اللوغاريتمي

العالم نابير:

$e \approx 2.7$

شكله:

$f(x) = \ln(g(x))$

مجموعة تعريفه:

$g(x) > 0$

بعض قيمه:

$\ln(e) = 1 \qquad \ln(1) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \qquad \ln(e)^n = n$

$\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \qquad \ln(+\infty) = +\infty$

$\ln(0) = -\infty$

- بعض قيمه التقريبية:

$\ln(2) \approx 0.7$

$\ln(3) \approx 1.1$

$\ln(5) \approx 1.6$

$\ln(7) \approx 2$

- إشارته:

$$\ln(A): \begin{cases} + & A > 1 \\ 0 & A = 1 \\ - & A < 1 \end{cases}$$

- قواعده:

$\boxed{1}$ $\ln(A) + \ln(B) = \ln(A \cdot B)$

$\boxed{2}$ $\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$\boxed{3}$ $\ln(A)^n = n \cdot \ln(A)$

$\boxed{4}$ $\ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln(A)$

$\boxed{5}$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$\boxed{6}$ $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

$\boxed{7}$ $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$

$\boxed{8}$ $\cancel{e}^{\cancel{\ln}(A)} = A$

$\boxed{9}$ $\cancel{\ln(e)}^A = A$

$\boxed{10}$ $\ln(a) = b$

$a = e^b$

أمثلة:

$\ln(x) = 3 \qquad \ln(x) = -1$

$x = e^3 \qquad x = e^{-1}$

$C = \ln(\sqrt{27}) - \ln(9) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{45}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(27) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{45}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(27) + 2\ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln\left(\frac{45}{8}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(27) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \ln\left(\frac{45}{8}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\ln\left(27 \times \frac{1}{81} \times \frac{45}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(15) - \ln(8)\right]$

$= \frac{1}{2}\ln(5) + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{3}{2}\ln(2)$

$D = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - \ln(x^2+1)$

$= \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \ln(x^2+1)$

$= \ln\left(\frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x^2+1}{1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

III $e^a = b$

$a = \ln(b)$

أمثلة:

$e^x = 3$ $\quad$ $e^x = \frac{1}{2}$

$x = \ln(3)$ $\quad$ $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$e^x = -2$ مستحيلة الحل

• اختزال: بسط المقادير:

$A = \ln(100)$

$= \ln(10)^2 = 2\ln(10)$

$= 2\ln(5 \times 2)$

$= 2\ln(5) + 2\ln(2)$

$B = \ln(72) - \ln\left(\frac{9}{8}\right) - \ln(16)$

$= \ln(72) + \ln\left(\frac{8}{9}\right) + \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

$= \ln\left(\frac{72 \times 8}{9 \times 16}\right)$

$= \ln(4) = 2\ln(2)$

5) $\ln^2(x) - 2\ln(x) = 0$

$\ln(x)\,[\ln(x) - 2] = 0$

اما $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

او $\ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$

6) $\ln^2(x) - 4\ln(x) - 12 = 0$

$(\ln(x) - 6)(\ln(x) + 2) = 0$

اما $\ln(x) = 6 \Rightarrow x = e^6$

او $\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

• نهايات:

1) $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

5) $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = 0$

$E = e^{-\ln(x)} - \ln(2 \cdot e^x)$

$= e^{\ln(\frac{1}{x})} - \ln(2) - \ln(e)^x$

$= \frac{1}{x} - \ln(2) - x$

* حل المعادلات:

1) $\ln(x) = 2$

$x = e^2$

2) $2\ln(x) - 1 = 0$

$\ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

3) $1 + 3\ln(x) = 0$

$\ln(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

4) $\ln^2(x) = 9$

اما $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

او $\ln(x) = -3 \Rightarrow x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

/ /

2 $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-\infty}{+0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \cdot 0 = 0$

3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \dfrac{1}{-0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \dfrac{1}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2\ln(\sqrt{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$

6 $\lim\limits_{A \to 0} \dfrac{\ln(A+1)}{A} = 1$

(برهنة المثال (1))

$\lim\limits_{A \to 0} \dfrac{A}{\ln(A+1)} = 1$

7 $\lim \dfrac{\ln(A)}{A-1} = 1$

(برهنة المثال (2))

$\lim\limits_{A \to 1} \dfrac{A-1}{\ln(A)} = 1$

تمارين:

احسب النهايات الآتية:

1 $f(x) = 3x - 3\ln(x) + 1$

على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 - 3(-\infty) + 1$

$= +\infty$

$x = 0$ معادلة مستقيم مقارب موازي ل $y'y$ و C

على يمين المقارب من الأعلى

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 3(+\infty) + 1$

$= +\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = x\left(2 - 3\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(2 - 3(0) + 0) = +\infty$

Farah Notebook

/ /

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0)$$ عدم تعيين

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

بالتعويض $x \to +\infty$ فإن $\frac{1}{x} \to 0$

مانا السن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$\boxed{8}$ $f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

عند (0)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \cdot (\infty)$$ عدم تعيين

$$f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right)$$

$$= x\ln(x+1) - x\ln(x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$\boxed{4}$ $f(x) = (x^2 - x)\ln(x)$

$]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (0-0)\cdot(-\infty)$$ عدم تعيين

$$f(x) = x^2 \ln(x) - x\ln(x)$$

$$= x \cdot x\ln(x) - x\ln(x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0(0) - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$ *

$\boxed{5}$ $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1)$

عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$$ عدم تعيين

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ $]0,1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$ ((البلاي (2)))

/ /

تمارين:

أوجد مشتق التوابع:

1) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x^2$

$= 2x \cdot \ln(x) + x$

2) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - \frac{1}{x} \cdot x}{(\ln(x))^2}$

$= \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\frac{x+1}{1-x}}$

$= \frac{\frac{1-x+x+1}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}}$

$= \frac{2}{(1-x)(x+1)} > 0$

f متزايد

9) $f(x) = x \cdot (\ln(x))^2$

عند (0)

$f(x) = (\sqrt{x})^2 \cdot (\ln(x))^2$

$= (\sqrt{x} \cdot \ln(x))^2$

$= [\sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x})]$

$= [2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x})]^2$

$= [2 \cdot (0)]^2$

$= 0$

• اشتقاق التابع اللوغاريتمي:

$f(x) = \ln(g(x))$

$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ مشتق المضمون / المضمون

أمثلة:

f	f'
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\ln(2-x)$	$\frac{-1}{2-x}$
$\ln(x^2-x)$	$\frac{2x-1}{x^2-x}$
$\ln(\sqrt{x})$	$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

دراسة تغيرات تابع لوغاريتمي.

مسألة:

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x}$$

$]0,+\infty[$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2- أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها (e):

3- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد وأوجده.

4- هل يوجد عددان a, b يحققان

$$\frac{a}{b}=\frac{1+\ln(a)}{1+\ln(b)}$$

5- ارسم الخط البياني للتابع f.

6- استنتج رسم التابع $g(x)=\frac{1+x+\ln(x)}{x}$

① f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\frac{1+(-\infty)}{+0}=-\infty$$

$x=0$ مقارب عمودي منطبق على $y'y$

و.ع على يمين المقارب من الأسفل.

$$\lim f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+0=0$$

$y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$

و.ع في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x})(x)-1(1+\ln(x))}{x^2}$$

$$=\frac{1-1-\ln(x)}{x^2}=\frac{-\ln(x)}{x^2}=0$$

$\ln(x)=0$

$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1+0}{1}=1$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى.

② $x_0=e \Rightarrow y_0=f(e)=\frac{2}{e}$

$m=f'(e)=\frac{-1}{e^2}$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-\frac{2}{e}=\frac{-1}{e^2}(x-e)$

$y-\frac{2}{e}=\frac{-1}{e^2}x+\frac{1}{e}$

$y=\frac{-1}{e^2}x+\frac{3}{e}$

③ $f(]0,1[) =]-\infty,1[$

يوجد ... $]0,1[$ ... $]1$

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0,1[$

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1+\ln(x)}{x}=0$$

$$1+\ln(x)=0$$

$$\ln(x)=-1$$

$$x=\frac{1}{e}$$

4 - العلاقة تكافئ:

$$\frac{1+\ln(b)}{b}=\frac{1+\ln(a)}{a}$$

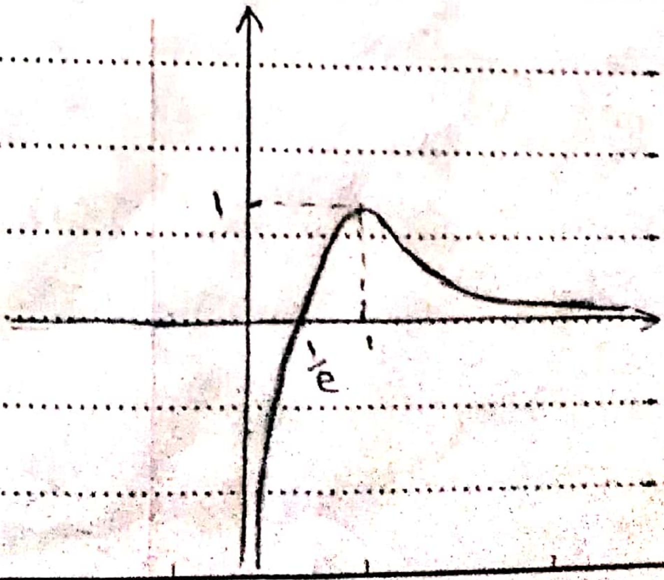
يكافئ: $f(a)=f(b)$

بما أن f متزايدة على $]0,1[$ ومتناقصة على $]1,+\infty[$

... عند (1) إذا يوجد

$a<1$ ... $b<1$ مختلفتين

$$f(a)=f(b)$$

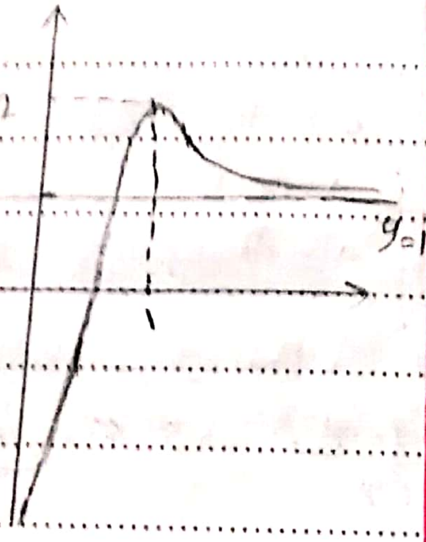


$$g(x)=\frac{1+x+\ln(x)}{x}$$

$$g(x)=\frac{1+\ln(x)+x}{x}$$

$$=\frac{1+\ln(x)}{x}+\frac{x}{x}$$

$$g(x)=f(x)+1$$



مسألة ②:

$$f(x)=x(\ln(x))^2$$

$]0,+\infty[$

1. أوجد نهاية f عند (0) وعند $+\infty$

2. ادرس تغيرات f ونظم جدول تغيراتها.

3. أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها (1)

4. ارسم الخط البياني للتابع f

5. نعرف متتالية $u_n=n(\ln(n))^2$ ، $n\geq 1$

ادرس اطراد u_n

Farah Notebook

عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to 0} f(x) = 0(-\infty)^2$

$f(x) = (\sqrt{x})^2 (\ln(\sqrt{x}))^2$

$= [\sqrt{x}\,.\,\ln(\sqrt{x})^2]^2$

$= [2\sqrt{x}\,.\,\ln(\sqrt{x})]^2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2- f مستمرة ومعرفة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

$f'(x) = 1.(\ln(x))^2 + 2(\ln(x)).(\frac{1}{x}).x$

$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0$

$\ln(x)[\ln(x)+2] = 0$

بما: $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

أو: $\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$f(\frac{1}{e^2}) = \frac{1}{e^2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$

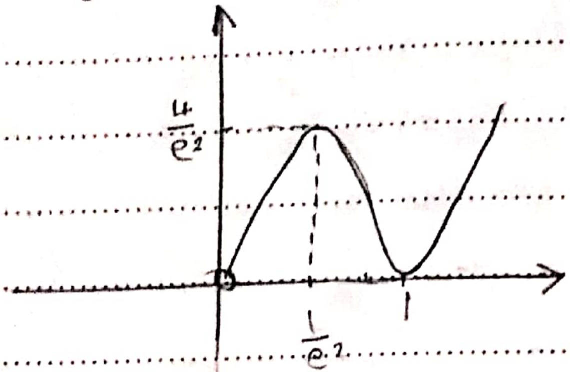
x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\frac{1}{e^2}) = \frac{4}{e^2}$ قيمة حدية كبرى

$f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى

من الجدول: $m = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 1$

$y - 0 = 0(x-1) \Rightarrow y = 0$



لندرس الاطراد $U_n = n(\ln(x))^2$

نلاحظ أن f متزايدة تماما لما $x \geq 1$

ومنه U_n متزايدة إذا كانت $n \geq 1$

مسألة: $]-2,2[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

1- أثبت أن f فردية

2- ادرس تغيرات f على المجال $[0,2[$.

3- أوجد معادلة المماس في المبدأ.

4- ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

5- ارسم Δ ثم ارسم C.

6- استنتج رسم التابع

$g(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$

/ /

$x \in]-2,2[\Rightarrow -x \in]-2,2[$ ...1

$f(-x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x)$

إذاً f فردية

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$x = 2$ معادلة مقارب موازي لـ y'y

بيان المقارب من الأسفل

$$f'(x) = \frac{\frac{-1(2+x)-1(2-x)}{(2+x)^2}}{\frac{2-x}{2+x}}$$

$$= \frac{-2-x-2+x}{(2-x)(2+x)} = \frac{-4}{(2-x)(2+x)} < 0$$

تمثل مضمون اللوغاريتم وهي موجبة

x	0		2
f'		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

$x = 0 \quad y = 0 \quad m = f'(0) = -1$ ...3

$y - 0 = -1(x - 0)$

$\Delta : y = -x$

$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x$ ...4

$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x$

دراسة إشارة g

تعيين الوضع النسبي

$$g'(x) = \frac{-4}{(2-x)(2+x)} + 1$$

$$= \frac{-4+(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)}$$

$$= \frac{-4+4-x^2}{(2-x)(2+x)} = \frac{-x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$$

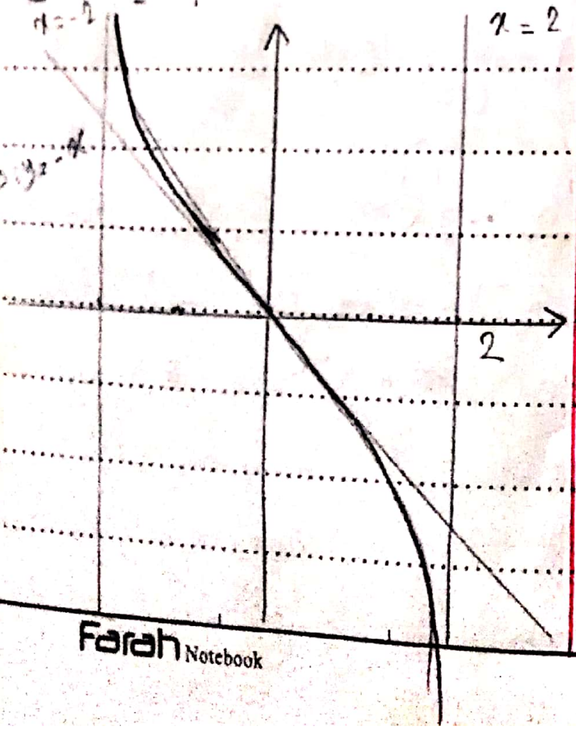
$g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$g(0) = 0$

x	-2		0		2
g'		$-$	0	$-$	
g		$\searrow$ $g(x)>0$	0	$\searrow$ $g(x)<0$	

C فوق المستقيم Δ على المجال $]-2,0[$

C تحت المستقيم Δ على المجال $]0,2[$



/ /

$g(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$

$g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

$g(x) = -f(x)$

g و f نظير بالنسبة لمحور الفواصل

ملاحظة: لا يجوز تبديل شكل التابع قبل إيجاد مجموعة تعريفه

حل معادلات ومتراجحات:

[I] إيجاد مجموعة تعريف لوغاريتم:

تمرين

أوجد مجموعة تعريف التوابع:

① $f(x) = \ln(x+3) + \ln(2-x)$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$2-x>0 \Rightarrow x<2$

$D_f :]-3,2[$

② $f(x) = \ln(x^2-3x)$

$x^2-3x>0$ متراجحة تربيعية

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

إما $x=0$ أو $x=3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x^2-3x	+	0	−	0	+
الإشارة	مقبول		مرفوض		مقبول

$x \in]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$

$\frac{x-1}{x^2-4} > 0$ متراجحة كسرية

نعدم البسط $x-1=0 \Rightarrow x=1$

نعدم المقام $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$

$x=2$ $x=-2$

ندرس الإشارة:

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
بسط	−		−	0	+		+
مقام	+	0	−		−	0	+
كسر	−	‖	+	0	−	‖	+
إشارة			✓				✓

$x \in]-2,1[\cup]2,+\infty[$

$f(x) = \ln|x^2 - x|$ ④

$x^2 - x \neq 0$

$x(x-1) \neq 0$

$x \neq 0 \quad x \neq 1$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f(x) = \ln(2x-6)^2$ ⑤

$2x - 6 \neq 0$

$2x \neq 6$

$x \neq 3$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\boxed{2}$ حل المعادلات:

$\ln(x) = 2$ ①

$x = e^2$

$2\ln(x) - 1 = 0$ ②

$\ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$\ln^2(x) - 2\ln(x) = 0$ ③

$\ln(x)(\ln(x) - 2) = 0$

إما $\ln(x) = 0$

$x = e^0 = 1$

أو $\ln(x) = 2$

$x = e^2$

$\ln^2(x) - 3\ln(x) - 10 = 0$ ④

$(\ln(x) - 5)(\ln(x) + 2) = 0$

إما $\ln(x) = 5 \Rightarrow x = e^5$

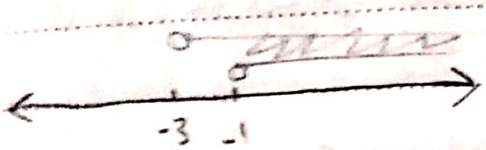
أو $\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$\ln(x+3) = 2\ln(x+1)$ ⑤

شرط الحل

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$



$x \in]-1, +\infty[$

$\ln(x+3) = \ln(x+1)^2$

$x + 3 = (x+1)^2$

$x + 3 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

إما $x = -2$ مرفوض

أو $x = 1$ مقبول

$\ln(x+4) - \ln(3-x) = \ln(2x+2)$ 6

$x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$3-x>0 \Rightarrow x<3$

$2x+2>0 \Rightarrow x>-1$

$x \in]-1, 3[$

$\cancel{\ln}\left(\frac{x+4}{3-x}\right) = \cancel{\ln}(2x+2)$

$\frac{x+4}{3-x} = \frac{2x+2}{1}$

$x+4 = 6x - 2x^2 + 6 - 2x$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$ مقبول

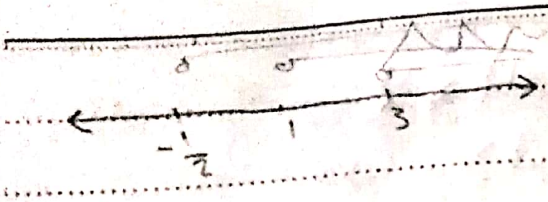
$x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ مقبول

$\ln(\sqrt{2x+1}) = \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x-3)$ 7

$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x-3>0 \Rightarrow x>3$



$x \in]3, +\infty[$

$\ln(\sqrt{2x+1}) = \ln(x-1) - \ln(\sqrt{x-3})$

$\ln(\sqrt{2x+1}) = \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-3}}\right)$

$\sqrt{2x+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x-3}}$

نربع الطرفين:

$\frac{2x+1}{1} = \frac{(x-1)^2}{x-3}$

$2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = 4$ مقبول $x = -1$ مرفوض

$\boxed{3}$ حل المتراجحات:

① نحسب شرط الحل D

② نحسب الحل S

③ نقاطع الحل مع شرط الحل $S \cap D$

/ /

① $\ln(x-1) \le 2$

شرط الحل $x-1>0$

$x>1$

$D: x \in]1,+\infty[$

$x-1 \le e^2$

$x \le e^2+1$

$S: x \in]-\infty, e^2+1]$

$1 \qquad e^2+1$

$D \cap S:]1, e^2+1]$

② $\ln(x^2+x) \ge \ln(5x-4)$

أخذناه من الأول $5x-4>0$

الأصغر نقصه غلطا $\ln < \ln$

$5x>4 \Rightarrow x>\frac{4}{5}$

$x \in]\frac{4}{5},+\infty[$

$x^2+x \ge 5x-4$

$x^2-4x+4 \ge 0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	
إشارة		✓		✓	

③ $\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)<0$

شرط الحل $\frac{x+3}{x-1}>0$

نضع البسط $x+3=0$

$x=-3$

نضع المقام $x-1=0$

$x=1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
بسط		$-$	0	$+$		$+$	
مقام		$-$		$-$	0	$+$	
كسر		$+$	0	$-$	‖	$+$	
إشارة		✓				✓	

$D: x \in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$

$\frac{x+3}{x-1}<1$

$\frac{x+3}{x-1} - \frac{1}{1} < 0$

$(1) \qquad (x-1)$

$\frac{x+3-x+1}{x-1}<0$

$\frac{4}{x-1} < 0$ [illegible]

نقوم المقام $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
بسط 4	+	+		+	+
مقام	−	−	0	+	+
كسر	−	−	‖	+	+
إشارة	✓				

$S: x \in]-\infty, 1[$

$S \cap D :]-\infty, -3[$

تمرين:

لتكن المعادلة:

$x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$

جد قيم m التي تجعل للمعادلة حلان مختلفان

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = \ln(m+1)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 4\ln(m+1)$

كي يكون للمعادلة حلان مختلفان يجب أن يكون:

$\Delta > 0$

$4 - 4\ln(m+1) > 0$

$4\ln(m+1) < 4$

$\ln(m+1) < 1$

شرط الحل:

$m + 1 > 0$

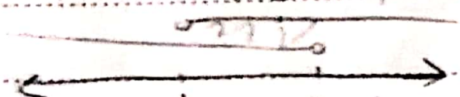
$m > -1 \Rightarrow m \in]-1, +\infty[$

$m + 1 < e$

$m < e - 1$

$m \in]-\infty, e-1[$

بالمقاطعة نجد:



$m \in]-1, e-1[$