تمارين على المتتابعات والمتسلسلات

١- الحد السابع في المتتابعة ... ، 16 ، 8- ، 4 ، 2- ، 1

المتسلسلة هندسية فيها $a_1 = 1$ و $r = -2$

نقسم $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}} = \frac{-2}{1} = -2$

$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\text{الحد الثالث}}{\text{الحد الثاني}} = \frac{4}{-2} = -2$

$\therefore a_n = a_1 r^{n-1} \longrightarrow a_7 = 1 \cdot (-2)^{7-1} = 2^6 = 64$

a) 128
b) -128
c) 64
d) -64

٢- اذا كان الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 6- وحدها الخامس 162 فإن الحد العام

نطرح: الحد الخامس - الحد الثاني

$r^{5-2} = \frac{162}{-6}$ ← نقسم (هندسية)

$r^3 = -27 \Rightarrow r = -3$

a_1 موجب لأن الحد الثاني سالب

+2 ، -6 ، 18 ، ---

هذه المتتابعة يساوي :-

a) $2(-3)^{n-1}$ ← a_1 موجب

X b) $-2(3)^{n-1}$

c) $2(3)^{n-1}$ ← a_1 موجب

X d) $-2(-3)^{n-1}$

٣- الحد النوني للمتتابعة الهندسية :-

2 ، 16 ، 128 ، -----

$a_1 = 2$ الحد الأول

فقط نوجد r :-

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{2} = 8$

a) $a_n = 2(6)^{n-1}$

b) $a_n = 2(-6)^{n-1}$

c) $a_n = 2(8)^{n-1}$

d) $a_n = 2(-8)^{n-1}$ (a_1 ، r)

٤- الحد العاشر في المتتابعة :-

$\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، ----

نحدد نوع المتتابعة هل حسابية أم هندسية .

- $a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $a_3 - a_2 = 2 - 1 = 1$

ليست حسابية

X

- $\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$
- $\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{2} = 2$

هندسية

$a_1 = \frac{1}{2}$ ، $r = 2 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{2}(2)^{10-1} = \frac{2^9}{2^1} = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

a) 128
b) 256
c) 512
d) 244

Scanned by CamScanner

٥- متتابعة حسابية حدها الأول (27) وحدها السادس (12) ماهو الحد الرابع ؟

a) 15
b) 9
c) 18
d) 27

فرق الرتب = الحد السادس - الحد الأول.

$(6-1)d = 12-27$ ← نظرح حسابية

$5d = -15 \Rightarrow \boxed{d=-3}$

$\therefore a_4 = a_1 + (4-1)d = 27 + 3(-3) = 27-9 = \boxed{18}$

٦- متتابعة هندسية حدها الأول (2) وحدها السادس (64) ماهو الحد الثالث ؟

a) 8
b) 4
c) 32
d) 20

نظرح ← $r^{6-1} = \frac{64}{2}$ ← نقسم

$r^5 = 32 \Rightarrow \boxed{r=2}$

$\therefore a_3 = a_1 r^{3-1} = 2(2)^2 = 2(4) = \boxed{8}$

٧- ماالحد التالي في المتتابعة الهندسية :-

$8 \xrightarrow{\times\frac{3}{4}} 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8} \xrightarrow{\times\frac{3}{4}} \dots$

a) $\frac{11}{8}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{27}{16}$ d) $\frac{81}{32}$

نوجد فقط الأساس r بالقسمة :-

$r = \frac{6\div2}{8\div2} = \frac{3}{4}$ أو $\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{2} \div 6 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$

الحد التالي = الحد الرابع $\times r = \frac{27}{8} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{81}{32}}$

٨- ماترتيب حد سالب في المتتابعة :-

$124, 119, 114, 109, \dots$

a) 24
b) 25
c) 26
d) 27

$a_n = a_1 + (n-1)$

$d = 124-119 = \boxed{-5}$

بتجريب الخيارات

$a_{24} = 124 + (24-1)(-5) = 124-115$ ✗ موجب

$a_{25} = 124 + (25-1)(-5) = 124-120$ ✗ موجب

$a_{26} = 124 + (26-1)(-5) = 124-125 = \boxed{-1}$ ←

٩- قيمة الحد الثامن في المتتابعة الحسابية :-

$x+2^{(1)}, x+5^{(2)}, 2x+5^{(3)}, \dots$

a) 26
b) 25
c) 27
d) 30

نوجد أولاً الأساس (d) :-

الحد الثاني - الحد الثالث $= (x+5)-(x+2) = 3 \Rightarrow \boxed{d=3}$ ← (1)

الحد الثالث - الحد الثاني $= (2x+5)-(x+5) = 2x-x \Rightarrow \boxed{d=x}$ ← (2)

بالمقارنة ⇐ $\boxed{x=3}$

$a_1 = 3+2 = \boxed{5}$

$a_8 = a_1 + 7d = 5+7(3) = 5+21 = \boxed{26}$

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

Scanned by CamScanner

١٠- تشكل قياسات زوايا المثلث أدناه متتابعة حسابية اذا كان قياس الزاوية الصغرى (36°) . فما قياس الزاوية الكبرى ؟

a) 75°
b) 90°
c) 97°
d) 84°

مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$a_1 + a_2 + a_3 = 180$

$36 + (36+d) + (36+2d) = 180^\circ$

$3(36) + 3d = 180 = 3(60^\circ)$

$\div 3 \Rightarrow 36 + d = 60 \Rightarrow d = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$

الزاوية الكبرى $= 36 + 2(24^\circ) = 36 + 48 = 84^\circ$

طريقة أخرى:

$\because a_n = ?\ ,\ n = 3\ ,\ S_n = 180^\circ$

$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

$180 = \frac{3}{2}[36 + a_3]$

$180 \times \frac{2}{3} = 36 + a_3$

$a_3 = 120 - 36 \Rightarrow \boxed{a_3 = 84}$

١١- اذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية تساوي (5) وأساسها (2) ومجموعها (1275) فإن عدد حدودها :-

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$

$1275 = \frac{5 - 5(2)^n}{1 - 2} = \frac{5(2)^n - 5}{1}$ (نقل للطرف الآخر)

$+5$

$1275 + 5 = 5(2)^n \Rightarrow 1280 = 5(2)^n$

$2^n = \frac{1280}{5} = 256 \Longrightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

١٢- $(1-2) + (3-4) + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots - 1000 + 1001 = \cdots$

a) 501
b) -501
c) 1000

الأعداد الموجبة $\rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999 + 1001$

الأعداد السالبة $\rightarrow -2 \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad \cdots \quad -1000$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow$

$(-1) \quad (-1) \quad (-1) \quad (-1) \quad \cdots \quad (-1)$

(-1) مكرر 500 مرة .

$(-1) \times 500 + 1001 = -500 + 1001 = \boxed{501}$

١٣- قيمة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ تساوي :-

a) 5
b) $\frac{5}{2}$
c) 10
d) 20

$S_r = \frac{a_1}{1 - r}$ ← متسلسلة غير منتهية

$\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 (r)^n$

$\boxed{a_1 = 5}$ $\boxed{|r| = \frac{1}{2} < 1}$ ← تقاربية

$\therefore S_n = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 5 \times 2 = \boxed{10}$

Scanned by CamScanner

١٤- أي من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة وأوجد المجموع :-

١- $16+8+4+\cdots$ نوجد r بالقسمة $\frac{a_2}{a_1}$

$|r| = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} < 1$ ⟸ متقاربة

$S_n = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16(2)}{2-1} = 32$ *

٢- $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

$|r| = \frac{4}{5} < 1$ ⟸ متقاربة

$S_n = \frac{18}{1-\frac{4}{5}} = \frac{18(5)}{5-4} = 90$ *

٣- $8+12+18+\cdots$

$|r| = \frac{12}{8} > 1$ ⟸ متباعدة ⟸ ليس لها مجموع

البسط > المقام ⟸ متقاربة

البسط < المقام ⟸ متباعدة

١٥- ما مجموع الأربعة حدود الأولى للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 12\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ← غير منتهية.

$= 12\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ← $n=0, n=1, n=2, n=3$

$= 12\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]$

$= 12\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right]$ (×27, ×9, ×3)

$= 12\left[\frac{27-9+3-1}{27}\right]$

$= 12\left[\frac{30-10}{27}\right] = \frac{12\times 20}{27} = \frac{240}{27} = \frac{80}{9}$

a) $\frac{1280}{81}$

b) $\frac{320}{27}$

c) $\frac{80}{9}$

d) $\frac{80}{81}$

طريقة ثانية :-

$S_4 = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$

$= \frac{12 - 12\left(-\frac{1}{3}\right)^4}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$= \frac{12\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)}$

١٦- الوسط الهندسي بين العددين 16 ,4 :-

4, ---, 16

نقسم ← $r^{3-1} = \frac{16}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$ ← نطرح

الحد الثاني $= 4 \cdot 2 = 8$

4, ---, 16

a ↓ b

$\pm\sqrt{ab} = \sqrt{4\times 16} = 2\times 4 = 8$

a) 12

b) 8

c) 10

١٧- الوسطين الهندسيين بين العددين 9 , $\frac{1}{3}$ هما :-

$\frac{1}{3}$, ---, ----, 9

$r^{4-1} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

∴ الأساس = 3

الوسطين الهندسيين

$a_2 = \frac{1}{3}\times 3 = 1$

$a_3 = 1\times 3 = 3$

a) 6, 3

b) 1, 6

c) $\frac{1}{3}$, 3

d) 1, 3

١٨- ثلاثة أوساط هندسية بين 2, 162 :-

2, ---, ---, ---, 162 (×3, ×3, ×3)

$r^{5-1} = \frac{162}{2}$

$r^4 = 81 \Rightarrow r = 3$

الوسط الأول $= 2\times 3 = 6$

الوسط الثاني $= 6\times 3 = 18$

الوسط الثالث $= 18\times 3 = 54$

$\sqrt{18\times 2} = \sqrt{2\times 2\times 9} = 2\times 3 = 6$ ثانياً

$\sqrt{162\times 2} = \sqrt{4\times 81} = 2\times 9 = 18$ أولاً

ثالثاً: الأساس 3، $18\times 3 = 54$

Scanned by CamScanner

تمارين على النهايات والاتصال

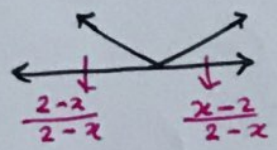
1) $\lim_{x\to 0} \frac{7x^3+1}{x^2+4x} = \frac{7(0)+1}{0^2+4(0)} = \frac{1}{0} = \infty$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3-x^2+5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-x+5)}{x} = 5$

3) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-x-20}{x+4} = \frac{0}{0}$ لوبيتال $\Longrightarrow \lim_{x\to -4} \frac{2x-1}{1} = 2(-4)-1 = -9$

4) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6} = \frac{0}{0}$ لوبيتال $\Longrightarrow \lim_{x\to -2} \frac{2x-3}{2x+5} = \frac{-4-3}{-4+5} = -7$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{2-x} = \begin{cases} \frac{x-2}{2-x} = -1 & ; x \geq 2 \\ \frac{2-x}{2-x} = 1 & ; x < 2 \end{cases}$



النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{2-x} = -1 \neq +1 = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{2-x}$

النهاية غير موجودة.

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

$\lim_{x\to 2} \frac{|3x-6|}{6-3x}$

غير موجودة.

6) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-2|}{2-x} = \frac{2-x}{2-x} = -1$

(1) تقع بسيار 2 نختار الدالة الثانية.

7) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim \frac{2-x}{2-x} = 1$

النهاية اليسرى فقط

8) $\lim_{x\to 4} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim_{x\to 4} \frac{x-2}{2-x} = -1$

نختار الدالة الأولى

8) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$

لوبيتال $\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{1} = 3$

Scanned by CamScanner

9) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x-2} = \frac{32-32}{2-2} = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة $\xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x\to 2} \frac{5x^4}{1} = 5(2)^4 = 80$

10) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5} = \frac{25-25}{-5+5} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x\to -5} \frac{2x}{1} = 2(-5) = -10$

$2(-5) = -10$ ضرب العدد في 2

11) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{9-9}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x\to 9} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 9} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{9} = 6$

صيغة. $2\sqrt{9} = 2(3) = 6$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x}} = (0-\sqrt{2}) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

عامل مشترك

النهاية غير موجودة.

13) $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+7} = -\infty$ لوجود السالب

درجة البسط > درجة المقام $\quad \frac{-3}{5}$ = سالب

14) $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-10} = 0$ درجة البسط < درجة المقام

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-6}{x^2-x} = \infty$ درجة البسط > درجة المقام

16) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-6}{x^2-x} = (-1)^{3-2}\infty = -\infty$

17) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+8x+2}{8x^3+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ درجة البسط = درجة المقام

18) $\lim_{n\to\infty} \{\ln(n+1) - \ln n\} = \lim_{n\to\infty} \{\ln \frac{n+1}{n}\}$ نبرك بين اللوغاريتم والنهاية.

$= \ln\{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\} = \ln(1) = 0$ (1 عند)

19) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \sqrt{\infty^2+1} - \infty = \infty - \infty$ ← كمية غير معينة

$\xrightarrow[\text{مشتقة}]{\text{لوبيتال}}$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$

← درجة البسط = درجة المقام

Scanned by CamScanner

20 $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x}{x^2+3} = \frac{e^\infty+\infty}{\infty+3} = \frac{\infty}{\infty}$ لوبيتال $\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{2x}$ لوبيتال $\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

نشتق مرتين لان x^2

21 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3} = \frac{3}{2}$

$1=$

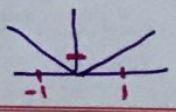
22 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x + 4x}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{2x} + \lim_{x\to0} \frac{4x}{2x}$

$= \frac{5}{2} \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2}$

$1=$

23 اذا كان $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$ فان المنحنى الدالة متماثل حول :-

a) محور x **b) محور y** c) نقطة الاصل d) المستقيم $y=x$



$\lim_{x\to-1} |x| = \lim_{x\to1} |x|$

24 $\lim_{x\to\infty} (5 + \frac{2}{x})^2 = 5^2 = 25$

$0=$

25 $\lim_{x\to a} (4+\frac{7}{x})(2+\frac{5}{x}) = 2 \cdot 4 = 8$

تمارين على الاتصال

26 $\lim f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$

ما قيمة (a) التي تجعل $f(x)$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ؟

نكتفي فقط بحل الشرط الثاني للاتصال وجود النهاية

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1 \cdot 2 = 2$ $a=2$

27 $f(x) = \begin{cases} k^2 x & ; x < 1 \\ 3kx & ; x \geq 1 \end{cases}$ ما قيمة k التي تجعل الدالة متصلة

اكبر او اصغر

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

$\lim_{x\to1^+} 3kx = \lim_{x\to1^-} k^2 x \Rightarrow 3k - k^2 = 0$

$k(3-k) = 0 \Rightarrow$ اما $k=0$ او $k=3$

$k^2 = 3k$

$k^2 - 3k = 0$

$k(k-3) = 0$

$k=0$ $k=3$

28 $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \leq 2 \\ cx+6 & ; x > 2 \end{cases}$ قيمة الثابت c التي تجعل الدالة متصلة

اليمنى = اليسرى $\Longrightarrow 2+3 = 2c+6 \Rightarrow 2c = 5-6 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sec x$ مقلوب $\cos x$

تمارين على الاشتقاقه

1 معادلة ميل منحنى $y=2x^2$ عند أي نقطة عليه

$y'=4x$

2 اذا كانت $f(x)=\tan^2 x$ فإن $f'(\frac{\pi}{4})$

$f(x)=(\tan x)^2 \Rightarrow f'(x)=2\tan x\sec^2 x$

$f'(\frac{\pi}{4})=2\tan(\frac{\pi}{4})\sec^2(\frac{\pi}{4})=2(1)(\frac{2}{\sqrt{2}})^2=$ **4**

3 ميل مماس منحنى $y=x^3+7$ عند النقطة $(3,34)$

$y'=3x^2 \longrightarrow y'(3)=3(3)^2=$ **27**

4 مشتقة الدالة :-

$f(x)=(-7x^2+4)(x-2)$

$y'=(-7x^2+4)(1)+(x-2)(-14x)$

$=-7x^2+4-14x^2+28x$

$=-21x^2+28x+4$

5 اذا كان $y=x^x$ فإن y' تساوي :-

بأخذ (ln) للطرفين $\log y=\log x^x$

$\log y=x\log x$

بالاشتقاق $\longrightarrow \frac{1}{y}y'=\log x+x.\frac{1}{x}$

$y'=x^x[\log x+1]$

6 اذا كانت $Y=(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})$ فإن Y' ؟

$Y=-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

$Y=-(x-1) \Rightarrow Y'=-1$

7 اذا كانت $2x+4y=2$ فإن المشتقة تساوي :-

$x+2y=1 \Rightarrow 2y=1-x$

$\Rightarrow y=\frac{1-x}{2} \Rightarrow y'=-\frac{1}{2}$

8 اذا كانت $f(x)=\tan^2 x$ فإن $f'(\frac{\pi}{4})$

$f(x)=(\tan x)^2 \Rightarrow f'(x)=2\tan x\sec^2 x$

$f'(\frac{\pi}{4})=2\tan(\frac{\pi}{4})\sec^2(\frac{\pi}{4})=2(1)(\frac{2}{\sqrt{2}})^2=$ **4**

9 قيمة النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ تساوي

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

10 اذا كانت $f(-3)=2$, $g(-3)=3$

$f'(-3)=1$, $g'(-3)=5$

فإن $(fg)'(-3)$ تساوي :-

$(fg)'=fg'+gf'$

$=2\cdot 5+3\cdot 1=10+3=$ **13**

11 أوجد مشتقة الدالة ؟

1) $y=\ln(x^2-e) \Rightarrow y'=\frac{1}{x^2-e}\cdot(2x)$

2) $y=\ln(\ln x) \Rightarrow y'=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$

3) $y=e^{\sqrt{x}} \longrightarrow y'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

(مشتقة الدالة الاسية) (الدالة الاسية) (مشتقة الأس)

4) $y=e^{x^2} \longrightarrow y'=e^{x^2}\cdot(2x)=2xe^{x^2}$

5) $y=\sqrt{2-x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$ ← مشتقة ما تحت الجذر / 2 × الجذر

6) $y=\frac{5x^{-2}}{(x+1)} \Rightarrow y=\frac{5}{x^2(x+1)}=\frac{5}{x^3+x^2}$

$y'=\frac{-5(3x^2+2x)}{(x^3+x^2)}$ (سالب مشتقة المقام / المقام × عامل مشترك ×)

$=\frac{-15x-10}{x^2+x}$

Scanned by CamScanner

تمارين على التكامل

1. $\int 4x^7 dx = 4\int x^7 dx = 4\frac{x^8}{8} + C = \boxed{\frac{1}{2}x^8 + C}$

2. $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

3. $\int (9x - x^3) dx = 9\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$

4. $\int (16x^3 - 6x^2) dx = 16\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + C = 4x^4 - 2x^3 + C$

5. $\frac{1}{2}\int 2(2x+5)^4 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^5}{5} = \frac{1}{10}(2x+5)^2 + C$

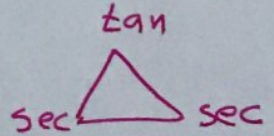
6. $\int (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3} + C$

7. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|$ (لن القسم)

$u = \cos x$

$u' = -\sin x$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx$



$= \int \tan x \sec x \, dx = \boxed{\sec x + C}$

9i. $\int \frac{\sin x}{(\cos x)^2} dx = -\int \frac{(-\sin x)}{1} \cdot (\cos x)^{-2} dx = -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{1}{\cos x} + C = \boxed{\sec x + C}$

9. $\frac{1}{4}\int 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$

Scanned by CamScanner

10 $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

$u = -x^2 \longrightarrow$ نشتق الأس فقط
$u' = -2x$

$= -\frac{1}{2}\int (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$ الأس السالب تنزل في المقام

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{x^2}}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{\infty}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}\right] = -\frac{1}{2}[0] = 0$

---

11 $\frac{1}{4}\int 4x^3 \cos(x^4+2)\, dx$

$u = x^4 + 2 \longrightarrow$ نشتق الزاوية فقط
$u' = 4x^3$

$= \frac{1}{4}\left[\sin(x^4+2)\right] + C$

sin ↔ cos تكامل

---

12 $\frac{1}{2}\int (2x) \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\left[-\cos x^2\right] + C$ $\quad \int x \sin x^2 dx$

---

13 $\int_0^1 \int_0^1 xy\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 xy\, dx\right] dy$

نكامل بالنسبة لـ x ، y ثابت

$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]\Big|_0^1 dy = \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right] = \frac{1}{4}$

---

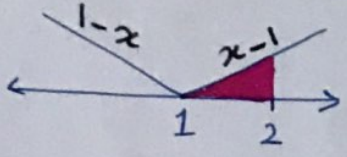
14 $\int e^{2x-5} dx$

$= \frac{1}{2}\int 2e^{2x-5} dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x-5}\right] + C = \frac{e^{2x-5}}{2} + C$

Scanned by CamScanner

15 $\int_1^2 |x-1|\,dx$

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ; \ x \geq 1 \\ -(x-1) \ (1-x) & ; \ x<1 \end{cases}$$



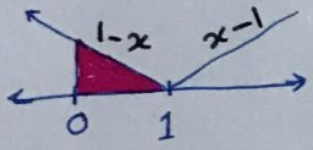
نختار الدالة الأولى $\therefore \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x \Big|_1^2$

$$= \left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \left[(2-2)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

التكامل تطابع موجب لأن دالة المقياس تقع أعلى المحور السيني

---

16 $\int_0^1 |x-1|\,dx$ نختار الدالة الثانية $\int_0^1 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx$



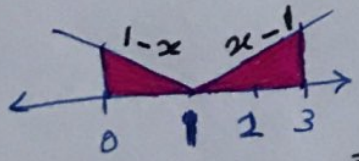
$$= x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-(0)\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 |x-1|\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x\Big|_0^1 = \left[\frac{1}{2}-1\right] = \boxed{-\frac{1}{2}} = \boxed{+\frac{1}{2}}$$

تكامل عادي.. ← نختار الموجب فقط

---

17 $\int_0^3 |x-1|\,dx$ ⟶ مجموع تكاملين لأن يتغير تعريف الدالة عند $x=1$



$$\int_0^3 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} - x\Big|_1^3$$

$$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{5}{2}}$$

Scanned by CamScanner

١٨ اذا كان $\int_0^2 kx\,dx = 6$ فما قيمة k ؟

$$k\int_0^2 x\,dx = 6 \Rightarrow k\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^2 = 6 \Rightarrow k\left[\frac{4}{2}-0\right] = 6 \Rightarrow \frac{2k}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{k=3}$$

---

١٩ اذا كان $\int_0^3 mx\,dx = 9$ فما قيمة m ؟

$$m\int_0^3 x\,dx = 9 \Rightarrow m\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 = 9 \Rightarrow \frac{m}{2}[9-0] = 9 \Rightarrow 9m = 2\cdot 9 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

---

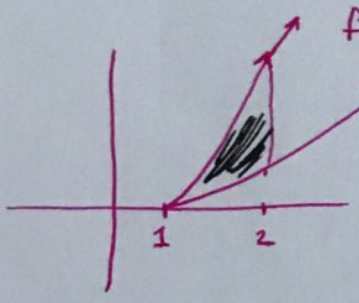
٢٠ اذا كان $\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x})\,dx = 1$ فما قيمة k ؟

$$k\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_0^1 = \left(\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\right) - 0 = 1 \Rightarrow \frac{2k+3}{6} = 1 \Rightarrow 2k+3 = 6$$

$$\Rightarrow 2k = 6-3 \Rightarrow \boxed{k = \frac{3}{2}}$$

---

٢١ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x), g(x)$ في الفترة $1 \leq x \leq 2$



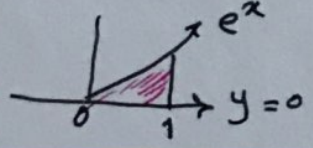
$$I = \int_1^2 |g(x) - f(x)|\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{4\cdot 3} - \frac{x^4}{3\cdot 4}\Big|_1^2 = \left[\left(\frac{8}{12}-\frac{16}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)\right] = \boxed{\frac{8}{12} = \frac{2}{3}}$$

---

٢٢ ما مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x, y = 0$ في الفترة $0 \leq x \leq 1$



$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = \boxed{e-1}$$

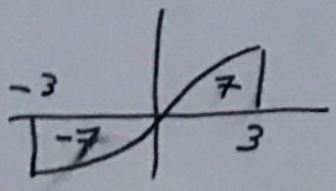
---

٢٣ اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ فإن $\int_3^1 f(x)\,dx =$ تساوي -5

٢٤ $\int_2^2 x^4\,dx = 0$

---

٢٥ اذا كانت f دالة زوجية على الفترة $[-3,3]$ وكانت $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = -7$ فإن $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ تساوي = صفر



Scanned by CamScanner