مدونة المناهج السعودية

https://eduschool40.blog

الموقع التعليمي لجميع المراحل الدراسية

في المملكة العربية السعودية

الأعــداد المركــبة
2013

مجموعـات

[1] ط مجموعة الأعداد الطبيعية. [2] ص مجموعة الأعداد الصحيحة.

[3] ن مجموعة الأعداد النسبية.[4] ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

: ط ⊃ ص ⊃ ن ⊃ ح ، ن ∪ ن َ = ح: ن َ مجموعة أعداد غير نسبية.

لاحظ:

[1] س + 8= 2 ⟸ س =2− 8 ⟸ س= (−٦) ∌ ط.

∴ هذه المعادلة ليس لها حل في ط ولكن لها حل في ص.

[2] 2س = 5 ⟸ س = $\frac{5}{2}$ ∌ ص.

∴ هذه المعادلة ليس لها حل في ص ولكن لها حل في ن.

[3] س^2= 5 ⟸ س = ± $\sqrt{5}$ ليس لها حل في ن. ولكن لها حل في ح.

[4] س^2 + 1 = 0 ⟸ س^2 = −1 ⟸ س= ± $\sqrt{-1}$

∴ ليس لها حل في ح ولكن لها حل في الأعداد المركبة.

لاحــظ:

الغرض من دراسة الأعــداد المركبــة:

هو حل المعادلات من الدرجة الثانية من الشكل س^2+ أ^2=0 والتي لا يمكن حلها في ح ولكن يمكن حلها في الأعداد المركبة ومن هنا جاءت الفكرة من دراسـة الأعداد المركبة.

تعريف العدد التخيلـي ت:

عند حل المعادلة س^2= −1 ∴ س = ± $\sqrt{-1}$ ولكن السؤال ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه كان الناتج (−1).

يمكن أن نسميـه بالعدد "ت" ∴ ت = $\sqrt{-1}$ ∴ ت^2 = −1

∴ س^2 = −1 ⟸ س^2 = ت^2 ⟸ س= ± ت

∴ مجموعة الحلول = { ± ت }　　　∴ ت ∌ ح

مثـــال: حل المعادلة: $س^2 + 16 = 0$

الحـل:

∵ $س^2 = -16$　　　⟸ $س = \pm\sqrt{-16}$

⟸ $س = \pm 4$ ت

∴ خـواص العــدد ت

(1) $ت = \sqrt{-1}$　　　(2) $ت^2 = -1$

(3) $ت^3 = -$ ت　　　(4) $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = -1 \times -1 = 1$

ت	$ت^2$	$ت^3$	$ت^4$
ت	-1	$-$ت	1

مثـــال:

ضـع فـي أبسط صــورة:

(1) $ت^{22}$　　　(2) $ت^{104}$　　　(3) $ت^{15}$

(4) $ت^{36}$　　　(5) $ت^{-26}$　　　(6) $\frac{1}{ت}$

(7) $ت^{4ن+2}$: ن ∈ ص ⊕

الحـل:

(1) $ت^{22} = ت^2 = (-1)$　　　(2) $ت^{104} = ت^0 = (1)$

(3) $ت^{15} = ت^3 = (-1)$　　　(4) $ت^{36} = ت^0 = 1$

(5) $ت^{-26} = \frac{1}{ت^{26}} = \frac{1}{ت^2} = \frac{1}{-1} = (-1)$　　　(6) $\frac{1}{ت} = \frac{ت^4}{ت} = ت^3 = -ت$

(7) $ت^6 = ت^2 = -1$

ملحوظـة:

لإيجـــاد $ت^م$: نطبق القانـون $\boxed{ت^م = ت^{\text{باقي}\left(\frac{م}{4}\right)}}$

مثـــال: أثبت أن

$$\frac{1}{ت} + \frac{1}{ت^2} + \frac{1}{ت^3} + \frac{1}{ت^4} = \text{صفر}$$

الحـل:

$$= \frac{ت^4}{ت} + \frac{ت^4}{ت^2} + \frac{ت^4}{ت^3} + 1 = ت^3 + ت^2 + ت + 1$$

$$= -ت - 1 + ت + 1 = 0$$

$$\therefore ط_1 = ط_2$$

مثـــال: أثبت أن:

$$ت^{128} + ت^{406} + ت^{305} + ت^{2003} = 0$$

الحـل:

$ت^{128} = ت^{\cdot} = 1$ $\qquad$ $ت^{406} = ت^2 = -1$

$ت^{305} = ت$ $\qquad$ $ت^{2003} = ت^3 = -ت$

$\therefore ط_1 = 1 - 1 + ت - ت = 0$ $\qquad$ $\therefore ط_1 = ط_2$

∴ تعريف العـدد المركـب:

هو ما كان على صورة (س + ت ص) : س، ص∋ح ويسمى س بـالجزء الحقيقي، ص بالجزء التخيلي.

ملحوظـــة:

(1) إذا كان ع = س+ ت ص وكان ص= 0 فإن ع = س ويقال أن ع حقيقي صرف.

(2) إذا كان ع = س + ت ص وكان س=0 فإن ع= ت ص ويقال أن ع تخيلي بحت.

∴ تعريف العدد المركب رمزيـاً:

ع = { (س + ت ص): س ∋ ح ، ص ∋ ح ، $ت^2$ = −1 }

مثـــال:

أكتب الجزء الحقيقي والتخيلي لكل الأعداد التالية:

[1] $-6 + 5\text{ت}$ **[2]** $\sqrt{-36}$ **[3]** $7 + \sqrt{-25}$

[4] $\sqrt{-49} + 1$ **[5]** $\sqrt{-5} \times \sqrt{-7}$

الحـل:

[1] الجزء الحقيقي = (-6) ، الجزء التخيلي = (5)

[2] $\sqrt{-36} = \sqrt{36\,\text{ت}^2} = 6\text{ت}$

∴ الجزء الحقيقي = 0 ∴ الجزء التخيلي = $(+6)$

[3] $7 + \sqrt{-25} = 7 + 5\,\text{ت}$

∴ الجزء الحقيقي = 7 ∴ الجزء التخيلي = 5

[4] $\sqrt{-49} + 1 = 7\,\text{ت} + 1$

∴ الجزء الحقيقي = 1 ∴ الجزء التخيلي = 7

[5] $\sqrt{-5} \times \sqrt{-7} = \sqrt{5}\,\text{ت} \times \sqrt{7}\,\text{ت} = \sqrt{35}\,\text{ت}^2 = -\sqrt{35}$

∴ الجزء الحقيقي = $-\sqrt{35}$ ∴ الجزء التخيلي = صفر

مثـــال: أثبت أن:

$$(1 + \text{ت})^4 \left(1 + \frac{1}{\text{ت}}\right)^4 = 16$$

الحـل:

$$\text{ط}_1 = (1 + \text{ت})^4 \times \left(1 + \frac{\text{ت}^4}{\text{ت}}\right)^4 = (1 + \text{ت})^4 \times (1 - \text{ت})^4$$

$$= [(1 + \text{ت}) \times (1 - \text{ت})]^4 = (1+1)^4 = 2^4 = 16$$

∴ $\text{ط}_1 = \text{ط}_2$

تمثيـل الأعـداد المركبـة فــي المستــوى:

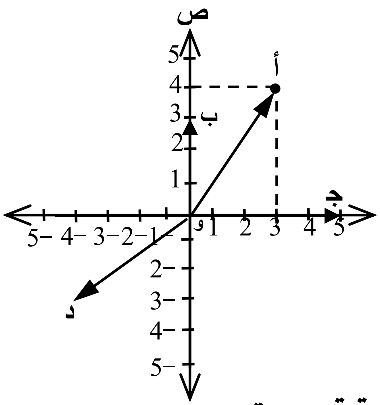
(1) العدد المركب ع = (س + ت ص) يمثل نقطة في المستوى والعكس.

(2) العدد (س ، 0) = س يمثل الجزء الحقيقي ومحور السينات ونسمي محور السينات بالمحور الحقيقي.

(3) العدد (0 ، ص) = ت ص يمثل الجزء التخيلي و نسمي محور الصادات بالمحور التخيلي.

مثـــال: مثل الأعداد التالية في مستوى (آرجاند)

[1] 3+ 4ت [2] 3ت [3] 5 [4] −4−3 ت



الحـل:

[1] (3 + 4ت) يمثل نقطة (3، 4)

ويمثل بالمتجه $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ويسمى عدد مركب.

[2] 3 ت يمثل نقطة (0، 3)

ويمثل بالمتجه $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ويسمى عدد تخيلي بحت.

[3] 5يثمل نقطة (5 ، 0) بالمتجه $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ ويسمى عدد حقيقي بحت.

[4] العدد (−4 −3 ت) يمثل نقطة (−4 ، −3) ويمثل بالمتجه $\overleftarrow{\text{و د}}$.

تعريـف: تساوي عددين مركبين

إذا كان $ع_1$=($س_1$ + ت $ص_1$) ، $ع_2$ = ($س_2$ + ت $ص_2$)

يقـال: للعددين $ع_1$، $ع_2$ أنهما متساويان إذا كان $س_1$ = $س_2$ ، $ص_1$ = $ص_2$

أي أن:

(1) ($س_1$+ ت $ص_1$) =($س_2$+ ت $ص_2$) $\Longleftrightarrow$ $س_1$ = $س_2$ و $ص_1$ = $ص_2$

(2) إذا كان س + ت ص=0 فإن س = 0 و ص = 0

مثـــال: أوجـد: قيمة س، ص إذا كان س + ت ص = 5 + 12ت

الحــل:

∵ س + ت ص = 5 + 12ت   ∴ س = 5 ، ص = 12

مثـــال: أوجـد: قيمة س ، ص إذ كان 6س + 4 ت ص − ت س + ت −12= 0

الحــل:

∵ (6س −12) + ت (4ص −س + 1) = 0

∴ 6س − 12 = 0	∵ 4 ص −س + 1 = 0
∴ 6 س = 12	4 ص−2 + 1 = 0
$\boxed{س = 2}$	4ص=1 ∴ $\boxed{ص= \frac{1}{4}}$

مثـــال: أوجد قيمة س ، ص الحقيقتين التي تحقق المعادلة

(1+ت) س + (1− ت) ص = 2ت

الحــل:

∵ س + ت س+ ص − ت ص = 2ت   ∴ (س+ص) + ت (س −ص) =2ت

∴ س + ص = 0............ (1)

∴ س − ص = 2............ (2) بالجمع

2س = 2 ⟸ س = 1   بالتعويض عن س في رقم (1)

∴ 1 + ص = 0 ⟸ ص = (−1)   ∴ مجموعة الحل = (1 ، −1)

مثـــال: أوجد س، ص إذا كان

(س − $\sqrt{2}$) + (2ص ت + $\sqrt{3}$ ت) =0

الحــل:

∴ س− $\sqrt{2}$ = 0 ⟸ س = $\sqrt{2}$

∴ 2ص+ $\sqrt{3}$ = 0 ⟸ 2ص = − $\sqrt{3}$

⟸ ص = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثـــال: أثبت أن

$\left[\left(\sqrt{-1}\right)^{4\text{ن}+3} - \left(\sqrt{-1}\right)^{2(2\text{ن}+1)} \right]^4 = -4$: ن $\in$ ص+

الحـــل:

$\text{ط}_1 = \left[(\text{ت})^{4\text{ن}+3} - (\text{ت})^{4\text{ن}+2}\right]^4$ ضع ن $= 1$

$\text{ط}_1 = \left[\text{ت}^7 - \text{ت}^6\right]^4$ $\text{ط}_1 = \left[(-\text{ت} + 1)^2\right]^2 = (-1 + 1 - 2\text{ت})^2$

$\text{ط}_1 = (-2\text{ت})^2 = 4\text{ت}^2 = 4 \times -1 = -4$ $\therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$

حل تمارين الكتاب المدرسي

تمارين ومسائل (1-1) صـ(11)

61 بسط كلاً مما يلي:

(أ) $ت^{9}$ (ب) $ت^{342}$ (جـ) $ت^{-63}$ (د) $ت^{3} + \frac{1}{ت^{3}}$

(هـ) $ت^{37} + \frac{1}{ت^{67}}$ (و) $ت^{5} - ت^{6}$ (ز) $\frac{5}{ت^{7}}$

(ح) $ت + 2ت^{2} + 3ت^{3} + 4$ (ي) $(\sqrt{-1})^{45}$

(ك) $ت^{104} + ت^{109} + ت^{114} + ت^{119}$

الحـل:

نقسم الأس على 4 ونكتب ت مرفوع للأس الباقي من القسمة.

[أ] $ت^{9} = ت$ [ب] $ت^{342} = ت^{2} = -1$

[جـ] $ت^{-63} = \frac{1}{ت^{63}} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{ت^{64}} = \frac{ت}{1} = ت$

[د] $-ت + ت = 0$ [هـ] $ت^{37} + \frac{1}{ت^{67}} = ت + \frac{ت}{ت^{68}} = ت + ت = 2ت$

[و] $ت + 1$ [ي] $(\sqrt{-1})^{45} = ت^{45} = ت$ والباقي بنفس الأسلوب.

---

62 أكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد التالية:

أ) $-4 + 3ت$ ب) $3 + \sqrt{-5}$ جـ) $\sqrt{-49} + 7$

د) $\sqrt{3}\,ت$ هـ) $-2ت + \sqrt{-2}\,ت$ و) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-3}{4}}$

ز) $\sqrt{-169}$ ح) 011

الحـل:

أ) الجزء الحقيقي = -4 ، الجزء التخيلي= 3

ب) $3 + \sqrt{-5} = 3 + \sqrt{5}\,ت$ $\therefore$ الجزء الحقيقي=3 والتخيلي= $\sqrt{5}$

جـ) $\sqrt{-49} + 7 = 7ت + 7$ $\therefore$ الجزء الحقيقي = 7 والتخيلي = 7

د) $\sqrt{3}\,\text{ت} = 0 + \sqrt{3}\,\text{ت}$ ∴ الجزء الحقيقي =0 والتخيلي= $\sqrt{3}$

والباقي بنفس الأسلوب.

$\boxed{3}$ مـحـلـول كـمثـال.

$\boxed{64}$ أثبـت صـحـة ما يلـي:

أ) $\dfrac{1+\text{ت}^2+\text{ت}^3+\text{ت}^4}{2-2\text{ت}^2-4\text{ت}} = \dfrac{1}{4}$ ب) $1+\text{ت}^{10}+\text{ت}^{100}+\text{ت}^{1000}=0$

جـ) $(1+\text{ت}+\text{ت}^3)^{4\text{ن}} = 1$: ن ∈ ص$^+$ د) $(1+\text{ت})^{4\text{ن}} - (1-\text{ت})^{4\text{ن}} = 0$

الحـل:

أ) الأيمن $= \dfrac{1+(-1)+(-\text{ت})+1}{2-2\times-1-4\text{ت}} = \dfrac{1-\text{ت}}{4-4\text{ت}} = \dfrac{1-\text{ت}}{4(1-\text{ت})} = \dfrac{1}{4}$ (حقيقي صرف)

ب) الأيمن $= 1 + \text{ت}^2 + 1 - 1 = 1 - 1 = 0$

جـ) الأيمن $= (1 + \text{ت} - \text{ت})^{4\text{ن}} = (1)^{4\text{ن}} = 1$

د) الأيمن $= \left((1+\text{ت})^2\right)^{2\text{ن}} - \left((1-\text{ت})^2\right)^{2\text{ن}}$

$= (1 + 2\text{ت} + \text{ت}^2)^{2\text{ن}} - (1 - 2\text{ت} + \text{ت}^2)^{2\text{ن}}$

$= (2\text{ت})^{2\text{ن}} - (-2\text{ت})^{2\text{ن}}$

$= [\,(2\text{ت})^2\,]^{\text{ن}} - [\,(-2\text{ت})^2\,]^{\text{ن}}$

$= (-4)^{\text{ن}} - (-4)^{\text{ن}} = 0$

$\boxed{65}$ أوجـد قيمـة س ، ص التــي فيمـا يلــي:

أ) $2 + \text{س} + \text{ت ص} = 3 - \text{ت}$ ب) $\text{س} + 4\,\text{ت ص} = \text{ت س} + \text{ص} + 3$

جـ) $2\text{س} + \text{ت ص} = 3 + 3\text{ت}$ د) $(\text{س} + \text{ت ص})^2 = 5 - 12\text{ت}$

الحـل:

أ) ∴ $2 + \text{س} = 3 \Leftarrow \text{س} = 1$ ، $\text{ص} = -1$

ب) $\text{س} = \text{ص} + 3$ ......(1) ، $4\,\text{ص} = \text{س}$ ......(2)

من (2) نعوض في (1) ∴ $4\,\text{ص} = \text{ص} + 3$ ∴ $3\text{ص} = 3$ ∴ $\text{ص}=1$ ∴ $\text{س}=4$

جـ) نفس الحل. د) ليس هنا مكانها ستُحل مع الجذور التربيعية جبرياً.

$\boxed{6}$ مـحـلـول كـمثـال.