المنطق الرياضي وطرائق البرهان

التقرير البسيط:

جملة خبرية تحمل خبر واحد فقط

وتحتمل الخطأ أو الصواب وليس كلاهما ومرتبة بحروف أبجدية

أ، ب، ج، د، ... 1، 2، 3، ...

التقرير المركب:

جملة خبرية تحمل أكثر من خبر

وتحتمل الصواب أو الخطأ وليس كلاهما ومرتبة بحروف أبجدية

أدوات الربط:

أدوات الربط	الرمز	التسمية
و	$\wedge$	أداة العطف
أو	$\vee$	أداة الفصل
النفي	$\neg$	أداة النفي
الشرط	$\rightarrow$	إذا كان... فإن...
تابع الشرط	$\leftrightarrow$	... إذا وفقط إذا كان...

جدول الصواب

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

العبارة التقريرية

العبارة التقريرية (أو العبارة) هي تقرير يكون بسيط أو مركب.

مثال (1,2) ص 7: جد جدول الصواب للعبارة التقريرية التالية

"إذا درست مقرر الرياضيات المتقطعة جيدا أو لم تهمل مقرر المنطق فسوف تحصل على درجة عالية في الاختبار"

الحل: لنعتبر:

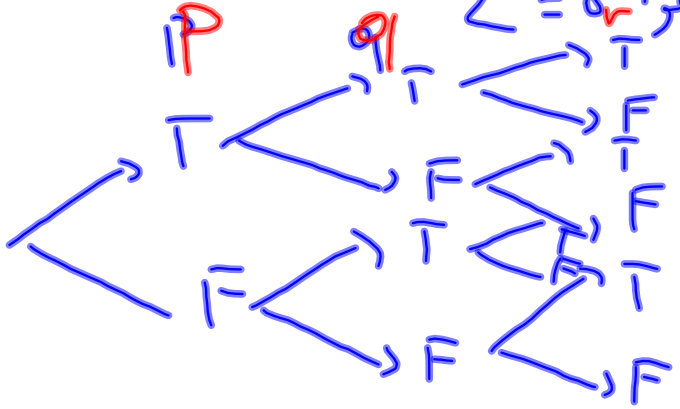
p: درست مقرر الرياضيات المتقطعة جيدا.

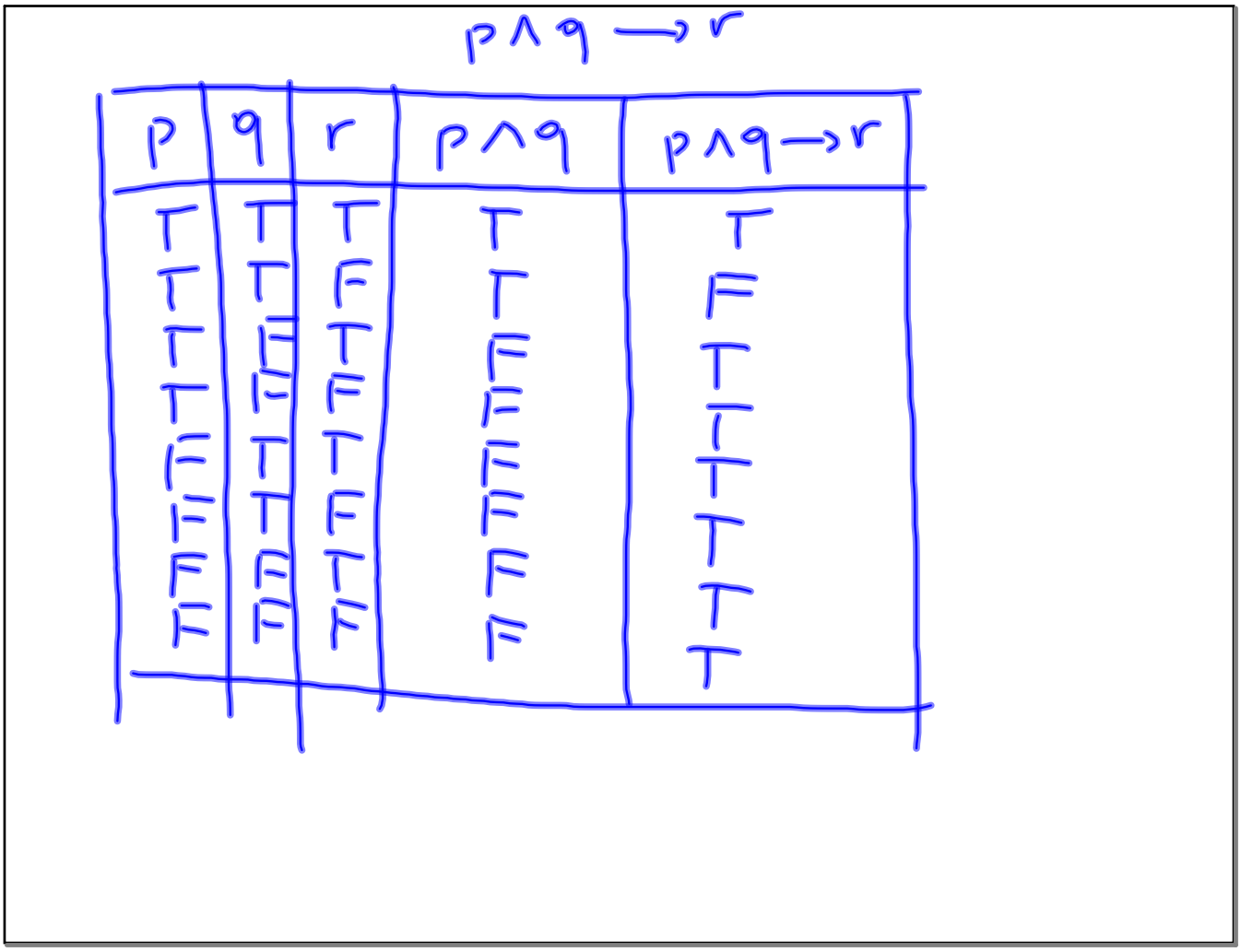
q: لم تهمل مقرر المنطق الرياضي.

r: تحصل على درجة عالية في الاختبار.

العبارة: $p \wedge q \rightarrow r$

عدد الحالات هو: $2^3 = 8$




p ∧ q → r
p
q
r
p ∧ q
p ∧ q → r
T T T T T
T T F T F
T F T F T
T F F F T
F T T F T
F T F F T
F F T F T
F F F F T

مثال (1,1) ص 7

جد جدول الصواب للعبارة التالية:

"اذا درست مقرر الرياضيات المتقطعة جيدا ولم تهمل مقرر المنطق الرياضي فسوف تحصل على درجة عالية في الاختبار"

الحل: نعتبر

د: درست مقرر الرياضيات المتقطعة جيدا.

ه: تهمل مقرر المنطق الرياضي

ر: تحصل على درجة عالية في الاختبار.

العبارة بالرموز: $(د \wedge \neg ه) \rightarrow ر$

د	ه	ر	$\neg ه$	$د \wedge \neg ه$	$(د \wedge \neg ه) \rightarrow ر$
ت	ت	ت	ف	ف	ت
ت	ت	ف	ف	ف	ت
ت	ف	ت	ت	ت	ت
ت	ف	ف	ت	ت	ف
ف	ت	ت	ف	ف	ت
ف	ت	ف	ف	ف	ت
ف	ف	ت	ت	ف	ت
ف	ف	ف	ت	ف	ت

العبارة1 : $p \rightarrow q$

العكس العبارة1 $q \rightarrow p$

المعكوس العبارة1 : $\neg p \rightarrow \neg q$

المكافئ العكسي للعبارة1 : $\neg q \rightarrow \neg p$

$\neg(\neg p) \equiv p$

مثال (1,6) ص 8

حول العبارة التالية الى صورة رمزية ثم جد العكاسي العكسي

"إذا كان المثلث ABC متساوي الساقين فانه يحتوي على زاوية مقدارها 45° فإنه مثلث قائم الزاوية."

الحل: لنعتبر:

م: المثلث ABC متساوي الساقين.

ق: المثلث ABC يحتوي على زاوية 45°.

ر: المثلث ABC قائم الزاوية.

الصورة الرمزية للعبارة: (م ∧ ق) ← ر

العكاسي العكسي: ¬ر ← ¬(م ∧ ق)

① إذا كان المثلث ABC ليس قائم الزاوية فانه ليس صحيحا انه (متساوي الساقين ويحتوي على زاوية 45°)

② إذا كان المثلث ABC ليس قائم الزاوية فانه ليس متساوي الساقين أو لا يحتوي على زاوية 45°

¬ر ← (¬م ∨ ¬ق)

التكافؤ المنطقي

ليكن A و B كل منهما عبارة نقيضية

A و B متكافئتان منطقيا ونرمز: $A \equiv B$

إذا كان A و B لهما نفس جدول الصواب.

مثال: $\neg p \wedge q \equiv q \wedge \neg p$ ، $\neg p \vee q \equiv q \vee \neg p$

$r \vee (\neg r) \equiv r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ، $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

مثال (1,7) ص ق ، ومثال (1,9) ص ا

أثبت أن : $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ و $p \to q \equiv \neg p \vee q$

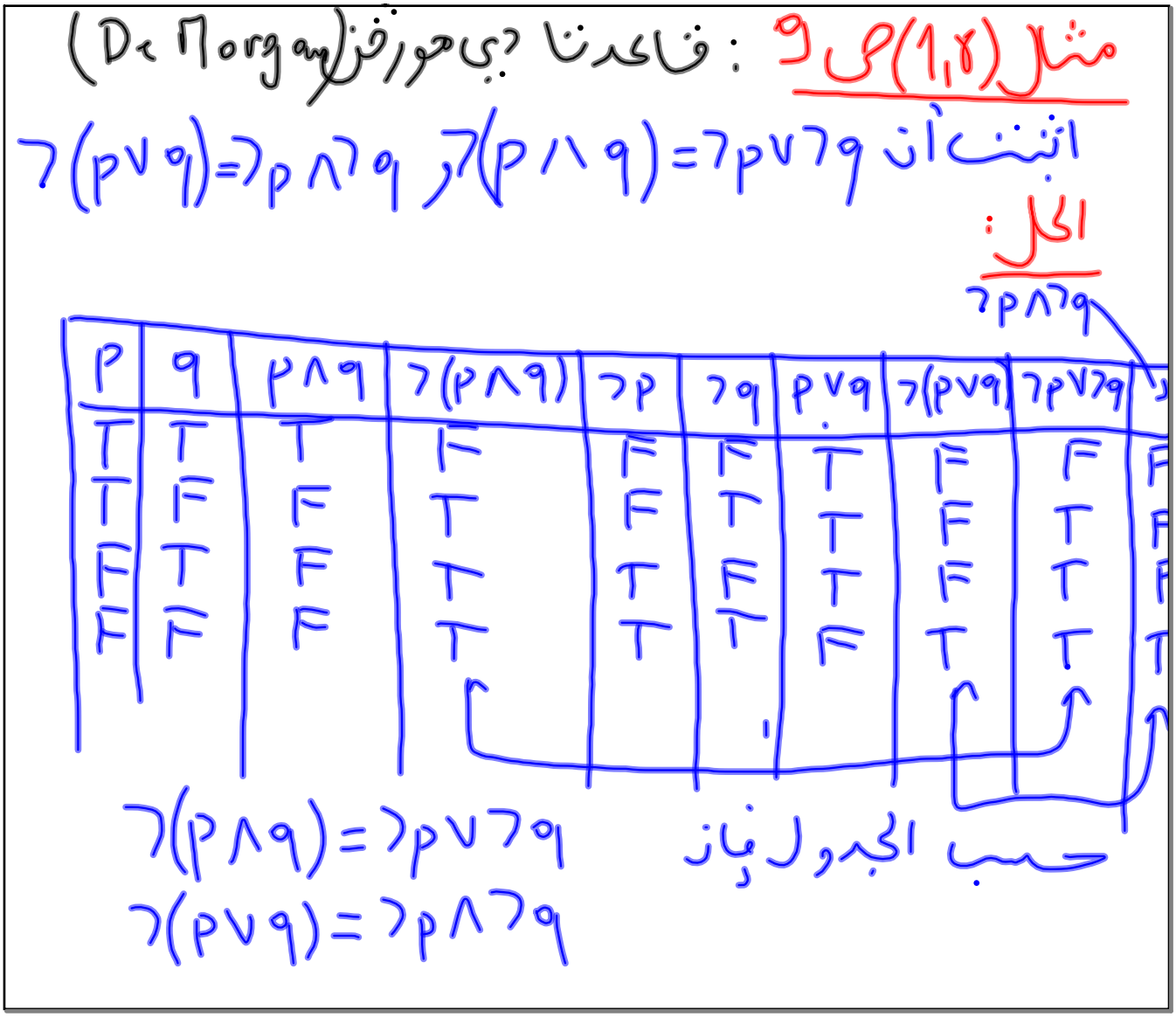
الحل :

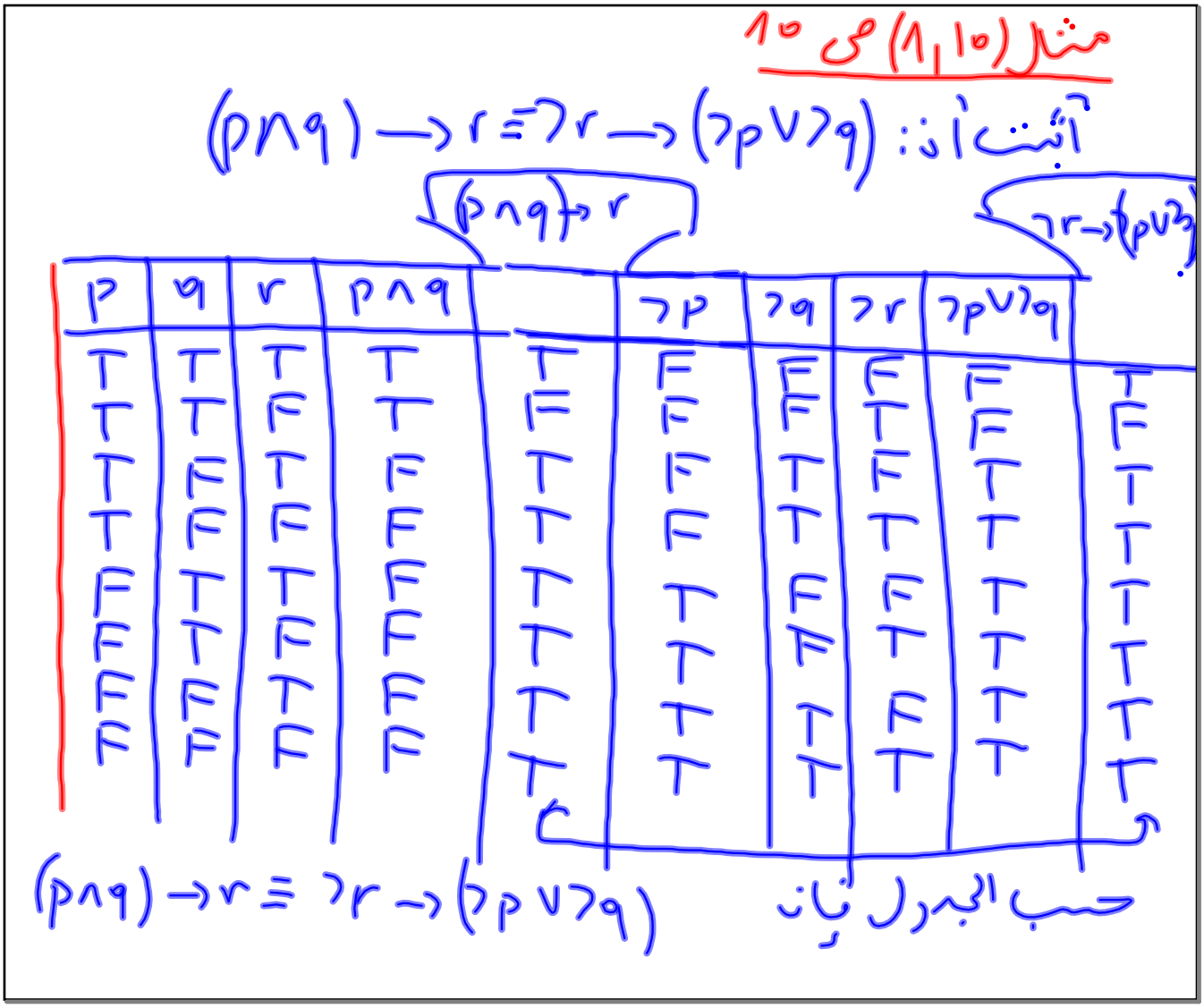
p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$\equiv$ $\equiv$

حسب الجدول نجد $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$


مثال (1,2) ص
قاعدتا دي مورغن (De Morgan) :
اثبت أن
الحل :
حسب الجدول نجد


مثال (1,10) ص 15
أثبت أن:
حسب الجدول يكون

طريقة ثانية:

أثبت أن: $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

الحل:

$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)$

العكسي العكسي

$\equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

قاعدة دي مورقنا

مبدأ التعويض للتكافؤ

مثال (١١,١) ص ١١

أثبت أن العبارة: $X = ((x \wedge y) \vee z) \rightarrow (u \rightarrow v)$

تكافئ منطقيا العبارة: $Y = \neg((x \wedge y) \vee z) \vee (u \rightarrow v)$

الحل:

$? \; X \equiv Y$

لنعتبر: $p = (x \wedge y) \vee z$

و $q = u \rightarrow v$

فإن $X \equiv ((x \wedge y) \vee z) \rightarrow (u \rightarrow v)$

$\equiv p \rightarrow q$ لـ قاعدة الشرط

$\equiv \neg p \vee q$

$\equiv \neg((x \wedge y) \vee z) \vee (u \rightarrow v)$

$\equiv Y$

فإن X تكافئ منطقيا Y.

العمليات والتناقضات

ق	~ق	ق ∧ ~ق	ق ∨ ~ق
T	F	F	T
F	T	F	T

ق ∨ ~ق ≡ t : عبارة مصدوقة

ق ∧ ~ق = c : عبارة تناقض

ق ، ~ق : عبارة مخلوطة

ملحوظة: ليكن A, B كل منهما عبارة تقريرية

يعني $A \equiv B$ مصدقة $A \leftrightarrow B$

مثال $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$ ص 12

اثبت أن: $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$ مصدقة

الحل: لدينا:

$$(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to \neg(p \wedge q)$$
$$\equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$$

فإن $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to (\neg p \vee \neg q)]$ مصدقة

مثال (1,14) ص 12

أثبت أن العبارة $[p \wedge (p \to q)] \to q$ صوتية

الحل:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

فإن العبارة $[p \wedge (p \to q)] \to q$ عبارة مصدوقة

طريقة ثانية

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \equiv \neg[p \wedge (p \to q)] \vee q$$
$$\equiv \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q$$
$$\equiv [\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)] \vee q$$
$$\equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p] \vee q$$
$$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q)$$
$$\equiv t$$

الإبدال

التجميع

بالتالي $[p \wedge (p \to q)] \to q$ عبارة مصدوقة.

مثال (1,1,2) ص 12 : أثبت أن:

$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$ تناقض

الحل:

p	q	¬p	¬q	p∨q	¬q∨p	¬p∨q	p∧q	¬(p∧q)	
T	T	F	F	T	T	T	T	F	
T	F	F	T	T	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	T	F	T	
F	F	T	T	F	T	T	F	T	

نلاحظ العبارة A هي عبارة تناقض.

الاقتضاء المنطقي

(١) $p \Rightarrow q$ يعني $p \to q$ عبارة مصدوقة

(٢) $p_1, p_2, \dots, p_n \Rightarrow q$ يعني $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$ عبارة مصدوقة

مثال (١٨، ١) ص ١٣: أثبت أن: $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

الحل: نبرهن أن $\neg(p \to q) \to p$ عبارة مصدوقة

لدينا:

$$\begin{aligned}
\neg(p \to q) \to p &\equiv (p \to q) \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee p \\
&\equiv (q \vee \neg p) \vee p \\
&\equiv q \vee (\neg p \vee p) \\
&\equiv q \vee t \\
&\equiv t
\end{aligned}$$

وبالتالي $\neg(p \to q) \to p$ عبارة مصدوقة

فإن $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

مثال (1,17) ص 14

هل $(p \vee r), p \to q, q \to r \Rightarrow \neg q$ ؟

الحل: هل $[(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)] \to \neg q$ عبارة مصونة؟

A

p	q	r	$p \vee r$	$p \to q$	$q \to r$	A	$\neg q$	$A \to \neg q$
T	T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F	F	
T	F	T	T	F	T	F	T	
T	F	F	T	F	T	F	T	
F	T	T	T	T	T	T	F	
F	T	F	F	T	F	F	F	
F	F	T	T	T	T	T	T	
F	F	F	F	T	T	F	T	

العبارة: $[(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)] \to \neg q$ غير مصونة

وبالتالي غير صحيح: $(p \vee r), p \to q, q \to r \Rightarrow \neg q$

الخصائص الجبرية لأدوات الربط

(٧) $p \wedge p \equiv p$ $\quad p \vee p \equiv p$

(٨) $p \wedge T \equiv p$ $\quad p \vee F \equiv p$

(٩) $p \wedge F \equiv F$ $\quad p \vee T \equiv T$

(١٠) قاعدة التوزيع

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(١١) قاعدة الامتصاص:

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $\quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$

(١٢) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ ، $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$

(١٣) قاعدة ثنائي الشرط

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ، $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

(١٥) قاعدة الانطلاق والوصول

$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

$p \to (q \to r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$

$\equiv \neg(p \wedge q) \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \to r$

(11) قاعدة البرهان البديل

(أ) $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$

$\equiv (p \wedge \neg r) \to q$

(ب) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

$(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r$

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$\equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

ملحوظة: $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv [(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \wedge q) \vee s]$

$\equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [(p \vee s) \wedge (q \vee s)]$

$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s)$

$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

مثال (1,18) ص 16

أثبت أن: $\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \equiv \neg p \vee \neg q$

الحل:

$$\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \equiv \neg p \vee \neg(\neg p \vee q)$$
$$\equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q)$$
$$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$
$$\equiv t \wedge (\neg p \vee \neg q)$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q)$$

مثال (1,19) ص 16 و 17

أثبت دون إستخدام جدول الصواب أن العبارة :

$r \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$ صوابية

الحل : الطريقة الاولى

$$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$$

$$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r$$

$$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee r$$

$$\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee r$$

$$\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)] \vee [(q \wedge \neg r) \vee r]$$

$$\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)] \vee [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)]$$

$$\equiv [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (q \vee r)$$

$$\equiv [(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (q \vee r)$$

$$\equiv [(\neg p \vee \neg r) \vee (q \vee r)] \wedge [(\neg q \vee p) \vee (q \vee r)] \wedge [(\neg q \vee \neg r) \vee (q \vee r)]$$

$$\equiv [(p \vee q) \vee (\neg r \vee r)] \wedge$$

$$\equiv t$$

بالتالي العبارة صوابية.

الطريقة الثانية

الحل:

$$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$$

$$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \vee r$$

$$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge ((p \vee q) \to r)] \vee r$$

$$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge (\neg(p \vee q) \vee r)] \vee r$$

$$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg(p \vee q) \vee r)] \vee r$$

$$\equiv [\neg(p \vee q) \vee ((p \vee q) \wedge \neg r)] \vee r$$

$$\equiv [(\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee \neg r)] \vee r$$

$$\equiv [t \wedge (\neg(p \vee q) \vee \neg r)] \vee r$$

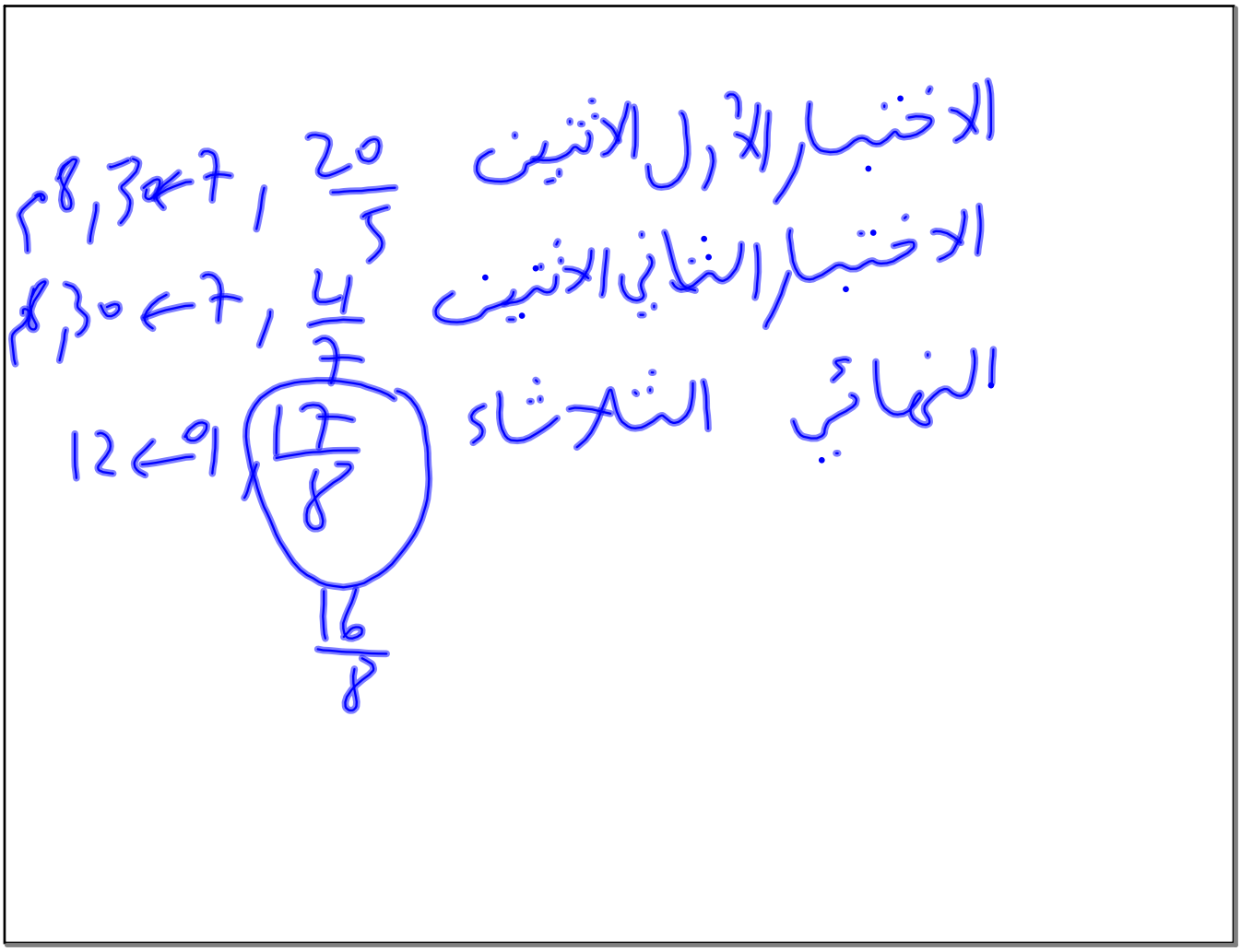
$$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg r] \vee r$$

$$\equiv \neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee r)$$

$$\equiv \neg(p \vee q) \vee t$$

$$\equiv t$$

وبالتالي العبارة: $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$ صحيحة


الاختبار الأول الاثنين
الاختبار الثاني الاثنين
النهائي الثلاثاء
م 8,30 ← 7, 4/7
12 ← 9
17/8
16/8