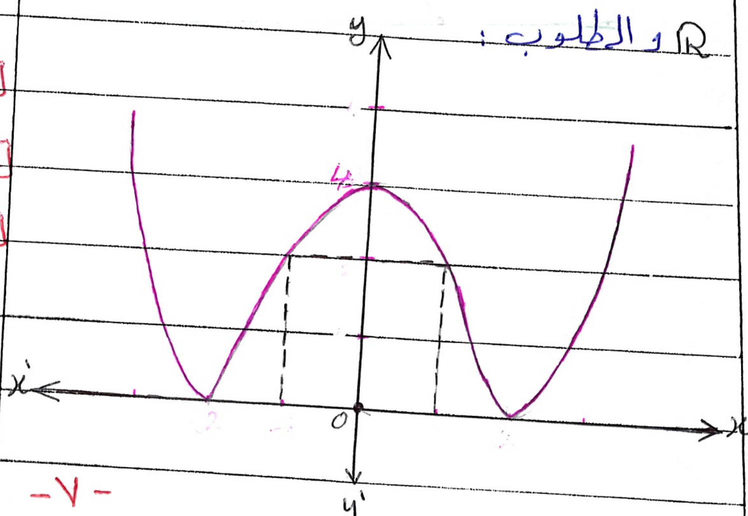
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

النموذج الثالث

السؤال الأول :

تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :



1 كم حلاً للمعادلة $f(x) = 2$.

2 احسب قيمة المشتق التابع عند الصفر .

3 عيّن صورة المجال $I = [-2,2]$ وفق f .

4 كم قيمة صغرى أو كبرى محلياً للتابع f .

الحل :

1 أربعة حلول .

2 $f'(0)=0$

لأن المماس أفقي

3 $f(I) = [0,4]$

4 ثلاث قيم حدية

قيمة حدية كبرى $f(0)=4$

قيمة حدية صغرى $f(-2)=0$

قيمة حدية صغرى $f(2)=0$

5 ما قيمة المشتق عند $x=2$.

$f'(2)=0$

النموذج الرابع

السؤال الأول :

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1 ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

2 ما عدد القيم الحدية محلياً .

3 اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$

الحل :

1 حل وحيد

2 واحدة

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى.

3 في النقطة $(1,1)$ يكون $m = 0$

فالمماس أفقي ومعادلته

$y = y_0 = 1$

النموذج السادس

السؤال الأول :

نُعطى فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

1 اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط (C).

2 هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني (C).

3 هل يوجد للخط البياني (C) مماسات أفقية.

4 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]-1,1[$.

الحل :

1 $y = 3$ مقارب أفقي

$x = 1$ مقارب شاقولي

$x = -1$ مقارب شاقولي

2 لا يوجد مقاربات مائلة

3 لا يوجد مماسات أفقية لعدم وجود قيم حدية.

4 نلاحظ من جدول التغيرات أن f متناقص تماماً على المجال $]-1,1[$ كما أنه واضح أن f مستمر على المجال $]-1,1[$ كما أن

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \times \lim\limits_{x \to +1^-} f(x) < 0$$

إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]-1,1[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى.

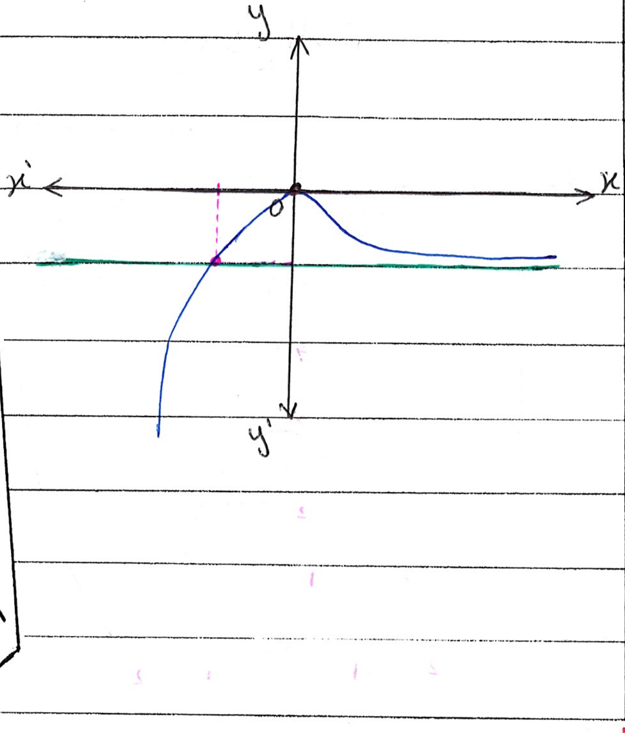
حل الاختبارات المتعلقة بالخطوط البيانية وجدول التغيرات

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

في الشكل المجاور خط بياني C للتابع f ومن خلال قراءة بيانية للشكل.

أجب عن الأسئلة الآتية :



1 ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟
وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب

2 يقبل f قيمة حدية محلياً، عينها وبيّن نوعها.

3 في حالة عدد حقيقي k، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

الحل:

1 $y = -1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

$]-1, +\infty[$ C فوق Δ

$]-\infty, -1[$ C تحت Δ

$x = -1$ C يقطع Δ.

2 $f(0) = 0$ قيمة حدية كبرى.

3 $k \in]-\infty, -1[$ حل وحيد

$k = -1$ حل وحيد

$k \in]-1, 0[$ حلين

$k \in]0, +\infty[$ مستحيلة الحل.

المكتب العلمي الرياضي
أ. محمد حسون الصباغ ٠٩٣٤١٣١١٥٩