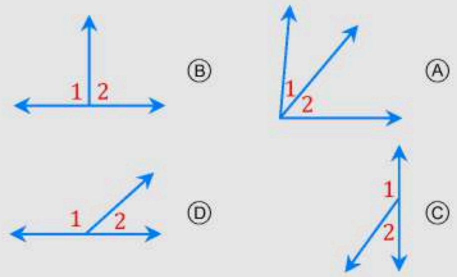
الرياضيات

2

المنطق الرياضي والهندسة

01 التخمين التالي «إذا كانت $\angle 1, \angle 2$ متجاورتين فإن الزاويتين متكاملتان»، أي الأشكال التالية يُعدُّ مثالًا مضادًا للتخمين أعلاه؟

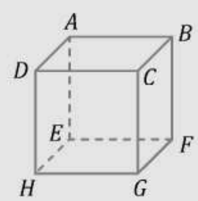


02 المعاكس الإيجابي للعبارة $\sim p \rightarrow q$ هو ..

Ⓐ $\sim p \rightarrow \sim q$　Ⓑ $\sim q \rightarrow p$

Ⓒ $\sim q \rightarrow \sim p$　Ⓓ $p \rightarrow q$

03 في الشكل متوازي مستطيلات، أي زوج من القطع المستقيمة التالية متخالفة؟



Ⓐ $\overline{BC}, \overline{FG}$　Ⓑ $\overline{BF}, \overline{DH}$

Ⓒ $\overline{HG}, \overline{DH}$　Ⓓ $\overline{BC}, \overline{EF}$

04 إذا كانت $\angle A, \angle B$ زاويتين متتامتين، وكانت $\angle A, \angle C$ زاويتين متتامتين؛ فأي التالي صحيح؟

Ⓐ $m\angle A + m\angle B = 180°$

Ⓑ $m\angle A + m\angle C = 180°$

Ⓒ $m\angle B > m\angle C$

Ⓓ $m\angle B = m\angle C$

المثال المضاد

- **المقصود به:** مثال نثبت به أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

مثال: «إذا كان الشكل رباعيًا فإن كل ضلعين متقابلين متطابقان» أي الأشكال التالية يُعدُّ مثالًا مضادًا للتخمين أعلاه؟

الحل: نبحث عن خيار يثبت أن الشكل رباعي وبه ضلعين متقابلين غير متطابقين، ونلاحظ في الخيار Ⓓ أن القاعدتين المتقابلتين غير متطابقتين.

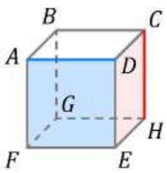
العبارات الشرطية المرتبطة

- عبارات شرطية مرتبطة بالعبارة الشرطية المعطاة ..

العبارة	مكوناتها
الشرطية	فرض معطى ونتيجة
العكس	تبديل الفرض والنتيجة
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية

النقاط والمستقيمات والمستويات

- إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيم.
- المستقيمان المتخالفان لا يقعان في مستوى واحد، ولا يتقاطعان، فمثلًا ..



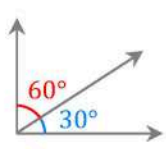
$\overleftrightarrow{AD}$ يخالف $\overleftrightarrow{CH}$

بينما $\overleftrightarrow{CD}$ لا يخالف $\overleftrightarrow{AB}$ لأنهما يقعان في نفس المستوى ومتوازيان

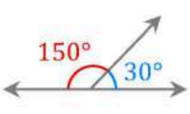
بعض العلاقات بين الزوايا

- **الزاويتان المتتامتان والزاويتان المتكاملتان ..**

الزاويتان المتتامتان مجموع قياسيهما $90°$

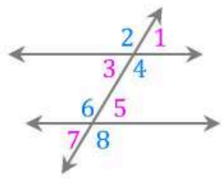


الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما $180°$



الزوايا والمستقيمات المتوازية

- **الزوايا بين مستقيمين متوازيين ومستقيم يقطعهما ..**
  - الزوايا المتناظرة متطابقة (5 , 1 وكذلك 7 , 3).
  - الزوايا المتبادلة داخليًا متطابقة (5 , 3 وكذلك 6 , 4).
  - الزوايا المتبادلة خارجيًا متطابقة (7 , 1 وكذلك 8 , 2).
  - الزوايا المتحالفة متكاملة (6 , 3 وكذلك 5 , 4).

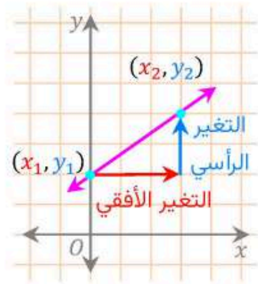


ميل المستقيم ومعادلته

- **ميل المستقيم المار بالنقطتين** $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_2 \neq x_1$$

- **فائدة:** إذا بدأنا بـــ y_1 في البسط فإننا نبدأ بـــ x_1 في المقام.



- **معادلة مستقيم بدلالة الميل m والمقطع y ..**

$$y = mx + b$$

- **معادلة مستقيم بدلالة ميله ونقطة تقع عليه (x_1, y_1) ..**

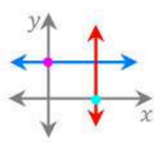
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- **معادلة المستقيم الأفقي ..**

$y = b$ ، وميله صفر

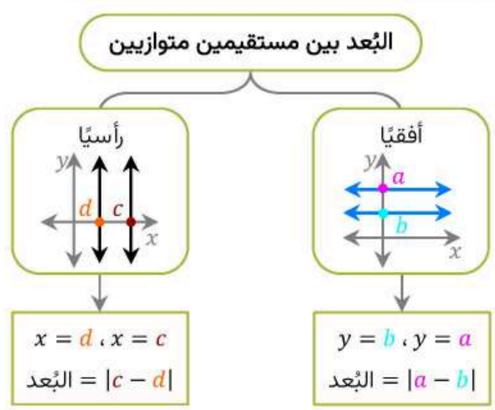
- **معادلة المستقيم الرأسي ..**

$x = a$ ، وميله غير معرف

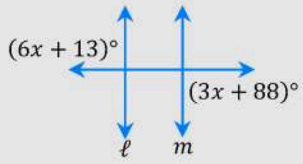


- **فائدة:** باستثناء المستقيمات الرأسية فإن المستقيمين المتوازيين لهما الميل نفسه، المستقيمين المتعامدين حاصل ضرب ميليهما -1 .

البُعد بين مستقيمين متوازيين



05 ١٤٤٣ في الشكل ما قيمة x التي تجعل $\ell \parallel m$ ؟



Ⓐ 35
Ⓑ 25
Ⓒ 20
Ⓓ 15

06 ١٤٤٤ ما قيمة x التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2x, -5)$ و $(3, 1)$ يساوي 2 ؟

Ⓐ -6 Ⓑ -3
Ⓒ 0 Ⓓ 3

07 ١٤٤٣ ما قيمة n التي تجعل المستقيم $y = (n + 1)x + 4$ أفقيًا؟

Ⓐ -4 Ⓑ -1
Ⓒ 4 Ⓓ 1

08 ١٤٤٤ ما معادلة الخط المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته $x = 4y - 12$ ومقطع المحور y له يساوي -5 ؟

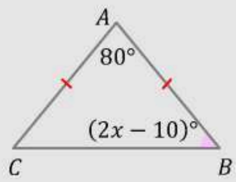
Ⓐ $y = \frac{1}{4}x - 5$ Ⓑ $y = \frac{1}{4}x + 5$
Ⓒ $y = \frac{3}{4}x - 5$ Ⓓ $y = \frac{3}{4}x + 5$

09 ١٤٤٣ البعد بين المستقيمين المتوازيين $y = -2$ و $y = 4$ يساوي ..

Ⓐ 2 Ⓑ 3
Ⓒ 4 Ⓓ 6

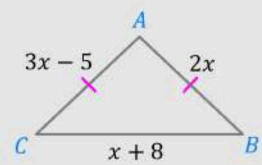
المثلثات والمضلعات

01 في الشكل ما قيمة x ؟



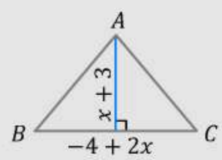
Ⓐ 40
Ⓑ 30
Ⓒ 20
Ⓓ 10

02 في الشـكل أي التالي يُمثل أطوال أضـلاع المثلث ABC ؟



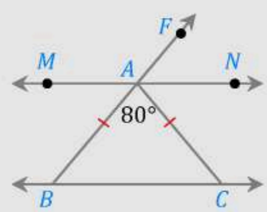
Ⓐ $13, 12, 10$
Ⓑ $13, 10, 10$
Ⓒ $13, 13, 10$
Ⓓ $12, 10, 10$

03 أوجد مسـاحة المثلث ABC .



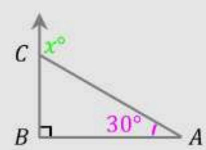
Ⓐ $(x-2)(x+3)$
Ⓑ $(4-2x)(x+3)$
Ⓒ $x+3$
Ⓓ $2x-4$

04 إذا كان المثلث ABC متطابق الضـلعين، $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ؛ فما قياس $\angle FAN$ ؟



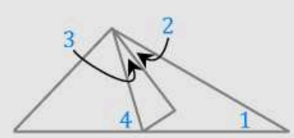
Ⓐ $30°$
Ⓑ $40°$
Ⓒ $50°$
Ⓓ $60°$

05 ما قيمة x في الشكل؟



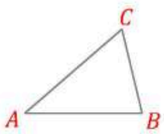
Ⓐ 60 Ⓑ 90
Ⓒ 120 Ⓓ 150

06 أي الزوايا التالية أكبر في القياس؟



Ⓐ 1 Ⓑ 2
Ⓒ 3 Ⓓ 4

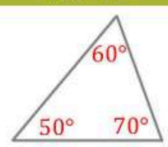
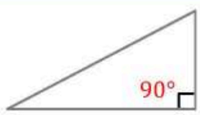
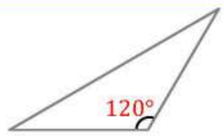
المثلث



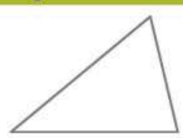
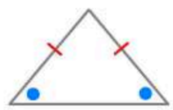
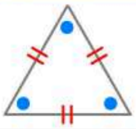
- مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث °180 ..

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$

- تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها ..

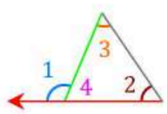
حاد الزوايا	قائم الزاوية	منفرج الزاوية
		
قياس زواياه أقل من °90	يحوي زاوية قياسها °90	يحوي زاوية قياسها أكبر من °90

- تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها ..

مختلف الأضلاع	متطابق الضلعين	متطابق الأضلاع
		
لا يحوي أضلاعًا متطابقة	فيه ضلعان متطابقان على الأقل	أضلاعه كلها متطابقة

- **فائدة:** إذا حوى المثلث المتطابق الضلعين زاوية قياسها °60 فإنه يُصبح متطابق الأضلاع.
- **تنبيهان ..**
  - زاويتا قاعدة المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان.
  - زوايا المثلث المتطابق الأضلاع كلها متطابقة، وقياس كل منها °60 .
- **فائدة:** محيط أي شكل يساوي مجموع أطوال أضلاعه.

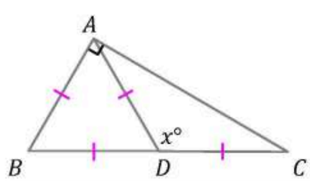
مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ طول القاعدة $\times$ الارتفاع



- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يسـاوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين ..

$$m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$$

مثال: ما قيمة x في الشكل؟



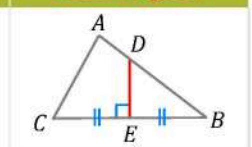
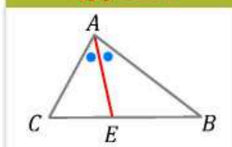
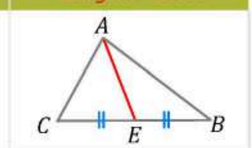
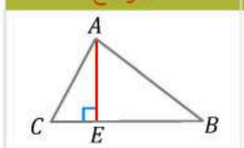
Ⓐ 72 Ⓑ 90
Ⓒ 120 Ⓓ 150

الحل: بما أن ΔABD متطابق الأضـلاع فإن جميع زواياه متطابقة، وقياس كل منها °60 ، فإن ..

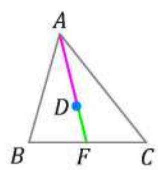
$x = 60 + 60 = 120$ (زاوية خارجية)

- **حالات تطابق مثلثين ..**
  - إذا تطابقت 3 أضلاع في أحدهما مع نظائرها في الآخر (SSS) .
  - إذا تطابق ضـلعـان والزاويـة المحصـورة بينهمـا في أحـدهمـا مع نظائرهـا في الآخر (تطابق ضلع ـ زاوية ـ ضلع SAS) .
  - تطابق زاوية ـ ضلع ـ زاوية (ASA) ، الضلع بين الزاويتين.
  - تطابق زاوية ـ زاوية ـ ضلع (AAS) .

قطع مستقيمة خاصة في المثلث

العمود المنصف	منصف زاوية
	
القطعة المتوسطة	**الارتفاع**
	

مركز المثلث

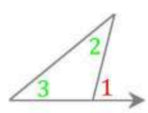


- **مركز المثلث:** نقطة تلاقي متوســطات المثلث، فإذا كانت D مركز المثلث ABC فإن ..

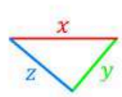
$$AD = \frac{2}{3}AF \,, DF = \frac{1}{3}AF \,, AD = 2DF$$

بُعد المركز عن الرأس ، بُعد المركز عن القاعدة

المتباينات في المثلث



- قيـاس زاويـة خـارجيـة في مثلـث أكبر من قيـاس أي من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.
- في المثلث؛ الضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر، والضلع الأقصر يقابل الزاوية الأصغر.

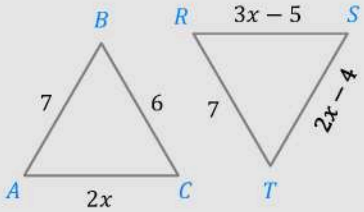


- طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين، وأكبر من الفرق بينهما، وبالرموز ..

$$|y - z| < x < y + z$$

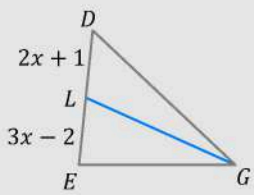
طريقة سـهلة: نقارن بين طول أطول ضــلع ومجموع طولي الضــلعين الآخرين، فمثلًا: الأطوال 3 ,5 ,7 تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث لأن (8 = 5 + 3) أكبر من طول الضلع الـثـالـث (7) ، أمـا الأطـوال 2 ,5 ,9 فـلا تصـــلح أن تـكـون أطـوال أضـــلاع مـثـلـث لأن (7 = 2 + 5) أصغر من طول الضلع الثالث (9) .

07 في الشـكل ما قيمة x التي تجعل المثلثين RTS, ABC متطابقين؟



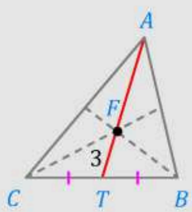
Ⓐ 3
Ⓑ 5
Ⓒ 7
Ⓓ 8

08 في الشـكل إذا كانت $\overline{GL}$ قطعة متوسـطة؛ فما طول $\overline{DE}$ ؟



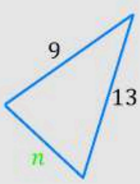
Ⓐ 7 Ⓑ 10
Ⓒ 14 Ⓓ 17

09 في الشـكل إذا كانت F مركز المثلـث ABC و $FT = 3$ ؛ فإن $AF =$ ....



Ⓐ 12 Ⓑ 9
Ⓒ 6 Ⓓ 4

10 في المثلـث أي الأعـداد التـاليـة لا يمكن أن يكون قيمة لـ n ؟



Ⓐ 7 Ⓑ 10
Ⓒ 13 Ⓓ 22

11 أي التالي يُمثل أطوال أضلاع مثلث؟

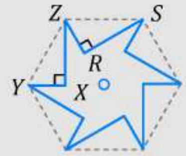
Ⓐ 2,5,7 Ⓑ 5,8,10
Ⓒ 3,4,9 Ⓓ 2,4,7

12 ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم؟

Ⓐ $120°$ Ⓑ $135°$

Ⓒ $140°$ Ⓓ $240°$

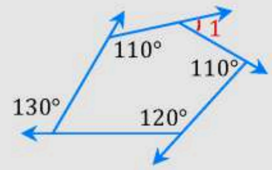
13 سداسي منتظم صُنعت منه شفرة منشار بقص ستة مثلثات قائمة الزاوية ومتطابقة، بحيث كانت أحرف السـداسي أوتارًا فـي المثلثات المقطوعة، وكان $m\angle XYZ = 45°$، أوجد $m\angle XZR$.



Ⓐ $30°$ Ⓑ $45°$

Ⓒ $50°$ Ⓓ $60°$

14 في الشكل $m\angle 1$ يساوي ..



Ⓐ $30°$

Ⓑ $50°$

Ⓒ $60°$

Ⓓ $150°$

المضلعات

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع ..

$$S = 180°(n-2)$$

عدد أضلاع المضلع

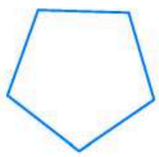
مثال: مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع سداسي ..

Ⓐ $540°$ Ⓑ $720°$

Ⓒ $900°$ Ⓓ $1080°$

الحل: بما أن المضلع سداسي فإن $n = 6$ ..

$$S = 180°(n-2) = 180°(6-2) = 180° \times 4 = 720°$$



- **المضلع المنتظم:** أضلاعه متطابقة وزواياه متطابقة.
  - علاقة قياس زاويته الداخلية بعدد أضلاعه ..

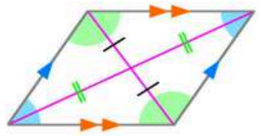
$$m = \frac{180°(n-2)}{n} \quad , \quad n = \frac{360°}{180° - m}$$

- علاقة قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم بعدد أضلاعه ..

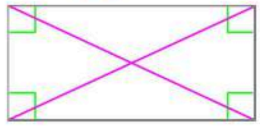
$$\text{قياس الزاوية الخارجية} = \frac{360°}{n}$$

الأشكال الرباعية والتشابه والتحويلات

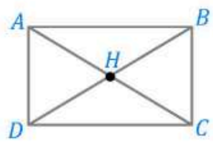
الأشكال الرباعية



- **متوازي الأضلاع:** شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان ، وقطراه ينصف كل منهما الآخر، وكل زاويتين متقابلتين متطابقتان، وكل زاويتين متحالفتين متكاملتان (مجموع قياسيهما $180°$).



- **المستطيل:** متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم، وقطراه متطابقان.



مثال: في الشكل $HC = 9$ و $BD = 4x - 2$ ، ما قيمة x التي تجعل الشكل $ABCD$ مستطيلًا؟

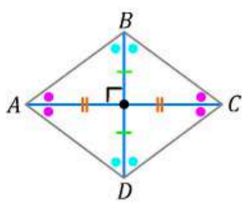
Ⓐ 4 Ⓑ 5

Ⓒ 6 Ⓓ 8

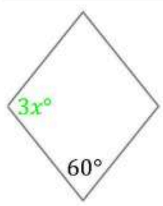
الحل: قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الآخر ..

$$BD = 2HC \Rightarrow 4x - 2 = 2(9) = 18 \Rightarrow 4x = 18 + 2 = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{4} = 5$$



- **المعين:** متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان وينصفان زوايا الرؤوس.
  - **فائدة:** في المعين كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.



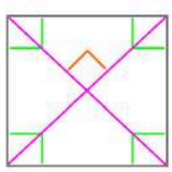
مثال: إذا كان الشكل معينًا فما قيمة x ؟

Ⓐ 40 Ⓑ 60

Ⓒ 80 Ⓓ 120

الحل: في المعين كل زاويتين متحالفتين متكاملتان ..

$$3x + 60 = 180 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40$$

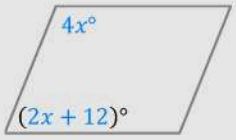


- **المربع:** متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه قوائم، وقطراه متعامدان ومتطابقان.
- **فائدة:** إذا كانت M نقطة المنتصف بين النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ؛ فإن ..

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

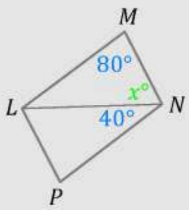
---

01 قيمة x في متوازي الأضلاع تساوي ..



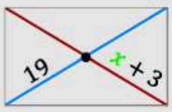
Ⓐ 22
Ⓑ 24
Ⓒ 26
Ⓓ 28

02 إذا كان الشكل $LMNP$ متوازي أضلاع فما قيمة x ؟



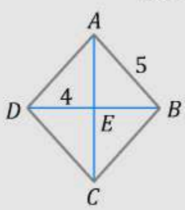
Ⓐ 40
Ⓑ 50
Ⓒ 60
Ⓓ 100

03 إذا كان الشكل مستطيلًا فما قيمة x ؟



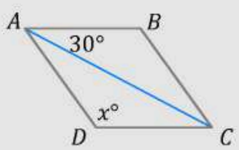
Ⓐ 16 Ⓑ 17
Ⓒ 19 Ⓓ 22

04 في المعين $ABCD$ ، يتقاطع قطراه في النقطة E ، إذا كان $AB = 5$ و $ED = 4$ ؛ فأوجد AE .



Ⓐ 3
Ⓑ 4
Ⓒ 5
Ⓓ 6

05 في المعين $ABCD$ ما قيمة x ؟

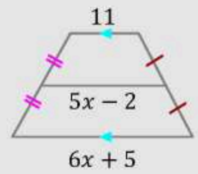


Ⓐ 20
Ⓑ 30
Ⓒ 60
Ⓓ 120

06 ذهب فهد مع عائلته في رحلة، واختار منطقة مربعة الشكل $ABCD$ لينصب عليها خيمته، إحداثيات زواياها $A(-4,4), B(6,4), C(6,-6), D(-4,-6)$ ، ما إحداثيات مركز الخيمة ليتم وضع عمود الارتكاز فيها؟

Ⓐ $(1,1)$ Ⓑ $(-1,-1)$
Ⓒ $(1,-1)$ Ⓓ $(-1,1)$

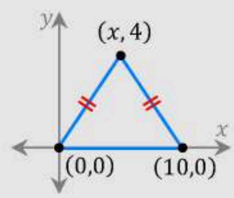
● 07 **ما قيمة x في الشكل؟**



Ⓐ 4 Ⓑ 5

Ⓒ 6 Ⓓ 7

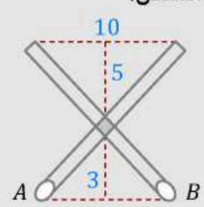
● 08 **في الشكل ما قيمة x ؟**



Ⓐ 13 Ⓑ 10

Ⓒ 5 Ⓓ 3

● 09 **إذا كان الشكل يُمثل مقصًا مفتوحًا فأوجد المسافة بين A, B الواقعين على مقبضي المقص.**



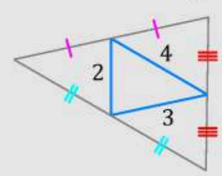
Ⓐ 8

Ⓑ 6

Ⓒ 2

Ⓓ 1.5

● 10 **ما محيط المثلث الأكبر في الشكل؟**



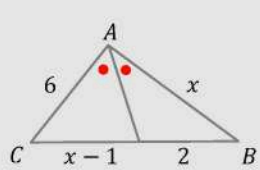
Ⓐ 18

Ⓑ 16

Ⓒ 15

Ⓓ 14

● 11 **ما قيمة x في الشكل؟**

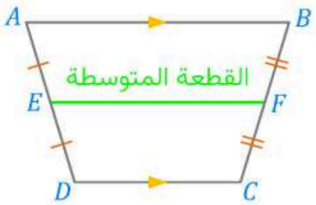


Ⓐ 3

Ⓑ 4

Ⓒ 5

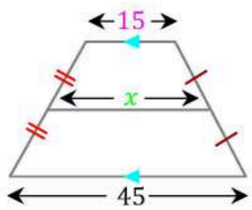
Ⓓ 6



- **شبه المنحرف:** شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان.
  - طول القطعة المتوسطة في شبه المنحرف ..

$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

مثال: قيمة x في الشكل تساوي ..



Ⓐ 15 Ⓑ 25

Ⓒ 30 Ⓓ 45

الحل: من تعريف القطعة المتوسطة لشبه المنحرف ..

$$x = \frac{15 + 45}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

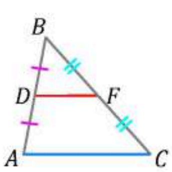
البرهان الإحداثي

- **فوائد لتحديد الإحداثيات المجهولة ..**
  - نستخدم خصائص الأشكال الهندسية بكل دقة.
  - النقاط التي على نفس الخط الرأسي لها نفس الإحداثي x .
  - النقاط التي على نفس الخط الأفقي لها نفس الإحداثي y .

المثلثات المتشابهة

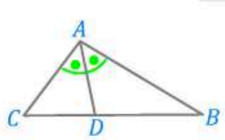
- **يتشابه مثلثان إذا ..**
  - كانت أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة (SSS) .
  - طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر (AA) .
  - تناسب طولا ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما (SAS) .
- **في المثلثين المتشابهين:** نسبة التشابه تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين.

القطعة المنصفة ونظرية منصف الزاوية في المثلث



- القطعة المنصفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

$$\overline{DF} \parallel \overline{AC} \quad , \quad DF = \frac{AC}{2} \quad \Rightarrow \quad AC = 2DF$$



- **نظرية منصف زاوية في مثلث:** إذا كان $\overline{AD}$ منصفًا لـ $\angle A$ فإن ..

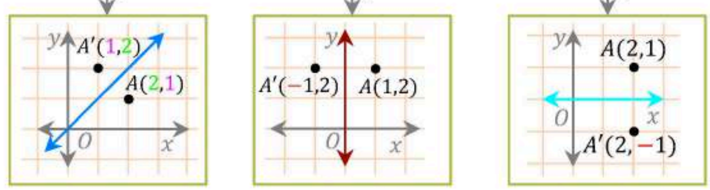
$$\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$$

التحويلات الهندسية

- **الانعكاس ..**

انعكاس نقطة حول

محور x	محور y	المستقيم $y = x$
نغير إشارة الإحداثي y	نغير إشارة الإحداثي x	نبدل الإحداثيين
$A(a,b) \Downarrow A'(a,-b)$	$A(a,b) \Downarrow A'(-a,b)$	$A(a,b) \Downarrow A'(b,a)$
مثال	مثال	مثال

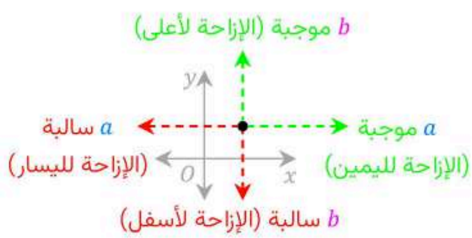


○ **فائدة:** الانعكاس يُسمى تحويل تطابق.

- **الإزاحة (الانسحاب):** صورة النقطة $P(x,y)$ بالإزاحة هي النقطة ..

$P'(x+a, y+b)$

مقدار الإزاحة الرأسية ، مقدار الإزاحة الأفقية



مثال: ما الإزاحة التي نقلت النقطة $(6,2)$ إلى $(4,5)$ ؟

Ⓐ $(x-2, y+3)$ Ⓑ $(x-1, y+4)$

Ⓒ $(x-3, y+3)$ Ⓓ $(x-1, y+3)$

الحل:

$6 \xrightarrow{6+??} 4 \ , \ 2 \xrightarrow{2+??} 5$

$6 \xrightarrow{6+(-2)} 4 \ , \ 2 \xrightarrow{2+3} 5$

الإزاحة هي $(x-2, y+3)$

○ **فائدة:** الإزاحة تُسمى تحويل تطابق.

12 ١٤٣٨
ما صورة النقطة $(1,5)$ بالانعكاس حول المحور x ؟

Ⓐ $(1,-5)$ Ⓑ $(-1,-5)$

Ⓒ $(5,1)$ Ⓓ $(-1,5)$

13 ١٤٣٨
ما صورة النقطة $(-1,3)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ ؟

Ⓐ $(1,3)$ Ⓑ $(1,-3)$

Ⓒ $(-1,3)$ Ⓓ $(3,-1)$

14 ١٤٣٩
ما صورة النقطة $(2,-3)$ تحت تأثير الإزاحة $(x-3, y+4)$ ؟

Ⓐ $(-1,1)$ Ⓑ $(-6,6)$

Ⓒ $(5,-7)$ Ⓓ $(1,1)$

15 ١٤٤٠
إذا كانت $E(3,1)$, $F(0,5)$ نقطتين في المستوى الإحداثي فما الإزاحة التي تنقل النقطة E إلى F ؟

Ⓐ $(x,y) \longrightarrow (x-2, y+1)$

Ⓑ $(x,y) \longrightarrow (x-3, y+4)$

Ⓒ $(x,y) \longrightarrow (x+4, y-3)$

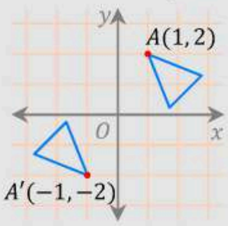
Ⓓ $(x,y) \longrightarrow (x+1, y-2)$

16 صـورة النقطـة $(3,5)$ بـالـدوران بزاويـة $90°$ عكس عقارب الساعة ..

Ⓐ $(-5,3)$ Ⓑ $(-5,-3)$

Ⓒ $(3,-5)$ Ⓓ $(-3,-5)$

17 ما قياس زاوية الدوران حول نقطة الأصـل الذي يُجرى على المثلث ABC لينقل الرأس A إلى النقطة A' ؟



Ⓐ $90°$

Ⓑ $180°$

Ⓒ $270°$

Ⓓ $360°$

18 ما صورة النقطة $(-3,1)$ بالتناظر حول نقطة الأصل؟

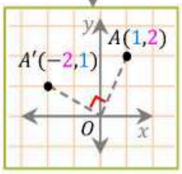
Ⓐ $(1,3)$ Ⓑ $(-1,3)$

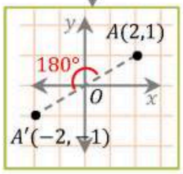
Ⓒ $(-3,1)$ Ⓓ $(-3,-1)$

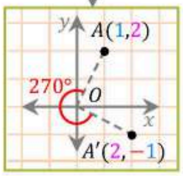
- الدوران بعكس عقارب الساعة ..

دوران نقطة حول نقطة الأصل

بزاوية $90°$	بزاوية $180°$	بزاوية $270°$
نبدل الإحداثيين **ثم** نغير إشارة الأول	نغير إشارة الإحداثيين x و y	نبدل الإحداثيين **ثم** نغير إشارة الثاني
$A(x,y) \Downarrow A'(-y,x)$	$A(x,y) \Downarrow A'(-x,-y)$	$A(x,y) \Downarrow A'(y,-x)$
مثال	مثال	مثال





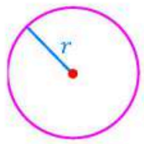


- **تنبيه:** عند الدوران بزاوية $360°$ فإن صورة النقطة الناتجة هي النقطة الأصلية نفسها.
- **فائدة:** الدوران يُسمى تحويل تطابق.
- التناظر حول نقطة الأصل هو صورة النقطة بدوران زاويته $180°$.

الدائرة

الدائرة

- **محيط الدائرة ..**

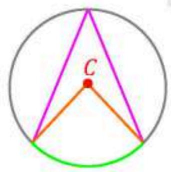


$c = 2\pi r$

محيط الدائرة، النسبة التقريبية $\approx 3.14 \approx \frac{22}{7}$، نصف القطر

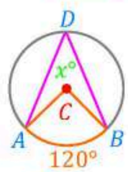
- **العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية ..**

قياس الزاوية المحيطية يساوي **نصف** قياس القوس المقابل لها، أي نصف قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس



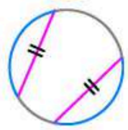
○ **مثال توضيحي:** في الشكل $\angle ADB$ محيطية ..

$$x^\circ = \frac{1}{2} m\,\widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

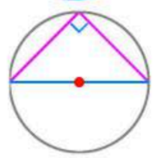


- نصف الدائرة قياس زاويته المركزية 180° .

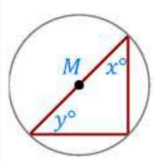
- تطابق الأوتار يؤدي إلى تطابق أقواسها، والعكس بالعكس.



- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة (قياسها 90°) .



مثال: في الشـــكـل إذا كانت M مركز الـدائرة فمـا قيمـة $x + y$ ؟



Ⓐ 60 Ⓑ 90

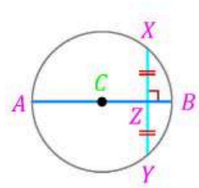
Ⓒ 120 Ⓓ 180

الحل: بما أن الزاوية المحيطية المرســـومة في نصـــف دائرة قياســـها 90° ، ومجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية 180° فإن ..

$$90 + (x + y) = 180 \quad \Rightarrow \quad (x + y) = 180 - 90 = 90$$

تنصيف الأقواس والأوتار

- إذا كان قطر الدائرة أو نصـــف قطرها عموديًا على وتر فيها؛ فإنه ينصف ذلك الوتر وينصف قوسه.

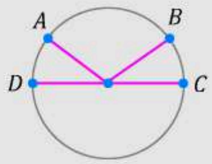


01 حوض ســباحـة دائري محيطه $50\ m$ ، أوجـد طول نصف قطر المسبح مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

Ⓐ 6 Ⓑ 7

Ⓒ 8 Ⓓ 10

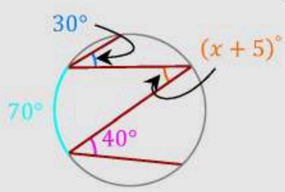
02 في الشـــكل $m\,\widehat{AB} = 3m\,\widehat{BC}$ و $\widehat{BC} \cong \widehat{AD}$ ، أوجد $m\,\widehat{BC}$.



Ⓐ 72° Ⓑ 48°

Ⓒ 36° Ⓓ 24°

03 ما قيمة x في الشكل؟



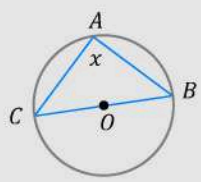
Ⓐ 30

Ⓑ 40

Ⓒ 60

Ⓓ 70

04 ما قيمة x في الشكل؟



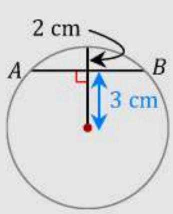
Ⓐ 30°

Ⓑ 45°

Ⓒ 60°

Ⓓ 90°

05 في الشكل ما طول $\overline{AB}$ بالسنتمتر؟



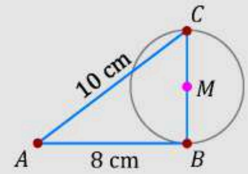
Ⓐ 4

Ⓑ 8

Ⓒ 10

Ⓓ 16

06 إذا كان $\overline{AB}$ مماسًا للدائرة M فما طول نصف قطر الدائرة بالسنتمترات؟



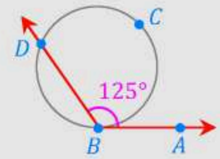
Ⓐ 2

Ⓑ 3

Ⓒ 4

Ⓓ 6

07 في الشكل إذا كان $m\angle ABD = 125°$ و $\overline{AB}$ مماسًا؛ فإن $m\,\widehat{BCD}$ يساوي ..



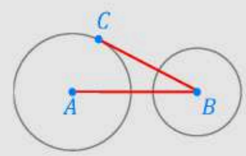
Ⓐ $62.5°$

Ⓑ $125°$

Ⓒ $150°$

Ⓓ $250°$

08 في الشكل إذا كان طول قطر الدائرة A يساوي 12 و $\overline{BC}$ مماسًا لها عند c وطوله يساوي 8 ، وكانت المسافة بين الدائرتين 1 ؛ فما طول قطر الدائرة B ؟



Ⓐ 3

Ⓑ 6

Ⓒ 7

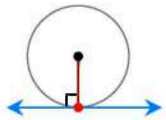
Ⓓ 9

09 إذا حدث انعكاس لمركز الدائرة التي معادلتها $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ حول المستقيم $y = x$، ثم دوران بزاوية $90°$ عكس عقارب الساعة؛ فما مركزها بعد الدوران؟

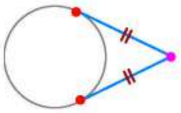
Ⓐ $(-1,-3)$ Ⓑ $(-1,3)$

Ⓒ $(1,-3)$ Ⓓ $(-3,-1)$

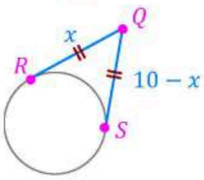
مماس الدائرة



- **المماس:** مستقيم في مستوى الدائرة ويقطعها في نقطة واحدة.
- **نظرية:** المماس ونصف القطر المار بنقطة التماس متعامدان.



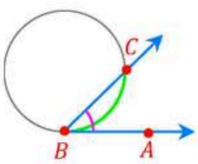
- **نظرية:** القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقتان.



○ **مثال توضيحي:** في الشكل إذا كانت $\overline{QR}, \overline{QS}$ مماستين للدائرة فإن ..

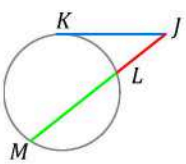
$$x = 10 - x \;\Rightarrow\; 2x = 10 \;\Rightarrow\; x = \frac{10}{2} = 5$$

- **الزاوية المماسية:** زاوية ناتجة من تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.



$$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\,\widehat{BC}$$

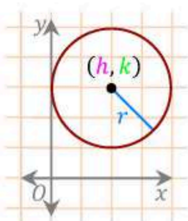
- **طول المماس وجزأي القاطع:** $\overline{JK}$ مماس متقاطع مع القاطع $\overline{JM}$ خارج الدائرة ..



$$(JK)^2 = JL \times JM$$

معادلة الدائرة

- معادلة الدائرة التي مركزها (h,k) وطول نصف قطرها r هي ..



$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

○ **مثال توضيحي:** معادلة الدائرة التي مركزها $(2,3)$ وطول نصف قطرها 2 هي ..

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

05

الدوال والمتباينات والمصفوفات

الأعداد الحقيقية

- **مجموعة الأعداد الطبيعية N :** $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **مجموعة الأعداد الكلية W :** $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **مجموعة الأعداد الصحيحة Z :** $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **مجموعة الأعداد النسـبية Q :** تتكون من أي عدد يمكن كتابته على صـورة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ بحيث المقام $\neq 0$ ، وأيضًا الأعداد الدورية، مثل ..

$$2, \sqrt{49}, 0.125, \frac{22}{7}, \frac{3}{5}, 0.\overline{3}, 0.\overline{45}$$

- **مجموعة الأعداد غير النسبية I :** العدد غير النسبي عدد صورته العشرية ليست منتهية ولا دورية، مثل ..

$$\pi , \sqrt{2} , \sqrt{6} , \sqrt{8} ، \sqrt{\text{عدد ليس مربعًا كاملاً}}$$

- **مجموعة الأعداد الحقيقية R :** اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديل	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
التجميع	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a.(b.c) = (a.b).c$
العنصر المحايد	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
النظير	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \ , \ a \neq 0$
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$ أو $(b + c)a = ba + ca$	

- **خاصية الجمع أو الطرح للمساواة:** إذا كان $a = b$ فإن $a + c = b + c$ و $a - c = b - c$
أي أننا: إذا جمعنا (أو طرحنا) نفس الكمية من كميتين متساويتين فإن الناتج كميات متساوية.
- **مسـلَّمة جمع أطوال القطع المسـتقيمة:** إذا كان $FH + HG = FG$ فإن النقطة H تقع بين F و G أي أنها تمثل قطعة مستقيمة FG .

الفترات في الأعداد الحقيقية R

- **الفترات المحدودة وغير المحدودة ..**

فترات محدودة	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
	(a, b)	$a < x < b$
فترات غير محدودة	$(-\infty, a]$	$x \leq a$
	(a, ∞)	$x > a$

○ **تنبيه:** في رمز الفترة رمز التباين $\leq$ يدل على القوس المغلق] ، ورمز التباين $<$ يدل على القوس المفتوح) ، فمثلًا: المتباينة $-2 \leq x < 3$ تُمثل بالفترة $[-2, 3)$ ، أما الصـفة المميزة لها هي $\{x | -2 \leq x < 3, x \in R\}$.

01 ما العـدد الـذي ينتمي إلى مجموعـة الأعـداد غير النسبية؟

Ⓐ $\sqrt{7}$ Ⓑ 2
Ⓒ $\frac{22}{7}$ Ⓓ $0.\overline{45}$

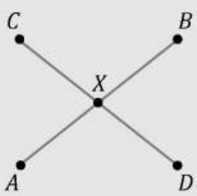
02 ما الخاصية التي تبرر العبارة التالية؟
«إذا كان $3\left(x - \frac{7}{6}\right) = 5$ فإن $3x - \frac{7}{2} = 5$»

Ⓐ التوزيع Ⓑ الطرح
Ⓒ الجمع Ⓓ الضرب

03 إذا كان لدينا 3 نقاط A, B, C حيث أن $AB + CB = AC$ ؛ فإن هذه النقاط تُمثل ..

Ⓐ قطعة مستقيمة AB Ⓑ مثلث ضلعه الأكبر $\overline{AB}$
Ⓒ قطعة مستقيمة AC Ⓓ مثلث ضلعه الأكبر $\overline{AC}$

04 إذا كان $\overline{CX} \cong \overline{AX}$ و $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ؛ فإن ..



Ⓐ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
Ⓑ $\overline{BX} \cong \overline{CX}$
Ⓒ $\overline{DX} \cong \overline{BX}$
Ⓓ $\overline{BD} \cong \overline{DA}$

05 ما الفترة التي تُمثل المتباينة $-5 \leq x < -2$ ؟

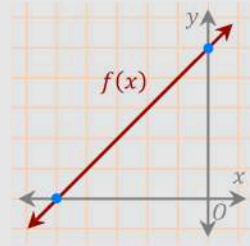
Ⓐ $[-5, -2)$ Ⓑ $(-5, -2)$
Ⓒ $(-5, -2]$ Ⓓ $[-5, -2]$

06 أوجـد مـدى الـدالـة $f(x) = 2x - 5$ إذا كـان $-1 < x < 3$.
١٤٤٣

Ⓐ $(-1,3)$　Ⓑ $(1,-3)$

Ⓒ $(-7,1)$　Ⓓ $(-7,3)$

07 من الشكل $f(x)$ تساوي ..
١٤٤٣



Ⓐ $5x$

Ⓑ $-5-x$

Ⓒ $x+5$

Ⓓ $x-5$

08 إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \le x \le 15 \\ 60 & , 15 < x < 24 \\ -x+15 & , 24 \le x \le 40 \end{cases}$ فإن $f(25)$ تساوي ..
١٤٤٣

Ⓐ 10　Ⓑ 5

Ⓒ -10　Ⓓ -15

09 في الجدول ما العلاقة بين y, x ؟
١٤٤٣

x	1	2	3	4	5
y	5	8	11	14	17

Ⓐ $y = 3x - 2$　Ⓑ $y = 4x + 1$

Ⓒ $y = 4x - 1$　Ⓓ $y = 3x + 2$

10 مجال الدالة $f(x) = |x - 7|$ ..
١٤٤٣

Ⓐ R　Ⓑ $R - \{7\}$

Ⓒ $R - \{-7\}$　Ⓓ $R - \{0\}$

11 ما رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 9 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ ؟
١٤٣٩

Ⓐ 3×4　Ⓑ 4×3

Ⓒ 3×2　Ⓓ 3×3

12 في المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ما قيمة العنصر a_{23} ؟
١٤٣٩

Ⓐ 0　Ⓑ 2

Ⓒ 4　Ⓓ 8

العلاقات والدوال

- **الدالة:** علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى.
- **المجال:** قيم x التي يمكن التعويض بها في الدالة.
- **المدى:** القيم الناتجة من التعويض بقيم x في الدالة.
  - **فائدة:** لإيجاد المدى جبريًا نعوض ببداية ونهاية المتباينة في الدالة ويعبر عنه بفترة.

قيمة الدالة $f(x)$ عند نقطة

- لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عند نقطة نعوض بالنقطة في الدالة بشـرط انتماء النقطة لمجال الدالة.

مثال: إذا كانت $f(x) = 3x - 2$ فأوجد $f(-3)$. ١٤٤٣

Ⓐ -9　Ⓑ -10

Ⓒ -11　Ⓓ -12

الحل: بالتعويض عن $x = -3$ في الدالة $f(x)$ ..

$$f(-3) = 3(-3) - 2 = -9 - 2 = -11$$

- في الدالة متعددة التعريف يتم التعويض بالعدد في الجزء الذي يحقق شروطها، ثم نبسط.
  - **مثال توضيحي:** الدالة $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x < 2 \\ x^2 , & x \ge 2 \end{cases}$ تسمى **دالة متعددة التعريف** ..

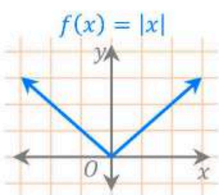
$$f(4) = (4)^2 = 16 \quad ، \quad f(-3) = -3 + 1 = -2$$

دالة القيمة المطلقة

- **القيمة المطلقة للعدد:** (دائمًا موجبة) $|\pm a| = a$ ، فمثلًا ..

$$|5| = 5 \quad , \quad |-7| = 7$$

- **الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = |x|$.



مجالها	R
مداها	$[0, \infty)$

- **الصورة العامة:** $f(x) = |x - a| + b$.

مجالها	R	مداها	$[b, \infty)$

المصفوفات والعمليات عليها

- نُعبر عن رتبة المصفوفة بـ $m \times n$ ، حيث m عدد الصفوف و n عدد الأعمدة.
- لتحديد عنصر في المصفوفة نحدد الصف الذي يقع فيه العنصر ثم العمود الذي يتقاطع معه، فمثلًا: a_{35} تعني العنصر في تقاطع الصف الثالث مع العمود الخامس.
  - **مثال توضيحي:** المصفوفة $\underline{A}$ رتبتها 3×2 ، والعنصر a_{21} هو 0 .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ ..

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- لجمع مصـــفوفتين من نفس الرتبة نجمع كل عنصـــر في المصـــفوفة الأولى مع نظيره في الثانية، والطرح بالطريقة نفسها، فمثلًا ..

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&4\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-2)&1+4\\3+5&-1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5\\8&1\end{bmatrix}$$

○ **تنبيه:** لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين مختلفتين في الرتبة.

مثال: ناتج $[7 \quad 2- \quad 3] + \begin{bmatrix}24\\-6\\-5\end{bmatrix}$ يساوي .. ١٤٤١

Ⓐ غير معرف　Ⓑ $[21]$

Ⓒ $[27]$　Ⓓ $[3]$

الحل: المصفوفة الأولى من الرتبة 1×3 ، والمصفوفة الثانية من الرتبة 3×1 ، وبما أن المصفوفتين مختلفتان في الرتبة فإن ناتج الجمع غير معرف.

- **المصـــفوفتان المتســـاويتان:** تكونان من نفس الرتبة وكل عنصـــر في المصـــفوفة الأولى يساوي نظيره في المصفوفة الثانية.

- **ضرب مصفوفة بعدد:** نضرب العدد بكل عنصر من عناصر المصفوفة.

- **ضرب مصفوفتين ..**

عملية ضرب ممكنة	عملية ضرب غير ممكنة
$\underline{A}_{m\times r}\cdot\underline{B}_{r\times t}$ ($r = r$)	$\underline{A}_{m\times r}\cdot\underline{B}_{n\times t}$ ($r \neq n$)
$\underline{A}_{2\times1}\cdot\underline{B}_{1\times3}$ ✓	$\underline{A}_{2\times1}\cdot\underline{B}_{3\times1}$ ×

ويكون ناتج الضرب من الرتبة $m \times t$ ، وتكون عملية الضرب كالتالي:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e&g\\f&h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bf&ag+bh\\ce+df&cg+dh\end{bmatrix}$$

○ **مثال توضيحي ..**

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&4\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+5&8+2\\-6-5&12-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&10\\-11&10\end{bmatrix}$$

المُحدِّدات والنظير الضربي لمصفوفة

- محددة مصفوفة من الرتبة 2×2 تُسمى **مُحدِّدة** الدرجة الثانية، وتُعطى من العلاقة ..

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

القطر الرئيس

مثال: ما قيمة المحددة $\begin{vmatrix}2&1\\-3&1\end{vmatrix}$ ؟

الحل:

$$\begin{vmatrix}2&1\\-3&1\end{vmatrix}=(2\times1)-(1\times-3)=2+3=5$$

13 ١٤٣٩ ناتج $2\begin{bmatrix}3&5\\-6&0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}9&-1\\2&3\end{bmatrix}$ يساوي ..

Ⓐ $\begin{bmatrix}42&6\\-4&12\end{bmatrix}$　Ⓑ $\begin{bmatrix}42&7\\-7&1\end{bmatrix}$

Ⓒ $\begin{bmatrix}27&-5\\12&0\end{bmatrix}$　Ⓓ $\begin{bmatrix}17&6\\-4&12\end{bmatrix}$

14 ١٤٤٣ إذا كان $2\begin{bmatrix}-3&0\\1&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x&4\\-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-4\\8&10\end{bmatrix}$ فما قيمة x ؟

Ⓐ 2　Ⓑ -2

Ⓒ -3　Ⓓ -6

15 ١٤٤٠ إذا كان ..

$\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1&4\\3&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2x+1\\y-1&25\end{bmatrix}$ فما قيمة $x+y$ ؟

Ⓐ 24　Ⓑ 18

Ⓒ 15　Ⓓ 10

16 ١٤٤٣ ناتج $\begin{bmatrix}2&-1\\-3&0\\0&4\end{bmatrix}\cdot[-2 \quad 0 \quad 4]$ يساوي ..

Ⓐ $[8 \quad -12]$　Ⓑ $\begin{bmatrix}8\\-12\end{bmatrix}$

Ⓒ $\begin{bmatrix}8&-4\\0&0\\0&-8\end{bmatrix}$　Ⓓ غير معرف

17 ١٤٤٣ قيمة x في المعادلة المصفوفية ..

$\begin{bmatrix}-1&1\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ يساوي ..

Ⓐ -3　Ⓑ -1

Ⓒ 1　Ⓓ 3

18 ١٤٤٢ إذا كانت $\underline{A},\underline{B}$ مصـــفوفتين من الرتبة 3×2 ، وكان K عددًا حقيقيًا؛ فأي التالي غير معرف؟

Ⓐ $\underline{A}+\underline{B}$　Ⓑ $\underline{A}-\underline{B}$

Ⓒ $K\underline{A}$　Ⓓ $\underline{A}\cdot\underline{B}$

19 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{A}^{-1}$.

Ⓐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ⓒ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Ⓓ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

20 إذا كانت $\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ فما قيمة x ؟

Ⓐ -1 Ⓑ 0

Ⓒ 1 Ⓓ 5

21 إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$ <u>ليس</u> لها نظير ضربي؛ فما قيمة $x^2 + y^2$ ؟

Ⓐ 0 Ⓑ 1

Ⓒ 2 Ⓓ 4

22 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ ، $|\underline{A}| = 42$ ؛ فما قيمة x ؟

Ⓐ 30 Ⓑ 3

Ⓒ -3 Ⓓ -30

23 ما قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ؟

Ⓐ -10 Ⓑ 10

Ⓒ -16 Ⓓ 16

24 ما مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(-1,3), (0,1), (5,5)$ ؟

Ⓐ 5 Ⓑ 7

Ⓒ 14 Ⓓ 28

- النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو ..

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال: ما النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ؟

الحل:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{2(3) - 5(1)}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **فائدة:** $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{I}$.
- إذا كانت محددة المصفوفة تساوي صفرًا فإن المصفوفة ليس لها نظير ضربي.

مثال: إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ <u>ليس</u> لها نظير ضربي؛ فما قيمة x ؟

Ⓐ $\frac{-4}{5}$ Ⓑ $\frac{4}{5}$

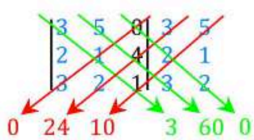
Ⓒ 2 Ⓓ 3

الحل: بما أن المصفوفة ليس لها نظير ضربي فإن محددتها تساوي صفرًا ..

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8(x+1) - x(-2) = 0$$

$$10x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

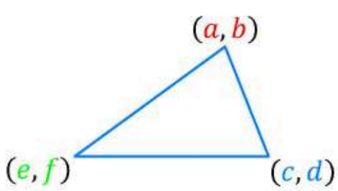
- **مُحدِّدة الدرجة الثالثة:** نحسب قيمتها بقاعدة الأقطار، فمثلًا ..



$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 60 + 0) - (0 + 24 + 10) = 29$$

- **من تطبيقات محددة الدرجة الثالثة ..**
  - مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a,b), (c,d), (e,f)$ تساوي $|A|$ حيث ..

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



كثيرات الحدود ودوالها

الوحدة التخيلية والعدد المركب

- الوحدة التخيلية ..

$$i = \sqrt{-1}$$

- الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة ..

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{-1} = bi$$

- بعض قوى الوحدة التخيلية ..

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

$$i^{(\text{أي عدد يقبل القسمة على 4})} = 1$$

$$\begin{aligned} i^{(\text{عدد زوجي لا يقبل القسمة على 4})} &= i^{(\text{عدد يقبل القسمة على 4})+2} \\ &= i^{(\text{عدد يقبل القسمة على 4})} \times i^2 \\ &= 1 \times -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$i^{(\text{عدد فردي})} \begin{cases} i^{(\text{عدد يقبل القسمة على 4})+1} = 1 \times i^1 = i \\ i^{(\text{عدد يقبل القسمة على 4})+3} = 1 \times i^3 = -i \end{cases}$$

- **فائدة:** لكي يقبل العدد القسمة على 4 يجب أن يقبل القسمة على 2 مرتين.

- **مثال توضيحي ..**

$$i^{17} = i^{16+1} = i^{16} \times i = 1 \times i = i$$

- العدد المركب يُكتب على الصورة ..

$$a + bi$$

الجزء التخيلي، الجزء الحقيقي

العمليات على الأعداد المركبة

- لتبسـيط الأعـداد المركبـة نبسـط الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي، فمثلًا ..

$$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i = 7 - 3i$$

- **مرافق العدد المركب ..**

مرافق $2 + 3i$ هو $2 - 3i$

- **تنبيه:** العدد الحقيقي عدد مركب، ومرافقه هو نفسه.
- **ضرب عددين مركبين مترافقين ..**

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- **فائدة:** عند ضرب الأعداد المركبة نستخدم خاصية التوزيع.
- لتبسيط كسر مقامه عدد مركب نضرب في مرافق المقام بسطًا ومقامًا.

---

01 تبسيط العدد $\sqrt{-36}$ هو ..

Ⓐ -6 Ⓑ $-6i$

Ⓒ $6i$ Ⓓ 6

02 أوجد قيمة $(2i + 3i^2)^2$.

Ⓐ $5 - 12i$ Ⓑ $5 - 10i$

Ⓒ $12 - 5i$ Ⓓ $7 - 12i$

03 المقدار $(2 + 3i)(1 - 2i)$ يساوي ..

Ⓐ $8 - 7i$ Ⓑ $6 - 2i$

Ⓒ $-4 - i$ Ⓓ $8 - i$

04 ما ناتج ضرب العددين المركبين $(2 - 6i)(2 + 6i)$ ؟

Ⓐ -32 Ⓑ $4 - 6i$

Ⓒ 40 Ⓓ $4 - 36i$

05 تبسيط العبارة $\frac{i-1}{2i}$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ Ⓑ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Ⓒ $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ Ⓓ $-\frac{1}{2}i$

06 المعادلة $x^2 - 2x + 4 = 0$ لها ..

Ⓐ جذران حقيقيان نسبيان

Ⓑ جذران حقيقيان غير نسبيين

Ⓒ جذر حقيقي واحد

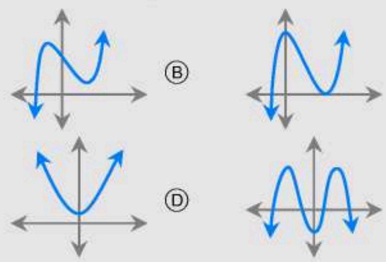
Ⓓ جذران مركبان

07 حلول المعادلة $x^2 + 2x + 5 = 0$ هي ..

Ⓐ $-1+2i, -1-2i$ Ⓑ $1+2i, 1-2i$

Ⓒ $0, -2$ Ⓓ $4, 5$

08 أي الدوال التالية له جذر حقيقي مكرر مرتين؟



09 تبسيط المقدار $\frac{a^2-b^2}{3b} \times \frac{9b^2}{a-b}$ يساوي ..

Ⓐ $3b(a+b)$ Ⓑ $3(a+b)$

Ⓒ $3b(a-b)$ Ⓓ $9a^2b^4 - 9b^4$

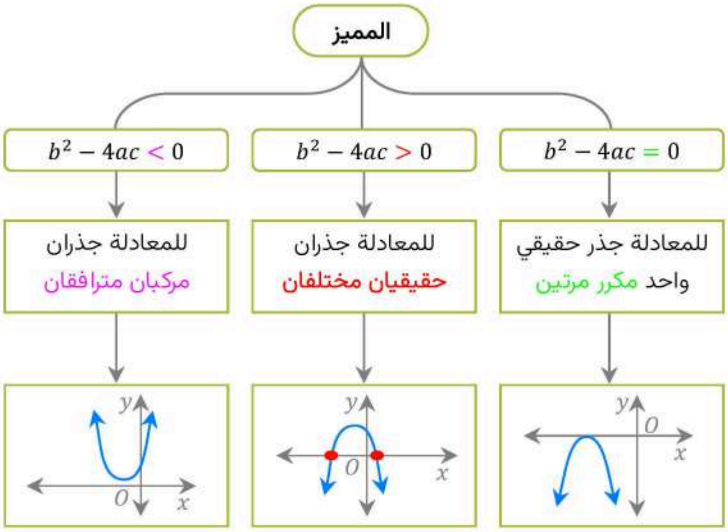
10 أي التالي يكافئ $(3x-5)(x+1)$ ؟

Ⓐ $3x^2 - 2x - 5$ Ⓑ $3x^2 + 8x - 5$

Ⓒ $3x^2 - 8x - 5$ Ⓓ $3x^2 + 2x - 5$

القانون العام والمميز

- **للمعادلة التربيعية:** $ax^2 + bx + c = 0$ ..
  - **المميز:** $b^2 - 4ac$ يحدد نوع الجذرين (الحلين) ..



  - إذا كان المميز مربعًا كاملًا فإن الجذرين حقيقيان نسبيان، والعكس بالعكس.
- **تنبيه:** تأكد قبل الحل أن المعادلة على الصورة القياسية.
- حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هو ..

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

تبسيط العبارة الجبرية

- **تذكير ..**

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

العمليات على كثيرات الحدود

- نستعمل خاصية التوزيع للتخلص من الأقواس، ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.
- في حالة القسمة نحلل كلًا من البسط والمقام، ثم نختصر العوامل المشتركة بينهما.
  - مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $R - \{\text{أصفار المقام}\}$.
- لتحليل المقدار $x^2 + 4x - 5$ إلى عوامل نبحث عن عددين مجموعهما $(+4)$ وحاصل ضربهما (-5) ، فنجد أن العددين $(-1), 5$ ؛ فيكون التحليل ..

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

- **مثال توضيحي:** نوجد ناتج $x(x^2 - 3x + 2) \div (x-2)$ كالتالي:

$$\frac{x(x^2-3x+2)}{x-2} = \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}} = x(x-1) = x^2 - x$$

- إذا كانت كثيرة الحدود غير ممكنة التحليل فإنه يمكن استخدام القسمة التركيبية.

مثال: ما ناتج $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x + 2)$ ؟

Ⓐ $x^2 - 2x + 1$　　Ⓑ $x^3 - 2x^2 + 1$

Ⓒ $x^3 - 2x + 1$　　Ⓓ $x^3 - 2x^2 + x$

الحل:

$$x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} x = -2 & 1x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -3x & +2 \\ & & -2 & 0 & 4 & -2 \\ \hline & 1x^3 & +0x^2 & -2x & +1x^0 & +0 \end{array}$$

(درجة كل حد تنقص 1)

ناتج القسمة = $x^3 - 2x + 1$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

نظرية الباقي

- إذا قُسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x - r)$ فإن باقي القسمة ثابت ويساوي $f(r)$.
  - **مثال توضيحي:** باقي قسمة $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ على $(x - 1)$ يساوي ..

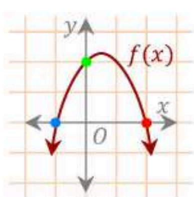
  باقي القسمة $= f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3 = 1 + 1 - 3 = -1$

عوامل كثيرة الحدود وجذورها (أصفارها)

- **عوامل كثيرة حدود ..**
  - تكون $(x - r)$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان r صـفرًا لـــ $f(x)$ أي أن $f(r) = 0$ (باقي القسمة).
- **جذور (أصفار) كثيرة حدود ..**
  - لإيجاد أصــفار كثيرة الحدود $f(x)$ جبريًا نســاويها بالصــفر، ثم نحل المعادلة الناتجة، فمثلًا: إذا كان $f(x) = x - 5$ فإن ..

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

- **تحديد أصفار وعوامل $f(x)$ من الرسم ..**



  - الأصفار هي 2 , -1 .
  - نغير إشارات الأصفار، ونضعها بعد x فنحصل على العوامل ..

  $(x + 1)$, $(x - 2)$

11 أسطوانة حجمها $\pi(x^3 - 2x^2 - 7x - 4)$ ، فإذا كان ارتفاعها $x - 4$ فإن مســاحة قاعدتها تســاوي (π مضروبة بـ) ..

Ⓐ $x + 1$

Ⓑ $x^2 + 2x + 1$

Ⓒ $x^2 - 3x - 4$

Ⓓ $x^4 - 6x^3 - x^2 + 24x + 16$

12 إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^3 + kx + 3$ على $x + 2$ يساوي 1 ؛ فما قيمة k ؟

Ⓐ -3　　Ⓑ -2

Ⓒ -1　　Ⓓ 3

13 أي التالي أحد عوامل كثيرة الحدود التالية؟

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

Ⓐ $x - 3$　　Ⓑ $x + 3$

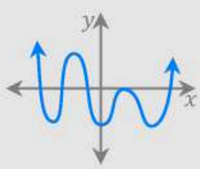
Ⓒ $x - 2$　　Ⓓ $x + 2$

14 أي التالي من أصفار $f(x) = x^2 + 5x + 6$ ؟

Ⓐ -3　　Ⓑ 0

Ⓒ 2　　Ⓓ 5

15 في التمثيل البيـاني أوجـد عـدد الأصــفـار الحقيقيـة للدالة.



Ⓐ 3　　Ⓑ 4

Ⓒ 6　　Ⓓ 7

07

الدوال: العكسية والجذرية والنسبية

01 إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ دالتين معرفتين بالجدولين فأوجد تركيب الدالتين $[f \circ g](-4)$.

x	5	7	9	11
$f(x)$	3	-2	1	2

x	-4	-3	0	1
$g(x)$	5	7	9	11

Ⓐ 0 Ⓑ 1

Ⓒ 2 Ⓓ 3

02 إذا كانت f , g دالتين حقيقيتين، وكانت $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 + 1$ ؛ فإن $[f \circ g](x)$ تساوي ..

Ⓐ $2x^2 - 3$ Ⓑ $2x^2 + 7$

Ⓒ $4x^2 - 24$ Ⓓ $4x^2 - 20x + 26$

03 ما الدالة العكسية للدالة $f(x) = x^2 - 5$ ؟

Ⓐ $f^{-1}(x) = x^2 + 5$ Ⓑ $f^{-1}(x) = 5 - x^2$

Ⓒ $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$ Ⓓ $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 5}$

04 أي التالي يُمثل مجال الدالة $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ؟

Ⓐ $[-9,9]$ Ⓑ $(-9,9)$

Ⓒ $[-3,3]$ Ⓓ $(-3,3)$

05 أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{x + 3}$.

Ⓐ $f^{-1}(x) = x^2 + 3, x \geq 0$

Ⓑ $f^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0$

Ⓒ $f^{-1}(x) = x^2 + 3, x \leq 0$

Ⓓ $f^{-1}(x) = x^2 - 3, x \leq 0$

تركيب دالتين

- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالتعويض عن $g(x)$ داخل الدالة $f(x)$ ..

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

وتقرأ f تركيب g

○ **مثال توضيحي:** إذا كانت $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ فإن ..

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f(x+1) = 3(x+1) = 3x + 3$$

$$[f \circ g](3) = f[g(3)] = f(3+1) = f(4) = 3(4) = 12$$

الدالة العكسية

مثال: أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{x-3}{4}$.

الحل:

نستبدل $f(x)$ بـ y ..

$$y = \frac{x-3}{4}$$

نستبدل y بـ x ، ونستبدل كل x بـ y ..

$$x = \frac{y-3}{4}$$

ثم نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y ..

$$y - 3 = 4x \Rightarrow y = 4x + 3$$

$$f^{-1}(x) = 4x + 3$$

دالة الجذر التربيعي

- الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x - a} + b$ مجالها $\{x | x \geq a\}$ ، ومداها $\{y | y \geq b\}$.
- مجال دالة الجذر التربيعي يشمل ـ فقط ـ القيم التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب.

مثال: أي التالي يُمثل مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x - 5}$ ؟

Ⓐ R Ⓑ $x \geq -5$

Ⓒ $x \geq 5$ Ⓓ $R - \{-4\}$

الحل:

ما تحت الجذر $\geq 0 \Rightarrow x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

- **فائدة:** مجال $f^{-1}(x)$ يساوي مدى $f(x)$ ، ومدى $f^{-1}(x)$ يساوي مجال $f(x)$.

الصورة الجذرية والصورة الأسية

الصورة الجذرية		الصورة الأسية
$\sqrt[c]{a^b}$	$=$	$a^{\frac{b}{c}}$

- عند ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس، بينما عند القسمة نطرح الأسس.
- **تبسيط العبارات الجذرية ..**

الضرب	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ ، حيث $n > 1$
القسمة	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، حيث $b \neq 0$ و $n > 1$

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

- إذا كان أحد أطراف معادلة أو متباينة يحوي جذرًا فإننا نجعل الجذر أحد الطرفين، ثم نرفع الطرفين لقوة مساوية لدليل الجذر للتخلص منه، ثم نوجد قيم x .

مثال: حل المعادلة $\sqrt{x-1} + 3 = 6$ هو .. ١٤٤٠

Ⓐ $x = -3$ Ⓑ $x = 1$ Ⓒ $x = 10$ Ⓓ $x = 25$

الحل:

$$\sqrt{x-1} + 3 = 6 \;\Rightarrow\; \sqrt{x-1} = 6 - 3 \;\Rightarrow\; \sqrt{x-1} = 3$$

وبتربيع الطرفين نحصل على ..

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 3^2 \;\Rightarrow\; x - 1 = 9 \;\Rightarrow\; x = 10$$

العبارة النسبية

- **المقصــود بها:** النســبة بين كثيرتي حدود، وتكون غير معرّفة عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر، فمثلًا: العبارة النسبية $\frac{x+1}{x-2}$ غير معرفة عندما ..

$$x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

- لتبسيط عبارة نسبية نحلل كلًا من البسط والمقام، ثم نختصر العوامل المشتركة بينهما، فمثلًا ..

$$\frac{3x}{2y} \cdot \frac{4y^2}{x^2} = \frac{3 \cdot \cancel{x} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{y^2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{x^2}} = \frac{6y}{x}$$

- **تذكير:** متغيرات كثيرة الحدود تكون مرفوعة لأسس صحيحة غير سالبة.

العمليات على العبارات النسبية

الضرب	القسمة	الجمع	الطرح
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

- **تنبيه:** في بعض المسـائل قد نحتاج لتحليل البسـط أو المقام أو كليهما قبل ضـرب عبارات نسبية أو قسمتها.

06 ما قيمة المقدار $\sqrt{32} - \sqrt{8}$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\sqrt{2}$ Ⓑ $2\sqrt{2}$

Ⓒ 2 Ⓓ $\sqrt{24}$

07 تبسيط العبارة $\sqrt[7]{x^{14}y^7}$ هو .. ١٤٤١

Ⓐ x^2y^7 Ⓑ x^2y

Ⓒ $x\sqrt{y}$ Ⓓ $\sqrt{x^2y}$

08 ما قيمة المقدار $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}}$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{3}{2}$ Ⓑ $\frac{2}{3}$

Ⓒ $\frac{9}{4}$ Ⓓ $\frac{4}{9}$

09 أي التالي حل للمتباينة $5 + \sqrt[3]{2x+4} \leq 7$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $x \leq 7$ Ⓑ $x \leq 14$

Ⓒ $x \leq 2$ Ⓓ $-2 \leq x$

10 أي التالي لا يُمثل عبارة نسبية؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{-x}{x+1}$ Ⓑ $\frac{x^5-y^3}{y-x}$

Ⓒ $\frac{\sqrt{x}+7}{5x^3+1}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{5}x+1}{x+2}$

11 ما أبسط صورة للمقدار $\frac{4x^2y^2}{xy^2} \div \frac{2y}{2xy}$ ؟ ١٤٤٤

Ⓐ $\frac{4}{5}x$ Ⓑ $\frac{4x^2}{y}$

Ⓒ $4x^2$ Ⓓ $4x^2y^2$

12 ما أبسط صورة للمقدار $\frac{(x-2)(x-3)^2}{(4x-12)(x^2+x-6)}$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{(x-3)}{4(x+3)}$ Ⓑ $\frac{(x-2)}{4(x+3)}$

Ⓒ $\frac{(x-3)}{4(x-3)}$ Ⓓ $\frac{x-3}{4x-12}$

13 تبسيط العبارة $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$ هو .. ١٤٤٣

Ⓐ 0 Ⓑ $2x^2$

Ⓒ $1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ Ⓓ $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

14 ما قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{4x}{2x-6}$ غير معرفة؟
١٤٤٣

Ⓐ -3 Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ 3

15 أي التالي ليس خط تقارب للدالة $f(x) = \frac{6}{x^2-3x-10}$ ؟
١٤٤٣

Ⓐ $y = 0$ Ⓑ $y = 3$

Ⓒ $x = -2$ Ⓓ $x = 5$

16 إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، حيث $y = 24$ عندما $x = 8$ ؛ فما قيمة x عندما $y = 48$ ؟
١٤٣٨

Ⓐ 3 Ⓑ 4

Ⓒ 16 Ⓓ 18

17 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $y = 2$ عندما $x = 8$ ؛ فما قيمة x عندما $y = -8$ ؟
١٤٤٤

Ⓐ -32 Ⓑ -2

Ⓒ 2 Ⓓ 16

18 في الجدول ما العلاقة بين y, x ؟
١٤٤٣

y	1	2	3	-4
x	12	6	4	-3

Ⓐ طردية Ⓑ عكسية

Ⓒ مشتركة Ⓓ مركبة

19 إذا كانت m تتغير طرديًا مع n وعكسيًا مع z ؛ فأي العبارات التالية يعبر عن العلاقة؟ علمًا بأن $k \neq 0$.
١٤٤٣

Ⓐ $nm = kz$ Ⓑ $z = \frac{kn}{m}$

Ⓒ $n = \frac{k}{mz}$ Ⓓ $kx = \frac{z}{m}$

20 حل المعادلة $1 = \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x}$ هو ..
١٤٤٣

Ⓐ -2 Ⓑ $-4, 1$

Ⓒ 2 Ⓓ $4, -1$

الدالة النسبية

- **الصـــورة العامة:** $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x) \neq 0$ ، حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة ..
  - المجال: $b(x) \neq 0$ ، $R - \{\text{أصفار المقام}\}$.
  - للدالة خط تقارب رأسي عند أصفار المقام $(b(x) = 0)$.
  - الدالة النسبية تكون غير معرفة عند أصفار المقام.
- **نقطة الانفصـــال:** في الدالة النســبية $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}$ نلاحظ أن $(x-1)$ عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام؛ ومنه فإن الدالة $f(x)$ لها نقطة انفصال عند ..

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \ , \ f(x) = x + 2 \Rightarrow f(1) = 3$$

وتكون نقطة الانفصال هي: $(1, f(1))$ أي $(1, 3)$.

- يوجد للدالة خط تقارب أفقي واحد على الأكثر ..
  - إذا كان أكبر أس في البسط فلا يوجد خط تقارب أفقي.
  - إذا كان أكبر أس في المقام فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم ..

$$y = 0$$

  - إذا كانت أس البسط يساوي أس المقام فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم ..

$$y = \frac{a(x) \text{ المعامل الرئيس لـ}}{b(x) \text{ المعامل الرئيس لـ}}$$

دوال التغير

دالة التغير	التعبير الرمزي	القانون المستخدم للحل
التغير الطردي	$y = kx$	$x_1y_2 = x_2y_1$
التغير العكسي	$y = \frac{k}{x}$	$x_1y_1 = x_2y_2$
التغير المشترك	$y = kxz$	$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$
التغير المركب	$y = \frac{kx}{z}$	$\frac{y_1z_1}{x_1} = \frac{y_2z_2}{x_2}$

k عدد ثابت غير الصفر يُسمى **ثابت التغير**

- **فائدة:** في التغير العكسي يكون حاصل ضرب x و y مقدار ثابت دائمًا.

حل المعادلة النسبية

- إيجاد قيم المجهول التي تحقق المعادلة.

مثال: إذا كان $\frac{15}{12} = \frac{3}{x}$ فما قيمة x ؟

الحل:

$$\frac{3}{x} = \frac{15}{12} \Rightarrow 36 = 15x \Rightarrow x = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$$

08

المتتابعات والمتسلسلات

المتتابعة الحسابية

- **المقصــود بها:** نمط عددي يزيد أو ينقص بمقدار ثابت يُسـمى أسـاس المتتابعة (d) ويساوي الفرق بين أي حدين متتاليين.

  - **مثال توضيحي:** المتتابعة ... ,17 ,12 ,7 ,2 متتابعة حسـابية، لأن كل حد ناتج من إضافة عدد ثابت إلى الحد الذي يسبقه.

    $2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17, \dots$

    ويكون الحد الأول في المتتابعة 2 ، ويرمز له بالرمز a_1 ، والعدد الثابت $+5$ يُسـمى أساس المتتابعة، ويرمز له بالرمز d .

- **الحد النوني ..**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

أساس المتتابعة ، رتبة الحد ، الحد الأول

مثال: متتابعة حسـابية حدها العاشـر يسـاوي 15 ، وحدها الأول يسـاوي -3 ، ما أسـاسها؟

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5

الحل:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = 15 \quad , \quad a_1 = -3 \quad , \quad n = 10 \quad , \quad d = ?$$

وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ 2

$$a_{10} = -3 + (10-1)(2) = -3 + (9)(2) = -3 + 18 = 15 \checkmark$$

- **الأوساط الحسابية:** في المتتابعة الحسابية ... ,22 ,17 ,12 ,7 ,2 ؛ الحدود 17 ,12 ,7 تسمى أوساطًا حسابية بين 2 و 22 ، وإذا كانت مجهولة في السؤال يتم إيجادها باختيار الإجابة التي تجعل الفرق بين أي حدين متتاليين ثابتًا.

  - **فائدة:** إذا كان (a, b, c) ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية فإن $b = \frac{a+c}{2}$.

المتسلسلة الحسابية

- **مجموع المتسلسلة الحسابية:** في حالة وجود ..

الحد الأخير a_n	أساس المتتابعة d
$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

عدد الحدود ، الحد الأول

01 ما نوع المتتابعة ... ,$-3, -6, -9, -12$ ؟

Ⓐ حسابية وأساسها -3 Ⓑ هندسية وأساسها -2
Ⓒ حسابية وأساسها 3 Ⓓ هندسية وأساسها 2

02 في المتتابعة الحسابية ... ,$8, 3, a, -7$ ، ما قيمة a ؟

Ⓐ -4 Ⓑ -2
Ⓒ 2 Ⓓ 5

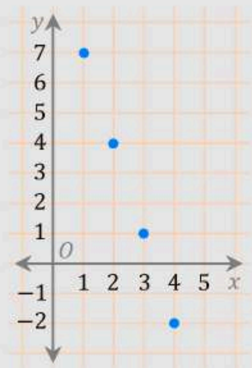
03 الحد التاسع في المتتابعة الحسابية التي فيها: $d = 2$ ، $a_1 = -1$ هو ..

Ⓐ -9 Ⓑ -6
Ⓒ 12 Ⓓ 15

04 قيمـة الحـد 121 في المـتـتـابـعـة الحـسـابـيـة: ... ,$4, -1, -6, -11$ هو ..

Ⓐ 629 Ⓑ 581
Ⓒ -596 Ⓓ -621

05 الحد السـادس في المتتابعة الحسـابية الممثلة في الشـكل هو ..



Ⓐ -7
Ⓑ -8
Ⓒ -10
Ⓓ -11

06 إذا كان الحد الأول في متسـلسـلة حسـابية 5 ، والحد العشـرون 62 ؛ فإن مجموع أول عشـرين حدًا فيها يساوي ..

Ⓐ 134 Ⓑ 268
Ⓒ 570 Ⓓ 670

07 متتـابـعـة حسـابـيـة فيهـا: $S_n = 420$ ، $a_n = 87$ ، $a_1 = -3$ ، ما حدها الثاني؟

Ⓐ 4 Ⓑ 7
Ⓒ 10 Ⓓ 13

08 ١٤٤٥ مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$ يساوي ..

Ⓐ 180 Ⓑ 120

Ⓒ 90 Ⓓ 60

09 ١٤٣٩ مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$ يساوي ..

Ⓐ 972 Ⓑ 1053

Ⓒ 1281 Ⓓ 1701

10 ١٤٤٣ ما أساس المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 3$ ، $a_6 = 96$ ؟

Ⓐ 2 Ⓑ 3

Ⓒ 27 Ⓓ 32

11 ١٤٤٤ يبلغ عدد الطلاب في مدرسة ما 500 طالب في عام 1437هـ ، وإذا كانت نسبة زيادة أعداد الطلاب سنويًا 20% فإن عدد الطلاب في عام 1440هـ يساوي ..

Ⓐ 900 Ⓑ 864

Ⓒ 691 Ⓓ 480

12 ١٤٣٩ الوسطان الهندسيان في المتتابعة الهندسية $1, \overset{?}{\ldots}, \overset{?}{\ldots}, 27$ هما ..

Ⓐ $-3, -9$ Ⓑ $3, -9$

Ⓒ $9, 18$ Ⓓ $3, 9$

- **المتسلسلة الحسابية بالرمز Σ (سيجما) ..**

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)$$

آخر قيمة لـ k : b — صيغة حدود المتسلسلة: $f(k)$ — أول قيمة لـ k : a

عدد الحدود n	الحد الأول a_1	الحد الأخير a_n
نطرح قيمة a من b ثم نضيف 1	نعوض بقيمة a في $f(k)$	نعوض بقيمة b في $f(k)$

مثال

$$\sum_{k=3}^{18}(2k-1)$$

$n = 18 - 3 + 1 = 16$	$a_1 = 2(3) - 1 = 5$	$a_n = 2(18) - 1 = 35$

- إذا كان $f(k)$ من الدرجة الأولى فإن المتسلسلة حسابية، وأساسها معامل k ، فمثلًا: في المتسلسلة السابقة ..

الأساس $(d) = 2$

المتتابعة الهندسية

- يمكن إيجاد أي حد فيها بضرب الحد السابق له في مقدار ثابت غير الصفر، والمقدار الثابت يُسمى أساس المتتابعة.
  - **مثال توضيحي:** في المتتابعة الهندسية ... ,2, 4, 8, 16 ، نلاحظ أن كل حد ناتج من ضرب 2 في الحد السابق له، والعدد 2 يسمى أساس المتتابعة الهندسية.
- **فائدة:** أساس المتتابعة الهندسية يساوي خارج قسمة أي حد على الحد السابق له.
- **الحد النوني ..**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

أساس المتتابعة ، رتبة الحد ، الحد الأول

مثال: ما الحد الرابع في المتتابعة الهندسية ... $, \frac{16}{3}$,12, 8 ؟ ١٤٣٨

Ⓐ $\frac{25}{6}$ Ⓑ $\frac{25}{12}$ Ⓒ $\frac{23}{6}$ Ⓓ $\frac{32}{9}$

الحل:

$$a_3 = \frac{16}{3}, r = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_4 = a_3 \times r = \frac{16}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$$

- **الأوساط الهندسية:** يتم إيجادها باختيار الإجابة التي تجعل النسبة (أساس المتتابعة r) بين أي حدين متتاليين ثابتة، فمثلًا: في المتتابعة الهندسية ... $, -2, 4, -8, 16$ الحدان $4, -8$ وسطان هندسيان بين الحدين $-2, 16$.

المتسلسلة الهندسية

- **مجموع المتسلسلة الهندسية ..**

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1 - r}$$

عدد الحدود ، الحد الأول ، الأساس

- **المتسلسلة الهندسية المعطاة بالرمز Σ (سيجما) ..**

$$\sum_{k=b}^{d} a(r)^{k-1}$$

أساس المتتابعة ، عدد الحدود ، الحد الأول

- **المتسلسلة الهندسية اللانهائية:** متسلسلة لها عدد لا نهائي من الحدود، ونستعمل رمز المجموع $\sum$ لتمثيل المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1(r)^{k-1}$$

الحد الأول ، أساس المتسلسلة

- تكون متباعدة عندما $|r| \geq 1$ حيث r الأساس.
- تكون متقاربة عندما $|r| < 1$ حيث r الأساس، ومجموعها ..

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

الحد الأول ، أساس المتسلسلة

مفكوك ذات الحدين

- **المقصود به:** إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- **إيجاده:** نستخدم ما يسمى «التوافيق»، ويرمز لـــ «n توافيق r» بالرمز $_nC_r$ ، (انظر شرح التوافيق ص27).
- **حساب التوافيق بطريقة سهلة:** نحسب $_5C_3$ كالتالي:

في البسط نضرب 3 أعداد صحيحة متتالية مرتبة تنازليًا بداية من العدد 5 ، وفي المقام نضرب العدد 3 في الأعداد السابقة له وصولًا إلى العدد 1

$$_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

- **نظرية ذات الحدين:** عدد حدود مفكوك المقدار $(a+b)^n$ يســاوي $n+1$ حدًا، ويمكننا إيجاد الحد $(r+1)$ من الصيغة التالية:

$$_nC_r (a)^{n-r} (b)^r$$

فمثلًا: مفكوك $(a+b)^9$ يتكون من 10 حدود أي $(9+1)$، والحد الســابع $(6+1)$ منها يساوي ..

$$_9C_6 (a)^{9-6} (b)^6 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 3 \times 2 \times 1} a^3 b^6 = 84a^3b^6$$

---

13 (١٤٣٩) المجموع $\sum_{k=1}^{11} 3(4)^{k-1}$ يساوي ..

Ⓐ $4^{11} - 1$ Ⓑ $4^{10} - 1$
Ⓒ $3^{11} - 1$ Ⓓ $3^{10} - 1$

14 (١٤٤٣) مجموع المتســلســلة $4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \cdots$ يساوي ..

Ⓐ 5
Ⓑ $\frac{5}{4}$
Ⓒ $\frac{4}{5}$
Ⓓ المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع

15 (١٤٤١) المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ يساوي ..

Ⓐ $\frac{2}{3}$ Ⓑ $\frac{9}{2}$
Ⓒ 3 Ⓓ 9

16 (١٤٤٣) ما رقم الحد الذي قيمته 70 في مفكوك $\left(\frac{1}{x} + x\right)^8$ ؟

Ⓐ 3 Ⓑ 4
Ⓒ 5 Ⓓ 6

17 (١٤٤١) الحد الرابع في مفكوك $(2x-1)^4$ حســب قوى x التنازلية يساوي ..

Ⓐ $12x^2$ Ⓑ $8x$
Ⓒ $-2x^4$ Ⓓ $-8x$

الاحتمالات والإحصاء

01 ١٤٤١ شــخص لديه 3 جيوب في قميصــه، ويملك 4 قطع معدنية مختلفة، بكم طريقة يمكن أن يضــع القطع المعدنية في جيوبه؟

Ⓐ 4 Ⓑ 9

Ⓒ 12 Ⓓ 81

02 ١٤٤٠ ما عدد عناصــر فضــاء العينة لتجربة ســحب بطاقتين (على التوالي) مع الإحلال من مجموعة بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 ؟

Ⓐ 36 Ⓑ 45

Ⓒ 64 Ⓓ 80

03 ١٤٤٤ يحتوي رف مكتبة على كتب في مجالات مختلفة كما في الجدول التالي:

المجال	دين	تاريخ	علوم	رياضيات
العدد	5	3	3	4

إذا اختير كتاب عشــوائيًا فما احتمال أن يكون كتاب رياضيات؟ علمًا بأنه ليس كتاب تاريخ.

Ⓐ $\frac{4}{5}$ Ⓑ $\frac{3}{4}$

Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{4}{15}$

04 ١٤٤٣ إذا اشترى صالح حقيبة بها قفل رقمي يفتح باستعمال 3 أرقام من 0 إلى 9 ؛ فبكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل بحيث يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟

Ⓐ 448 Ⓑ 504

Ⓒ 648 Ⓓ 720

05 ١٤٣٩ إذا تم اختيار تبديل عشوائي للأحرف «ا ، م ، ل ، م ، ا ، د»؛ فما احتمال أن تكون كلمة «الدمام»؟

Ⓐ $\frac{1}{180}$ Ⓑ $\frac{1}{720}$

Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{2}{3}$

التجربة العشوائية والاحتمال

- **التجربة العشوائية:** إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.
- **فضاء العينة لتجربة عشوائية:** مجموعة جميع النواتج الممكنة.
- لإيجاد عدد نواتج تجربة متعددة المراحل ..

نضرب عدد نواتج جميع مراحلها **(مبدأ العد الأساسي)**

مثال: عدد عناصر فضاء العينة في تجربة إلقاء قطعة نقد ومكعب مرقم معًا .. ١٤٣٩

Ⓐ 2 Ⓑ 4

Ⓒ 6 Ⓓ 12

الحل:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\} \ , \ B = \{\text{كتابة , شعار}\}$$

$$\text{عدد جميع النواتج الممكنة} = 6 \times 2 = 12$$

- **الحادثة:** مجموعة جزئية من التجربة العشوائية.
  - **احتمالها ..**

$$P(\text{حادثة}) = \frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة}}$$

- لأي حادثة عشوائية X : $0 \le P(X) \le 1$.

التباديل والتوافيق

- **قانون التباديل:** يســتعمل لإيجاد عدد نواتج حادثة عددها r عنصــر من عناصــر عددها n عندما يكون الترتيب مهمًا ..

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عدد العناصر، عدد مرات التكرار

  - **طريقة لحساب التباديل ذهنيًا:** نحسب ${}_5P_3$ كالتالي:

نضرب 3 أعداد صحيحة متتالية مرتبة تنازليًا بداية من 5

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 20 \times 3 = 60$$

- **التباديل مع التكرار** لعناصــر عددها n يتكرر منها عنصــر r_1 من المرات، وآخر r_2 من المرات ..

$$\text{عدد التباديل مع التكرار} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_k!}$$

- **التباديل الدائرية:** إذا رتبنا عناصر عددها n على دائرة فإن الترتيب له حالتان ..

بنقطة مرجعية ثابتة	بدون نقطة مرجعية ثابتة
بالدائرة علامة مميزة (كنافذة بجوار أحد المقاعد) تحدد بداية ترتيب المقاعد حولها	الدائرة بدون علامة مميزة تحدد بداية الترتيب، فلا يُعد تحرك العناصر حول الدائرة بنفس ترتيبها تبديلًا جديدًا
عدد تباديلها $n!$	عدد تباديلها $(n-1)!$

- **قانون التوافيق:** يستعمل لإيجاد عدد نواتج حادثة عددها r عنصر من عناصر عددها n عندما يكون الترتيب غير مهم ..

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

عدد العناصر ، عدد مرات التكرار

○ **طريقة لحساب التوافيق ذهنيًا:** نُوجد ${}_7C_3$ كالتالي:

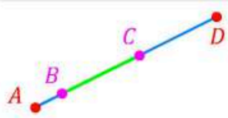
في البسط نضرب 3 أعداد صحيحة متتالية مرتبة تنازليًا بداية من العدد 7 ، وفي المقام نضرب العدد 3 في الأعداد السابقة له وصولًا إلى العدد 1

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{6}} = 35$$

الاحتمال الهندسي

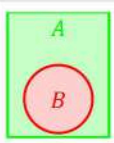
- **الاحتمال والأطوال:** إذا احتوت $\overline{AD}$ قطعة أخرى $\overline{BC}$ ، واخترنا نقطة على $\overline{AD}$ عشوائيًا؛ فإن احتمال أن تقع النقطة على $\overline{BC}$ يساوي ..

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{طول } \overline{BC}}{\text{طول } \overline{AD}}$$



- **الاحتمال والمساحة:** إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واخترنا نقطة من المنطقة A عشوائيًا فإن احتمال أن تقع النقطة في المنطقة B يساوي ..

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{مساحة المنطقة } B \text{ (الدائرة)}}{\text{مساحة المنطقة } A \text{ (المستطيل)}}$$



الحوادث المستقلة وغير المستقلة

- **الحادثتان المستقلتان:** وقوع إحداهما لا يؤثر على الأخرى، مثل: إلقاء قطعة نقد ومكعب مرقم، السحب مع الإرجاع.

- احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين ..

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

احتمال وقوع A ، احتمال وقوع B

06 ١٤٤١ **ستة أصدقاء يجلسون حول طاولة مستديرة، بكم طريقة يمكنهم الجلوس؟**

Ⓐ 4 Ⓑ 6

Ⓒ 24 Ⓓ 120

07 ١٤٤٤ **يعقد 6 أشخاص من أعضاء إدارة شركة اجتماعًا حول طاولة دائرية، وكان أحد المقاعد قريبًا من جهاز عرض الشرائح، ما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيقدم العرض بجوار الجهاز؟**

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{6}$

Ⓒ $\frac{1}{25}$ Ⓓ $\frac{1}{36}$

08 ١٤٤٣ **تصنع سارة يوميًا 5 تنانير و 3 قمصان، فإذا اخترنا 4 قطع عشوائيًا مما تنتجه في أحد الأيام؛ فما احتمال اختيار تنورتين وقميصين؟**

Ⓐ $\frac{1}{7}$ Ⓑ $\frac{3}{7}$

Ⓒ $\frac{4}{7}$ Ⓓ $\frac{6}{7}$

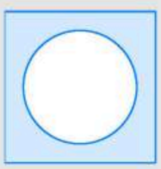
09 ١٤٤٣ **مربع مساحته $9\ cm^2$ بداخله دائرة مساحتها $3\ cm^2$ ، فإذا اُختيرت نقطة عشوائيًا فما احتمال أن تقع بداخل الجزء المظلل؟**

Ⓐ $\frac{1}{9}$

Ⓑ $\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{2}{3}$

Ⓓ 1



10 ١٤٤٤ **في تجربة إلقاء مكعب مرقم من 1 إلى 6 وقطعة نقود معًا، ما احتمال ظهور عدد زوجي على المكعب وكتابة على قطعة النقود؟**

Ⓐ $\frac{1}{4}$ Ⓑ $\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ 1

11 صندوق يحوي **10** تفاحات، وكان **3** منها فاسدة، فإذا سُحبت تفاحة بدون إرجاع، ثم سُحبت أخرى؛ فما احتمال أن تكون التفاحتان صالحتين؟

Ⓐ $\frac{3}{23}$ Ⓑ $\frac{3}{10}$

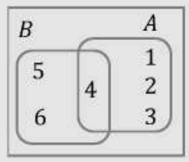
Ⓒ $\frac{7}{15}$ Ⓓ $\frac{1}{2}$

12 إذا أُلقي مكعب مرقم مرتين متتاليتين، وبملاحظة الوجه العلوي في كل مرة؛ فما احتمال ظهور العدد **5** على أحدهما إذا كان مجموع العددين **9** ؟

Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{9}$

Ⓒ $\frac{4}{9}$ Ⓓ $\frac{5}{9}$

13 يُبين الشكل نتيجة رمي مكعب مرقم من **1** إلى **6** ، ما قيمة $P(A|B)$ ؟



Ⓐ 1 Ⓑ $\frac{1}{2}$

Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{1}{4}$

14 في دراسة اجتماعية موضحة نتائجها في الجدول التالي:

	متزوج	أعزب
موظف	5	3
عاطل	3	9

تم اختيار شخص عشوائيًا، ما احتمال أن يكون عاطلًا؟ علمًا بأنه أعزب.

Ⓐ 25% Ⓑ 33%

Ⓒ 60% Ⓓ 75%

- **الحادثتان غير المستقلتين:** وقوع إحداهما يؤثر على الأخرى، مثل: السحب دون إرجاع.
- احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين ..

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

احتمال وقوع B بشرط وقوع A أولًا

- **الاحتمال المشروط:** يُوضع به شرط يختزل فضاء العينة، فلأي حادثتين A, B غير مستقلتين يكون احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع A أولًا يعطى من العلاقة ..

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A) \neq 0$$

مثال: عند رمي مكعبين متمايزين مرقمين في الوقت نفسه، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما مع كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين 9 ؟

Ⓐ $\frac{1}{6}$ Ⓑ $\frac{1}{4}$ Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{1}{2}$

الحل: فضاء العينة كون مجموع العددين الظاهرين 9 ..

$$\text{فضاء العينة} = \{(4,5), (5,4), (3,6), (6,3)\}$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{عدد أزواج ظهور العدد 4}}{\text{عدد أزواج فضاء العينة}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

الجداول التوافقية

- تستخدم لتوضيح مفهوم الاحتمال المشروط، فمثلًا: احتمال وقوع العنصر في A شرط وقوعه في C أولاً يساوي ..

	D	C
A	β	ω
B	$\propto$	Δ

$$P(A/C) = \frac{\omega}{\omega + \Delta}$$

مثال: يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية، فإذا اختير طالب عشوائيًا؛ فما احتمال أن يكون مشاركًا؟ علمًا بأنه في الصف الثالث.

	الصف الثاني	الصف الثالث
مشارك	30	40
غير مشارك	50	80

Ⓐ $\frac{3}{5}$ Ⓑ $\frac{2}{5}$

Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{1}{5}$

الحل: نوجد احتمال اختيار شخص من الذين شاركوا من الصف الثالث فقط ..

$$P = \frac{\text{عدد المشاركين من الصف الثالث}}{\text{مجموع طلاب الصف الثالث}} = \frac{40}{40+80} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

الحوادث المتنافية وغير المتنافية

- **الحادثتان المتنافيتان:** حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما، مثل: اختيار عدد عشوائي من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والحصول على عدد زوجي أو عدد فردي.
- **احتمال وقوع حادثتين متنافيتين A, B ..**

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **الحادثتان غير المتنافيتين:** حادثتان توجد عناصر مشتركة بينهما، مثل: ظهور عدد أكبر من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر لمكعب مرقم.
- **احتمال وقوع حادثتين غير متنافيتين A, B ..**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال الحادثة المتممة

$$P\left(\text{عدم وقوع حادثة}\right) = 1 - P\left(\text{وقوع الحادثة}\right)$$

الإحصاء

الدراسة التجريبية	إجراء تعديل متعمد على عينة وملاحظة استجاباتها
الدراسة بالملاحظة	ملاحظة العينة دون أي محاولة للتأثير في النتائج
الدراسة المسحية	جمع بيانات أو استفتاء عن العينة دون تعديل فيها

- **هامش الخطأ:** عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإن ..

$$\text{هامش الخطأ} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- **فائدة:** في المدرج التكراري كلمة لا يزيد تعني تكرار هذا العمود بالإضافة لمجموع تكرارات الأعمدة السابقة.

مقاييس النزعة المركزية

مقاييس النزعة المركزية

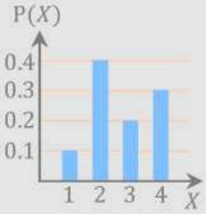
الوسط (المتوسط) الحسابي
يُستعمل عندما لا تكون هناك قيم متطرفة
$\frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$

الوسيط
يُستعمل عندما تُوجد قيم متطرفة ولا توجد فراغات في المنتصف
تُرتب البيانات تصاعديًا أو تنازليًا
عدد البيانات فردي: يكون الوسيط هو البيان الموجود في منتصف البيانات
عدد البيانات زوجي: يكون الوسيط هو متوسط البيانين الموجودين في منتصف البيانات

المنوال
يُستعمل في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة
هو البيان الأكثر تكرارًا

---

15 ١٤٣٩ يُبين التظليل بالأعمدة في الشكل عدد الأيام الممطرة X في السنة في مدينة ما، ما احتمال أن يكون عدد الأيام الممطرة 4 أيام أو 3 أيام؟

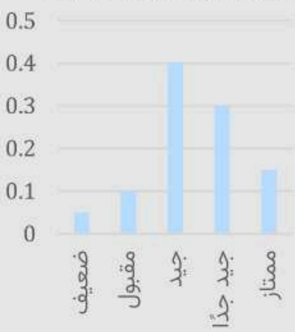


Ⓐ 0.3
Ⓑ 0.5
Ⓒ 0.7
Ⓓ 0.8

16 ١٤٤٣ إذا كان احتمال هطول المطر 75% فإن احتمال عدم هطوله ..

Ⓐ 10% Ⓑ 25%
Ⓒ 60% Ⓓ 80%

17 ١٤٤٢ التمثيل البياني يوضح التوزيع الاحتمالي لتقديرات طلاب الصف الثالث الثانوي في اختبار مادة الفيزياء، فإذا أُختير طالب عشوائيًا فما احتمال ألا يزيد تقديره عن جيد؟



Ⓐ 0.40
Ⓑ 0.45
Ⓒ 0.55
Ⓓ 0.85

18 ١٤٤٢ إذا رُصدت درجات الحرارة في فصل الشتاء بمنطقة خلال أسبوع فكانت على النحو التالي: $15, 19, 15, 13, 13, 11, 12$ ؛ فما متوسط درجات الحرارة خلال الأسبوع؟

Ⓐ 13 Ⓑ 14
Ⓒ 15 Ⓓ 16

19 ١٤٣٩ إذا كانت $68, 93, 82, 57, 61, 100$ درجات 6 طلاب في مادة الرياضيات؛ فما وسيطها؟

Ⓐ 59 Ⓑ 61
Ⓒ 75 Ⓓ 77

20 أي البيانات التالية له أكبر انحراف معياري؟ ١٤٣٩

Ⓐ 14, 10, 12, 11, 13, 13

Ⓑ 14, 10, 15, 11, 13, 13

Ⓒ 11, 10, 20, 11, 13, 13

Ⓓ 14, 10, 30, 11, 13, 13

21 يتوزع عُمر **10000** بطارية توزيعًا طبيعيًا بوسط **300** يوم، وانحراف معياري **40** يومًا، كم بطارية يقع عُمرها بين **340** و **260** يومًا؟ ١٤٣٩

Ⓐ 6800 Ⓑ 5000

Ⓒ 3400 Ⓓ 2500

22 في توزيع طبيعي لمجموعة طلاب، إذا كانت درجات **99%** منهم تتراوح بين **13** و **49** ؛ فما قيمة الانحراف المعياري؟ ١٤٤٣

Ⓐ 6 Ⓑ 10

Ⓒ 18 Ⓓ 31

23 إذا أجريت إحصائية لطالبات مدرسة، وكان **95%** من الطالبات تتراوح أوزانهن بين $52\ kg$ و $68\ kg$ ؛ فما قيمة الوسط الحسابي؟ ١٤٤٣

Ⓐ 59 Ⓑ 60

Ⓒ 61 Ⓓ 65

مقاييس التشتت

- **التباين** σ^2 ..

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}$$

الوسط للمجتمع ويُقرأ «ميو» ، عدد قيم المجتمع

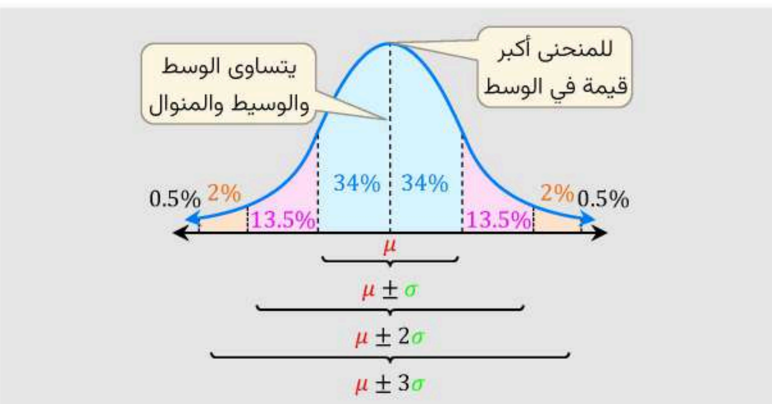
- **الانحراف المعياري** σ ..

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}}$$

- **المدى:** الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة.
- **فائدة:** يزيد الانحراف المعياري كلما زاد التباعد بين القيم، وأيضًا كلما زاد المدى والعكس صحيح.

التوزيع الطبيعي والتوزيع الملتوي

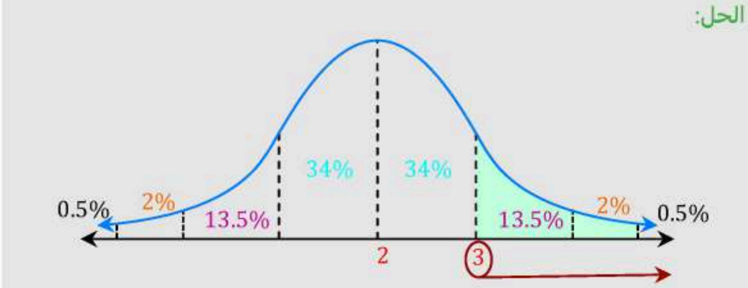
- منحنى التوزيع الطبيعي يشبه الجرس، والمساحة تحت المنحنى تساوي 1 .
- إذا كان لدينا توزيع طبيعي وسطه μ وانحرافه المعياري σ فإن بياناته ستتوزع كالتالي:



مثال: مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا، فإذا كان وسطها الحسابي 2 وانحرافها المعياري 1 ؛ فما نسبة أن يكون x أكبر من 3 ؟ ١٤٣٨

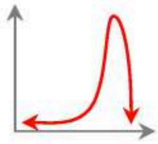
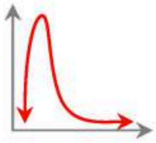
Ⓐ 84% Ⓑ 97% Ⓒ 16% Ⓓ 25%

الحل:



$$P(3 < x) = (13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

- يمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى «توزيعات ملتوية» ..

التواء سالب	التواء موجب
(ملتوٍ إلى اليسار)	(ملتوٍ إلى اليمين)
	
التوزيع مكثف في اليمين والذيل إلى اليسار	التوزيع مكثف في اليسار والذيل إلى اليمين

التوزيعات ذات الحدين

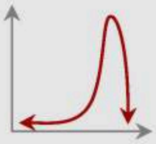
- **تجربة ذات الحدين:** لها ناتجان فقط إما نجاح أو فشل.
  - **فائدة** ..

$$p + q = 1$$

الوسط	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

24 **ما الوصف الأفضل للتمثيل البياني؟**

١٤٤٤



Ⓐ ذو التواء موجب

Ⓑ ذو التواء سالب

Ⓒ يمثل توزيعًا طبيعيًا

Ⓓ يمثل توزيعًا متماثلًا

25 **في حادثة ذات حدين كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12 ، ما قيمة الانحراف المعياري؟**

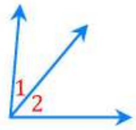
٣٧ وما قبلها

Ⓐ $\sqrt{4.8}$ Ⓑ 1.2

Ⓒ $\sqrt{1.2}$ Ⓓ 4.8

المنطق الرياضي والهندسة

01 Ⓐ



نبحث عن خيار يثبت أنه قد تتجاور زاويتان ولا تتكاملان، ونلاحظ في الخيار Ⓒ أن $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان وغير متكاملتين (مجموعهما $\neq 180°$) ، وبالتالي فإن الخيار الصحيح Ⓐ .

02 Ⓑ

المعاكس الإيجابي هو نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية ..

العبارة الشرطية	$\sim p \to q$
عكس العبارة الشرطية	$q \to \sim p$
المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية	$\sim q \to p$

03 Ⓓ

المستقيمان المتخالفان لا يقعان في مستوى واحد، ولا يتقاطعان، وبمناقشة الخيارات ..

Ⓐ $\overline{BC}, \overline{FG}$

يقعان في نفس المستوى ×

Ⓑ $\overline{BF}, \overline{DH}$

يقعان في نفس المستوى ×

Ⓒ $\overline{HG}, \overline{DH}$

يقعان في نفس المستوى ويتقاطعان ×

Ⓓ $\overline{BC}, \overline{EF}$

لا يقعان في مستوى واحد، ولا يتقاطعان ✓

الخيار الصحيح Ⓓ

04 Ⓓ

$\angle B$ تتمم $\angle A$ ، وأيضًا $\angle C$ تتمم $\angle A$

وبما أن متممات الزاوية الواحدة لها القياس نفسه؛ فإن ..

$$m\angle B = m\angle C$$

05 Ⓑ

نلاحظ أن الزاويتين متبادلتان خارجيان ومتطابقتان؛ ومنه فإن ..

$$6x + 13 = 3x + 88 \Rightarrow 6x - 3x = 88 - 13$$

$$\Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{3} = 25$$

06 Ⓒ

بالتعويض في قانون الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، والتبسيط ..

$$2 = \frac{-5-1}{2x-3} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{-6}{2x-3}$$

$$\Rightarrow 4x - 6 = -6$$

$$\Rightarrow 4x = -6 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{0}{4} = 0$$

07 Ⓑ

بما أن المستقيم أفقي فإن ميله يساوي صفرًا ..

$$y = (n+1)x + 4$$

$$n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$$

08 Ⓐ

$$4y - 12 = x \Rightarrow 4y = x + 12 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 3$$

بما أن ميل المستقيم $y = \frac{1}{4}x + 3$ يساوي $\frac{1}{4}$ ؛ فإن ميل المستقيم الموازي له يساوي $\frac{1}{4}$.

وبما أن مقطع المحور y له يساوي -5 فإن ..

معادلة المستقيم المطلوب هي $y = \frac{1}{4}x - 5$

09 Ⓓ

البُعد $= |-2 - 4| = |-6| = 6$

المثلثات والمضلعات

● 01 Ⓑ

$$AB = AC \Rightarrow m\angle B = m\angle C$$
$$m\angle B + m\angle C + 80° = 180°$$
$$2m\angle B = 180° - 80° = 100°$$
$$m\angle B = \frac{100°}{2} = 50$$
$$2x - 10 = 50 \Rightarrow 2x = 50 + 10 = 60$$
$$\Rightarrow x = \frac{60}{2} = 30$$

● 02 Ⓑ

المثلث متطابق الضلعين ومنه فإن ..

$$3x - 5 = 2x \Rightarrow 3x - 2x = 5 \Rightarrow x = 5$$

وبالتالي فإن أطوال أضلاع المثلث ..

$$3x - 5 = 3(5) - 5 = 10 \quad , \quad 2x = 2(5) = 10$$
$$x + 8 = (5) + 8 = 13$$

● 03 Ⓐ

الارتفاع × طول القاعدة × $\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2} \times (-4 + 2x) \times (x + 3)$$
$$= (-2 + x) \times (x + 3) = (x - 2) \times (x + 3)$$

● 04 Ⓒ

بما أن المثلث متطابق الضلعين فإن ..

$$m\angle C = m\angle B$$
$$m\angle C = \frac{180° - 80°}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$$

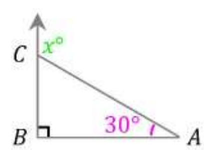
(زاويتان متبادلتان) $m\angle C = m\angle NAC = 50°$

(زاوية مستقيمة) $m\angle FAN + m\angle NAC + 80° = 180°$

(بسطنا) $m\angle FAN + 50° + 80° = 180°$

$$m\angle FAN = 180° - 130° = 50°$$

● 05 Ⓒ



نلاحظ من الرسم أن x زاوية خارجية للمثلث، ومنه فإن ..

$$x = 90 + 30 = 120$$

● 06 Ⓓ

(زاوية خارجية) $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$

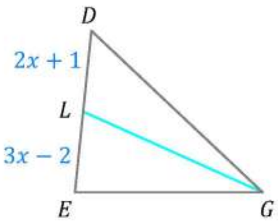
$\angle 4$ هي أكبر زاوية

● 07 Ⓑ

بما أن المثلثين RTS, ABC متطابقان فإننا نطابق الأضلاع المتناظرة ..

$$TS = BC$$
$$6 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

● 08 Ⓒ



$\overline{GL}$ قطعة متوسطة ومنه فإن ..

$$DL = LE$$
$$2x + 1 = 3x - 2$$
$$x = 1 + 2 = 3$$
$$DE = 2x + 1 + 3x - 2 = 5x - 1 = 5(3) - 1 = 15 - 1$$
$$= 14$$

● 09 Ⓒ

$$FT = \frac{1}{3}AT \Rightarrow 3 = \frac{1}{3}AT \Rightarrow AT = 9$$
$$AF = \frac{2}{3}AT = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

● 10 Ⓓ

حسب مسلمة «أي ضلع في مثلث أقصر من مجموع طولي الضلعين الآخرين، وأطول من الفرق بينهما» ..

$$|13 - 9| < n < 9 + 13$$
$$4 < n < 22$$

الخيار الصحيح Ⓓ

● 11 Ⓑ

بمقارنة مجموع طولي أقصر ضلعين بالضلع الأطول ..

Ⓐ $2, 5, 7$ ..

$$7 \overset{?}{<} 2 + 5 \Rightarrow 7 = 7 \quad \times$$

Ⓑ $5, 8, 10$ ..

$$10 \overset{?}{<} 5 + 8 \Rightarrow 10 < 13 \quad ✓$$

الخيار الصحيح Ⓑ

● 12 Ⓑ

$$m = \frac{180°(8-2)}{8} = \frac{\cancel{180°}^{45°} \times \cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{\cancel{4}}} = 45° \times 3 = 135°$$

● 13 Ⓐ

في المثلث ZXY ..

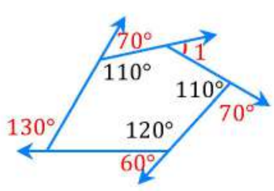
$$m\angle XZY = 180° - (90° + 45°) = 180° - 135° = 45°$$

وبما أن $\Delta ZXY \cong \Delta SRZ$ فإن $m\angle ZYX = m\angle SZR = 45°$.

وبما أن الشكل سداسي منتظم فإن قياس زاويته الداخلية يساوي ..

$$m = \frac{180°(6-2)}{6} = \frac{180°(4)}{6} = \frac{720}{6} = 120°$$
$$m\angle XZR = 120° - (45° + 45°) = 120° - 90° = 30°$$

● 14 Ⓐ



الزوايا المتجاورة على مستقيم متكاملة، ومجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع تساوي 360° ؛ ومنه فإن ..

$$70° + 70° + 60° + 130° + m\angle 1 = 360°$$
$$330° + m\angle 1 = 360° \Rightarrow m\angle 1 = 30°$$

الأشكال الرباعية والتشابه والتحويلات

● 01 Ⓓ

كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضـلاع متكاملتان (مجموع قياسـيهما °180)؛ ومنه فإن ..

$$4x^\circ + (2x+12)^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 6x = 180 - 12 = 168$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{168}{6} = 28$$

● 02 Ⓒ

كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضـلاع متكاملتان (مجموع قياسـيهما °180)؛ ومنه فإن ..

$$80^\circ + (40 + x)^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 120^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

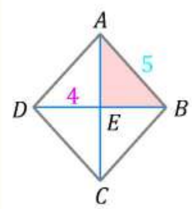
$$\Rightarrow \quad x = 60$$

● 03 Ⓐ

قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الآخر ..

$$x + 3 = 19 \quad \Rightarrow \quad x = 19 - 3 = 16$$

● 04 Ⓐ



قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؛ ومنه فإن ..

$$DE = EB = 4$$

وبما أن قطري المعين متعامدان فإن ΔAEB قائم الزاويـة في $\angle AEB$ ، ومن ثلاثيـات فيثـاغورس المشهورة (3 , 4 , 5) ؛ نجد أن ..

$$AE = 3$$

● 05 Ⓓ

$m\angle CAD = m\angle CAB = 30^\circ$ (قطر المعين ينصف زوايا الرؤوس)

$m\angle A + m\angle D = 180^\circ$ (زاويتان متحالفتان)

$$30^\circ + 30^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

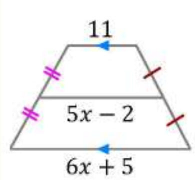
$$x = 180 - 60 = 120$$

● 06 Ⓒ

بما أن المنطقة مربعة الشـكل، ومركز الخيمة هو نقطة تقاطع قطريها، والقطران ينصـف كل منهما الآخر؛ فإن مركز الخيمة M هو نقطة منتصـف القطر $\overline{AC}$ حيث $A(-4,4)$ و $C(6,-6)$ ..

$$M = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+(-6)}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (1,-1)$$

● 07 Ⓑ



من تعريف القطعة المتوسطة ..

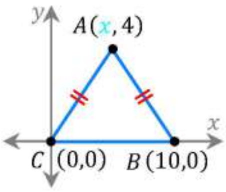
$$5x - 2 = \frac{11 + 6x + 5}{2}$$

$$10x - 4 = 16 + 6x$$

$$10x - 6x = 16 + 4$$

$$4x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{4} = 5$$

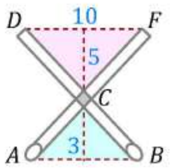
● 08 Ⓒ



بما أن المثلث ABC متطابق الضـلعين فإن الإحـداثي x للنقطـة A يقع في منتصـف المسافة بين 0, 10 ..

$$x = \frac{0 + 10}{2} = 5$$

● 09 Ⓑ



في المثلثين FDC, ABC ، بما أن $FD \parallel AB$ فإن ..

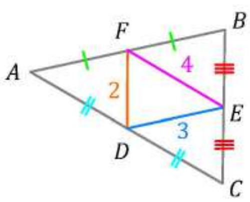
$m\angle D = m\angle B \;,\; m\angle F = m\angle A$ (بالتبادل)

$m\angle DCF = m\angle BCA$ (متقابلتـان بالرأس)

ومنه فإن $\Delta FDC \sim \Delta ABC$ ..

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{3 \times 10}{5} = 6$$

● 10 Ⓐ



بمـا أن $\overline{DE}, \overline{FD}, \overline{FE}$ قطع منصـفـة في المثلث ABC ؛ فإن ..

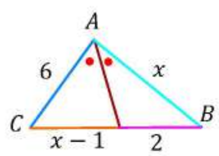
$$AB = 2DE = 2 \times 3 = 6$$

$$BC = 2FD = 2 \times 2 = 4$$

$$AC = 2FE = 2 \times 4 = 8$$

محيط $\Delta ABC = AB + BC + AC = 6 + 4 + 8 = 18$

● 11 Ⓑ



$$\frac{6}{x-1} = \frac{x}{2}$$

$$6 \times 2 = x(x-1)$$

$$12 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$ (مرفوض)

الخيار الصحيح Ⓑ

● 12 Ⓐ

$$(1,5) \xrightarrow{\text{بالانعكاس حول محور } x} (1,-5)$$

● 13 Ⓓ

$$(-1,3) \xrightarrow{\text{بالانعكاس حول محور } y=x} (3,-1)$$

● 14 Ⓐ

صورة النقطة $(2,-3)$ تحت تأثير الإزاحة ..

$$(x,y) \to (x-3, y+4)$$

$$2 \xrightarrow{-3} -1 \quad , \quad -3 \xrightarrow{+4} 1$$

صورة النقطة $(2,-3)$ هي $(-1,1)$

Ⓑ 15

$$3 \xrightarrow{3+??} 0 \ , \ 1 \xrightarrow{1+??} 5 \ \Rightarrow \ 3 \xrightarrow{3+(-3)} 0 \ , \ 1 \xrightarrow{1+4} 5$$

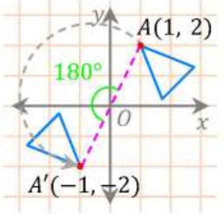
الإزاحة هي $(x-3, y+4)$

Ⓐ 16

لإيجاد صورة نقطة بالدوران بزاوية $90°$ عكس عقارب الساعة ..
نضع الإحداثيين x و y كل واحد منهما مكان الآخر مع تغيير إشارة y .

$$(3,5) \xrightarrow{\text{صورة النقطة بدوران زاويته } 90°} (-5,3)$$

Ⓑ 17



إحداثيا رأس المثلث $A(1,2)$ ..

$$(1,2) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية ؟؟}} (-1,-2)$$

وبما أن الإحداثيين x و y تم تغيير إشارتيهما؛ فإن الدوران بزاوية $180°$.

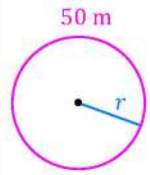
Ⓑ 18

التناظر حول نقطة الأصل هو صورة النقطة بدوران زاويته $180°$ ؛ ومنه فإننا نعكس إشارة الإحداثيين x و y ..

$$(1,-3) \xrightarrow{\text{بالتناظر حول نقطة الأصل}} (-1,3)$$

الدائرة

01 Ⓒ



محيط الدائرة يساوي $2\pi r$ ومنه فإن ..

$2 \times 3.14 \times r = 50$

وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ 6

$2 \times 3.14 \times 6 < 50$

Ⓑ 7

$2 \times 3.14 \times 7 < 50$

Ⓒ 8

$2 \times 3.14 \times 8 \approx 50$

الخيار الصحيح Ⓒ

---

02 Ⓒ

$m\,\widehat{DA} + m\,\widehat{AB} + m\,\widehat{BC} = 180°$ (قياس نصف الدائرة)

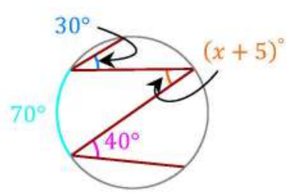
$m\,\widehat{DA} + 4m\,\widehat{BC} = 180°$ $(m\,\widehat{AB} = 3m\,\widehat{BC})$

$5m\,\widehat{BC} = 180°$ $(m\,\widehat{AD} = m\,\widehat{BC})$

$m\,\widehat{BC} = \frac{180°}{5} = 36°$

---

03 Ⓐ



قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها؛ ومنه فإن ..

$(x+5)° = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

$x = 35 - 5 = 30$

---

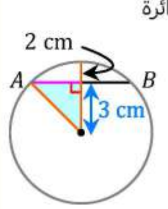
04 Ⓓ

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قياسها $90°$.

---

05 Ⓑ

$2 + 3 = 5$ cm = طول نصف قطر الدائرة

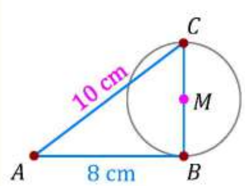


في المثلث المظلل، من ثلاثيات فيثاغورس المشهورة $(3, 4, 5)$ ، نجد أن الضلع الثالث يساوي 4 cm ، وبما أن نصف القطر عمودي على $\overline{AB}$ فإنه ينصفه ..

$AB = 2 \times 4 = 8$ cm

---

06 Ⓑ

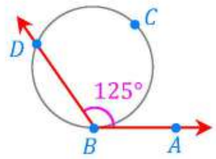


بما أن المماس عمودي على القطر فإن المثلث قائم الزاوية، ومن ثلاثيات فيثاغورس المشهورة $(6, 8, 10)$ ..

$BC = 6 \Rightarrow BM$ (نصف القطر) $= 3$

---

07 Ⓓ

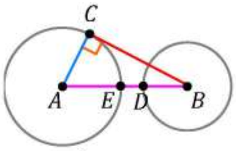


قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها؛ ومنه فإن ..

$m\,\widehat{BCD} = 2 \times 125° = 250°$

---

08 Ⓑ



نرسم $\overline{AC}$ ، ومنه فإن المماس $\overline{CB}$ عمودي على نصف القطر $\overline{AC}$.

ومن ثلاثيات فيثاغورس المشهورة $(6, 8, 10)$ ومضاعفاتها، نجد أن الضلع الثالث AB يساوي 10 cm ؛ ومنه فإن $BD = 3$ cm .

AB (قطر الدائرة) $= 2BD = 2 \times 3 = 6$

---

09 Ⓓ

بوضع المعادلة المعطاة على الصورة القياسية ..

$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = 4 = 2^2$

مركز الدائرة هو النقطة $(3, -1)$.

$(3,-1) \xrightarrow[\text{}]{\text{انعكاس حول المستقيم } y=x} (-1,3) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية } 90°} (-3,-1)$

الدوال والمتباينات والمصفوفات

01 Ⓐ

بمناقشة الخيارات ..

Ⓐ $\sqrt{7}$

$\sqrt{7}$ ⟵ جذر لعدد ليس مربع كامل (عدد غير نسبي)

الخيار الصحيح Ⓐ

02 Ⓐ

نلاحظ في العبارة الرياضية $3\left(x - \frac{7}{6}\right) = 3x - \frac{7}{2}$ أن ..

3 ضربت في كل من x و $\frac{7}{6}$ ، أي تم توزيع الضرب على الجمع

الخاصية المستخدمة هي خاصية التوزيع

03 Ⓒ

$$AB + CB = AC$$

بما أن النقطة B تقع بين A و C فإنها تمثل قطعة مستقيمة AC .

04 Ⓒ

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{CX}$ ؛ فإن ..

$$AX + XB = CX + DX \ \Rightarrow \ XB = DX \ \Rightarrow \ \overline{DX} \cong \overline{BX}$$

05 Ⓐ

المتباينة $-5 \leq x < -2$ تمثلها الفترة $[-5, -2)$.

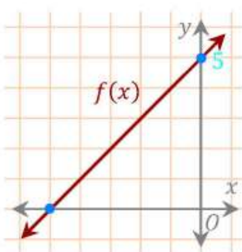
06 Ⓒ

نعوض عن x بـ $-1, 3$ في الدالة $f(x)$ ..

$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7 \ , \ f(3) = 2(3) - 5 = 1$$

مدى الدالة $= (-7, 1)$

07 Ⓒ



من الشكل نلاحظ أن مقطع y (الجزء المقطوع من محور y) للدالة $f(x)$ يساوي 5 ، وبالنظر للخيارات نجد أن الخيار الصحيح Ⓒ حيث ..

$x + 5$

08 Ⓒ

العدد 25 ينتمي للفترة $24 \leq x \leq 40$ ؛ ومنه فإننا نعوض عن قيمة x بـ 25 في الدالة ..

$$f(x) = -x + 15 \ \Rightarrow \ f(25) = -(25) + 15 = -10$$

09 Ⓓ

بالتعويض بقيم x, y في العلاقات نجد أن ..

Ⓐ $y = 3x - 2$

$5 \neq 3(1) - 2$ ✗

Ⓑ $y = 4x + 1$

$5 = 4(1) + 1$

وبالتعويض بالقيمة التالية ..

$8 \neq 4(2) + 1$ ✗

Ⓒ $y = 4x - 1$

$5 \neq 4(1) - 1$ ✗

Ⓓ $y = 3x + 2$

$5 = 3(1) + 2 = 5$ ✓

وللتأكد نختار قيمتين أخريين وليكن مثلًا $y = 14$ و $x = 4$ ..

$y = 3x + 2 \ \Rightarrow \ 14 = 3(4) + 2 = 14$ ✓

الخيار الصحيح هو Ⓓ

10 Ⓐ

مجال دالة القيمة المطلقة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية R .

11 Ⓐ

بما أن المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف أفقية ($m = 3$) وأربعة أعمدة رأسية ($n = 4$) فإن المصفوفة من الرتبة 3×4 .

12 Ⓐ

a_{23} تعني العنصر في تقاطع الصف الثاني مع العمود الثالث وهو 0 .

13 Ⓐ

$$2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \times 3) + (4 \times 9) & \\ (2 \times -6) + (4 \times 2) & \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 + 36 & \\ -12 + 8 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & \\ -4 & \end{bmatrix}$$

لا حاجة لحساب ناتجي العنصرين الباقيين لأن الخيار الوحيد المناسب للعنصرين اللذَيْن أوجدناهما هو الخيار Ⓐ .

14 Ⓐ

$$2\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} (2 \times -3) - x & (2 \times 0) - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -6 - x & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$-6 - x = -8 \ \Rightarrow \ x = 2$$

15 Ⓒ

$$\begin{bmatrix} & 3 \\ 3 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 2(4) \\ 2(3) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 2x + 1 \\ y - 1 & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} & 3 + (2 \times 4) \\ 3 + (2 \times 3) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 2x + 1 \\ y - 1 & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} & 11 \\ 9 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 2x + 1 \\ y - 1 & \end{bmatrix}$$

وبما أن المصفوفتين متساويتان فإن العناصر المتناظرة متساوية ..

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 = 11 \ &\Rightarrow \ 2x = 10 \ \Rightarrow \ x = 5 \\ y - 1 = 9 \ &\Rightarrow \ y = 9 + 1 \ \Rightarrow \ y = 10 \end{aligned}\right\}$$

$$x + y = 10 + 5 = 15$$

Ⓐ 16

المصــفوفة الأولى من الرتبة 3×1 ، والمصــفوفة الثانية من الرتبة 2×3 ، ويكون حاصل ضرب المصفوفتين عملية ممكنة من الرتبة 2×1 ، وبالنظر للخيارات نجد أن الخيار الصحيح هو Ⓐ .

Ⓐ 17

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-x+y\\ -2x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$-x+y=3 \;\bullet \quad , \quad -2x+y=6 \;\bullet\bullet$$

بطرح •• من • ..

$$-x+\cancel{y}+2x-\cancel{y}=3-6 \Rightarrow x=-3$$

Ⓓ 18

بتجربة الخيارات فإن ..

Ⓐ $\underline{A}+\underline{B}$

في عملية الجمع يجب أن تكون المصفوفتين من نفس الرتبة

الجمع عملية معرفة

Ⓑ $\underline{A}-\underline{B}$

في عملية الطرح يجب أن تكون المصفوفتين من نفس الرتبة

الطرح عملية معرفة

Ⓒ $\underline{KA}$

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة هي عملية معرفة

Ⓓ $\underline{A}\cdot\underline{B}$

المصفوفة الأولى من الرتبة 3×2 ، والمصفوفة الثانية من الرتبة 2×3 ،

ويكون حاصل ضرب المصفوفتين عملية غير معرفة

الخيار الصحيح Ⓓ

Ⓐ 19

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ..

$$\underline{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1}=\frac{1}{0(0)-1(1)}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ⓒ 20

$$\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1}=\underline{I} \Rightarrow \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}5\left(\frac{1}{5}\right)+0(0) & 5(0)+0(x)\\ 0\left(\frac{1}{5}\right)+1(0) & 0(0)+x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow x=1$$

Ⓐ 21

بما أن المصفوفة ليس لها نظير ضربي فإن محددتها تساوي صفرًا ..

$$\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}=2x(x)-y(-2y)=0$$

$$2x^2+2y^2=0 \Rightarrow 2(x^2+y^2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}(x^2+y^2)}{\cancel{2}}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=0$$

Ⓑ 22

$$|\underline{A}|=\begin{bmatrix}2x & 6\\ 3 & 10\end{bmatrix}=2x(10)-6(3)=42$$

$$20x-18=42$$

$$20x=60$$

$$x=\frac{60}{20}=3$$

Ⓑ 23

المُحدِّدة من الدرجة الثالثة ومنه فإننا نحسب قيمتها بقاعدة الأقطار ..

$$\left|\begin{matrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -2 & 1\end{matrix} = (6+2+0)-(0-2+0)$$

$$0 \quad -2 \quad 0 \qquad 6 \quad 2 \quad 0 \qquad =10$$

Ⓑ 24

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1 & 3\\ 0 & 1\\ 5 & 5\end{matrix}$$

$$5 \quad -5 \quad 0 \qquad -1 \quad 15 \quad 0$$

$$A=\frac{1}{2}[(-1+15+0)-(5-5+0)]=7$$

مساحة المثلث $=|A|=|7|=7$

كثيرات الحدود ودوالها

● 01 Ⓒ

بما أن العدد تحت الجذر سالب فإنه عدد تخيلي، وباستخدام خواص الجذور ..

$$\sqrt{-36} = \sqrt{(-1) \times 36} = \sqrt{-1} \times \sqrt{36} = i \times 6 = 6i$$

● 02 Ⓐ

$$\begin{aligned}(2i+3i^2)^2 &= 4i^2 + 12i^3 + 9i^4\\ &= 4 \times -1 + 12 \times -i + 9 \times 1\\ &= -4 - 12i + 9 = 5 - 12i\end{aligned}$$

● 03 Ⓓ

$$\begin{aligned}&(2+3i)(1-2i)\\ &= (2)(1) + (2)(-2i) + (3i)(1) + (3i)(-2i)\\ &= 2 - 4i + 3i - 6i^2\\ &= 2 - i - (-6) = 8 - i\end{aligned}$$

● 04 Ⓒ

$$(2+6i)(2-6i) = (2)^2 + (6)^2 = 4 + 36 = 40$$

● 05 Ⓑ

$$\frac{i-1}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{i(i-1)}{2i^2} = \frac{i^2 - i}{2i^2} = \frac{-1-i}{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

● 06 Ⓓ

نقارن المعادلة المعطاة بالصورة العامة للمعادلة التربيعية ..

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$1x^2 + -2x + 4 = 0$$
$$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = 4$$

المميز $= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$

بما أن المميز سالبًا فإن الجذرين مركبان.

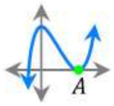
● 07 Ⓐ

نقارن المعادلة المعطاة بالصورة العامة للمعادلة التربيعية ..

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$1x^2 + 2x + 5 = 0$$
$$a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 5$$

$$\begin{aligned}x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - (4 \times 1 \times 5)}}{2 \times 1} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}\\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}\\ &= \frac{-2+4i}{2}, \frac{-2-4i}{2}\\ &= \frac{-2 \pm 4i}{2}\\ &= -1 + 2i, -1 - 2i\end{aligned}$$

● 08 Ⓐ



في الخيار Ⓐ نجد أن المنحنى يمس محور x في النقطة A ، ويكون للمنحنى جذر حقيقي مكرر مرتين.

● 09 Ⓐ

$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2}{3b} \times \frac{9b^2}{a-b} &= \frac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{3} \times \cancel{b}} \times \frac{3 \times \cancel{3} \times \cancel{b} \times b}{\cancel{(a-b)}}\\ &= (a+b) \times 3 \times b = 3b(a+b)\end{aligned}$$

● 10 Ⓐ

$$\begin{aligned}(3x-5)(x+1) &= 3x(x+1) - 5(x+1)\\ &= 3x(x) + 3x(1) - 5(x) - 5(1)\\ &= 3x^2 + 3x - 5x - 5\\ &= 3x^2 - 2x - 5\end{aligned}$$

● 11 Ⓑ

مساحة القاعدة = $\dfrac{\text{حجم الأسطوانة}}{\text{الارتفاع}}$

مساحة القاعدة = $\pi(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) \div (x - 4)$

إذا كانت كثيرة الحدود غير ممكنة بالتحليل فإنه يمكن استخدام القسمة التركيبية ..

$x - 4 = 0 \Rightarrow x =$

4	$1x^3$	$-2x^2$	$-7x$	-4
		4	8	4
	$1x^2$	$+2x$	$+1x^0$	0

(درجة كل حد تنقص 1)

مساحة القاعدة = $\pi(x^2 + 2x + 1)$

● 12 Ⓐ

$$x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = -2$$

باقي القسمة $= f(-2) = (-2)^3 + (-2)k + 3 = -5 - 2k$

وبما أن باقي القسمة يساوي 1 فإن ..

$$-5 - 2k = 1$$
$$-2k = 1 + 5 = 6 \ \Rightarrow \ k = \frac{6}{-2} = -3$$

● 13 Ⓓ

بتجربة الخيارات نجد أن الخيار Ⓓ هو الصحيح حيث ..

$$x + 2 = x - (-2)$$
$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 2 = -16 + 16 = 0$$

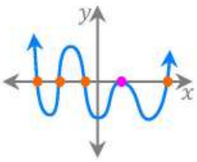
$(x+2)$ عامل من العوامل

● 14 Ⓐ

لإيجاد أصفار $f(x)$ نساويها بالصفر ونوجد قيم x ..

$$f(x) = x^2 + 5x + 6 = 0 \ \Rightarrow \ (x+2)(x+3) = 0$$
$$x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = -2$$
$$x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = -3$$

Ⓒ 15



بالنظر للشكل نجد أن ..
المنحنى يقطع محور x في أربع نقـاط، ويمس محور x في نقطـة (جـذر حقيقي مكرر مرتين)، ومنه فإن الدالة لها 6 أصفار حقيقية.

الدوال: العكسية والجذرية والنسبية

● 01 Ⓓ

x	-4	-3	0	1
$g(x)$	5	7	9	11

x	5	7	9	11
$f(x)$	3	-2	1	2

$$-4 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow -4 \xrightarrow{[f\circ g]} 3$$

● 02 Ⓐ

$$[f\circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2+1)$$
$$= 2(x^2+1) - 5$$
$$= 2x^2 + 2 - 5 = 2x^2 - 3$$

● 03 Ⓓ

$$f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow y = x^2 - 5$$

نستبدل y بـ x ونستبدل كل x بـ y، ثم نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y ..

$$x = y^2 - 5 \Rightarrow y^2 = x + 5 \Rightarrow y = \sqrt{x+5}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$$

● 04 Ⓒ

مجال الدالة الجذرية هو مجموعة حل المتباينة ..

ما تحت الجذر ≥ 0

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (3-x)(3+x) \geq 0$$
$$(3-x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \ , \ (3+x) \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$
$$-3 \leq x \leq 3$$

المجال هو $[-3, 3]$

● 05 Ⓑ

$$f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow y = \sqrt{x+3}$$

نستبدل y بـ x ونستبدل كل x بـ y، ثم نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y ..

$$x = \sqrt{y+3} \xrightarrow{\text{بتربيع الطرفين}} x^2 = y + 3 \Rightarrow y = x^2 - 3$$

وبما أن مدى الدالة $f(x) \geq 0$ يساوي مجال $f^{-1}(x)$ فإن ..

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0$$

● 06 Ⓑ

$$\sqrt{32} - \sqrt{8} = \sqrt{2\times 16} - \sqrt{2\times 4} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

● 07 Ⓑ

$$\sqrt[7]{x^{14}y^7} = \sqrt[7]{x^{14}} \times \sqrt[7]{y^7} = x^{\frac{14}{7}} \times y^{\frac{7}{7}} = x^2 y$$

● 08 Ⓐ

$$\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{9\times 7}}{\sqrt{4\times 7}} = \frac{3\cancel{\sqrt{7}}}{2\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{3}{2}$$

● 09 Ⓒ

$$5 + \sqrt[3]{2x+4} \leq 7 \Rightarrow \sqrt[3]{2x+4} \leq 7 - 5$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x+4} \leq 2$$

نتخلص من الجذر في المتباينة بتكعيب الطرفين ..

$$\left(\sqrt[3]{2x+4}\right)^3 \leq 2^3 \Rightarrow 2x + 4 \leq 8$$
$$\Rightarrow 2x \leq 8 - 4$$
$$\Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

● 10 Ⓒ

بما أن العبارة النسبية هي النسبة بين كثيرتي حدود، وبمناقشة الخيارات ..

Ⓐ $\frac{-x}{x+1}$ تمثل عبارة نسبية ×

Ⓑ $\frac{x^5-y^3}{y-x}$ تمثل عبارة نسبية ×

Ⓒ $\frac{\sqrt{x}+7}{5x^3+1}$ لا تمثل عبارة نسبية لأن البسط ليس كثيرة حدود ✓

الخيار الصحيح Ⓒ

● 11 Ⓒ

$$\frac{4x^2y^2}{xy^2} \div \frac{2y}{2xy} = \frac{4x^2\cancel{y^2}}{\cancel{x}\cancel{y^2}} \times \frac{\cancel{2x}\cancel{y}}{\cancel{2}\cancel{y}} = 4x^2$$

● 12 Ⓐ

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)^{\cancel{2}}}{4\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(x-2)}} = \frac{(x-3)}{4(x+3)}$$

● 13 Ⓐ

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \left(\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}\right)$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \left(\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}\right)$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \left(\frac{\cancel{yx} - y^2 - x^2 - \cancel{xy}}{x^2-y^2}\right)$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{-y^2-x^2}{x^2-y^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 0$$

● 14 Ⓓ

الدالة $f(x) = \frac{4x}{2x-6}$ غير معرفة عند أصفار المقام ..

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

● 15 Ⓑ

أكبر أس في المقام فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.

ويكون للدالة خط تقارب رأسي عند أصفار المقام ..

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \xRightarrow{\text{بالتحليل}} (x-5)(x+2) = 0$$

$x = 5$ أو $x = -2$

نلاحظ أن المستقيم $y = 3$ ليس خط تقارب للدالة.

Ⓒ 16

$$x_1 \times y_2 = x_2 \times y_1$$

$$24 \times x_2 = 48 \times 8 \Rightarrow x_2 = \frac{{}^{2}\cancel{48} \times 8}{\cancel{24}} = 16$$

Ⓑ 17

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

$$2 \times \cancel{8} = x_2 \times -\cancel{8} \Rightarrow -x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

Ⓑ 18

بما أن حاصل ضرب كل قيمة لــ x في القيمة المناظرة لها في y يساوي 12 (مقدار ثابت) فإن العلاقة بين x, y علاقة عكسية.

Ⓑ 19

$$m = \frac{kn}{z} \Rightarrow z = \frac{kn}{m}$$

Ⓒ 20

$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{(x)x}{(x)(x+2)} + \frac{(x+2)1}{(x+2)(x)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x)x + (x+2)}{(x)(x+2)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + x + 2 = \cancel{x^2} + 2x$$

$$\Rightarrow 2x - x = 2 \Rightarrow x = 2$$

المتتابعات والمتسلسلات

01 Ⓐ

نحدد نوع المتتابعة حسابية أم هندسية ..

$-6-(-3)=-3$ و $-9-(-6)=-3$

وبما أن المتتابعة تزيد بمقدار ثابت -3 يُسمى أساس المتتابعة؛ فإن ..

المتتابعة حسابية وأساسها -3

02 Ⓑ

أساس المتتابعة الحسابية يساوي الفرق بين أي حد والحد السابق له؛ ومنه فإن ..

$$d=3-8=-5$$

$$-7-a=-5 \Rightarrow -a=-5+7=2 \Rightarrow a=-2$$

03 Ⓓ

$$a_1=-1 \ , \ d=2 \ , \ n=9 \ , \ a_9=?$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$a_9=-1+(9-1)2$$

$$a_9=-1+(8)2$$

$$a_9=-1+16=15$$

04 Ⓒ

$$a_1=4 \ , \ n=121 \ , \ a_{121}=? \ , \ d=-1-4=-5$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$a_{121}=4+(121-1)(-5)$$

$$a_{121}=4+(120)(-5)$$

$$a_{121}=4-600=-596$$

05 Ⓑ

من الشكل ..

الحد الأول $=7$ ، الحد الثاني $=4$ ، الحد الثالث $=1$

نلاحظ أن أساس المتتابعة يساوي -3 ، ومنه فإن الحد السادس ..

$$a_6=7+(6-1)(-3) \Rightarrow a_6=7-15=-8$$

06 Ⓓ

$$a_1=5 \ , \ a_{20}=62 \ , \ n=20$$

$$S_{20}=20\left(\frac{5+62}{2}\right)=20\times\frac{67}{2}=10\times 67=670$$

07 Ⓑ

$$a_1=-3 \ , \ n=? \ , \ S_n=420 \ , \ d=? \ , \ a_n=87$$

$$420=n\left(\frac{-3+87}{2}\right) \Rightarrow 420=42n \Rightarrow n=10$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 87=-3+(10-1)d$$

$$\Rightarrow 87=-3+9d$$

$$\Rightarrow 9d=90 \Rightarrow d=10$$

$$a_2=-3+(2-1)10=-3+10=7$$

08 Ⓑ

$$a_{10}=2\times 10+1=21 \ , \ a_1=2\times 1+1=3$$

$$n=10-1+1=10$$

$$S_{10}=10\left(\frac{3+21}{2}\right)=10\left(\frac{24}{2}\right)=10\times 12=120$$

09 Ⓑ

$$n=21-9+1=13$$

$$a_{13}=(5\times 21)+6=111 \ , \ a_1=(5\times 9)+6=51$$

$$S_{13}=13\left(\frac{51+111}{2}\right)=13\left(\frac{162}{2}\right)=1053$$

10 Ⓐ

$$a_6=a_1\cdot r^{n-1} \Rightarrow 96=3\cdot r^{6-1} \Rightarrow 32=r^5$$

$$\Rightarrow 2^5=r^5 \Rightarrow 2=r$$

11 Ⓑ

بما أن أعداد الطلاب تزيد سنويًا بنسبة 20% فإن كل عام يمثل 120% من العام السابق له، وبتمثيلها على شكل متتابعة هندسية أساسها ..

$$120\%=\frac{120}{100}=1.2$$

$$500 \xrightarrow{\times 1.2} 600 \xrightarrow{\times 1.2} 720 \xrightarrow{\times 1.2} 864$$

500	600	720	864
1437	1438	1439	1440

Ⓑ الخيار الصحيح

12 Ⓓ

$$27=1\times r^{4-1} \Rightarrow 3^3=r^3 \Rightarrow 3=r$$

وبما أن الوسطين الهندسيين المطلوبان هما الحدان الثاني والثالث ..

$$a_2=a_1\times r=1\times 3=3 \ , \ a_3=a_2\times r=3\times 3=9$$

13 Ⓐ

$$a_1=3 \ , \ n=11-1+1=11 \ , \ r=4$$

$$S_{11}=\frac{3-(3\times 4^{11})}{1-4}=\frac{\cancel{3}(1-4^{11})}{-\cancel{3}}=4^{11}-1$$

14 Ⓐ

$$r=\frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له}}=\frac{\frac{4}{5}}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}<1$$

المتسلسلة متقاربة ومنه فإن مجموعها ..

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{4}{1-\frac{1}{5}}=\frac{4}{\frac{4}{5}}=4\times\frac{5}{4}=5$$

15 Ⓒ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$r=\frac{2}{3} \ , \ a_1=1$$

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=1\times\frac{3}{1}=3$$

Ⓒ 16

باستخدام نظرية ذات الحدين نجد أن مفكوك $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{8}$ ..

$$ {}_{8}C_{0}\left(\frac{1}{x}\right)^{8}(x)^{0}+{}_{8}C_{1}\left(\frac{1}{x}\right)^{7}(x)^{1}+{}_{8}C_{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{6}(x)^{2} $$
$$ +\,{}_{8}C_{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{5}(x)^{3}+{}_{8}C_{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{4}(x)^{4} $$
$$ +\,{}_{8}C_{5}\left(\frac{1}{x}\right)^{3}(x)^{5}+\cdots $$

وبالتبسيط ..

$$ \left(\frac{1}{x^{8}}\right)+8\left(\frac{1}{x^{6}}\right)+28\left(\frac{1}{x^{4}}\right)+56\left(\frac{1}{x^{4}}\right)+70\left(\frac{1}{\cancel{x^{4}}}\right)\cancel{x^{4}}+\cdots $$

رقم الحد الذي قيمته 70 في مفكوك $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{8}$ هو 5

Ⓓ 17

من نظرية ذات الحدين نجد أن الحد الرابع في مفكوك $(2x-1)^{4}$ ..

$$ {}_{4}C_{3}(2x)^{4-3}(-1)^{3}=\left(\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}\right)(-2x) $$
$$ =\left(\frac{24}{6}\right)(-2x) $$
$$ =4\times(-2x)=-8x $$

الاحتمالات والإحصاء

Ⓓ 01

أي قطعة من القطع الأربع يمكن أن توضـــع في أحد الجيوب الثلاثة، وبما أن عدد نواتج تجربة متعددة المراحل يســاوي حاصــل ضــرب عدد النواتج الممكنة لجميع مراحلها؛ فإن ..

$$\text{عدد الطرق} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Ⓒ 02

عدد طرق سحب البطاقة الأولى يساوي 8 طرق.
وبما أن الســحب مع الإحلال فإن عدد طرق ســحب البطاقة الثانية يســاوي 8 طرق أيضًا، وبحسب مبدأ العد الأساسي؛ فإن ..

$$\text{عدد عناصر فضاء العينة} = 8 \times 8 = 64$$

Ⓒ 03

بما أن الكتاب ليس تاريخ فإننا نستبعد كتب التاريخ ..

$$\text{عدد نواتج فضاء العينة} = 5 + 3 + 4 = 12$$

$$\text{عدد كتب الرياضيات} = 4$$

$$P\left(\text{اختيار كتاب رياضيات}\right) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ⓓ 04

بما أن الترتيب مهم فنوجد عدد جميع النواتج الممكنة بالتباديل ..

$${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Ⓐ 05

بما أن عدد الحروف 6 وحرف م مكرر مرتين وحرف ا مكرر مرتين؛ فإن ..

$$\text{عدد التباديل مع التكرار} = \frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180$$

$$\text{عدد النواتج الممكنة لتكوين كلمة الدمام} = 1$$

$$P\left(\text{تكوين كلمة الدمام}\right) = \frac{1}{180}$$

Ⓓ 06

جلوس الأشخاص حول الطاولة بدون نقطة مرجع ثابتة؛ ومنه فإن ..

$$(n-1)! = (6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Ⓑ 07

بما أن الترتيب بالنسبة لنقطة مرجع ثابتة فإن عدد طرق الجلوس الأشخاص ..

$$n! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

وبما أن الشــخص الذي يقدم العرض يجلس بجوار الجهاز فإن عدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الخمسة الباقيين ..

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

احتمال أن يجلس الشخص الذي سيقدم العرض بجوار الجهاز يساوي ..

$$\frac{120}{720} = \frac{12}{72} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ⓑ 08

الترتيب غير مهم؛ ومنه فإننا نوجد عدد جميع النواتج الممكنة بالتوافيق ..

$${}_{8}C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$$\text{عدد النواتج الممكنة لسحب تنورتين} = {}_{5}C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\text{عدد النواتج الممكنة لسحب قميصين} = {}_{3}C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$$

$$P\left(\text{اختيار تنورتين وقميصين}\right) = \frac{10 \times 3}{70} = \frac{3}{7}$$

Ⓒ 09

مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة المربع مطروحًا منها مساحة الدائرة؛ ومنه فإن ..

$$\text{مساحة الجزء المظلل} = 9 - 3 = 6\ \text{cm}^2$$

$$\text{احتمال وقوع النقطة في الجزء المظلل} = \frac{\text{مساحة الجزء المظلل}}{\text{مساحة المربع}}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Ⓐ 10

$$\text{جميع عناصر تجربة إلقاء مكعب مرقم} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{جميع عناصر تجربة إلقاء قطعة نقود} = \left\{\text{كتابة ,شعار}\right\}$$

نرمز لحادثة ظهور عدد زوجي بالرمز A ، ونرمز لحادثة ظهور كتابة بالرمز B ..

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{و} \quad B = \left\{\text{كتابة}\right\}$$

وبما أن الحادثتين مستقلتان فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور الكتابة ..

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Ⓒ 11

$$\text{عدد التفاحات الصالحة الموجودة بالصندوق} = 10 - 3 = 7$$

$$P\left(\text{احتمال سحب تفاحة صالحة في المرة الأولى}\right) = \frac{7}{10}$$

وبعد سحب التفاحة الأولى بدون إرجاع ..

$$\text{عدد التفاحات الكلية المتبقية في الصندوق} = 10 - 1 = 9$$

$$\text{عدد التفاحات الصالحة المتبقية في الصندوق} = 7 - 1 = 6$$

$$P\left(\text{احتمال سحب تفاحة صالحة في المرة الثانية}\right) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\text{احتمال سحب تفاحتين صالحتين}\right) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

Ⓐ 12

فضاء العينة كون مجموع العددين الظاهرين 9 ..

$$\text{مجموعة فضاء العينة} = \left\{ \underset{1}{\overset{1}{(5,4)}}, \underset{2}{\overset{2}{(4,5)}}, \underset{3}{(3,6)}, \underset{4}{(6,3)} \right\}$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{عدد أزواج ظهور العدد 5}}{\text{عدد أزواج فضاء العينة}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

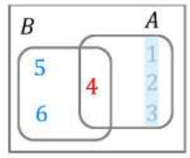
Ⓒ 13

$A \cap B = \{4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, عدد العناصر الكلي = 6

$P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$

حل بطريقة أخرى ..



بما أن الاحتمال مشـروط بشـرط وقوعه في B فإن فضاء العينة يكون B ..

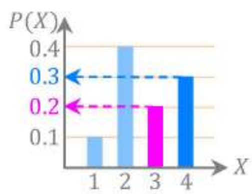
$B = \{4, 5, 6\}, A = \{4\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{1}{3}$

Ⓓ 14

نوجد احتمال اختيار شخص من العاطلين العُزب فقط ..

$$P\left(\frac{\text{عدد العاطلين العُزب}}{\text{عدد العُزب}}\right) = \frac{9}{9+3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

Ⓑ 15



نرمز لحـادثـة 4 أيـام ممطرة بـالرمز A ، وحادثـة 3 أيـام ممطرة بـالرمز B ، بمـا أن الحادثتين متنافيتان فإن ..

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= 0.3 + 0.2 = 0.5$

Ⓑ 16

$$P\left(\text{عدم هطول المطر}\right) = 100\% - P\left(\text{هطول أمطار}\right)$$

$= 100\% - 75\% = 25\%$

Ⓒ 17

«لا يزيد تقديره عن جيد» تعني تكرار العمود بالإضــافة لمجموع تكرارات الأعمدة السابقة ..

$$P\left(\text{أن لا يزيد تقديره عن جيد}\right) = 0.40 + 0.10 + 0.05 = 0.55$$

Ⓑ 18

أولاً: نوجد مجموع البيانات ..

مجموع البيانات $= 15 + 19 + 15 + 13 + 13 + 11 + 12 = 98$

ثانيا: نوجد عدد البيانات ..

$$\overset{1}{15}, \overset{2}{19}, \overset{3}{15}, \overset{4}{13}, \overset{5}{13}, \overset{6}{11}, \overset{7}{12}$$

عدد القيم $= 7$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}} = \frac{98}{7} = \frac{2 \times 49}{7} = 2 \times 7 = 14$$

Ⓒ 19

لإيجاد الوسيط نُرتب البيانات تصاعديًا ..

$57, 61, 68, 82, 93, 100$

وبما أن عدد البيانات زوجيًا فإن الوسيط هو متوسط البيانين الموجودين في منتصف البيانات.

$$\text{الوسيط} = \frac{68 + 82}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

Ⓓ 20

بالنظر للبيانات المعطاة نلاحظ وجود قيم مشتركة بينهما وهي ..

$10, 11, 13, 13$

نقوم باستبعادها من كل خيار فيتبقى لنا ..

Ⓐ $14, 12$ ..

المدى $= 14 - 12 = 2$

Ⓑ $14, 15$ ..

المدى $= 15 - 14 = 1$

Ⓒ $11, 20$ ..

المدى $= 20 - 11 = 9$

Ⓓ $14, 30$ ..

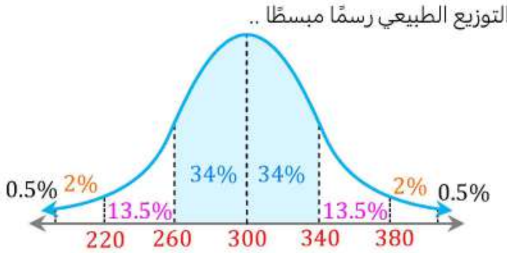
الفرق بينهما $= 30 - 14 = 16$

البيانات التي لها أكبر انحراف معياري يكون بها أكبر مدى

الخيار الصحيح Ⓓ

Ⓐ 21

نرسم التوزيع الطبيعي رسمًا مبسطًا ..



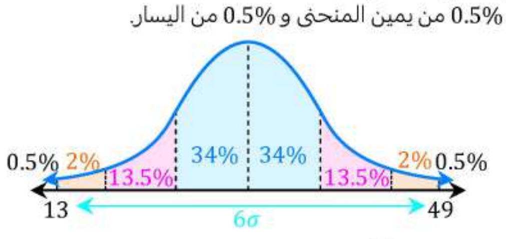
$P(260 < x < 340) = (34 + 34)\% = 68\%$

عدد البطاريات التي يقع عمرها بين 340 و 260 يومًا يساوي ..

$$\frac{68}{100} \times 10000 = 6800$$

Ⓐ 22

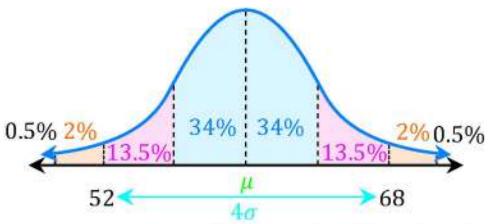
نرسـم التوزيع الطبيعي رسـمًا مبسـطًا، ونجد أن النسـبة غير المطلوبة 1% وتمثل 0.5% من يمين المنحنى و 0.5% من اليسار.



$$6\sigma = 49 - 13 = 36 \Rightarrow \sigma = \frac{36}{6} = 6$$

Ⓑ 23 ●

نرســم التوزيع الطبيعي رسـمًا مبســطًا، ونجد أن النسـبة غير المطلوبة %5 وتمثل %2.5 من يمين المنحنى و %2.5 من اليسار.



نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي تقع في المنتصف بين 52 و 68 ومنه فإن ..

$$\mu = \frac{68+52}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

Ⓑ 24 ●

التوزيع مكثف في اليمين والذيل إلى اليسار أي أن التوزيع ذو التواء سالب.

Ⓐ 25 ●

$$n = 20 \ , \ p = \frac{\mu}{n} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} \ , \ q = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{{}^{2}\cancel{20} \times \frac{6}{\cancel{10}} \times \frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{48}{10}} = \sqrt{4.8}$$

الرياضيات

2

حساب المثلثات

01 دارت الأرض حول نفسـها لمدة 6 سـاعات فما قياس زاوية الدوران بالراديان؟

Ⓐ 2π Ⓑ $\frac{\pi}{2}$

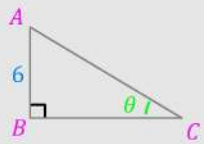
Ⓒ $\frac{\pi}{4}$ Ⓓ $\frac{\pi}{8}$

02 إذا كانت $\cos\theta = \frac{4}{5}$ حيث $0° < \theta < 90°$ ؛ فإن قيمة $\sec\theta$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{3}{4}$ Ⓑ $\frac{3}{5}$

Ⓒ $\frac{5}{3}$ Ⓓ $\frac{5}{4}$

03 إذا كانت مساحة المثلث في الشكل تساوي $27\ \mathrm{cm}^2$ و $AB = 6\ \mathrm{cm}$ ؛ فما قيمة $\tan\theta$ ؟



Ⓐ $\frac{2}{3}$

Ⓑ $\frac{3}{4}$

Ⓒ $\frac{4}{3}$

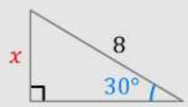
Ⓓ $\frac{3}{2}$

04 ما قيمة x التي تجعل $\cot x$ غير معرفة؟

Ⓐ $0°$ Ⓑ $60°$

Ⓒ $90°$ Ⓓ $135°$

05 ما قيمة x في الشكل؟



Ⓐ 2 Ⓑ 4

Ⓒ 8 Ⓓ 16

القياس الستيني والدائري للزوايا

قياس ستيني $\times \frac{\pi}{180°}$ → قياس دائري

قياس دائري $\times \frac{180°}{\pi}$ → قياس ستيني

- القياس الستيني وحدته الدرجة، القياس الدائري وحدته الراديان.
- تحويل زوايا مشهورة ..

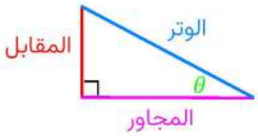
القياس الستيني	$90°$	$180°$	$360°$
القياس الدائري	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

الدوال المثلثية في المثلث قائم الزاوية

$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$



- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة ..

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}}$	0

الزاوية المرجعية

- الزاوية المرجعية θ' وإشارات الدوال المثلثية ..

$\frac{\pi}{2}$ أو $90°$

في الرُّبع الثاني
$\theta' = 180° - \theta$
$120°$ ترجع إلى $60°$
$\sin\theta$ و $\csc\theta$ موجبتان
بينما بقية الدوال سالبة
$\sin 150° = + \sin 30°$

في الرُّبع الأول
$\theta' = \theta$
$70°$ ترجع إلى $70°$
الدوال المثلثية كلها
موجبة

π أو $180°$

$0°$ أو $360°$ أو 2π

O x y

في الرُّبع الثالث
$\theta' = \theta - 180°$
$220°$ ترجع إلى $40°$
$\tan\theta$ و $\cot\theta$ موجبتان
بينما بقية الدوال سالبة
$\cot 240° = + \cot 60°$

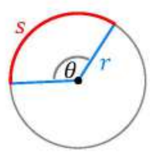
في الرُّبع الرابع
$\theta' = 360° - \theta$
$330°$ ترجع إلى $30°$
$\cos\theta$ و $\sec\theta$ موجبتان
بينما بقية الدوال سالبة
$\csc 290° = - \csc 70°$

$\frac{3\pi}{2}$ أو $270°$

- النسب المثلثية لزاوية θ تساوي النسب المثلثية لزاويتها المرجعية θ' بإشارة الرُّبع الذي تقع فيه θ .
- تنبيه ..

$$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$$

طول القوس



θ بالدرجات	θ بالراديان
$s = \frac{\theta}{360°} \cdot 2\pi r$	$s = r \times \theta$

طول القوس ، نصف القطر

مساحة المثلث

- مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

مثال: ABC مثلث فيه $AB = 3$ cm و $BC = 4$ cm ، وقياس الزاوية بينهما $30°$ ، ما مساحته؟ ١٤٣٨

Ⓐ 12 Ⓑ 6 Ⓒ 4 Ⓓ 3

الحل:

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 30° = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

06 ١٤٣٨ أي الزوايا التالية يكون الجيب والظل له سالبين؟

Ⓐ $65°$ Ⓑ $310°$
Ⓒ $120°$ Ⓓ $256°$

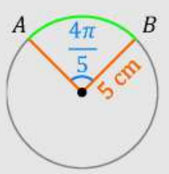
07 ١٤٤٣ المقدار $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ موجبًا في الربعين ..

Ⓐ الأول والثاني Ⓑ الثاني والثالث
Ⓒ الثالث والرابع Ⓓ الأول والرابع

08 ١٤٤٣ ما القيمة الدقيقة لـ $\cos 420°$ ؟

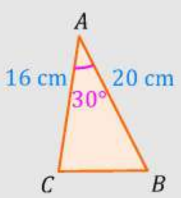
Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{2}$
Ⓒ $-\frac{1}{2}$ Ⓓ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

09 ١٤٤١ ما طول $\widehat{AB}$ في الشكل؟



Ⓐ 2π Ⓑ 3π
Ⓒ 4π Ⓓ 5π

10 ١٤٤٣ من الشكل ما مساحة المثلث ABC ؟



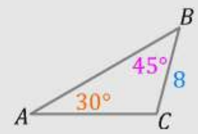
Ⓐ 40 Ⓑ 80
Ⓒ 160 Ⓓ 320

11 ١٤٣٨ طولا الضلعين القائمين في مثلث $\frac{2x-2}{x-1}$ و $\frac{x-1}{x-5}$ ومساحته 5 ، ما قيمة x ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 6
Ⓒ $\frac{23}{3}$ Ⓓ $\frac{26}{4}$

12 ما طول $\overline{AC}$ في الشكل؟

٣٧ وما قبلها



Ⓐ 4 Ⓑ 8

Ⓒ 9 Ⓓ $8\sqrt{2}$

13 أوجد السعة وطول الدورة على الترتيب للدالة $y = 4\sin 5\theta$.

١٤٤١

Ⓐ $5\,,180°$ Ⓑ $4\,,50°$

Ⓒ $4\,,72°$ Ⓓ $5\,,90°$

14 العبارة $\frac{\cos\theta}{\tan\theta \times \csc\theta}$ تكافئ ..

١٤٤٢

Ⓐ $\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta$

Ⓒ $\cos^2\theta$ Ⓓ $\sin^2\theta$

15 العبارة $(1-\cot\theta)\sin\theta$ تكافئ ..

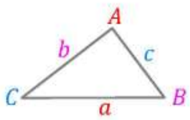
١٤٤١

Ⓐ $\sin\theta\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta - \cos\theta$

Ⓒ $\cos^2\theta$ Ⓓ $\sec\theta$

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام

- **قانون الجيوب ..**

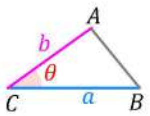


$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

○ نستخدمه عند معرفة قياس زاويتين وطول ضلع في مثلث، أو معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

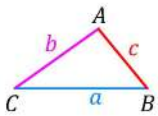
- **قانون جيوب التمام ..**

○ بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية بينهما ..



$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

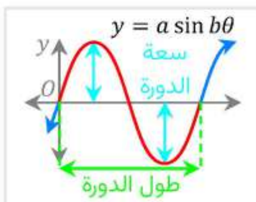
○ بمعلومية أطوال الأضلاع الثلاثة ..

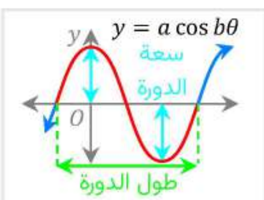


$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

طول الدورة والسعة للدوال الدورية

- **الدالة الدورية:** يتم تمثيلها بمنحنى على شكل نمط يتكرر بانتظام.





الدالة	$a\sin b\theta$	$a\cos b\theta$	$a\tan b\theta$
طول دورتها	$\frac{360°}{\lvert b\rvert}$	$\frac{360°}{\lvert b\rvert}$	$\frac{180°}{\lvert b\rvert}$
سعتها	$\lvert a\rvert$	$\lvert a\rvert$	غير معرفة

المتطابقات النسبية

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

مثال: العبارة $\tan^2\theta\sin^2\theta$ تكافئ ..

١٤٤١

Ⓐ $\sin^2\theta$ Ⓑ $\cos^2\theta$ Ⓒ $\tan^2\theta$ Ⓓ $\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$

الحل:

$$\tan^2\theta\sin^2\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{1} = \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \div \cos^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \qquad \div \sin^2\theta$$

مثال1: إذا كانت $270° < \theta < 360°$ ، $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ؛ فأوجد $\sin\theta$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓓ $-\frac{1}{2}$

الحل: بما أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن ..

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وبما أن $270° < \theta < 360°$ فإن $\sin\theta$ سالبة؛ ومنه فإن ..

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال2: العبارة $(1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta$ تكافئ ..

Ⓐ $\sin^4\theta$ Ⓑ $\cos^4\theta$ Ⓒ $\tan^2\theta$ Ⓓ $\cot^2\theta$

الحل: بما أن $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ فإن ..

$$(1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta = \cos^2\theta \times \cos^2\theta = \cos^4\theta$$

المتطابقات المثلثية لزاويتين متتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

16 إذا كان $270° < \theta < 360°, \sin\theta = -\frac{1}{3}$ ؛ فما القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ ؟

Ⓐ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Ⓑ $\frac{8}{9}$
Ⓒ $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ Ⓓ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17 ما قيمة $[\cos^2(\cot 75°)] + [\sin^2(\cot 75°)]$ ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 45
Ⓒ 60 Ⓓ 75

18 العبارة $\cot^2\theta(\tan^2\theta + \sin^2\theta)$ تكافئ ..

Ⓐ $1 + \sin^2\theta$ Ⓑ $1 + \cos^2\theta$
Ⓒ $\cos^2\theta$ Ⓓ $\sin^2\theta$

19 العبارة $\sin^2\theta(1 - \cot^2\theta)$ تكافئ ..

Ⓐ $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ Ⓑ $\sin^2\theta\cos^2\theta$
Ⓒ $\tan^2\theta$ Ⓓ $\sec\theta$

20 العبارة $\tan\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ تكافئ ..

Ⓐ $\sin\theta$ Ⓑ $\tan\theta$
Ⓒ $\cos\theta$ Ⓓ $\cot\theta$

21 العبارة $\frac{\cos(-\theta)\tan\theta}{\sec(-\theta)}$ تكافئ ..

Ⓐ $\sin^2\theta$ Ⓑ $\cos^2\theta$
Ⓒ $\cos\theta\sin\theta$ Ⓓ $\csc\theta$

22 ما قيمة $\cos 105^\circ \cos 45^\circ - \sin 105^\circ \sin 45^\circ$ ؟

Ⓐ $\cos 30^\circ$ Ⓑ $\cos 60^\circ$

Ⓒ $\cos 120^\circ$ Ⓓ $\cos 150^\circ$

23 إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$ فإن $\tan 2\theta$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{4}{3}$ Ⓑ 1

Ⓒ $\frac{3}{4}$ Ⓓ $\frac{1}{4}$

24 قياس الزاوية $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right)$ يساوي ..

Ⓐ 20° Ⓑ 45°

Ⓒ 60° Ⓓ 90°

25 قيمة $\mathrm{Sin}^{-1}(\cos 72^\circ)$ تساوي ..

Ⓐ 72° Ⓑ 18°

Ⓒ 38° Ⓓ 108°

26 إذا كان $\mathrm{Sin}^{-1}(\cos\theta) = \frac{\pi}{3}$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فأوجد قيمة θ .

Ⓐ $\frac{\pi}{3}$ Ⓑ $\frac{\pi}{6}$

Ⓒ $\frac{\pi}{4}$ Ⓓ $\frac{5\pi}{4}$

27 إذا كانت $\tan\theta - 1 = 0$ ؛ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فما قيمة θ ؟

Ⓐ 30° Ⓑ 45°

Ⓒ 60° Ⓓ 90°

28 حل المعادلة $2\sin^2\theta + \sin\theta = 1$ هو ..

Ⓐ 15° Ⓑ 30°

Ⓒ 45° Ⓓ 60°

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف زاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

الدوال المثلثية العكسية

- دالة الجيب العكسية ($\mathrm{Arc}\sin x = \mathrm{Sin}^{-1} x$) تستخدم لإيجاد الزاوية بمعلومية جيبها، وكذلك مع بقية الدوال المثلثية.
  - مثال توضيحي ..

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ \quad , \quad \mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

- للتذكير: $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$.
- تنبيهان ..

$\mathrm{Sin}^{-1}(\sin x) = x$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\mathrm{Sin}^{-1} x) = x$ ، حيث $-1 \le x \le 1$

حل المعادلة المثلثية

مثال: حل المعادلة $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ هو ..

Ⓐ 30° أو 120° Ⓑ 30° أو 150°

Ⓒ 30° أو 300° Ⓓ 30° أو 330°

الحل:

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\cos\theta) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

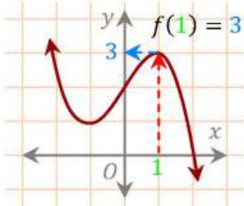
وبما أن $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (موجبة) فإنها تقع في الرُّبع الأول أو الرابع ..

$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ أو $\theta = 30^\circ$

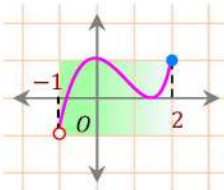
11

تحليل الدوال والتحويلات الهندسية

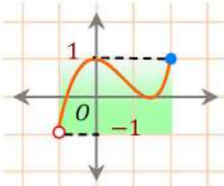
تحليل التمثيل البياني للدالة



- **قيمة الدالة عند نقطة:** الإحداثي y الناتج من رسم خط رأسي من النقطة إلى منحنى الدالة.

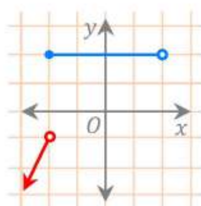


- **المجال:** نستعمل القيم على محور x لتحديده، فمثلًا: في الشكل المجال $(-1, 2]$.



- **المدى:** نستعمل القيم على محور y لتحديده، فمثلًا: في الشكل المدى $(-1, 1]$.

مثال: ما مجال الدالة $y = f(x)$ ؟



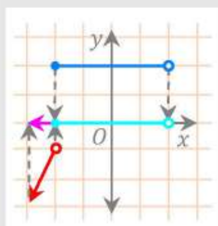
Ⓐ $(-\infty, 2]$

Ⓑ $(-\infty, 2] - \{-2\}$

Ⓒ $(-\infty, 2)$

Ⓓ $[-3, 2] - \{-2\}$

الحل: لإيجاد المجال نستعمل قيم المحور x ..



مجال الجزء الأيسر ..

$(-\infty, -2)$

مجال الجزء الأيمن ..

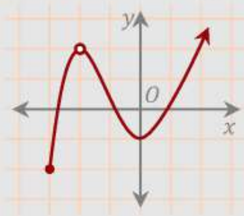
$[-2, 2)$

مجال $f(x)$ يساوي اتحاد مجالي الجزئين الأيسر والأيمن.

$f(x)$ مجال $= (-\infty, -2) \cup [-2, 2)$

$= (-\infty, 2)$

01 ما مجال الدالة $y = f(x)$ في الشكل؟



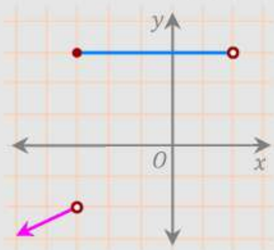
Ⓐ $[-3, -2) \cup (-2, \infty)$

Ⓑ $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

Ⓒ $[-3, -1) \cup (-1, \infty)$

Ⓓ $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

02 ما مدى الدالة $f(x)$ في الشكل؟



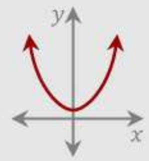
Ⓐ $(-\infty, 3]$

Ⓑ $(-\infty, -2) \cup \{3\}$

Ⓒ $(-\infty, 3)$

Ⓓ $(-\infty, -2] \cup \{3\}$

03 الدالة الممثلة بالشكل ..
١٤٣٩



Ⓐ فردية

Ⓑ ليست فردية وليست زوجية

Ⓒ زوجية

Ⓓ متماثلة حول محور x

04 الدالة $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$ دالة ..
١٤٣٨

Ⓐ فردية وزوجية معًا

Ⓑ ليست فردية وليست زوجية

Ⓒ زوجية

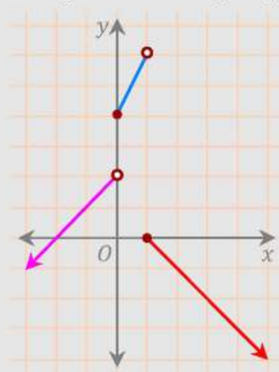
Ⓓ فردية

05 أي الدوال التالية دالة زوجية؟
١٤٤٠

Ⓐ $f(x) = \frac{1}{x}$ Ⓑ $f(x) = x^3$

Ⓒ $f(x) = x^2 + |x|$ Ⓓ $f(x) = x^2 + x$

06 في التمثيل البياني إذا كانت الدالة $f(x)$ متعددة التعريف؛ فأي التالي يكون تعريفها في الفترة $[2, 6]$ ؟
١٤٤٣



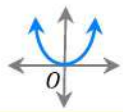
Ⓐ $-x + 1$ Ⓑ $x - 3$

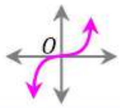
Ⓒ $x + 2$ Ⓓ $2x + 5$

الدوال الزوجية والدوال الفردية

الدوال

الزوجية	الفردية
جبريًا: عند التعويض عن x في الدالة بـ $-x$ تُعطي الدالة الأصلية $f(-x) = f(x)$	**جبريًا:** عند التعويض عن x في الدالة بـ $-x$ تُعطي الدالة الأصلية بعكس الإشارة $f(-x) = -f(x)$
بيانيًا: متماثلة حول المحور y	**بيانيًا:** متماثلة حول نقطة الأصل





- **تحديد نوع دالة ذهنيًا ..**

زوجية	إذا كانت جميع أسس x زوجية
فردية	إذا كانت جميع أسس x فردية
ليست فردية وليست زوجية	إذا كانت أسس x بعضها زوجي والبعض الآخر فردي

مثال: الدالة $f(x) = x^3 + 5x^2 - x$ دالة .. ٣٧ وما قبلها

Ⓐ فردية وزوجية معًا Ⓑ ليست فردية وليست زوجية

Ⓒ زوجية Ⓓ فردية

الحل: نلاحظ أن أسس المتغير x بعضها زوجي، والبعض الآخر فردي؛ ومنه فإن ..

الدالة ليست فردية وليست زوجية

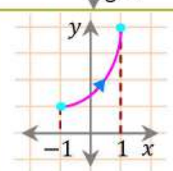
تزايد وتناقص وثبوت الدالة

- لتعيين فترات تزايد وتناقص وثبوت الدالة بيانيًا نلاحظ الرسم فتكون لفروع الدالة حالة من الحالات التالية:

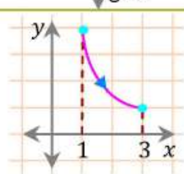
فروع الدالة

متزايدة	متناقصة	ثابتة
قيمة الدالة تتزايد بتزايد قيم x	قيمة الدالة تتناقص بتزايد قيم x	قيمة الدالة ثابتة بتزايد قيم x

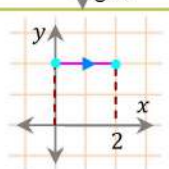
مثال



الدالة تتزايد في الفترة $(-1, 1)$



الدالة تتناقص في الفترة $(1, 3)$



الدالة ثابتة في الفترة $(0, 2)$

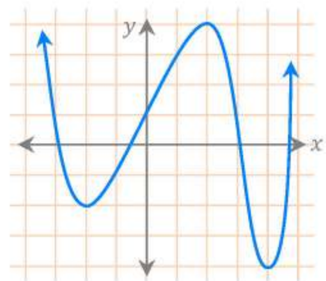
- **فائدة:** تحدد الفترة من محور x وتكون أطرافها مفتوحة.

القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة

- في المنحنى القمة الأعلى تُسمى عظمى مطلقة، بينما بقية القمم تُسمى عظمى محلية، وكذلك القاع الأدنى يُسمى صغرى مطلقة، بينما بقية القيعان تُسمى صغرى محلية.

مثال: في التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ، عند أي نقطة يكون للدالة قيمة صغرى مطلقة؟

١٤٤٣



Ⓐ $(-2,-2)$

Ⓑ $(0,0)$

Ⓒ $(4,-4)$

Ⓓ $(3,4)$

الحل: النقطة التي عندها تكون للدالة قيمة صغرى مطلقة هي نقطة القاع الأدنى، أي عند النقطة $(4,-4)$.

متوسط معدل التغير للدالة

- متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1,x_2]$ ..

$$m_{sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

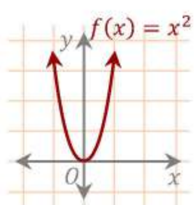
مثال: ما متوسط معدل تغير الدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ على الفترة $[2,7]$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{1}{5}$ Ⓑ $\frac{2}{7}$ Ⓒ $\frac{7}{2}$ Ⓓ 5

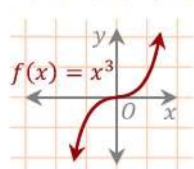
الحل:

$$m_{sec}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{2+2}}{5}=\frac{[3]-[2]}{5}=\frac{1}{5}$$

الدوال الرئيسة (الأم) لبعض الدوال



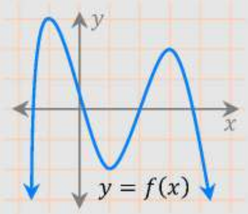
الدالة التربيعية	$f(x)=x^2$
من صورها	$g(x)=a(x-h)^2+k$



الدالة التكعيبية	$f(x)=x^3$
من صورها	$g(x)=a(x-h)^3+k$

07 في التمثيل البياني للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند x تساوي ..

١٤٤٤



Ⓐ 5 Ⓑ 1

Ⓒ 0 Ⓓ -1

08 إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $[-2,10]$ ، ومتناقصة في الفترة $(3,7)$ ، ومتزايدة في الفترة $(-2,3)\cup(7,10)$ ؛ فإن لها قيمة عظمى محلية عند ..

١٤٤٣

Ⓐ -2 Ⓑ 3

Ⓒ 5 Ⓓ 7

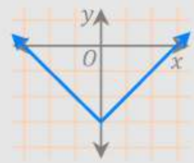
09 ما متوسط معدل التغير للدالة $f(x)=2x^2+3x-4$ على الفترة $[3,5]$ ؟

١٤٤٣

Ⓐ $\frac{17}{2}$ Ⓑ $\frac{84}{8}$

Ⓒ 19 Ⓓ 35

10 الدالة الرئيسة (الأم) للدالة في الشكل ..



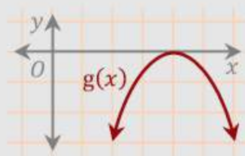
Ⓐ $|x|$

Ⓑ $|x-3|$

Ⓒ $|x|-3$

Ⓓ $|x|+3$

11 إذا كانت $f(x)=x^2$ هي الدالة الرئيسة (الأم) للدالة $g(x)$؛ فأي التالي يُمثل معادلة $g(x)$ ؟



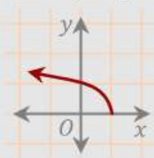
Ⓐ $(x+4)^2$

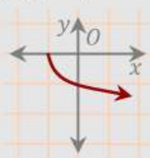
Ⓑ $-(x+4)^2$

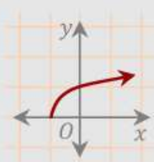
Ⓒ $(x-4)^2$

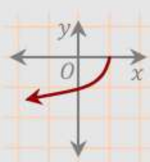
Ⓓ $-(x-4)^2$

12 أي التالي يُمثل منحنى الدالة $f(x)=\left|\sqrt{x+1}\right|$ ؟

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

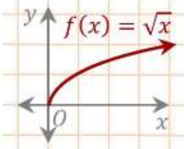
13 أي التالي يمثل الدالة $g(x)$ الناتجة عن الدالة الأم $f(x)=|x|$ بانعكاس حول محور x ، وانسحاب مقداره 4 وحدات إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى؟

Ⓐ $g(x)=|x+5|-4$

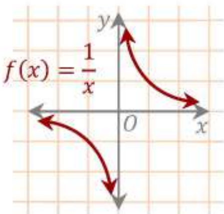
Ⓑ $g(x)=|x+4|+5$

Ⓒ $g(x)=-|x-5|+4$

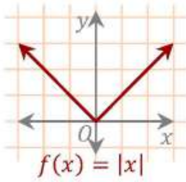
Ⓓ $g(x)=-|x-4|+5$



دالة الجذر التربيعي	$f(x)=\sqrt{x}$
من صورها	$g(x)=a\sqrt{x-h}+k$



دالة المقلوب	$f(x)=\frac{1}{x}$
من صورها	$g(x)=\frac{a}{x-h}+k$



دالة القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x\rvert$
من صورها	$g(x)=a\lvert x-h\rvert+k$

التحويلات الهندسية للدوال

- **الانسحاب (الإزاحة) للدالة الأم $f(x)$:** نعوض عن x في الدالة الأم بـ $(x-h)$ ونضيف k ، حيث h إزاحة أفقية، k إزاحة رأسية ..

$$g(x)=f(x-h)+k$$

رأسي	الإزاحة لأعلى عندما تكون k موجبة الإزاحة لأسفل عندما تكون k سالبة	ومقدار الإزاحة $\lvert k\rvert$
أفقي	الإزاحة لليمين عندما تكون h موجبة الإزاحة لليسار عندما تكون h سالبة	ومقدار الإزاحة $\lvert h\rvert$

- **الانعكاس للدالة الأم $f(x)$ ..**

حول المحور x	حول المحور y
تتغير إشارة الدالة الأم	تتغير إشارة x في الدالة الأم
$g(x)=-f(x)$	$g(x)=f(-x)$

مثال: ما معادلة الدالة $g(x)$ الناتجة من إزاحة الدالة $f(x)=|x|$ بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى و 4 وحدات إلى اليمين؟

Ⓐ $|x-4|+3$　Ⓑ $|x+4|+3$

Ⓒ $|x-4|-3$　Ⓓ $|x+4|-3$

الحل: من الصورة القياسية للدالة $f(x)=|x-h|+k$ ..

الدالة $f(x)=|x|$ بالإزاحة أفقيًا بمقدار 4 وحدات إلى اليمين، وبالإزاحة رأسيًا 3 وحدات إلى أعلى تصبح ..

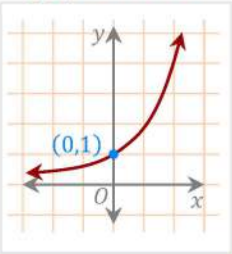
$$f(x)=|x-4|+3$$

الدوال: الأسية واللوغاريتمية

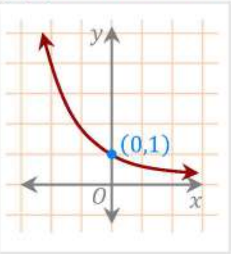
الدوال والمعادلات والمتباينات الأسية

- **الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = b^x$.

$f(x) = b^x, b > 1$



$f(x) = b^x, 0 < b < 1$



المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
مقطع المحور y	$y = 1$
مقطع المحور x (أصفار الدالة)	لا يوجد

- **تنبيه:** الدالة $f(x) = b^x$ متزايدة إذا كانت $b > 1$ ، ومتناقصة إذا كانت $0 < b < 1$.
- **فائدة:** عند تساوي الأساسات تكون الأسس متساوية والعكس صحيح ..

$$b^y = b^x \iff y = x$$

حيث $b > 0 , b \neq 1$.

- **للتذكير:** $a^0 = 1 , a^{-1} = \frac{1}{a}$.

مثال: ما قيمة x التي تحقق المعادلة $3^{x-1} = 27$ ؟

Ⓐ 2 　 Ⓑ 3 　 Ⓒ 4 　 Ⓓ 5

الحل: بما أن $27 = 3^3$ فإن ..

$$3^{x-1} = 3^3$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4$$

- **المتباينات الأسية ..**

$b > 1$	$b^x > b^y \iff x > y$
$0 < b < 1$	$b^x > b^y \iff x < y$

اللوغاريتمات

- $\log_b x$ نقرؤها لوغاريتم x للأساس b حيث x عدد موجب و $b > 1$.
- **التحويل بين الصورتين الأسية واللوغاريتمية ..**

$$b^y = x \iff y = \log_b x$$

$$b^y < x \iff y < \log_b x$$

01 إذا كانت $2^{3x} = 2^{2x+2}$ فما قيمة x ؟

Ⓐ 1 　 Ⓑ 2
Ⓒ 3 　 Ⓓ 4

02 إذا كانت $4^{2x-1} = 2^{5x}$ فما قيمة x ؟

Ⓐ $-\frac{1}{7}$ 　 Ⓑ $-\frac{1}{3}$
Ⓒ -1 　 Ⓓ -2

03 ما قيمة x التي تحقق المعادلة $81 = 16\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$ ؟

Ⓐ -4 　 Ⓑ -2
Ⓒ 2 　 Ⓓ 4

04 ما قيمة x التي تحقق المتباينة $\frac{1}{64} > (2)^{x+2}$ ؟

Ⓐ $x > -8$ 　 Ⓑ $x < -8$
Ⓒ $x > 8$ 　 Ⓓ $x > -4$

05 ما قيمة x التي تحقق المتباينة $8 > 16^{2x-3}$ ؟

Ⓐ $x < \frac{15}{8}$ 　 Ⓑ $x > \frac{15}{8}$
Ⓒ $x > \frac{5}{8}$ 　 Ⓓ $x < \frac{5}{8}$

06 الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية $\log_y x = k$ هي ..

Ⓐ $y^k = x$ 　 Ⓑ $k^y = x$
Ⓒ $x^y = k$ 　 Ⓓ $y^x = k$

07 الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $125 = 25^{\frac{3}{2}}$ هي ..

Ⓐ $\log_5 25 = \frac{3}{2}$ 　 Ⓑ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$
Ⓒ $\log_5 125 = \frac{3}{2}$ 　 Ⓓ $\log_{125} 25 = \frac{3}{2}$

08 ما قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$ ؟

Ⓐ $\frac{3}{2}$ Ⓑ $1\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{2}{3}$ Ⓓ $\frac{1}{2}$

09 إذا كانت $\log_2 5 = 2.3$ فما قيمة $\log_2 20$ ؟

Ⓐ 4.3 Ⓑ 4.6

Ⓒ 9.2 Ⓓ 10

10 المقدار $\log(x+1) - \log x^2 + 3\log x$ يساوي ..

Ⓐ $\log_5 x(x+1)$ Ⓑ $\log_5 \frac{x+1}{x}$

Ⓒ $\log x(x+1)$ Ⓓ $\log \frac{x+1}{x}$

11 ما قيمة $\log_{27} 81$ ؟

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{8}$

Ⓒ $\frac{4}{3}$ Ⓓ $\frac{5}{36}$

12 أي التالي يمثل حلًا للمعادلة؟

$$\log_2(x^2-4) = \log_2 3x$$

Ⓐ -2 Ⓑ -1

Ⓒ 1 Ⓓ 4

13 أي التالي يمثل حلًا للمعادلة؟

$$2\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 9$$

Ⓐ 6 Ⓑ 9

Ⓒ 18 Ⓓ 36

14 إذا كانت الدالة $f(x) = \log_2 x , g(x) = 8^{x+5}$ ؛ فأوجد $[f \circ g](x)$.

Ⓐ $x+5$ Ⓑ $2x+10$

Ⓒ $3x+15$ Ⓓ $8x+40$

15 إذا كان $\log_2(2x+3) > \log_2(3x)$ فإن ..

Ⓐ $x < 3$ Ⓑ $x > 3$

Ⓒ $0 > x > 3$ Ⓓ $0 < x < 3$

- **مثال توضيحي:** قيمة $\log_5 25$ تساوي 2 لأن ..

$$25 = 5^2$$

- **فائدة:** عند كتابة اللوغاريتم بدون أساس فإن أساسه 10 ويُسمى «**اللوغاريتم العشري**».

مثال: إذا كان $\log_x 32 = 5$ فما قيمة x ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 5 Ⓓ 32

الحل:

$$\log_x 32 = 5 \xrightarrow{\text{تحول إلى الصورة الأسية}} x^5 = 32$$

ومنه فإن ..

$$x^5 = 2^5 \Rightarrow x = 2$$

- **خصائص أساسية ..**

$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1 \qquad \log_b b^x = x$$

- **من أهم الخصائص ..**

الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$ ، فمثلًا: $\log_6(3 \times 4) = \log_6 3 + \log_6 4$
القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$ ، فمثلًا: $\log_5 \frac{3}{4} = \log_5 3 - \log_5 4$
لوغاريتم القوة	$\log_b m^p = p \log_b m$ ، فمثلًا: $\log_8 3^5 = 5 \log_8 3$
تغيير الأساس	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ ، فمثلًا: $\log_{64} 36 = \frac{\log_2 36}{\log_2 64}$

المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

- إذا كان كل من طرفي المعادلة أو المتباينة عبارة عن لوغاريتم، ولهما نفس الأســاس (أكبر من 1)؛ فإننا نحذف اللوغاريتم من الطرفين، فمثلًا ..

$$\log_3(x-2) \underset{\text{أو} >}{=} \log_3 9 \Rightarrow x-2 \underset{\text{أو} >}{=} 9$$

مثال: أي التالي يمثل حلًا للمعادلة $\log_2 4x + \log_2 5 = \log_2 100$ ؟

Ⓐ $\sqrt{5}$ Ⓑ 5 Ⓒ $5\sqrt{5}$ Ⓓ 20

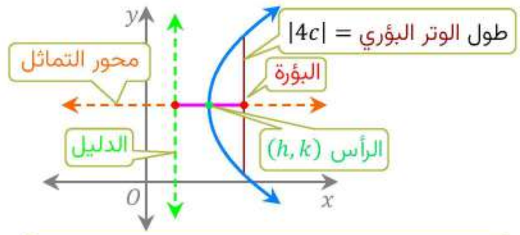
الحل:

$$\log_2 4x + \log_2 5 = \log_2 100 \Rightarrow \log_2(4x \times 5) = \log_2 100$$
$$\Rightarrow \log_2 20x = \log_2 100$$
$$\Rightarrow 20x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{20} = 5$$

- **تنبيهان ..**
  - نعوض بقيم المتغيرات في المعادلة ونســتبعد القيم التي تجعل في المعادلة لوغاريتم لعدد سالب.
  - لإيجاد حل المتباينة اللوغاريتمية نُوجد المجال لاستبعاد القيم التي تجعل اللوغاريتم غير معرف.

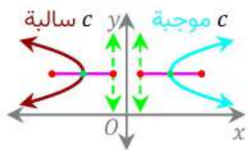
القطوع المخروطية

القطع المكافئ

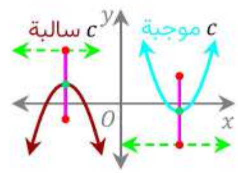


بُعد الرأس عن البؤرة = بُعد الرأس عن الدليل = $|c|$

- **القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (التربيع على y) ..**
  - المعادلة: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$.
  - البؤرة: $(h+c, k)$.
  - معادلة محور التماثل: $y = k$.
  - معادلة الدليل: $x = h - c$.

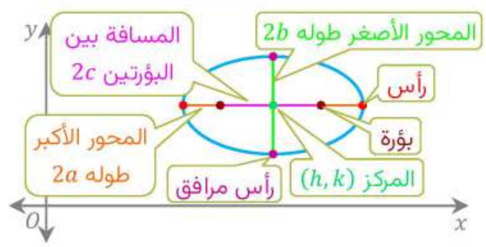


- **القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (التربيع على x) ..**
  - المعادلة: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.
  - البؤرة: $(h, k+c)$.
  - معادلة محور التماثل: $y = k$.
  - معادلة الدليل: $y = k - c$.

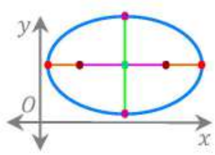


- **للتذكير:** h مقدار الإزاحة الأفقية، و k مقدار الإزاحة الرأسية.

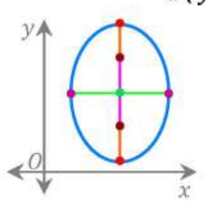
القطع الناقص



- **العلاقة بين a, b, c :** $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.
- **القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقي (المقام الأكبر أسفل x^2) ..**
  - المعادلة: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
  - البؤرتان: $(h \pm c, k)$.
  - الرأسان: $(h \pm a, k)$.



- **القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي (المقام الأكبر أسفل y^2) ..**
  - المعادلة: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.
  - البؤرتان: $(h, k \pm c)$.
  - الرأسان: $(h, k \pm a)$.



---

01 ما اتجاه القطع المكافئ $y^2 = 8(x-5)$ ؟

Ⓐ يمين　Ⓑ يسار
Ⓒ أسفل　Ⓓ أعلى

02 ما إحداثيات بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ؟

Ⓐ $(0, 1)$　Ⓑ $(1, 0)$
Ⓒ $(0, 4)$　Ⓓ $(4, 0)$

03 ما معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 5)$ ودليله $x = -3$ ؟

Ⓐ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -10(y-5)$
Ⓑ $(y-5)^2 = 10\left(x+\frac{1}{2}\right)$
Ⓒ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 10(y-5)$
Ⓓ $(y-5)^2 = -10\left(x+\frac{1}{2}\right)$

04 ما إحداثيات رأس القطع المكافئ؟

$$(x-2)^2 = 8(y+2)$$

Ⓐ $(-2, -2)$　Ⓑ $(-2, 2)$
Ⓒ $(2, -2)$　Ⓓ $(2, 2)$

05 في القطع الناقص $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$ ، طول المحور الأكبر ..

Ⓐ 4 وحدات　Ⓑ 6 وحدات
Ⓒ 12 وحدة　Ⓓ 18 وحدة

06 مركز القطع الذي معادلته $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{7} = 1$ هو ..

Ⓐ $(-1, -5)$　Ⓑ $(1, 5)$
Ⓒ $(-1, 5)$　Ⓓ $(1, -5)$

07 ١٤٣٩

المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y-7)^2}{16}=1$ هو ..

Ⓐ $x=5$ Ⓑ $x=7$

Ⓒ $y=5$ Ⓓ $y=7$

08 ١٤٤١

ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ؟

Ⓐ $y=\pm 4x$ Ⓑ $y=\pm\frac{3}{4}x$

Ⓒ $y=\pm\frac{4}{3}x$ Ⓓ $y=\pm\frac{9}{16}x$

09 ١٤٤٤

ما نوع القطع الذي تمثله المعادلة؟

$$4x^2-3y^2+4y-12-2x=0$$

Ⓐ قطع مكافئ Ⓑ قطع زائد

Ⓒ قطع ناقص Ⓓ دائرة

10 ١٤٤٣

أي التالي يمثل قطعًا ناقصًا؟

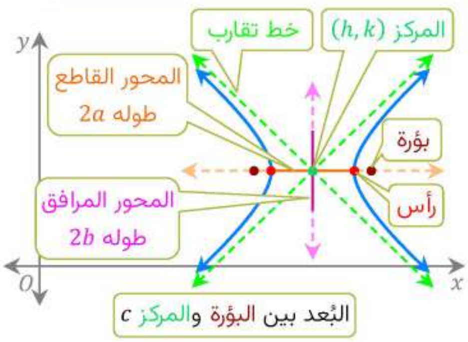
Ⓐ $25x^2+25y^2-20x+10y+457=0$

Ⓑ $25x^2-y^2-19x+22y+457=0$

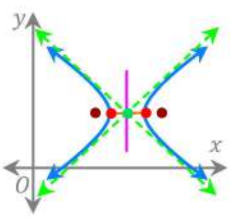
Ⓒ $25x^2+y^2-19x+22y+457=0$

Ⓓ $25x^2-19x+22y+457=0$

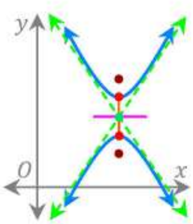
القطع الزائد



- **القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي ..**
  - **المعادلة:** $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.
  - **الرأسان:** $(h\pm a,k)$.
  - **البؤرتان:** $(h\pm c,k)$.
  - **معادلة المحور القاطع:** $y=k$.
  - **معادلة المحور المرافق:** $x=h$.
  - **خطا التقارب:** $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.



- **القطع الزائد الذي محوره القاطع رأسي ..**
  - **المعادلة:** $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$.
  - **الرأسان:** $(h,k\pm a)$.
  - **البؤرتان:** $(h,k\pm c)$.
  - **معادلة المحور القاطع:** $x=h$.
  - **معادلة المحور المرافق:** $y=k$.
  - **خطا التقارب:** $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$.



معادلة الدرجة الثانية وتصنيف القطوع

- **الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين ..**

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

وتُمثِّل ..

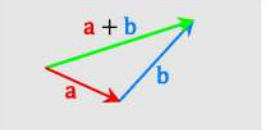
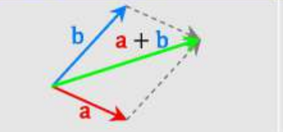
قطعًا مكافئًا	إذا كان $B^2-4AC=0$
قطعًا زائدًا	إذا كان B^2-4AC موجبًا
قطعًا ناقصًا	إذا كان B^2-4AC سالبًا

- **فائدة:** في القطع الناقص إذا كان $B=0$ و $A=C$ فإن القطع الناقص يصبح **دائرة**.

المتجهات

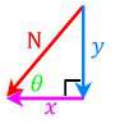
بعض العلاقات بين متجهين

- **المتجهان المتوازيان:** لهما نفس الاتجاه إذا كان لهما نفس الإشــارات، أما إذا اختلفت الإشارات فإن لهما اتجاهين متعاكسين.
- **المتجهان المتساويان:** لهما الاتجاه نفسه والطول نفسه.
- **المحصلة:** تُوجد محصلة المتجهين **a** و **b** باستخدام ..

قاعدة المثلث	قاعدة متوازي الأضلاع
	

- **فائدة:** إذا كان المتجهان متعامدين فإننا نُوجد قيمة متجه المحصــلة باســتخدام نظرية فيثاغورس.

تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين



المركبة الأفقية	$\lvert x\rvert = N\cos\theta$
المركبة الرأسية	$\lvert y\rvert = N\sin\theta$

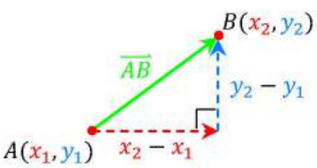
- **فائدة:** كلما تقترب قيمة θ من الصفر تزداد قيمة المركبة الأفقية.

مثال: يدفع علي عربة قص عُشــب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياســها 60° مع ســطح الأرض، ما مقدار المركبة الأفقية؟

الحل:

$$\text{المركبة الأفقية} = N\cos\theta = 450\cos 60° = 450 \times \frac{1}{2} = 225\ \text{N}$$

المتجهات في المستوى الإحداثي



- الصورة الإحداثية لمتجه بدايته النقطة $A(x_1, y_1)$ ونهايته النقطة $B(x_2, y_2)$ ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle x, y \rangle$$

مثال: ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(5,3), B(6,-9)$ ؟

Ⓐ $\langle 11,-6 \rangle$ Ⓑ $\langle 1,-12 \rangle$ Ⓒ $\langle -1,12 \rangle$ Ⓓ $\langle 30,27 \rangle$

الحل:

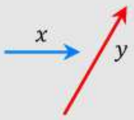
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle 6-5, -9-3 \rangle = \langle 1, -12 \rangle$$

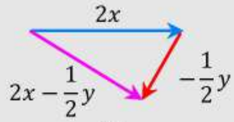
- **طول متجه:** إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle x, y \rangle$ فإن ..

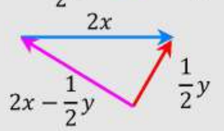
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

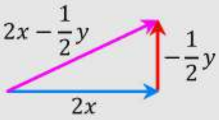
---

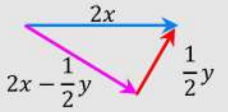
01 إذا كان الشكل يُمثل المتجهين x, y ؛ فأي التالي يُمثل المتجه $2x - \frac{1}{2}y$ ؟



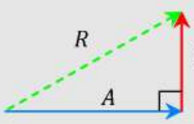
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


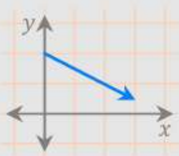
02 في الشكل، إذا كانت قيمة المتجه A تساوي 5 ، وقيمة المتجه B تساوي 6 ؛ فما قيمة متجه المحصلة R ؟

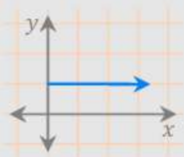


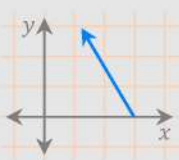
Ⓐ $\sqrt{61}$ Ⓑ $\sqrt{40}$

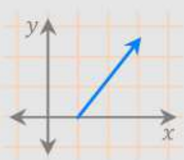
Ⓒ $\sqrt{13}$ Ⓓ $\sqrt{11}$

03 أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر؟

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


04 ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $A(-4,1), B(2,-5)$ ؟

Ⓐ $\langle -8,-5 \rangle$ Ⓑ $\langle -4,1 \rangle$

Ⓒ $\langle 6,-6 \rangle$ Ⓓ $\langle 2,-5 \rangle$

05 طول المتجه $C = \langle 0,6 \rangle$ يساوي ..

Ⓐ 8 Ⓑ 6

Ⓒ 4 Ⓓ 2

06 إذا كان $\mathbf{A} = \langle 3,4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2,-1\rangle$ فأوجد $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
١٤٤٣

Ⓐ $\langle 7,13\rangle$ Ⓑ $\langle 1,5\rangle$

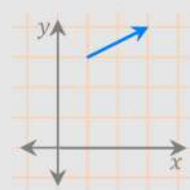
Ⓒ $\langle 11,13\rangle$ Ⓓ $\langle 7,3\rangle$

07 متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\,\rangle$ هو ..
١٤٤٤

Ⓐ $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ Ⓑ $\langle -1,-1\rangle$

Ⓒ $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle$

08 أي التـالي يعبر عن المتجـه الممثل في الشكل؟
١٤٤٣



Ⓐ $3\mathrm{i} + \mathrm{j}$

Ⓑ $-3\mathrm{i} + \mathrm{j}$

Ⓒ $2\mathrm{i} + \mathrm{j}$

Ⓓ $-2\mathrm{i} + 2\mathrm{j}$

09 إذا كان $\mathbf{a} = \langle -9, k\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5,-15\rangle$ ؛ فإن قيمة k التي تجعل المتجهين متعامدين هي ..
١٤٤٤

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ 3

Ⓒ $\frac{25}{3}$ Ⓓ 27

10 ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3,3\rangle$, $\langle 2,0\rangle$ ؟
١٤٣٦

Ⓐ $30°$ Ⓑ $45°$

Ⓒ $120°$ Ⓓ $135°$

11 إذا كان $A(-5,0,2)$, $B(3,6,2)$ فإن متجه الوحدة الذي له اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو ..
١٤٤٣

Ⓐ $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right\rangle$ Ⓑ $\left\langle 2, \frac{3}{2}, 0\right\rangle$

Ⓒ $\langle -1,3,2\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, 0\right\rangle$

العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي

- للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ ..

جمع المتجهين	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$
طرح المتجهين	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$
ضرب المتجه a بعدد حقيقي	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

○ **مثال توضيحي:** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3,-2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5,7\rangle$ فإن ..

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 3+5, -2+7\rangle = \langle 8,5\rangle$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 3-5, -2-7\rangle = \langle -2,-9\rangle$$
$$4\mathbf{u} = \langle 4(3), 4(-2)\rangle = \langle 12,-8\rangle$$

متجه الوحدة والتوافق الخطي

- **متجه الوحدة باتجاه المتجه v :** متجه طوله 1 وحدة طول واتجاهه نفس اتجاه **v** ..

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

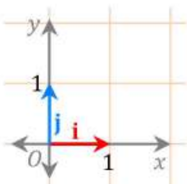
متجه الوحدة باتجاه **v** ، طول المتجه **v**

- **متجها الوحدة القياسيان ..**

$$\mathbf{i} = \langle 1,0\rangle \ , \ \mathbf{j} = \langle 0,1\rangle$$

متجه الوحدة باتجاه x

متجه الوحدة باتجاه y



- **التوافق الخطي:** كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي لمتجهين

- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهان في المستوى الإحداثي فإن ..

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

الضرب الداخلي (القياسي)

- شرط تعامد متجهين أن يكون $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- **قياس الزاوية بين متجهين ..**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

قياس الزاوية بين المتجهين ، الضرب القياسي للمتجهين ، ضرب طولي المتجهين

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

- إذا كان $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ فإن ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle = \langle x, y, z\rangle$$

- متجهات الوحدة القياسية ..

$$\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle \quad , \quad \mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle \quad , \quad \mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$$

- **التوافق الخطي:** كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.
- **طول المتجه:** $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- **متجه الوحدة باتجاه المتجه v :** $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ متجهين في الفضاء ثلاثي الأبعاد فإن ..

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

مثال: إذا كان $u = \langle 1,-2,0\rangle$, $v = \langle 2,0,-1\rangle$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي .. ٣٧ وما قبلها

Ⓐ $2i + j + 4k$ Ⓑ $-2i + j - 4k$ Ⓒ $2i - j + 4k$ Ⓓ $-2i - j - 4k$

الحل:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= [2i + 0 + 0] - [-4k + 0 + (-j)]$$

$$= 2i + j + 4k$$

- إذا كان المتجهان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع فإن ..

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ = مساحة متوازي الأضلاع

طول المتجه $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

12 إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1,-1,0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0,2,1\rangle$ متجهين فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي .. ١٤٤٢

Ⓐ $\langle -1,-1,2\rangle$ Ⓑ $\langle 1,1,-2\rangle$

Ⓒ $\langle -1,1,2\rangle$ Ⓓ $\langle 1,-1,-2\rangle$

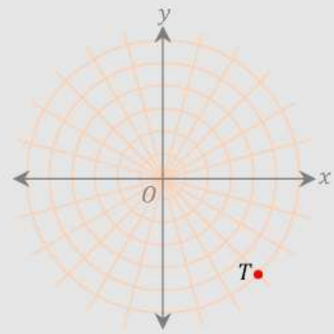
13 متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران، ما مساحته بالوحدات المربعة؟ ٣٧ وما قبلها

Ⓐ 13 Ⓑ 21

Ⓒ $\sqrt{186}$ Ⓓ $\sqrt{458}$

الإحداثيات القطبية

01 أوجد إحداثيات النقطة T في الشكل.
١٤٤٤

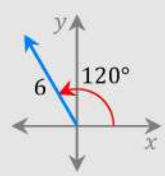


Ⓐ $\left(6, \frac{3\pi}{5}\right)$　Ⓑ $\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$
Ⓒ $\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$　Ⓓ $\left(6, \frac{5\pi}{3}\right)$

02 إذا كان $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ الإحداثي القطبي للنقطة P فما الإحداثي الديكارتي لها؟
١٤٣٩

Ⓐ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$　Ⓑ $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$
Ⓒ $\left(10, \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$　Ⓓ $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, 10\right)$

03 أي العبارات التالية يُمثل المتجه في الصورة الديكارتية؟
١٤٣٠

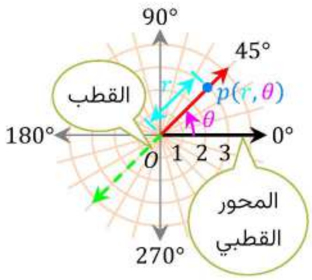


Ⓐ $(-3, -3\sqrt{3})$
Ⓑ $(-3, 3\sqrt{3})$
Ⓒ $(3, -3\sqrt{3})$
Ⓓ $(3, 3\sqrt{3})$

04 إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية $(3, 3\sqrt{3})$ فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P هي ..
١٤٤٠

Ⓐ $(6, 60°)$　Ⓑ $(6, 30°)$
Ⓒ $(3, 90°)$　Ⓓ $(6, 45°)$

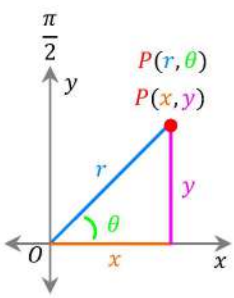
المستوى القطبي



- **الإحداثيات القطبية لنقطة $P(r, \theta)$ ..**
  - r : المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P .
  - θ : الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$ (ضلع الانتهاء).

θ موجبة	الدوران عكس عقارب الساعة
θ سالبة	الدوران مع عقارب الساعة
r موجبة	النقطة P على ضلع الانتهاء
r سالبة	النقطة P على الشعاع المقابل لضلع الانتهاء

التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية



- **تحويل الإحداثي القطبي (r, θ) إلى ديكارتي (x, y) ..**

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

- **فائدة:** إذا نسيت قوانين التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكنك محاولة الحل بطريقة الرسم التقريبي.

مثال: الإحداثيات الديكارتية للنقطة $T(-4, 60°)$ هي .. ١٤٣٧ وما قبلها

Ⓐ $(-2, -2\sqrt{3})$　Ⓑ $(-2\sqrt{3}, -2)$
Ⓒ $(2, 2\sqrt{3})$　Ⓓ $(2\sqrt{3}, 2)$

الحل:

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (-4\cos 60°, -4\sin 60°)$$
$$= \left(-4 \times \frac{1}{2}, -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= (-2, -2\sqrt{3})$$

- **تحويل الإحداثي الديكارتي (x, y) إلى قطبي (r, θ) ..**
  - نُوجد r بالصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - نُوجد θ ..

x موجبة	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
x سالبة	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

- **تحويل المعادلات الديكارتية إلى قطبية:** نعوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$، ثم نبسط المعادلة.
  - **مثال توضيحي:** حول المعادلة $y = 3$ إلى قطبية ..

$$y = 3 \;\Rightarrow\; 3 = r\sin\theta \;\Rightarrow\; r = \frac{3}{\sin\theta} \;\Rightarrow\; r = 3\csc\theta$$

- **تحويل المعادلات القطبية إلى ديكارتية ..**

$r = k$	$\theta = h^\circ$	$r =$ (دالة مثلثية)
$r^2 = x^2 + y^2$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$r^2 = x^2 + y^2$ $y = r\sin\theta$ $x = r\cos\theta$

  - **مثال توضيحي:** حول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{3}$ إلى ديكارتية ..

$$\theta = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{3}x$$

الأعداد المركبة على الصورة القطبية

الصورة الديكارتية	الصورة القطبية
$a + bi$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

القيمة المطلقة (المقياس) للعدد المركب ، سعة العدد المركب

- إذا كان z_1, z_2 عددين مركبين على الصورة القطبية ..

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\; z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن حاصل ضربهما ..

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

وخارج قسمتهما ..

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

05 إذا كان ..

١٤٤٣

$$z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

فما حاصل ضرب $z_1 z_2$ ؟

Ⓐ $10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Ⓑ $10\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Ⓒ $10\left(\cos^2\frac{\pi^2}{18} + i\sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$

Ⓓ $10\left(\cos^2\frac{\pi^2}{18} - i\sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$

06 خارج قسمة ..

١٤٤٤

$$12(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ) \div 4(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$$

على الصورة الديكارتية هو ..

Ⓐ $4 + 4\sqrt{3}i$ Ⓑ $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Ⓒ $4\sqrt{3} + 4i$ Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

النهايات

01 الدالة $f(x)$ معرفة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & , x<-1\\ x^2 & , x\geq -1\end{cases}$$

ما قيمة $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ؟

Ⓐ -1 Ⓑ 1
Ⓒ 4 Ⓓ غير موجودة

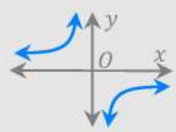
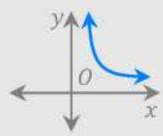
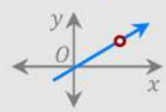
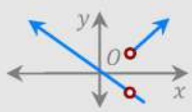
02 قيم a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}a^2+2x & , x\geq 1\\ a+4 & , x<1\end{cases}$ متصلة عند $x=1$ هي ..

Ⓐ $0,1$ Ⓑ $0,-1$
Ⓒ $-1,2$ Ⓓ $1,-2$

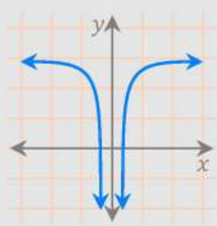
03 الدالة $f(x)=\frac{1}{x-2}$ غير متصلة عند $x=2$ ، ما نوع عدم الاتصال؟

Ⓐ لا نهائي Ⓑ نقطي
Ⓒ قفزي Ⓓ قابل للإزالة

04 أي التمثيلات البيانية التالية يُمثل دالة عدم اتصال لا نهائي؟

Ⓐ 
Ⓑ 
Ⓒ 
Ⓓ 

05 أي التالي يصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ؟



Ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
Ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
Ⓒ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$
Ⓓ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-4\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$

النهايات والاتصال عند نقطة

- **النهاية عند نقطة:** لها حالتان ..

موجودة	غير موجودة
النهاية اليمنى تساوي اليسرى، ولها نفس قيمة النهايتين	النهاية اليمنى لا تساوي اليسرى

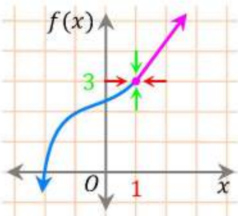
- **الاتصال عند نقطة:** تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$ إذا كان ..

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

○ **مثال توضيحي:** في الشكل ..

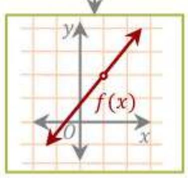
$f(1)=3\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$

الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=1$

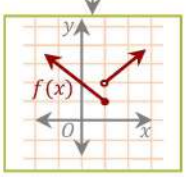


أنواع عدم الاتصال

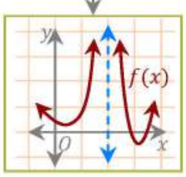
قابل للإزالة
يكون هناك فجوة في منحنى الدالة وعندها تكون قيمة الدالة $\frac{0}{0}$



قفزي
دالة متعددة التعريف والنهايتين من اليمين واليسار موجودتين وغير متساويتين



لا نهائي
تتجه الدالة إلى $\pm\infty$ عندما تقترب من نقطة عدم الاتصال وعندها تكون قيمتها $\frac{a}{0}$ حيث $a\neq 0$



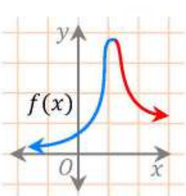
النهايات وسلوك طرفي التمثيل البياني

- سلوك الطرف الأيمن ..

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

- سلوك الطرف الأيسر ..

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$



حساب النهايات جبريًا

- لإيجاد $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ جبريًا فإننا نعوض في $f(x)$ عن كل x بـ c (التعويض المباشر).

مثال: ما قيمة المقدار $\lim\limits_{x \to 4} (4x - 1)$ ؟ ١٤٤٠

Ⓐ 4 Ⓑ 8 Ⓒ 12 Ⓓ 15

الحل:

$$\lim_{x \to 4} (4x - 1) = 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15$$

- **تنبيه1:** إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \frac{1}{0}$ عند التعويض المباشر فإن النهاية غير موجودة.
- **تنبيه2:** إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \frac{0}{0}$ عند التعويض المباشر فإن الصيغة غير محددة ويجب معالجتها بإحدى الطرائق التالية:
  - نحلل البسط أو المقام أو كليهما، ثم نختصر العوامل المشتركة.
  - إذا كان البسط يحوي جذرًا تربيعيًا فإننا نضرب بسطًا ومقامًا في مرافق البسط، وكذلك إذا كان المقام يحوي جذرًا تربيعيًا فإننا نضرب بسطًا ومقامًا في مرافق المقام.

مثال: $\lim\limits_{x \to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ تساوي .. ١٤٣٧ وما قبلها

Ⓐ -5 Ⓑ 0 Ⓒ 10 Ⓓ 25

الحل:

$$\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} = \frac{25 - 25}{\sqrt{25} - 5} = \frac{0}{0}$$

وبالضرب في مرافق المقام والاختصار ثم التعويض المباشر مرة أخرى ..

$$\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} \times \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5} = \lim_{x \to 25} \frac{\cancel{(x - 25)}(\sqrt{x} + 5)}{\cancel{(x - 25)}} = \sqrt{25} + 5 = 10$$

نهايات الدوال عند المالانهاية

- **نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية:** نعوض عن قيمة x في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) فقط، فمثلًا ..

$$\lim_{x \to \infty} (4x^6 + 3x^5) = \lim_{x \to \infty} 4x^6 = 4(\infty)^6 = 4(\infty) = \infty$$

- **نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية:** لها 3 حالات ..

درجة البسط

تساوي درجة المقام	أكبر من درجة المقام	أصغر من درجة المقام
النهاية تساوي	النهاية تساوي	النهاية تساوي
$\frac{\text{المعامل الرئيس للبسط}}{\text{المعامل الرئيس للمقام}}$	∞ أو $-\infty$	0
مثال	مثال	مثال
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-7x^2 + 1}{3x + 2x^2} = \frac{-7}{2}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 1}{x^3 + 4} = 0$

06 ما قيمة $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$ ؟ ١٤٤٠

Ⓐ -2 Ⓑ -1
Ⓒ 1 Ⓓ 2

07 ما قيمة $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 \cos x)$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ 0 Ⓑ 1
Ⓒ 2 Ⓓ 3

08 ما قيمة $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟ ١٤٣٨

Ⓐ $3 + \sqrt{7}$ Ⓑ $3 - \sqrt{7}$
Ⓒ $\sqrt{7} - 3$ Ⓓ 3

09 $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ تساوي .. ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{1}{9}$ Ⓑ $\frac{1}{6}$
Ⓒ 0 Ⓓ غير موجودة

10 $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + x + 2)$ تساوي .. ١٤٣٩

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0
Ⓒ 1 Ⓓ ∞

11 ما قيمة $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-3x^3}{2x^3+5}$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $\frac{3}{2}$ Ⓑ 1
Ⓒ -1 Ⓓ $\frac{-3}{2}$

12 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8x^2+x-22}{4x^3-13}$ تساوي .. ١٤٤٣

Ⓐ 8 Ⓑ 4
Ⓒ 2 Ⓓ 0

13 ما قيمة $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-4}$ ؟ ١٤٤٣

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0
Ⓒ 2 Ⓓ ∞

الاشتقاق والتكامل

01 مشتقة الدالة $f(x) = -2$ تساوي ..

Ⓐ -2 Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $2x$

02 ما مشتقة الدالة $f(x) = 3x + 1$ ؟

Ⓐ 6 Ⓑ 3

Ⓒ 2 Ⓓ 0

03 ما معادلة ميل المنحنى $y = \sqrt{2x}$ عند أي نقطة عليه؟

Ⓐ $\sqrt{2x+1}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2x}}{x}$

Ⓒ $\sqrt{2x} - \sqrt{x}$ Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

04 ما معادلة ميل المنحنى $y = 2\sqrt[4]{x^5}$ عند أي نقطة عليه؟

Ⓐ $8\sqrt[4]{x}$ Ⓑ $8\sqrt[4]{x^9}$

Ⓒ $\frac{5}{2}\sqrt[4]{x}$ Ⓓ $\frac{9}{2}\sqrt[4]{x^9}$

05 ميل المماس للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ يساوي ..

Ⓐ 2 Ⓑ 4

Ⓒ 6 Ⓓ 8

06 ما مشتقة الدالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ ؟

Ⓐ 1 Ⓑ $6x - 5$

Ⓒ $6x^2 - 5$ Ⓓ $6x^2 - 5x$

07 ما المشتقة السادسة للدالة التالية؟

$$f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$$

Ⓐ -1 Ⓑ 0

Ⓒ 1 Ⓓ 3

قواعد أساسية في الاشتقاق

- **مشتقة الدالة**: ميل المماس للمنحنى (معادلة ميل المنحنى) عند أي نقطة عليه.

بعض قواعد الاشتقاق

$f(x) = c$	$f(x) = x^n$	$f(x) = \sqrt{\ }$	$f(x) = cx^n$
المشتقة	المشتقة	المشتقة	المشتقة
0	nx^{n-1}	$\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \sqrt{\ }}$	ncx^{n-1}
مثال	مثال	مثال	مثال
$f(x) = 2$ ⇓ $f'(x) = 0$	$f(x) = x^3$ ⇓ $f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \sqrt{3x}$ ⇓ $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$	$f(x) = 3x^2$ ⇓ $f'(x) = 2(3)x = 6x$

- **فائدة1**: إذا أعطانا السؤال صيغة جذرية مثل ..

$\sqrt[3]{x^7}$ فإننا نحولها إلى الصيغة الأسية $x^{\frac{7}{3}}$

- **فائدة2**: لإيجاد $f'(a)$ للدالة $f(x)$ نُوجد المشتقة $f'(x)$ ثم نُعوض بـــ a بدلًا من x في المشتقة.

- إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن ..

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

- **المشتقات العليا**: للحصول على المشتقة الثانية (رمزها $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ أو $f''(x)$) نشتق المشتقة الأولى، وللحصول على المشتقة الثالثة نشتق المشتقة الثانية، ... وهكذا.

$$(x) = 2x^5 - x^3 + 6 \Rightarrow f'(x) = 10x^4 - 3x^2$$
$$\Rightarrow f''(x) = 40x^3 - 6x$$
$$\Rightarrow f'''(x) = 120x^2 - 6$$

  - **فائدة**: في المشتقات العليا لكثيرات الحدود: إذا كانت رتبة المشتقة العليا المطلوبة أكبر من درجة كثيرة الحدود فإن المشتقة تساوي الصفر دائمًا، فمثلًا: المشتقة الرابعة للدالة $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6$ تساوي صفرًا.

- **مشتقة ضرب دالتين** ..

$$f'(x) = (\text{مشتقة الأولى})(\text{الثانية}) + (\text{الأولى})(\text{مشتقة الثانية})$$

  - **مثال توضيحي**: إذا كانت $f(x) = x(x^2 - 3)$ فإن ..

$$f'(x) = (1)(x^2 - 3) + (x)(2x) = x^2 - 3 + 2x^2 = 3x^2 - 3$$

- مشتقة قسمة دالتين ..

$$f'(x)=\frac{(\text{مشتقة المقام})(\text{البسط})-(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط})}{(\text{المقام})^2}$$

  - **مثال توضيحي:** إذا كانت $f(x)=\frac{x}{x^2-3}$ فإن ..

$$f'(x)=\frac{(1)(x^2-3)-(x)(2x)}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2-3-2x^2}{(x^2-3)^2}=\frac{-x^2-3}{(x^2-3)^2}$$

تعيين القيم العظمى والصغرى جبريًا

- **النقاط الحرجة:** النقاط التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر أو غير معرفة.
- الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[a,b]$ لها قيمة عظمى أو صغرى عند إحدى النقاط الحرجة أو أحد طرفي الفترة.
- لتعيين القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$ على الفترة المغلقة $[-6,0]$ نشتق الدالة ثم نساويها بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة ..

$$f'(x)=x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$

ثم نعوض في الدالة بالنقاط الحرجة التي تنتمي للفترة وبأطراف الفترة ..

$$f(-2)=\frac{1}{2}(-2)^2+2(-2)=2-4=-2$$

$$f(-6)=\frac{1}{2}(-6)^2+2(-6)=18-12=6$$

$$f(0)=\frac{1}{2}(0)^2+2(0)=0$$

ومنه فإن القيمة العظمى (6) ، والقيمة الصغرى (-2) .

الدوال الأصلية وقواعد التكامل

- **صيغة سؤال التكامل غير المحدد:** يطلب تكامل الدالة $f(x)$ ، أو يطلب الدالة الأصلية للدالة $f(x)$.
  - **بالرموز ..**

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

ثابت التكامل ، الدالة الأصلية لـ $f(x)$ ، رمز التكامل

- **بعض قواعد التكامل الهامة ..**

$$\int a\,dx=ax+C$$

$$\int 5\,dx=5x+C$$

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int 2x^7\,dx=\frac{2x^{7+1}}{7+1}+C=\frac{2x^8}{8}+C=\frac{x^8}{4}+C$$

$$\int[g(x)\pm f(x)]\,dx=G(x)\pm F(x)+C$$

$$\int(x^2+5)\,dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+5x+C=\frac{x^3}{3}+5x+C$$

08 إذا كانت $f(x)=\frac{5\sqrt{x^3}}{2-x}$ فإن $f'(4)$ تساوي ..
١٤٤٣

Ⓐ $\frac{31}{8}$ Ⓑ $\frac{15}{6}$
Ⓒ $\frac{5}{2}$ Ⓓ $\frac{16}{4}$

09 إذا كانت $f(x)=6x^2-x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,3]$ ؟
١٤٣٨

Ⓐ 64 Ⓑ 32
Ⓒ 27 Ⓓ 21

10 $\int(4x+5)\,dx$ يساوي ..
١٤٣٨

Ⓐ $4x+5+C$ Ⓑ 4
Ⓒ $2x^2+5x+C$ Ⓓ $4x^2+5x+C$

11 إذا كان $\int_0^2 nx\,dx = 6$ فما قيمة n ؟

Ⓐ 3 Ⓑ 4

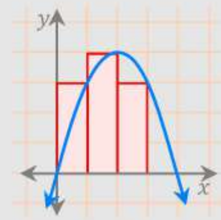
Ⓒ 5 Ⓓ 7

12 إذا كان $\int_{-1}^{3} k|x+1|\,dx = 24$ فما قيمة k ؟

Ⓐ -7 Ⓑ -3

Ⓒ 3 Ⓓ 7

13 ما المســـاحة التقريبية المحصـــورة بين منحنى الـدالـة $f(x)$ المـمـثـلـة بالشكل ومحور x ؟



Ⓐ 6 Ⓑ 10

Ⓒ 12 Ⓓ 24

14 المســـاحـة المســـتويـة المحصـــورة بين المنحنى $y = 4 - 3x^2$ ومحور x في الفترة $[0, 1]$ تساوي ..

Ⓐ 3 Ⓑ 5

Ⓒ 6 Ⓓ 10

- التكامل المحدد ..

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

الدالة الأصلية لـ $f(x)$ ، تكامل محدد بالفترة $[a, b]$

مثال: التكامل $\int_2^3 (4x+1)\,dx$ يساوي ..

Ⓐ 10 Ⓑ 11 Ⓒ 20 Ⓓ 21

الحل:

$$\int_2^3 (4x+1)\,dx = \left(\frac{4x^2}{2} + x\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{4(3)^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{4(2)^2}{2} + 2\right)$$

$$= (18 + 3) - (8 + 2) = 11$$

- **لإيجاد المســاحة تحت المنحنى:** نقوم بتقسـيمها إلى عدة مسـتطيلات متسـاوية العرض، وتكون المساحة التقريبية هي مجموع مساحات المستطيلات.
- مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x في الفترة $[a, b]$ تُعطى بالتكامل ..

$$\text{المساحة} = \int_a^b f(x)\,dx \ \text{وحدة مساحة}$$

حساب المثلثات

01 Ⓑ

قياس زاوية دوران الكرة الأرضية دورة كاملة $360°$ أي $15°$ كل ساعة؛ ومنه فإن ..

$$90° = 6 \times 15° = \text{قياس زاوية دوران الأرض في 6 ساعات}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180°} \times 90° = \text{قياس زاوية الدوران بالراديان}$$

02 Ⓓ

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{4}$$

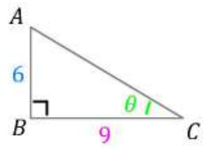
03 Ⓐ

$$\text{الإرتفاع} \times \text{القاعدة} \times \frac{1}{2} = \text{مساحة المثلث}$$

$$27 = \frac{1}{2} \times BC \times 6 \quad \Rightarrow \quad 27 = 3 \times BC$$

$$\Rightarrow \quad BC = \frac{27}{3} = 9$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



04 Ⓐ

تكون القيمة غير معرفة إذا كان المقام يساوي صفرًا، وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ $x = 0°$

$$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0} \quad ✓$$

05 Ⓑ

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \Rightarrow \quad \sin 30° = \frac{x}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$

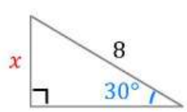
$$\Rightarrow \quad 2x = 8$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4$$

حل بطريقة أخرى ..

طول الضـلع المقابل لزاوية قياسـها $30°$ في مثلث قائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر.

$$x = \frac{8}{2} = 4$$



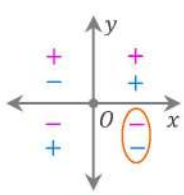
06 Ⓑ

أولاً: نحدد إشارة الجيب $(\sin\theta)$ ..

ثانيًا: نحدد إشارة الظل $(\tan\theta)$ ..

بالنظر للشكل نجد أن ..

الجيب والظل سالبين في الربع الرابع



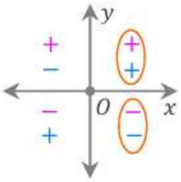
بالنظر للخيارات نجد أن الزاوية التي تقع في الربع الرابع هي $310°$.

07 Ⓓ

أولاً: نحدد إشارة $\sin\theta$ ..

ثانيًا: نحدد إشارة $\tan\theta$ ..

لكي يكون حاصـل القسـمة موجبًا يجب أن تكون إشارة القيمتين متشابهتين، وهذا يكون في الربعين الأول والرابع.



08 Ⓑ

$$\cos(420°) = \cos(360° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

09 Ⓒ

$$s = r \times \theta = 5 \times \frac{4\pi}{5} = 4\pi$$

10 Ⓑ

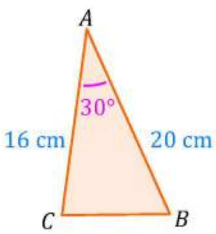
مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما؛ ومنه فإن ..

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 30°$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 20 \times \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{16} \times \cancel{20} \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= 8 \times 10 = 80$$



11 Ⓑ

$$\text{(مساحة المثلث)}\ A = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{x-1}}{x-5} \times \frac{2x-2}{\cancel{x-1}} \times \sin 90°$$

$$5 = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x-5} \times 1$$

$$10 = \frac{2x-2}{x-5}$$

$$10x - 50 = 2x - 2$$

$$10x - 2x = -2 + 50$$

$$8x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48}{8} = 6$$

12 Ⓓ

من قانون الجيب ..

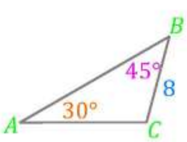
$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{8}{\sin 30°}$$

$$AC \times \sin 30° = 8 \times \sin 45°$$

$$AC \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AC = \frac{2 \times 8}{\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$AC = \frac{16}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{16}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 8\sqrt{2}$$



13 Ⓒ

بمقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية ..

$$y = a \sin b\theta$$
$$y = 4 \sin 5\theta$$

السعة $= |a| = |4| = 4$

طول الدورة $= \dfrac{360^\circ}{|b|} = \dfrac{360^\circ}{|5|} = 72$

وبالنظر للخيارات نجد أن الخيار الصحيح Ⓒ .

14 Ⓓ

$$\frac{\cos\theta}{\tan\theta \times \csc\theta} = \frac{\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = \cos\theta \times \cos\theta$$
$$= \cos^2\theta$$

15 Ⓑ

$$(1 - \cot\theta)\sin\theta = \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta$$
$$= \left(1 \times \sin\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \sin\theta\right)$$
$$= (\sin\theta - \cos\theta)$$

16 Ⓐ

بما أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن ..

$$\cos^2\theta + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\cos^2\theta + \frac{1}{9} = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين، وبما أن الزاوية في الرُّبع الرابع فإن الإشـارة السالبة مرفوضة لأن دالة $\cos\theta$ موجبة في الرُّبع الرابع ..

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{2 \times 4}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17 Ⓐ

بما أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن ..

$$[\cos^2(\cot 75^\circ)] + [\sin^2(\cot 75^\circ)] = 1$$

18 Ⓑ

$$\cot^2\theta\,(\tan^2\theta + \sin^2\theta) = \cot^2\theta \times \tan^2\theta + \cot^2\theta \times \sin^2\theta$$

بما أن $\cot^2\theta \times \tan^2\theta = 1$ فإن ..

$$1 + \cot^2\theta \times \sin^2\theta = 1 + \frac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}} \times \cancel{\sin^2\theta} = 1 + \cos^2\theta$$

19 Ⓐ

$$(1 - \cot^2\theta)\sin^2\theta = \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\sin^2\theta$$
$$= \left(1 \times \sin^2\theta - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \times \sin^2\theta\right)$$
$$= \left(\sin^2\theta - \frac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}} \times \cancel{\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

20 Ⓐ

$$\tan\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \sin\theta$$

21 Ⓒ

$$\frac{\cos(-\theta)\tan\theta}{\sec(-\theta)} = \frac{\cos\theta\tan\theta}{\sec\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$
$$= \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} \times \cancel{\cos\theta}$$
$$= \cos\theta\sin\theta$$

22 Ⓓ

بما أن $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos\,(A + B)$ فإن ..

$$\cos(105^\circ)\cos(45^\circ) - \sin(105^\circ)\sin(45^\circ) = \cos\,(105^\circ + 45^\circ)$$
$$= \cos(150^\circ)$$

23 Ⓐ

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

24 Ⓒ

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{10}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

بما أن $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن ..

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$$

25 Ⓑ

$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$$
$$\mathrm{Sin}^{-1}(\cos 72^\circ) = \mathrm{Sin}^{-1}(\sin(90^\circ - 72^\circ))$$
$$= \mathrm{Sin}^{-1}(\sin 18^\circ) = 18^\circ$$

26 Ⓑ

$$\sin(\mathrm{Sin}^{-1}(\cos x)) = \sin\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \cos x = \sin 60^\circ$$
$$\Rightarrow\; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

حل بطريقة أخرى ..

$$\mathrm{Sin}^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \mathrm{Sin}^{-1}(\sin(90^\circ - x)) = 60^\circ$$
$$\Rightarrow\; 90^\circ - x = 60^\circ$$
$$\Rightarrow\; x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Ⓑ 27

$$\tan\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 1$$
$$\text{Tan}^{-1}(\tan\theta) = \text{Tan}^{-1}(1)$$
$$\theta = 45°$$

Ⓑ 28

$$2\sin^2\theta + \sin\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

وبما أن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ فإن $\sin\theta = \cos 2\theta$.

وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ $15°$ ..

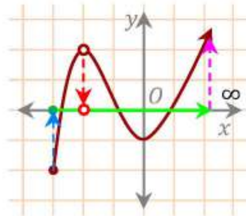
$$\sin 15° \neq \cos 30° \quad \times$$

Ⓑ $30°$ ..

$$\sin 30° \overset{??}{=} \cos 60°$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

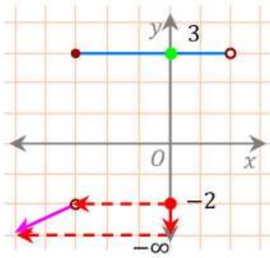
تحليل الدوال والتحويلات الهندسية

● 01 Ⓐ



لإيجـاد الـمـجـال لـلـدالـة $y = f(x)$ نستعمل القيم على محور x ..
مجال الدالة $f(x)$ يبدأ بـ -3 ، وينتهي بـ ∞ باستثناء -2 (لأن الفترة عندها مفتوحة)، مجال الدالة $f(x)$ يساوي ..
$[-3, -2) \cup (-2, \infty)$

● 02 Ⓑ



لإيجاد المدى نستعمل القيم على محور y ..
مدى الجزء الأيسر يساوي $(-\infty, -2)$.
مدى الجزء الأيمن يساوي $\{3\}$.
$(-\infty, -2) \cup \{3\}$ = مدى الدالة

● 03 Ⓒ

نلاحظ أن منحنى الدالة متماثلًا حول المحور y ، فتكون الدالة زوجية.

● 04 Ⓓ

نلاحظ في الدالة $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^1$ أن أسس المتغير x فردية كلها؛ ومنه فإن الدالة فردية.

● 05 Ⓒ

بتجربة الخيارات ..

Ⓐ $f(x) = \frac{1}{x}$ ..

الأسس فردية؛ ومنه فإن الدالة فردية ×

Ⓑ $f(x) = x^3$ ..

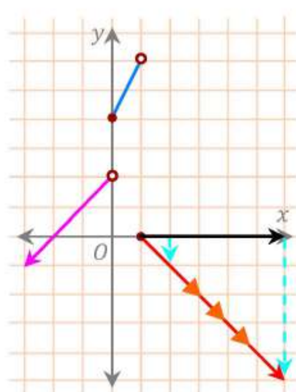
الأسس فردية؛ ومنه فإن الدالة فردية ×

Ⓒ $f(x) = x^2 + |x|$ ..

أس زوجي وقيمة مطلقة؛ ومنه فإن الدالة زوجية ✓

الخيار الصحيح Ⓒ

● 06 Ⓐ



من الشكل نلاحظ في الفترة $[2, 6]$ الدالة تناقصية، أي كلما زادت قيمة x قلت قيمة الدالة، وبالتعويض في الخيارات بطرفي الفترة $[2, 6]$ ..

Ⓐ $-x + 1$

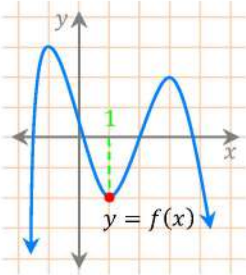
$f(2) = -2 + 1 = -1$

$f(6) = -6 + 1 = -5$

نلاحظ أن كلما زادت قيمة x قلت قيمة الدالة.

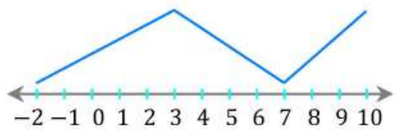
الخيار الصحيح Ⓐ

● 07 Ⓑ



القيمة الصغرى المحلية تكون عند أحد قيعان الدالة؛ ومنه فإن للدالة قيمة صغرى محلية عندما x تساوي 1 .

● 08 Ⓑ



الدالة لها قيمة عظمى عند 3 و 10 ؛ ومنه فإن الخيار الصحيح Ⓑ .

● 09 Ⓒ

$$m_{sec} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$$
$$= \frac{[2 \times 5^2 + 3 \times 5 - 4] - [2 \times 3^2 + 3 \times 3 - 4]}{2}$$
$$= \frac{[2 \times 25 + 3 \times 5 - 4] - [2 \times 9 + 3 \times 3 - 4]}{2}$$
$$= \frac{[50 + 15 - 4] - [18 + 9 - 4]}{2}$$
$$= \frac{61 - 23}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

● 10 Ⓐ

الدالة الممثلة هي دالة القيمة المطلقة؛ ومنه فإن الدالة الرئيسة للدالة هي $y = |x|$.

● 11 Ⓓ

بما أن الشكل انعكس حول محور x فإن ..

$$g(x) = -f(x)$$

وبالتالي فإننا نستبعد الخيارين Ⓐ و Ⓒ لعدم وجود إشارة سالبة، وبما أن الشكل يمثل إزاحة أفقية بمقدار أربع وحدات جهة اليمين؛ فإن الخيار الصحيح Ⓓ .

● 12 Ⓒ

بمقارنة الدالة المعطاة $f(x) = \left|\sqrt{x - (-1)}\right|$ بالصورة $f(x) = \sqrt{x - h} + k$ نجد أن ..

$x = h = -1$ = الإزاحة الأفقية

وبما أن الدالة لم تنعكس حول محور x فإن الخيار الصحيح Ⓒ .

● 13 Ⓓ

من الدالة الرئيسة $f(x) = |x|$ ..

$$f(x) = |x| \xrightarrow{\text{الانعكاس حول محور}x} s(x) = -|x|$$

$$s(x) = -|x| \xrightarrow{\text{انسحاب مقداره 4 وحدات إلى اليمين}} r(x) = -|x - 4|$$

$$r(x) = -|x - 4| \xrightarrow{\text{انسحاب 5 وحدات لأعلى}} g(x) = -|x - 4| + 5$$

الدوال: الأسية واللوغاريتمية

01 Ⓑ

$$2^{2x+2} = 2^{3x}$$

وبما أن الأساسات متساوية فإن الأسس متساوية ..

$$2x + 2 = 3x \Rightarrow 3x - 2x = 2 \Rightarrow x = 2$$

02 Ⓓ

$$2^{5x} = 4^{2x-1} \Rightarrow 2^{5x} = (2^2)^{2x-1} \Rightarrow 2^{5x} = 2^{4x-2}$$

وبما أن الأساسات متساوية فإن الأسس متساوية ..

$$5x = 4x - 2 \Rightarrow 5x - 4x = -2 \Rightarrow x = -2$$

03 Ⓑ

$$16\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 81 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{81}{16} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

وبما أن الأساسات متساوية فإن الأسس متساوية ..

$$2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

04 Ⓐ

$$(2)^{x+2} > \frac{1}{64} \Rightarrow (2)^{x+2} > \frac{1}{2^6} \Rightarrow (2)^{x+2} > 2^{-6}$$

وبما أن الأساس أكبر من 1 فإن ..

$$x + 2 > -6 \Rightarrow x > -6 - 2 \Rightarrow x > -8$$

05 Ⓑ

$$16^{2x-3} > 8 \Rightarrow (2^4)^{2x-3} > 2^3 \Rightarrow 2^{8x-12} > 2^3$$

وبما أن الأساسات متساوية فإن الأسس متساوية ..

$$8x - 12 > 3 \Rightarrow 8x > 3 + 12 \Rightarrow 8x > 15$$

$$\Rightarrow x > \frac{15}{8}$$

06 Ⓐ

$$\log_y x = k \Rightarrow y^k = x$$

07 Ⓑ

بتحويل المعادلة $25^{\frac{3}{2}} = 125$ للصورة اللوغاريتمية ..

$$\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$$

08 Ⓒ

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 \sqrt[3]{6^2} = \log_6 6^{\frac{2}{3}}$$

وبحسب الخاصية $\log_b b^x = x$ ..

$$\log_6 6^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

09 Ⓐ

$$\log_2 20 = \log_2(4 \times 5) = \log_2 4 + \log_2 5 = \log_2 2^2 + \log_2 5$$

وبحسب الخاصية $\log_b b^x = x$ ..

$$\log_2 2^2 + \log_2 5 = 2 + 2.3 = 4.3$$

10 Ⓒ

بحسب خاصية لوغاريتم القوة ..

$$\log_b m^p = p \log_b m$$

وخاصية ضرب اللوغاريتمات ..

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

وخاصية قسمة اللوغاريتمات ..

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log(x+1) - \log x^2 + 3\log x = \log(x+1) - \log x^2 + \log x^3$$

$$= \log \frac{(x+1) \times x^3}{x^2}$$

$$= \log x(x+1)$$

11 Ⓒ

بحسب خاصية تغيير الأساس ..

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_{27}(81) = \frac{\log(81)}{\log(27)} = \frac{\log(3)^4}{\log(3)^3} = \frac{4\log(3)}{3\log(3)} = \frac{4}{3}$$

12 Ⓓ

$$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$$

بحذف اللوغاريتم من الطرفين ..

$$(x^2 - 4) = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

بالتحليل ..

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$x = -1$ (مرفوض)

لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب.

$$x = 4$$

13 Ⓐ

$$2\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 9 \Rightarrow \log_5 x^2 - \log_5 4 = \log_5 9$$

بحسب خاصية قسمة اللوغاريتمات ..

$$\log_5 \frac{x^2}{4} = \log_5 9$$

بحذف اللوغاريتم من الطرفين ..

$$\frac{x^2}{4} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \times 4 = 36$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ..

$$x = 6$$

● 15 Ⓒ 14

نعوض عن x بـ 8^{x+5} داخل الدالة $f(x)$ ..

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = \log_2 8^{x+5} = \log_2 (2^3)^{(x+5)}$$
$$= \log_2 (2)^{(3x+15)}$$

وبحسب الخاصية $\log_b b^x = x$ ..

$$\log_2 (2)^{(3x+15)} = 3x + 15$$

● 15 Ⓓ

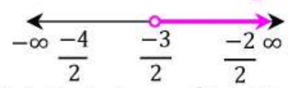
$$\log_2(2x+3) > \log_2(3x)$$

بحذف اللوغاريتم من الطرفين ..

$$2x + 3 > 3x$$
$$3 > 3x - 2x$$
$$x < 3$$

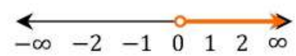
نوجـد مجـال الـدالـة في الطرف الأيســر من تعريف اللوغـاريتم على $\log_2(2x+3)$ ..

$$2x + 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > -3$$
$$\Rightarrow \quad x > \frac{-3}{2}$$

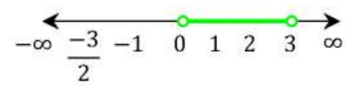


ونوجد مجال الدالة في الطرف الأيمن من تعريف اللوغاريتم على $\log_2(3x)$ ..

$$3x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$



ومن تمثيل المتباينات السابقة على خط الأعداد ..



$$0 < x < 3$$

القطوع المخروطية

● 01 Ⓐ

بمقارنة المعادلة المعطاة $y^2 = 8(x-5)$ بمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ نجد أن ..

$4c = 8 \Rightarrow$ c موجب

اتجاه القطع لليمين

● 02 Ⓑ

بمقارنة المعادلة المعطاة $y^2 = 4x$ بمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ نجد أن ..

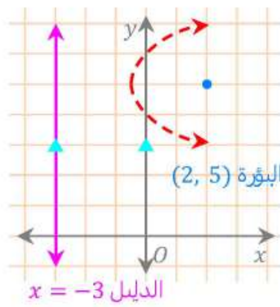
$k = 0 \ , \ h = 0 \ , \ c = 1$

إحداثيات البؤرة للقطع $(1,0)$.

● 03 Ⓑ

بما أن الدليل $x = -3$ ؛ فإن التربيع على y (القطع مفتوح أفقيًا) وبالتالي فإننا نستبعد الخيارين Ⓐ ، Ⓒ ؛ وبما أن البؤرة $(2,5)$ تقع في الرُّبع الأول؛ فإن القطع مفتوح لليمين؛ ومنه فإن $4C$ تكون موجبة، وبمناقشة الخيارات نجد أن ..

الخيار الصحيح Ⓑ



● 04 Ⓒ

بالمقارنة المعادلة المعطاة $(x-2)^2 = 8\big(y-(-2)\big)$ بمعادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ نجد أن إحداثيات رأس القطع المكافئ هي $(2,-2)$.

● 05 Ⓒ

من معادلة القطع الناقص $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$ نجد أن المقام الأكبر أسفل x^2 ؛ ومنه فإن القطع الناقص محوره الأكبر أفقي، وبمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ..

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

طول المحور الأكبر $= 2a = 2 \times 6 = 12$

● 06 Ⓑ

بمقارنة المعادلة المعطاة $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{7} = 1$ بمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ، نجد أن $h = 1 \ , k = 5$

مركز القطع هو $(1,5)$.

● 07 Ⓓ

بما أن x^2 موجبة فإن المحور القاطع أفقي، والمحور القاطع للقطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي هو $y = k$ ، وبمقارنة المعادلة المعطاة $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-7)^2}{16} = 1$ بمعادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ؛ نجد أن المحور القاطع للقطع $y = 7$.

● 08 Ⓒ

بما أن x^2 موجبة فإن المحور القاطع أفقي، وبمقارنة بالمعادلة المعطاة $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ بمعادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ، نجد أن ..

$h = 0 \ , \ k = 0$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي محوره أفقي ..

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y - 0 = \pm\frac{4}{3}(x-0)$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{4}{3}x$$

● 09 Ⓑ

بمقارنة المعادلة $4x^2 - 3y^2 + 4y - 12 - 2x = 0$ بمعادلة الدرجة الثانية القياسية ..

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

نجد أن ..

$A = 4 \ , \ B = 0 \ , \ C = -3$

$B^2 - 4AC = 0^2 - (4 \times 4 \times -3) = 0 + 48 = 48 > 0$

$B^2 - 4AC$ موجبًا

المعادلة تمثل قطعًا زائدًا.

● 10 Ⓒ

من معادلة الدرجة الثانية القياسية ..

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ $25x^2 + 25y^2 - 20x + 10y + 457 = 0$

$A = 25 \ , B = 0 \ , C = 25$

$B^2 - 4AC = 0$

$0^2 - 4 \times 25 \times 25 = 0 - 2500 = -2500$

ولكن $A = C$ ومنه فإن القطع عبارة عن دائرة. ×

Ⓑ $25x^2 - y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$

$A = 25 \ , B = 0 \ , C = -1$

$B^2 - 4AC = 0$

$0^2 - 4 \times 25 \times -1 = 0 + 100 = 100$

القطع زائد ×

Ⓒ $25x^2 + y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$

$A = 25 \ , B = 0 \ , C = 1$

$B^2 - 4AC = 0$

$0^2 - 4 \times 25 \times 1 = 0 - 100 = -100$

القطع ناقص ✓

الخيار الصحيح Ⓒ

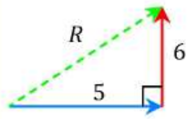
المتجهات

● 01 Ⓐ

بما أن المتجه y اختلفت اشـارته فإنه انعكس، وبمناقشـة الخيارات نجد أن الخيار الصحيح Ⓐ .

● 02 Ⓐ

من نظرية فيثاغورس للمثلث القائم ..



$$\text{الوتر} = \sqrt{\left(\text{الضلع القائم}\right)^2 + \left(\text{القائم الآخر}\right)^2}$$

$$R = \sqrt{(5)^2 + (6)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

● 03 Ⓑ

قيمـة المركبـة الأفقيـة تزداد كلمـا اقتربـت قيمـة θ من الصــفر، وبـالنظر للخيارات نجد أن في الخيار Ⓑ المتجه يوازي محور x .

● 04 Ⓒ

الصــورة الإحـداثيـة لمتجـه بـدايتـه النقطـة $A(x_1, y_1)$ ونهـايتـه النقطـة $B(x_2, y_2)$ هي ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle x, y \rangle$$

ومنه فإن ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2 - (-4), -5 - 1 \rangle = \langle 2 + 4, -5 - 1 \rangle = \langle 6, -6 \rangle$$

● 05 Ⓑ

$$|C| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} = \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6$$

● 06 Ⓐ

$$3A - B = 3\langle 3, 4 \rangle - \langle 2, -1 \rangle = \langle 9, 12 \rangle - \langle 2, -1 \rangle = \langle 7, 13 \rangle$$

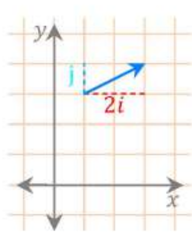
● 07 Ⓐ

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

ومنه فإن متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه المتجه يساوي ..

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle}{2} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

● 08 Ⓒ



نلاحظ أن المتجـه طولـه وحـدتين أفقيًـا من محور x ، ووحدة واحدة رأسيًا من محور y ؛ ومنه فإن ..

$$2\mathrm{i} + \mathrm{j}$$

● 09 Ⓑ

لكي يكون المتجهان متعامدين يجب أن يكون ناتج الضـرب القياسي يسـاوي صفرًا.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$-9 \times -5 + (k) \times -15 = 0$$

$$45 - 15k = 0$$

$$15k = 45$$

$$k = \frac{45}{15} = 3$$

● 10 Ⓑ

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3 \times 2 + 3 \times 0}{\left(\sqrt{3^2 + 3^2}\right)\left(\sqrt{2^2 + 0^2}\right)}$$

$$= \frac{6 + 0}{\left(\sqrt{9 + 9}\right)\left(\sqrt{4 + 0}\right)}$$

$$= \frac{6}{\left(\sqrt{2 \times 9}\right)\left(\sqrt{4}\right)}$$

$$= \frac{6}{3\sqrt{2} \times 2} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

● 11 Ⓐ

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - (-5), 6 - 0, 2 - 2 \rangle = \langle 8, 6, 0 \rangle$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{64 + 36 + 0} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{متجه الوحدة} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\langle 8, 6, 0 \rangle}{10} = \left\langle \frac{8}{10}, \frac{6}{10}, \frac{0}{10} \right\rangle = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right\rangle$$

● 12 Ⓐ

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left|\begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= [-\mathrm{i} + 0 + 2\mathrm{k}] - [0 + 0 + (\mathrm{j})]$$

$$= -\mathrm{i} - \mathrm{j} + 2\mathrm{k} = \langle -1, -1, 2 \rangle$$

● 13 Ⓒ

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left|\begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= [-2\mathrm{i} + (-8\mathrm{j}) + 21\mathrm{k}] - [8\mathrm{k} + (-6\mathrm{i}) + (-7\mathrm{j})]$$

$$= -2\mathrm{i} - 8\mathrm{j} + 21\mathrm{k} - 8\mathrm{k} + 6\mathrm{i} + 7\mathrm{j}$$

$$= 4\mathrm{i} - \mathrm{j} + 13\mathrm{k}$$

$$\text{مساحة متوازي الأضلاع} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 13^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 169}$$

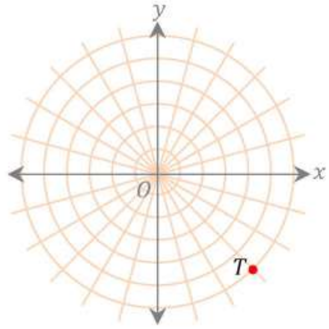
$$= \sqrt{186}$$

الإحداثيات القطبية

● 01 Ⓓ

من الشكل نلاحظ أن النقطة T تقع في الربع الرابع ومنه فإن ..

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{4\pi}{2}$$



وبتجربة الخيارات نستبعد الخيارين Ⓐ و Ⓑ لأن البسط أصغر من المقام ..

Ⓒ $\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$ ..

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{4\pi}{3} < \frac{4\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{6} < \frac{8\pi}{6} < \frac{12\pi}{6} \quad \times$$

Ⓓ $\left(6, \frac{5\pi}{3}\right)$ ..

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < \frac{4\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{6} < \frac{10\pi}{6} < \frac{12\pi}{6} \quad \checkmark$$

الخيار الصحيح Ⓓ

● 02 Ⓐ

بما أن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ ؛ فإن ..

$$r = 5 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

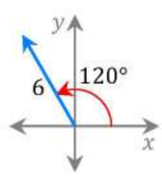
$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \left(5\cos\frac{\pi}{3}, 5\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(5 \times \frac{1}{2}, 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

● 03 Ⓑ

من الشكل نلاحظ أن $r = 6, \theta = 120°$ ومنه فإن ..



$$x = r\cos\theta = 6\cos 120° = 6 \times -\frac{1}{2}$$

$$= -3$$

$$y = r\sin\theta = 6\sin 120° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

ومنه فإن الصورة الديكارتية هي: $(-3, 3\sqrt{3})$.

● 04 Ⓐ

$$x = 3 \quad , \quad y = 3\sqrt{3}$$

أولاً: نُوجد r ..

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

ثانيًا: نُوجد θ ..

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$

الإحداثيات القطبية للنقطة P هي $(6, 60°)$.

● 05 Ⓐ

$$z_1 z_2 = 5 \times 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

بتوحيد المقامات ..

$$z_1 z_2 = 10 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 10 \times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

● 06 Ⓑ

$$12(\cos 80° + i\sin 80°) \div 4(\cos 20° + i\sin 20°)$$

$$= \frac{12}{4}(\cos(80° - 20°) + i\sin(80° - 20°))$$

$$= 3(\cos 60° + i\sin 60°)$$

$$= 3\cos 60° + 3i\sin 60°$$

$$= 3\frac{1}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

النهايات

Ⓓ 01

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -(-1)+3 = 1+3 = 4$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = (-1)^2 = 1$$

ومنه فإن ..

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

وبالتالي فإن ..

$\lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

Ⓒ 02

تكون الدالة متصلة عند $x = 1$ إذا كان ..

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+}(a^2+2x) = \lim_{x\to 1^-}(a+4)$$

$$\Rightarrow\ a^2 + 2\times 1 = a+4$$

$$\Rightarrow\ a^2 + 2 = a+4$$

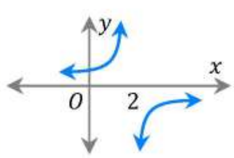
$$\Rightarrow\ a^2 + 2 - a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow\ a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow\ (a-2)(a+1) = 0$$

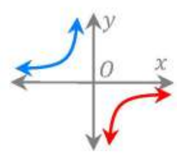
$$\Rightarrow\ a = 2\ \ ,\ \ a = -1$$

Ⓐ 03



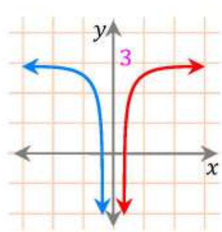
بالتمثيل البياني للدالة $f(x)$ نجد أن .. في الطرف الأيمن قيم الدالة تتزايد بلا حدود عند $x = 2$ ، وفي الطرف الأيسر قيم الدالة تتناقص بلا حدود عند $x = 2$ ؛ ومنه فإن عدم الاتصال لا نهائي.

Ⓐ 04



دالة عدم الاتصال اللا نهائي يكون إحدى طرفاها يتزايد بلا حدود عند نقطة عدم الاتصال، والطرف الآخر يتناقص بلا حدود عند نفس النقطة، وهذا ينطبق على الخيار Ⓐ .

Ⓒ 05



من الشكل نلاحظ أن قيمة الطرف الأيمن تقترب من 3 كلما اقترب المنحنى من ∞ ؛ ومنه فإن سلوك الطرف الأيمن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.
وقيمة الطرف الأيسر تقترب من 3 كلما اقترب المنحنى من $-\infty$ ؛ ومنه فإن سلوك الطرف الأيسر: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

الخيار الصحيح Ⓒ

Ⓑ 06

بالتعويض عن كل x بـ 2 ..

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1) = (2)^2 - 3(2) + 1 = 4 - 6 + 1$$

$$= 5 - 6 = -1$$

Ⓐ 07

بالتعويض عن كل x بـ 0 ..

$$\lim_{x\to 0}(x^3 \cos x) = 0^3 \times \cos 0 = 0 \times 1 = 0$$

Ⓑ 08

بالتعويض عن كل x بـ 4 ..

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3} = \frac{\sqrt{2\times 4+1}-\sqrt{7}}{4-3} = \frac{\sqrt{8+1}-\sqrt{7}}{4-3}$$

$$= \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{1}$$

$$= 3-\sqrt{7}$$

Ⓑ 09

بالتعويض عن $x = 9$ ..

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{0}{0}\ \ (\text{صيغة غير محددة})$$

وللتخلص من الجذر التربيعي نضرب في مرافق البسط بسطًا ومقامًا ..

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{x-9}}{(\cancel{x-9})\times(\sqrt{x}+3)}$$

وبالتعويض عن $x = 9$ ..

$$\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Ⓓ 10

نعوض عن $x = \infty$ في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) ..

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+x+2) = \lim_{x\to\infty} x^2 = (\infty)^2 = \infty$$

Ⓓ 11

درجة البسط تساوي درجة المقام؛ ومنه فإن ..

$$\text{النهاية} = \frac{\text{المعامل الرئيس للبسط}}{\text{المعامل الرئيس للمقام}} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x^3}{2x^3+5} = \frac{-3}{2}$$

Ⓓ 12

درجة البسط أصغر من درجة المقام؛ ومنه فإن النهاية تساوي صفر ..

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+x-22}{4x^3-13} = 0$$

Ⓓ 13

درجة البسط أكبر من درجة المقام؛ ومنه فإن النهاية تساوي ..

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\text{الحد الرئيس للبسط}}{\text{الحد الرئيس للمقام}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

الاشتقاق والتكامل

01 Ⓑ

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

ومنه فإن ..

$$f(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

02 Ⓑ

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

ومنه فإن ..

$$f(x) = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 + 0 = 3$$

03 Ⓓ

معادلة ميل المنحنى هي معادلة المشتقة الأولى للدالة.

$$y = \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \sqrt{}}$$

ومنه فإن ..

$$y = \sqrt{2x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

04 Ⓒ

$$y = 2\sqrt[4]{x^5} = 2(x)^{\frac{5}{4}}$$

معادلة ميل المنحنى هي معادلة المشتقة الأولى للدالة.

$$f(x) = cx^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ncx^{n-1}$$

ومنه فإن ..

$$y = 2\sqrt[4]{x^5} \quad \Rightarrow \quad y = 2(x)^{\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2 \times \frac{5}{4}(x)^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{2}(x)^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt[4]{x}$$

05 Ⓐ

معادلة ميل المنحنى هي معادلة المشتقة الأولى للدالة.

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

ومنه فإن ..

$$y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x)' = 2x$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(1,1)$ يساوي ..

$$f'(1) = 2 \times 1 = 2$$

06 Ⓑ

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

ومنه فإن ..

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 12 \quad \Rightarrow \quad f(x)' = 3 \times 2x - 5 + 0$$
$$= 6x - 5$$

07 Ⓑ

نلاحظ أن الحل بالاشتقاق طويل، لذلك سنحل بالاستفادة من ميزة في السؤال ..

رتبة المشتقة (السادسة) أكبر من درجة كثيرة الحدود (الخامسة) ..

المشتقة (السادسة) تساوي الصفر

08 Ⓒ

مشتقة قسمة دالتين تساوي ..

$$\frac{\left(\text{مشتقة البسط}\right)\left(\text{المقام}\right) - \left(\text{البسط}\right)\left(\text{مشتقة المقام}\right)}{\left(\text{المقام}\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2-x} = \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{2-x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(5 \times \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)(2-x) - \left(5x^{\frac{3}{2}}\right)(0-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{15}{2}\sqrt{x}\right)(2-x) - \left(5\sqrt{x^3}\right)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\left(\frac{15}{2} \times \sqrt{4}\right)(2-4) - \left(5\sqrt{4^3}\right)(-1)}{(2-4)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{15}{2} \times 2\right) \times -2 + \left(5\sqrt{64}\right)}{(-2)^2}$$

$$= \frac{15 \times -2 + (5 \times 8)}{4} = \frac{-30 + 40}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

09 Ⓒ

نوجد النقط الحرجة لـ $f(x)$ ، وبما أن ..

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

فإن ..

$$f(x) = 6x^2 - x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x - 3x^2$$
$$\Rightarrow \quad 12x - 3x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 3x(4-x) = 0$$

إما $3x = 0$ ، $x = 0$ ، ليست نقط حرجة لأنها على طرف الفترة المعطاة

أو $4 - x = 0$ ، $x = 4$ ، ليست نقط حرجة لأنها خارج الفترة المعطاة

نوجد - الآن - القيمة العظمى ..

القيمة العظمى توجد فقط إما عند $x = 0$ أو عند $x = 3$ (طرفا الفترة).

أولاً: عند $x = 0$ ..

$$f(0) = 6(0)^2 - (0)^3 = 0$$

ثانيًا: عند $x = 3$ ..

$$f(3) = 6(3)^2 - (3)^3 = 6 \times 9 - 27 = 54 - 27 = 27$$

القيمة العظمى تساوي 27 .

10 Ⓒ

$$\int [g(x) \pm f(x)]\, dx = G(x) \pm F(x) + C$$

ومنه فإن ..

$$\int (4x + 5)\, dx = \frac{4x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = \frac{4x^2}{2} + 5x + C$$
$$= 2x^2 + 5x + C$$

● 11 Ⓐ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ومنه فإن ..

$$\int_0^2 nx\,dx = 6 \Rightarrow \frac{nx^2}{2}\Big|_0^2 = 6 \Rightarrow \left(\frac{n \times 2^2}{2}\right) - \left(\frac{n \times 0^2}{2}\right) = 6$$

$$\Rightarrow 2n - 0 = 6$$

$$\Rightarrow n = \frac{6}{2} \Rightarrow n = 3$$

● 12 Ⓒ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ومنه فإن ..

$$\int_{-1}^3 k|x+1|\,dx = 24$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^3 |kx+k|\,dx = 24$$

$$\Rightarrow \left(\frac{kx^2}{2} + kx\right)\Big|_{-1}^3 = 24$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k(3)^2}{2} + k \times 3\right] - \left[\frac{k(-1)^2}{2} + (-1)k\right] = 24$$

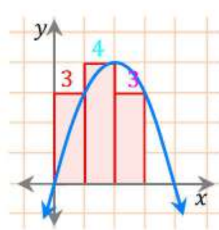
$$\Rightarrow \left[\frac{9k}{2} + 3k\right] - \left[\frac{k}{2} - k\right] = 24$$

$$\Rightarrow \left[\frac{9k}{2} + \frac{6k}{2}\right] - \left[\frac{k}{2} - \frac{2k}{2}\right] = 24$$

$$\Rightarrow \left[\frac{15k}{2}\right] - \left[\frac{-k}{2}\right] = 24$$

$$\Rightarrow \frac{16k}{2} = 24 \Rightarrow 8k = 24 \Rightarrow k = \frac{24}{8} = 3$$

● 13 Ⓑ



بما أن المساحة التقريبية تحت المنحنى تساوي مجموع مساحات المستطيلات فإن ..

$3 = 3 \times 1 =$ مساحة المستطيل الأول

$4 = 4 \times 1 =$ مساحة المستطيل الثاني

$3 = 3 \times 1 =$ مساحة المستطيل الثالث

المساحة الكلية $= 3 + 4 + 3 = 10$

● 14 Ⓐ

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x في الفترة $[0, 1]$ وتُعطى بالتكامل المحدد للدالة خلال الفترة ..

وبما أن ..

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

فإن ..

$$\int_0^1 (4 - 3x^2)\,dx = 4x - \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= 4x - x^3\Big|_0^1$$

$$= [4 \times 1 - (1)^3] - [4 \times 0 - (0)^3]$$

$$= [4 - 1] - [0 - 0] = 3$$
