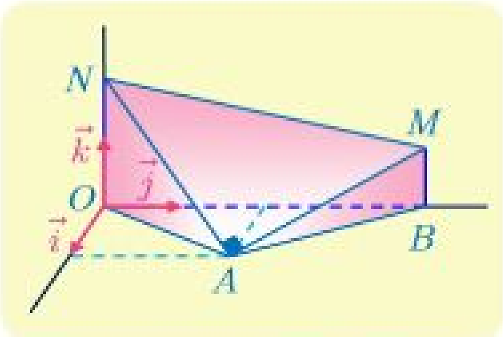
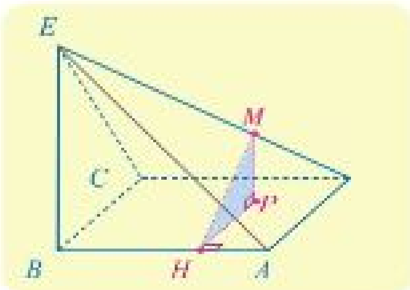
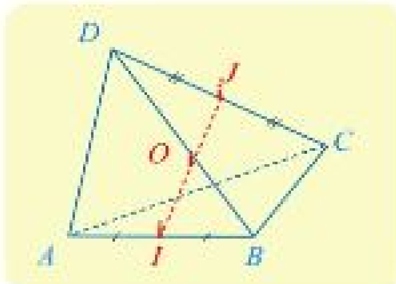


76 سؤال





طرق الحل

أمثلة لكل طريقة

بسم الله الرحمن الرحيم

اقدم اليكم بعون الله تعالى ملف لمراجعة أفكار الاشعة في الفراغ والجداء السلمي والمستقيمات والمستوي في الفراغ بالطريقة السليمة وتعمدت وضع مثال مع كل طريقة وهذه الأمثلة اغلبها من الكتاب والنماذج الوزارية والدورات وانوه أن الكتاب هو المرجع الأساسي للدراسة ولكن انا هنا اقدم لكم طريقة او أسلوب للفهم أكثر سائلاً من الله ان أكون قد وفقت في هذا الشرح.

أقدم هذا العمل خالصاً لوجه الله وسائلاً منكم الدعاء لوالدي ولي.

ثم ماذا ؟

ثم بعد صبرك اليعقوبي ستنال أمانيكَ اليوسُفية فعناءُ

اليوم لذةُ الغد

إعداد: راجح المصطفى[2]

السؤال الأول: كيف نعين نقطة M مثلاً تحقق علاقة شعاعية؟

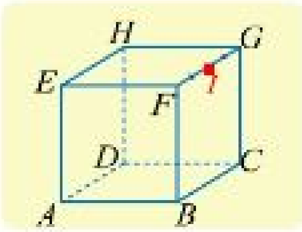
$ABCDEFGH$ مكعبٌ و I منتصف الحرف $[FG]$

1-عين النقطة M التي تحقق العلاقة (1) الآتية:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

2 أثبت صحة العلاقة (2) الآتية:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$



نستعمل قوانين الاشعة التي مرّت معنا سابقاً ك علاقة شال والجمع الشعاعي للأشعة وكذلك طريقة متوازي الاضلاع او ربما تحليل شعاع الى شعاعين يفيدان في تطبيق تلك القواعد...الخ حتى نصل الى علاقة مثلا

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}$ عندها تكون M=I

أي علاقة تجعلنا نفهم أي تقع M

الحل:

1-لدينا حسب قاعدة متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}$$

وبالاستفادة من علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}$$

ومنه: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}$ وبالتعويض في العلاقة السابقة (1) نجد:

$$M=I \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}\ .$$

السؤال الثاني: كيف نثبت صحة علاقة شعاعية؟

تنطلق من طرف الأول من العلاقة الشعاعية ونبدأ بالعمل عليها مستخدمين قواعد

الاشعة التي وردت معنا سابقاً حتى نصل الى الطرف الثاني

قد يرد هذا الطلب مرفقاً بشكل هندسي (مكعب رباعي وجوه ... الخ وقد يرد بدون شكل

2 سنقوم بحل الطلب الثاني من المثال السابق

لو فكرنا بتحليل $\overrightarrow{AB}$ سنكتب: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}$

وبالاستفادة من علاقة شال :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CF}$$

اذن : $=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$ وهو المطلوب

مثال 2 صفحة 16 تدرب 2

السؤال الثالث: كيف نوجد مركبات شعاع؟

مثال 2 $A(1,2,3)$ $B(-4,2,1)$ اوجد $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(-4-1,2-2,1-3) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\ (-5,0,-2)$

لتكن $B(X_B,Y_B,Z_B),A(X_A,Y_A,Z_A)$

فيكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(X_B-X_A,Y_B-Y_A,Z_B-Z_A)$

السؤال الرابع: كيف نوجد طويلة(ناظم) شعاع او المسافة بين نقطتين؟

لتكن $B(X_B, Y_B, Z_B), A(X_A, Y_A, Z_A)$

فيكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$

فتكون طويلة (ناظم) شعاع هي

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

مثال3:

لتكن $A(1,2,3)$, $B(-4,2,1)$ اوجد المسافة بين A و B

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$AB = |\,|\overrightarrow{AB}|\,| = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

السؤال الخامس: كيف نوجد احداثيات منتصف قطعة مستقيمة؟

لتكن $B(X_B, Y_B, Z_B), A(X_A, Y_A, Z_A)$

ولتكن I منتصف $[AB]$ فتكون احداثيات I هي

$$I\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}, \frac{Z_A + Z_B}{2}\right)$$

ملاحظة: إذا كانت النقطة M نظيرة نقطة أخرى ولتكن M بالنسبة الى نقطة ولتكن C عندئذٍ تكون C منتصف $[BM]$

مثال لتكن $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,2)$, $C(1,2,-2)$

اوجد احداثيات I منتصف $[AB]$

ثم اوجد احداثيات D نظيرة I بالنسبة الى C .

الحل: نطبق دستور احداثيات منتصف قطعة مستقيمة $I\left(\frac{3-2}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

بما ان D نظيرة I بالنسبة الى C إذاً هذا يعني ان C منتصف $[DI]$

$$C(1,2,-2):\left(\frac{X_D+\frac{1}{2}}{2},\frac{Y_D+\frac{3}{2}}{2},\frac{Z_D+\frac{1}{2}}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{X_D+\frac{1}{2}}{2}=1\Longmapsto X_D=\frac{3}{2}\\ \frac{Y_D+\frac{3}{2}}{2}=2\Longmapsto Y_D=\frac{5}{2}\\ \frac{Z_D+\frac{1}{2}}{2}=-2\Longmapsto Z_D=\frac{-9}{2}\end{cases}\Rightarrow D(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{-9}{2})$$

السؤال السادس: كيف نبين طبيعة مثلث؟ وكيف نوجد احداثيات مركز ثقله؟

لتكن $C(X_C,Y_C,Z_C),B(X_B,Y_B,Z_B),A(X_A,Y_A,Z_A)$

G مركز ثقل المثلث ABC فتكون احداثيات G هي

$$G\left(\frac{X_A+X_B+X_C}{3},\frac{Y_A+Y_B+Y_C}{3},\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}\right)$$

ولتبيان طبيعة المثلث نوجد الطويلة للأضلاع الثلاث وعلى أساسها

نحكم ان كان قائم حقق قاعدة عكس فيثاغورث .او متساوي الأضلاع او متساوي الساقين او مختلف الاضلاع

ملاحظة: راجع صفحة المراجعة الهامة في اخر الملف

مثال:

لتكن : $C(0,4,0),B(3,6,-2),A(1,3,-1)$

بين طبيعة المثلثABC ثم اوجد احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC

الحل :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(3-1)^2+(6-3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(0-1)^2+(4-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(0-3)^2+(4-6)^2+(0+2)^2}=\sqrt{17}$$

نلاحظ أن: $AB^2+AC^2=BC^2$

وحسب عكس فيثاغورث المثلث ABC قائم في A

$$G\left(\frac{X_A+X_B+X_C}{3},\frac{Y_A+Y_B+Y_C}{3},\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{1+3+0}{3},\frac{3+6+4}{3},\frac{-1-2+0}{3}\right)\Longmapsto G\left(\frac{4}{3},\frac{13}{3},-1\right)$$

السؤال السابع: كيف نوجد احداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية؟

نفرض احداثيات النقطة (x,y,z) ونوجد الشعاع المتعلق بتلك النقطة

والاشعة الاخرى الموجودة في العلاقة فنحصل على ثلاث معادلات من الدرجة الاولى

بدلالة x و y و z على ترتيب

وبذلك نكون قد عينا احداثيات النقطة

مثال لتكن : $C(0,4,0), B(3,6,-2), A(1,3,-1)$

1 اوجد احداثيات M التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2 اوجد احداثيات N التي تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$$

الحل :

1 بفرض $M(x,y,z)$ فيكون

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 6-3 \\ -2+1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0-1 \\ 4-3 \\ 0+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3=-1 \Rightarrow x=2 \\ y-6=6 \Rightarrow y=12 \\ z+2=2 \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

ومنه $M(2,12,0)$ الطلب 2 بنفس الأسلوب.

السؤال الثامن: كيف نوجد احداثيات نقطة D تجعل النقاط الأربعة $ABCD$ متوازي اضلاع؟ وكيف نوجد احداثيات مركز متوازي الاضلاع هذا؟

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

مركز متوازي الاضلاع هو منتصف قطره

أي منتصف $[AC]$ وبالتالي لإيجاد مركز متوازي الاضلاع نوجد

احداثيات منتصف قطره $[AC]$ أي احداثيات منتصف قطعة مستقيمة.

ملاحظة راجع صفحة القواعد الهامة في اخر الملف فقد يرد السؤال مثلا ل اشكال أخرى غير متوازي الاضلاع 😉😉

مثال: لتكن النقاط $A(1,2,-3), B(-1,3,3), C(4,-1,2)$ ولتكن D

نقطة تجعل $ABCD$ متوازي الاضلاع. احسب احداثيات D

ثم احسب احداثيات I مركزمتوازي الاضلاع هذا

الحل: يكون الرباعي$ABCD$ متوازي اضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ولكن مركبات $\overrightarrow{AB}$ هي $(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)=(-2,1,6)$ وبفرض أن $D(x,y,z)$ فتكون مركبات الشعاع $\overrightarrow{DC}$ هي $(4-x,-1-y,2-z)$ ومنه نكتب المساواة $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$بالشكل:

$$\begin{bmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=-2\\z=-4\end{cases}\Rightarrow D(6,-2,-4)$$

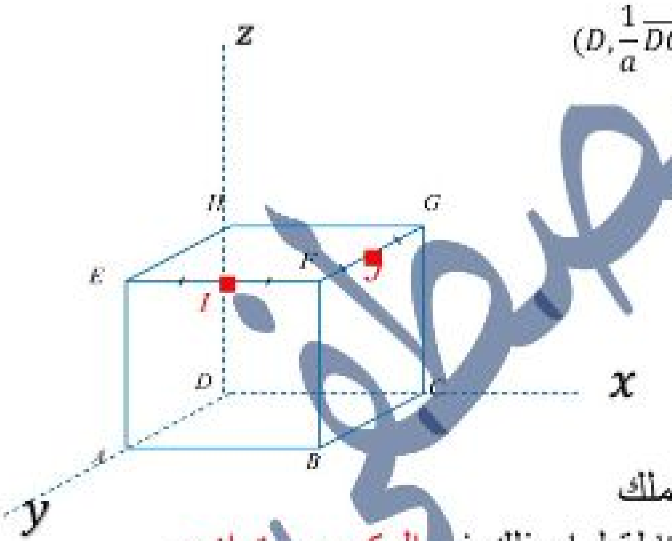
مركز متوازي الاضلاع I هو منتصف $[AC]$ فإحداثيات النقطة I هي $(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2})$

$\Rightarrow I(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$

<u>السؤال التاسع: كيف نوجد احداثيات نقاط رؤوس مكعب؟</u>

ليكن لدينا مكعب كل طول حرف من حروفه a

<u>عندئذ تكون احداثيات عند اخذ المعلم:</u> $(D,\frac{1}{a}\overrightarrow{DC},\frac{1}{a}\overrightarrow{DA},\frac{1}{a}\overrightarrow{DH})$



$D(0,0,0), A(0,a,0), B(a,a,0), C(a,0,0)$

$H(0,0,a), E(0,a,a), F(a,a,a), G(a,0,a)$

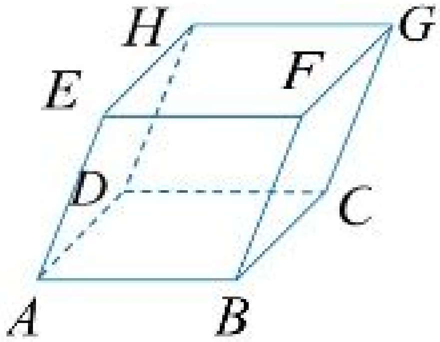
$I(\frac{1}{2}a,a,a)\ j(a,\frac{1}{2}a,a)$

ملاحظة1: إن احداثيات المبدأ دوماً (0,0,0)

نلاحظ أن احداثيات النقاط: H,E,F,G كل منها تملك نفس احداثيات الفاصلة x والترتيب y للنقطة المقابلة لها وذلك في المكعب ومتوازي المستطيلات...الخ.

- <u>ملاحظة:</u> يمكن أخذ المعلم الذي نريده في المكعب وستختلف احداثيات النقاط من معلم الى اخر ولكن سيبقى جوابنا صحيح في الطلبات القادمة وفي حال ذكر لك المعلم في نص المسألة ف التزم به

السؤال العاشر: كيف نوجد احداثيات رؤوس متوازي السطوح في حال عُلم منها أربعة؟



في معلم $o(i,j,k)$ للفراغ نعطى إحداثياتِ أربعٍ

من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً، وهي

$C(-3,2,0)$ $B(1,3,-1)$ و $A(2,1,-1)$

$E(3,-1,3)$ جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

❖ تنويه هام: هنا لا يمكننا ان نأخذ الملاحظة 1 التي اشرْتُ اليها في السؤال السابق أي لا يمكننا ان نعتبر ان فاصلة وترتيب النقطة F مثلاً هي نفسها فاصلة وترتيب النقطة B لأن F ليست المسقط العمودي ل B ونعمم ذلك على النقاط الثلاث المتبقية G,E,H وبالتالي اخذ المعلم هنا لن يفيد

لذلك سنفكر كالتالي: الحل

حسب شال لدينا: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{bmatrix} x_D-x_o \\ y_d-y_o \\ z_d-z_o \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_a-x_o \\ y_a-y_o \\ z_a-z_o \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_c-x_b \\ y_c-y_b \\ z_c-z_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3-1 \\ 2-3 \\ 0+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\overset{\text{ومنه}}{\Longrightarrow} D(-2,1,1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}(1,-2,4)$$

نلاحظ أن F صورة B وفق انسحاب شعاعة $\overrightarrow{AE}$ فيكون:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\Longrightarrow F(2,1,3)$$

ونلاحظ ايضاً أن G صورة C وفق انسحاب شعاعة $\overrightarrow{AE}$ فيكون

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\Longrightarrow G(-2,0,4)$$

ونلاحظ ان H صورة D وفق انسحاب شعاعة $\overrightarrow{AE}$

$$\begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}\Longrightarrow H(-1,-2,4)$$

ملاحظة: ورد في الكتاب متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات أي جميع وجوه مستطيلات) يمكن أخذ المعلم فيه لحساب احداثيات أي نقطة من رؤوسه .

السؤال 11: كيف نثبت الارتباط الخطي لشعاعين تحليلاً؟

مثال: ليكن لدينا الشعاعان $\vec{U}(2.1,-1)$, $\vec{V}(4,2,-2)$,

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

الحل: نلاحظ ان: $\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ وبالتالي

فالشعاعان $\vec{U},\vec{V}$ مرتبطان خطياً

ليكن لدينا الشعاعان $\vec{U}(X_1,Y_1,Z_1)$,$\vec{V}(X_2,Y_2,Z_2)$
يكون هذان الشعاعان مرتبطان خطياً إذا كان $\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$

مثال: ليكن لدينا الشعاعان $\vec{U}(0.1,-1)$ و$\vec{V}(0,2,-2)$,

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

نلاحظ ان: $\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ وبالتالي

فالشعاعان $\vec{U},\vec{V}$ مرتبطان خطياً حسب التنويه1

مثال: ليكن لدينا الشعاعان $\vec{U}(0.0,-1)$ و$\vec{V}(0,0,4)$,

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

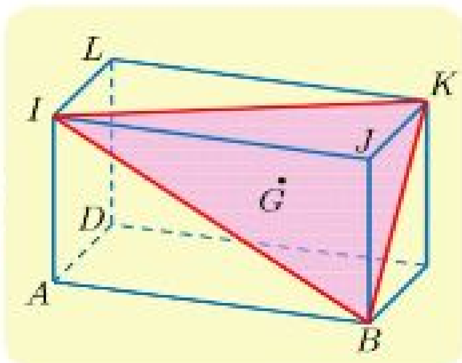
فالشعاعان $\vec{U},\vec{V}$ مرتبطان خطياً حسب التنويه 2

لان $\vec{v}=-4\vec{u}$

- ❖ تنويه هام1: قد ترد معك حالة ان يكون هناك شعاعان يملكان المركبات التالية: $\vec{U}(0,a,b)$, $\vec{V}(0,a',b')$ فحتى يكون الشعاعان مرتبطان خطياً يجب ان يكون $\frac{0}{0}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ وهنا نهمل النسبة الأولى ونحكم على الارتباط الخطي للشعاعين من تناسب النسبة($\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$)
- ❖ تنويه 2: وقد ترد لدينا حالة أخرى ان يكون هناك شعاعان يملكان المركبات التالية $\vec{U}(0,0,b)$, $\vec{V}(0,0,a)$ فهذان الشعاعان دوماً مرتبطان خطياً.
- ❖ تنويه3: الشعاعان الصفريان مرتبطان خطياً

السؤال 12: كيف نتثبت الارتباط الخطي للشعاعين شعاعياً؟

مثال ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. وليكن G مركز ثقل المثلث BIK. أثبت $\overrightarrow{DJ}$ و$\overrightarrow{DG}$ مرتبطان خطياً



نستفيد من المعطيات في نص المسألة لكتابة علاقة شعاعية وننطلق منها ونطبق قوانين الاشعة التي مرت معنا ك شال وخاصية متوازي الاضلاع وغيرها حتى نتوصل الى علاقة الارتباط الخطي للشعاعين

$\vec{u}=k\vec{v}$ بحيث k عدد حقيقي أو يمكن اخذ معلم مناسب واثبات ذلك تحليلاً

الحل: بما ان G مركز ثقل المثلث BIK كان $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$ وحسب شال سوف أظهر الشعاع $\overrightarrow{DG}$ فنجد:

$\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DK}=\vec{0}$ ومنه $3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=\vec{0}$

ولنظهر في العلاقة الملونة بالأحمر الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ فيكون:

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{DJ}+\underbrace{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JI}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{DJ}$$

ومنه يكون: $3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=3\overrightarrow{DG}+2\overrightarrow{DJ}\Longrightarrow 3\overrightarrow{DG}=-2\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{JD}$

اي $3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{JD}$ فالشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و$\overrightarrow{DG}$ مرتبطان خطياً

طريقة ثانية: يمكن اخذ معلم مناسب و اثبات ذلك تحليلاً.

السؤال 13: كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة؟

لتكن النقاط A,B,C م لإثبات

ان النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة يكفي ان نثبت

أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً إن كان تحليلاً او شعاعياً كما تعلمنا في السؤالين السابقين وفي حال لم يكونا مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة

مثال: لتكن النقاط $A(-4,1,3),B(-2,0,5),C(0,-1,7)$

أثبت أن النقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة.

الحل: لنكتب الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}(-2+4,0-1,5-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$$

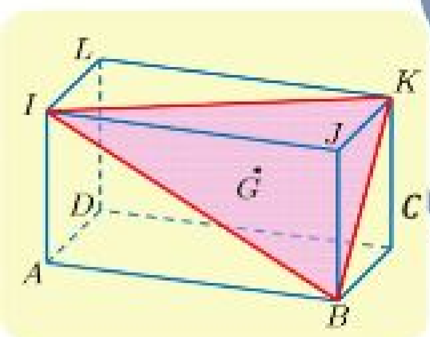
$$\overrightarrow{BC}(0+2,-1-0,7-5)\Longrightarrow\overrightarrow{BC}(2,-1,,2)$$

نلاحظ ان الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة

اي: $\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=\frac{2}{2}$ وبالتالي فالنقاط A,B,C

على استقامة واحدة.

مثال: ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. وليكن G مركز ثقل المثلث BIK. أثبت أن النقاط D,J,G تقع على استقامة واحدة.



الحل: طريقة 1 بما ان G مركز ثقل المثلث BIK كان $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$ وحسب شال سوف أظهر الشعاع $\overrightarrow{DG}$ فنجد:

$3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DK}=\vec{0}$

ولنظهر في العلاقة الملونة بالأحمر الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ فيكون:

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{DJ}+\underbrace{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JI}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{DJ}$$

ومنه يكون: $3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DK}=3\overrightarrow{DG}+2\overrightarrow{DJ}\Longrightarrow 3\overrightarrow{DG}=-2\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{JD}$

اي $3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{JD}$ فالشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و$\overrightarrow{DG}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإن النقاط D,J,G تقع على استقامة واحدة .

طريقة2: نختار على سبيل المثال المعلم : $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$ فتكون أحداثيات النقاط كالتالي:

$$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),I(0,0,1),J(1,0,1),K(1,1,1)$$

$$G(\frac{1+0+1}{3},\frac{0+0+1}{3},\frac{0+1+1}{3}) \Rightarrow G(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

لنكتب الشعاعين $\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DJ}$

$$\overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3}-0,\frac{1}{3}-1,\frac{2}{3}-0\right) \Rightarrow \overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DJ}(1-0,0-1,1-0) \Rightarrow \overrightarrow{DJ}(1,-1,1)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DJ}$ مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي: $\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{-2}{3}}{-1}=\frac{\frac{2}{3}}{1}$ وبالتالي فإن النقاط D,J,G تقع على استقامة واحدة.

السؤال 14: كيف نكتب معادلة كرة ؟

مثال: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة A التي إحداثياتها $(1,2,-4)$.

1 جد معادلةً للكرة S التي مركزها O ونصفُ قطرها يساوي 5.

2 جد معادلةً للكرة S' التي مركزها O وتمر بالنقطة A.

الحل: 1

$$S:(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=5^2$$

فتكون معادلة الكرة

$$S:x^2+y^2+z^2=25$$

2 إن نصف قطر الكرة S' يساوي OA

لنحسب المسافة بين O و A

$$R^2 = OA^2 = 1^2+2^2+-4^2=21$$

$$S':(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=21$$

$$S':x^2+y^2+z^2=21$$

إن الكرة s التي مركزها $o(a,b,c)$ ونصف قطرها R هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $OM^2=R^2$

أي: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

أي لكتابة معادلة الكرة يلزمنا نصف قطرها ومركزها.

السؤال 15: كيف نثبت أن نقطة ما ولتكن C تنتمي للمستوي المحوري للقطة المستقيمة ولتكن مثلاً AB

إن المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها نفس المسافة.

مثال:

لدينا النقطتان $A(5,2,-1), B(3,0,1)$ بين أي النقاط C أو E

تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$،

في حالة $C(-2,5,-2), E(3,2,1)$

الحل:

- $AC = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$

$BC = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$

ومنه $AC = BC$ أي أن C متساوية البُعد

عن طرفي القطعة المستقيمة $[AB]$

فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة $[AB]$

إذن لإثبات أن نقطة ما ولتكن C تنتمي للمستوي المحوري للقطة المستقيمة ولتكن مثلاً AB

يكفي أن نثبت أن بُعد C عن A

هو نفسه بُعد C عن B

أي: $AC = BC$

- $AE = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$

$BE = \sqrt{0+4+0} = 2$

نلاحظ ان $AE \neq BE$ أي ان E لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال16: كيف نثبت ان مجموعة نقاط مثلاً A, B, C تقع جميعها على كرة واحدة مركزها D مثلاً؟

مثال: نتأمل النقاط:

$A(2,3,-1), B(2,8,-1), C(7,3,-1),$
$D(-1,3,3), E(5,3,3)$

أثبت ان B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A.

$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (8-3)^2 + (-1+1)^2} = 5$

$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (3-3)^2 + (-1+1)^2} = 5$

$AE = \sqrt{(5-2)^2 + (3-3)^2 + (3+1)^2} = 5$

$AD = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-3)^2 + (3+1)^2} = 5$

نلاحظ أن جميع النقاط B, C, D, E تبعد عن A مسافة 5

وبالتالي فهي تقع على الكرة التي مركزها A

ونصف قطرها 5

يكفي ان نثبت ان بُعد C عن D هو نفسه بُعد B عن D ونفسه

بُعد A عن D أي يجب ان يكون

$DC = DB = DA$ عندها

نقول ان النقاط A, B, C تقع جميعها على كرة واحدة مركزها D ونصف

قطرها هو $R = DC = DB = DA$

السؤال 17: كيف نعيين على محور الفواصل نقطة ولتكن C متساوية البُعد عن النقطتين A, B مثلاً.

مثال:

جدْ على محور الفواصل نقطةً C متساوية البُعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و$B(0,5,-1)$

إن النقطة C تقع على المحور الفواصل فتكون احداثياتها $C(x,0,0)$ وبما انها متساوية البعد عن النقطتين A, B فيكون

$$CA = CB$$

نعوض ونحل معادلة من الدرجة الأولى فنحصل على قيمة x وبالتالي نكون قد عينا النقطة C

الحل:

$$CA = CB \Longrightarrow CA^2 = CB^2$$

$$(x-2)^2 + (-1-0)^2 + (3-0)^2 = (x-0)^2 + (0-5)^2 + (-1-0)^2$$

$$x^2 - 4x + 14 = x^2 + 26 \Longrightarrow -4x = 12 \Longrightarrow x = -3$$

إذاً احداثيات النقطة $C(-3,0,0)$.

ملاحظة: *لتعيين نقطة على محور التراتيب بنفس الأسلوب لكن تكون* $C(0,y,0)$

السؤال 18: كيف نثبت أن ثلاث نقاط ولتكن A, B, C تعين مستوي(كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط في مستوٍ واحد)؟

مثال:

لتكن النقاط $A(1,2,3)$

$, B(0,1,4), C(-1,-3,2)$

بيّن أن النقاط A, B, C تعين مستوي (ABC)

يكفي أن نثبت أن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة أي يكفي ان نثبت ان لشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}(-2,-5,-1)$$

نلاحظ ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي: $\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{-5} \neq \frac{-1}{-2}$

وبالتالي فالنقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي فهي تعيين مستوي (ABC)

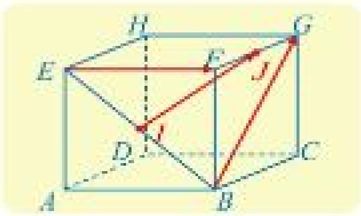
السؤال 19 كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث اشعة ولتكن مثلاً $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}$ شعاعياً وتحليلاً؟

شعاعياً كان ام تحليلاً سنثبت ان $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ **مثلاً غير مرتبطين خطياً**

ثم نثبت أنه يوجد عددين a و b يحققان ان:

$$\overrightarrow{W} = a\overrightarrow{U} + b\overrightarrow{V}$$

إذا تم تعيينaوb وبالتالي نكون قد عبرنا عن الشعاع بدلالة الشعاعين الاخرين عندها تكون الاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً



مثال: $ABCDEFGH$ مكعب. النقطة I منتصف $[BE]$

و J منتصف $[FG]$

أثبت ان الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

الحل: شعاعياً: ليس واضحاً من الشكل وجود شعاعين مرتبطين خطياً من بين الأشعة الثلاثة وقد لا يكون ذلك صحيحاً. لنحاول إذن التعبير عن $\overrightarrow{IJ}$ بدلالة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ وهما غير مرتبطين خطياً لأنهما متعامدان. لأجل ذلك نستفيد من علاقة شال.

فعلى سبيل المثال $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$ ①

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$ ②

بجمع ① مع ② نجد: $2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \underbrace{\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ}}_{\vec{0}}$

ومنه: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} \implies \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

وهذا يثبت الارتباط الخطي للاشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ حيث تمكنا من كتابة شعاع بدلالة الشعاعين الباقيين أي عينا قيمة $a = b = \frac{1}{2}$

يمكن حل هذا السؤال بطريقة ثانية وذلك تحليلاً بأخذ معلم مناسب على سبيل المثال $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

فيكون $A(0,0,0), B(1,0,0), G(1,1,1), F(1,0,1), J\left(1, \frac{1}{2}, 1\right), E(0,0,1)$

I منتصف $[EB]$ فتكون احداثياتها $I(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

نوجد الاشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{EF}(1,0,0)\ ,\overrightarrow{BG}(0,1,1)\ ,\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ نلاحظ ان $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة الأن لنثبت وجود عددين حقيقين $a\ ,b$ يحققان ان: $\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{BG}$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\frac{1}{2} = a\\ \frac{1}{2} = b\\ \frac{1}{2} = b\end{matrix} \implies \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

وهذا يثبت الارتباط الخطي للاشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ حيث تمكنا من كتابة شعاع بدلالة الشعاعين الباقيين أي عينا قيمة $a = b = \frac{1}{2}$

السؤال 20 كيف نثبت أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد P ولتكن النقاط A, B, C, D وكيف نبين اذا كانت نقطة ما ولتكن E تنتمي الى المستوي P ؟

فكرة الحل: لاثبات أن النقاط A, B, C, D تنتمي الى مستوي واحد نثبت أن الاشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً وذلك كما تعلمنا في السؤال 19

نتأمّل، في المعلم $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ النقاط الآتية

$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0), D(-3,-5,6)$

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد P،

وتبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P.

الحل:

لنوجد الاشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$, $\overrightarrow{AC}(3,5.-1)$, $\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$

نلاحظ أن الشعاعيين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما\ غير متناسبة

أي: $\frac{0}{-1} \neq \frac{-2}{5} \neq \frac{-1}{3}$ وبالتالي النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

فهي تعيين مستو (ABC) .

ولنثبت ان D تنتمي

الى المستوي

(ABC) وتكون D نقطة

من المستوي (ABC)

إذاوجد عددان a,b **يحققان ان:**

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -5 = -a + 3b \dots\dots.(1) \\ -5 = -2a + 5b \dots\dots(2) \\ 5 = -b \dots\dots\dots\dots\dots.(3) \end{cases}$$

من (3) نجد أن $b = -5$ نعوضها في (1) نجد

$a = -10$ نعوض قيمة a , b في (2) للتحقق

$$-5 \overset{?}{=} -2(-10) + 5(-5)$$

شرح موسع ان إثبات إن الاشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

مرتبطة خطياً هو فعلياً له المعنى التالي

بداية نحن نثبت ان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مثلاً غير مرتبطة خطياً وهذا يعني ان النقاط A , B , C تعيين مستو (ABC)

ثانياً نثبت انه يوجد **عددين a و b يحققان ان:**

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

وهنا نحن نثبت انتماء النقطة D

الى المستوي (ABC) عندها تكون النقاط الأربعة في مستو واحد

بمعنى اخر: لاثبات ان أربع نقاط تقع في مستوي واحد نثبت ان ثلاث نقاط تعيين مستوي ثم نثبت انتماء النقطة الرابعة الى المستوي

- ولو اردنا اثبات ان نقطة خامسة E تنتمي الى المستوي $ABCD$ نثبت انها تنتمي الى المستوي (ABC) او نعوض احداثيات هذه النقطة في معادلة المستوي فإذا تحققت فأنها تنتمي وأن لم تحقق فهي لا تنتمي وستتعلم لاحقاً طرق كتابة معادلة مستو لجميع الحالات.

$-5 = -5$ محققة إذاً $\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ وبالتالي فالنقطة D تنتمي الى المستوي (ABC)

والاشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً وبالتالي فالنقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد $\boldsymbol{P}$

- لنبحث عن عددين a , b يحققان أن: $\overrightarrow{AE} = \vec{a}\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

وبنفس الأسلوب من أجل النقطة E حيث سنرى ان كانت تنتمي الى المستوي $\boldsymbol{P}$

سنرى ان كانت النقطة $\boldsymbol{E}$ تنتمي الى المستوي $(\boldsymbol{ABC})$ فلو انتمت كانت الاشعة $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$ مرتبطة خطياً وبالتالي تكون النقاط $\boldsymbol{A, B, C, E}$ في مستوٍ واحد ايضاً أي جميع النقاط تنتمي الى مستوي واحد $\boldsymbol{P}$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = -a + 3b \,\ldots\ldots.\,(1) \\ 1 = -2a + 5b \,\ldots\ldots.\,(2) \\ 1 = -b \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\,(3) \end{cases}$$

من (3) نجد أن $b = -1$ نعوضها في (1) نجد

$a = -4$ نعوض قيمة a , b في (2) للتحقق

$1 \stackrel{?}{=} -2(-4) + 5(-1)$

$1 \neq 3$ غير محققة وبالتالي فالنقطة E لا تنتمي الى المستوي (ABC) أي انها لا تنتمي الى المستوي P والاشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}$ غير مرتبطة خطياً.

السؤال 21: ماذا يفيد مفهوم مركز الابعاد المتناسبة؟

يفيد في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

ويفيد في إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد.

ويفيد في إثبات تقاطع مستقيمات.

سأحاول أن اطرح امثلة عن كل واحدة ولكن سنتذكر معاً مفهوم مركز الابعاد المتناسبة

1. **مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين:**

-مركز الابعاد المتناسبة G للنقطتين المثقلتين $(A, \alpha), (B, \beta)$ بشرط:

$\alpha + \beta \neq 0$ يحقق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ عندئذٍ يكون

$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} = \mu\overrightarrow{BA}$ أو $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{AB}$

أي ان G نقطة من المستقيم (AB) أوهي علاقة الارتباط الخطي بين شعاعين ومن هنا تكمن أهمية الابعاد المتناسبة في اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

- في حال كان $\alpha = \beta$ فإن G تقع منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$
- أياً كانت M نقطة من المستوي فإن $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

يُستفاد من هذه العلاقة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط M الذي سوف نتكلم عنه في الأسئلة القادمة.

2. مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط مثقلة:

-مركز الابعاد المتناسبة G للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ بشرط:

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ تحقق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ عندئذٍ يكون

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

وهذه العلاقة تذكرنا بإن الاشعة $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً أي ان G تنتمي الى المستوي (ABC) أي النقاط G,A,B,C تقع في مستوٍ واحد ومن هنا تكمن أهمية مركز الابعاد المتناسبة في إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد.

- الخاصة التجميعية: G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:
$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$
لو افترضنا أن H مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$
عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين: $(C,\gamma),(H,\alpha+\beta)$
- مبرهنة الاختزال: أياً كانت M فإن:
فإن $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
- يُستفاد من هذه العلاقة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط M الذ سوف نتكلم عنه في الأسئلة القادمة.

3. مركز الابعاد المتناسبة لأربع نقاط مثقلة:

-مركز الابعاد المتناسبة G للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$ بشرط:

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ يحقق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

- حيث $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$
لو افترضنا أن H مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$
و K مركز ابعاد متناسبة للنقطتين: $(C,\gamma),(D,\delta)$
عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين:
$(K,\delta+\gamma),(H,\alpha+\beta)$
- أو G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$
لو افترضنا أن H مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$
عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين:
$(H,\alpha+\beta+\gamma),(D,\delta)$
- أياً كانت M فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\delta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

تنويه: G منتصف (AB) $\Leftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ حيث $\alpha=\beta$

G مركز ثقل المثلث $ABC \Longleftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة للنقاط
$(C,\gamma),(A,\alpha),(B,\beta)$حيث: $\alpha=\beta=\gamma$
Gمركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD \Longleftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة
للنقاط $(C,\gamma),(A,\alpha),(B,\beta),(D,\delta)$حيث: $\alpha=\beta=\gamma=\delta$
ملاحظة: في العادة نأخذ نحن تثقيلة 1 في الحل لكن ليس شرط حسب الحاجة أي:
Gمنتصف $(AB) \Longleftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(A,1),(B,1)$
Gمركز ثقل المثلث $ABC \Longleftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(C,1),(A,1),(B,1)$
Gمركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD \Longleftarrow G$ مركز ابعاد متناسبة
للنقاط $(C,1),(A,1),(B,1),(D,1)$

تنويه هام: نعلم ان $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ و $\alpha+\beta\neq 0$ فمثلاً

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$ومنه Kمركز ابعاد متناسبة للنقطتين: $(A,2)$, $(B,1)$ حيث: $2+1\neq 0$

وايضاً لدينا العلاقة $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ عندئذٍ نقول ان D مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,1-a-b),(B,a),(C,b)$

فمثلاً لو كان لدينا العلاقة $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ عندئذٍ نقول ان D مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$\left(A,1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right),\left(B,-\frac{1}{3}\right),\left(C,\frac{2}{3}\right)$:

اعتماداً على ما شرحته سأطرح الأسئلة الاتية:

السؤال22: كيف نثبت ان ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة اعتماداً على مركز الابعاد المتناسبة؟

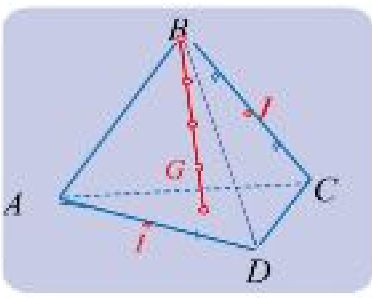
- نثبت ان إحدى هذه النقاط هو مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين.

نستفيد من التنويه والخاصة التجميعية في اثبات المطلوب

سأطرح عدة امثلة.

مثال:

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G .
I منتصف $[AD]$
J منتصف $[BC]$.اثبت ان
I,J,G تقع على استقامة واحدة.



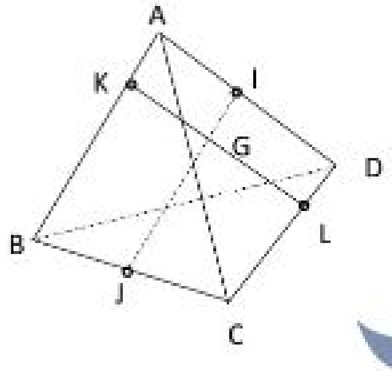
الحل:

لكي نثبت ان النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة مكننا أن نثبت مثلاً ان G هي

مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (I,α) و (J,β)

لمّا كان G مركز ثقل $ABCD$، فهو إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط. $(C,1),(A,1),(B,1),(D,1)$ ولكنّ I منتصف $[AD]$، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(D,1)$ و J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ واستناداً إلى الخاصّة التجميعيّة، النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و$(J,2)$. فالنقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة، وتكون G في منتصف $[IJ]$.

مثال:



لتكن ABCD رباعي وجوه النقطة K من [AB] تحقق: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و L النقطة من $[CD]$ تحقق: $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ واخيراً I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$ ونعرف G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$, $(D,2),(C,1),(B,1)$

اثبت ان

G , K , L على استقامة واحدة.

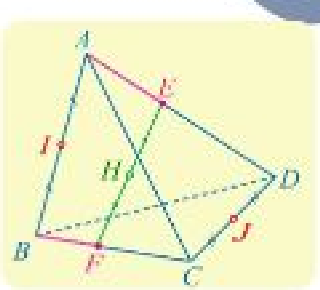
ثم اثبت ان G , J, I تقع على استقامة واحدة.

الحل: من العلاقة $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ نستنتج أن K مركز ابعاد متناسبة للنقطتين: $(A,2)$, $(B,1)$

ومن العلاقة $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ نستنتج أن L مركز ابعاد متناسبة للنقطتين: $(D,2)$, $(C,1)$

وبما ان G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط: $\underbrace{(A,2),(B,1)}_{K,3},\underbrace{(C,1),(D,2)}_{L,3}$ فحسب الخاصة التجميعية فإن G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين: $(K,3),(L,3)$ وبالتالي فإن G , K , L على استقامة واحدة.

- I منتصف $[AD]$، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(D,2)$ و J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ واستناداً إلى الخاصّة التجميعيّة، النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(J,2)$, $(I4)$ أي ان G , J, I تقع على استقامة واحدة.



مثال: $ABCD$ رباعي وجوه، و a عددٌ حقيقي I و J هما، بالترتيب منتصفا $[AB]$ و$[CD]$. و E و F نقطتان تحققان العلاقتين:

$\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$

. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة.

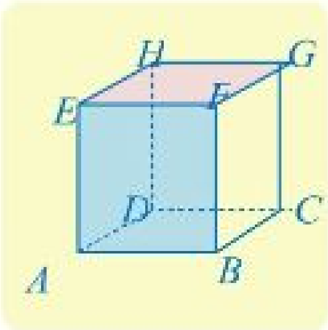
الحل: يُترك للطالب بنفس أسلوب المثال السابق تماماً.

السؤال23: كيف نثبت وقوع نقاط في مستوٍ واحد اعتماداً على مركز الابعاد المتناسبة؟

نثبت ان نقطة ما هي مركز ابعاد متناسبة للنقاط البقية يكون في السؤال علاقة شعاعية ننطلق منها حتى الوصول الى علاقة مركز الابعاد
او معطيات تفيدنا في استخدام الخاصة التجميعية والوصول إلى علاقة مركز الا بعاد

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب.



أثبت ان النقطة K المعرفة بالعلاقة

$$2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

تنتمي الى المستوي (BCG) ثم ارسم K

لإثبات أن نقطة K تنتمي إلى مستوٍ (BCG)،

يكفي إثبات ان K هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط (B,α) و (C,β) و (G,γ)

لإثبات ان K هي نقطة من المستوي (BCG)، نبحث عن علاقة بين الأشعة $\overrightarrow{KG}$، $\overrightarrow{KC}$، $\overrightarrow{KB}$.

باستخدام علاقة شال، نكتبُ العلاقة المفروضة $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ بالصيغة المُكافئة: $2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

ومنه: $-\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{CK} - 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$ أي:

$$\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

ولما كان $1 + (-2) + 3 \neq 0$، استنتجنا أنَّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1), (C,-2), (G,3)$ وهذا يثبت انتماء K إلى المستوي (BCG).

لرسم النقطة K، نبدأ برسم L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,-2), (G,3)$ إذ تكتب العلاقة $3\overrightarrow{LG} - 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{GL} = -2\overrightarrow{GC}$ فنرسم L على امتداد $[CG]$ على أن تقع G بين C و L وتحقق $GL = 2GC$ وأخيرا نرسم K، مركز النقطتين $(B,1), (L,1)$ أي منتصف القطعة $[BL]$.

مثال:

ABCD رباعي وجوه ، a عدد حقيقي I, J هما على الترتيب منتصفا $[CD], [AB]$ و E وF نقطتان تحققان $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$
و H منتصف $[EF]$ كما أن النقطة M تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

- أثبت أن النقاط M, B, C, D تقع في مستوٍ واحد ثم وضع النقطة M

الحل:

$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC} \Leftarrow$ $(F,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(C,\alpha),(B,1-\alpha)$ و $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD} \Leftarrow$ $(E,1)$

مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

وبالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة$(F,1)$, $(E,1)$ (هو نفسه هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1-\alpha),(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha)$

بما أن C,D لهما نفس التثقيل فإن مركز الأبعاد المتناسبة لهما هو J منتصف $[CD]$.

بما أن A,B لهما نفس التثقيل فإن مركز الأبعاد المتناسبة لهما هو I منتصف $[AB]$.

$\Leftarrow$ مركز الأبعاد المتناسبة H للنقاط $(A,1-\alpha),(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha)$

هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة لـ I,J وهذا

يعني أن النقاط I,J,H تقع على استقامة

واحدة

- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

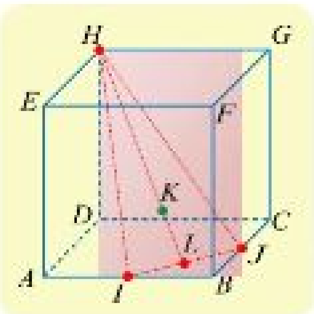
$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}=\vec{0} \Rightarrow$

أي أن Mهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1),(C,1),(D,1)$

فالنقاط الأربع تقع في مستوٍ واحد

حيث M هي مركز ثقل المثلث DBC

مثال



$ABCDEFGLH$ مكعّب، I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و$[BC]$ بالترتيب، و Kهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1),(H,1)$ أثبت وقوع النقاط I و J و K و H في مستوٍ

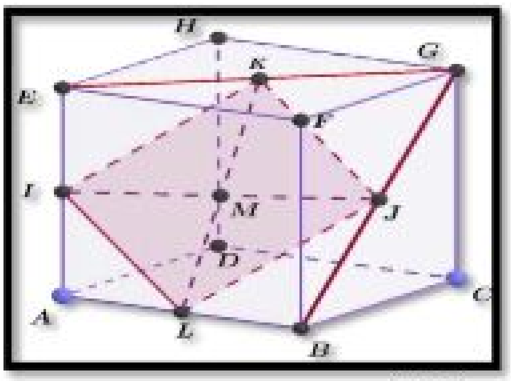
الحل:

استناداً إلى الفرض I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,1)$ وJهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ ولأنّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط.$(A,1),(B,2),(C,1),(H,1)$ استنتجنا من الخاصة التجميعية أنّ K هي

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I.2)$, $(J,2)$, $(H,1)$ وهكذا نرى أنّ K واقعة في المستوي (IJH) والنقاط I , J , K , H تقع في مستوٍ واحد.

السؤال24: كيف نثبت تقاطع مستقيمين او تلاقي مستقيمين في نقطة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟

يكفي ان نثبت ان مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين من المستقيم الأول هو نفسه مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين من المستقيم الثاني



أثبت ان المستقيمان IJ , KL متلاقين في M

الحل:

النقطة $\boldsymbol{M}$ مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط $(\boldsymbol{A},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{B},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{G},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{E},\mathbf{1})$

ولأنّ $\boldsymbol{I}$ منتصف $[\boldsymbol{AE}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{A},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{E},\mathbf{1})$

ولأنّ $\boldsymbol{J}$ منتصف $[\boldsymbol{BG}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{B},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{G},\mathbf{1})$

فيكون $\boldsymbol{M}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{I},\mathbf{2})$ و $(\boldsymbol{J},\mathbf{2})$ إذاً $\boldsymbol{M}$ منتصف $[\boldsymbol{IJ}]$

لأنّ $\boldsymbol{K}$ منتصف $[\boldsymbol{EG}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{E},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{G},\mathbf{1})$

و L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{B},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{A},\mathbf{1})$ لان L منتصف $[AB]$

فيكون $\boldsymbol{M}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(\boldsymbol{K},\mathbf{2})$ و $(\boldsymbol{L},\mathbf{2})$ إذاً $\boldsymbol{M}$ منتصف $[\boldsymbol{KL}]$

ومنه يتلاقى المستقيمان $(\boldsymbol{IJ})$ و $(\boldsymbol{KL})$ في $\boldsymbol{M}$ فالنقاط I, J, K, L تقع في مستوٍ واحد

والرباعي $\boldsymbol{ILJK}$ متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان

السؤال25: كيف نثبت تلاقي ثلاث مستقيمات في نقطة واحدة اعتماداً على مركز الابعاد المتناسبة؟

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$،

ولتكن P , Q , R , S النقاط التي تحقق:

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$.

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.

الحل:

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}\rightarrow\overrightarrow{PA}+x\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{PB}=\vec{0}\rightarrow\overrightarrow{PA}-x\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$
$$(1-x)\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

إذاً $\boldsymbol{P}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{A},\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$ و (B,x)

ونجد بالمثل أنّ $\boldsymbol{Q}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{A},\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$

وكذلك $\boldsymbol{R}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{R},\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$ وأخيراً

$\boldsymbol{S}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{C},\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$

استناداً إلى الخاصة التجميعية $\boldsymbol{G}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة لكل من $(\boldsymbol{P},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{R},\mathbf{1})$ ، أي هي منتصف $[\boldsymbol{PR}]$ ومن جهة أخرى $\boldsymbol{G}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{Q},\mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{S},\mathbf{1})$ فهي أيضاً تقع في منتصف $[\boldsymbol{SQ}]$ واخيراً لأنّ $\boldsymbol{I}$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{A}.\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{C},\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$ وكذلك $\boldsymbol{J}$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{x})$

استنتجنا أنّ $\boldsymbol{G}$ هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\boldsymbol{I},\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{J},\mathbf{2}\boldsymbol{x})$ فالنقطة $\boldsymbol{G}$ تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة $[\boldsymbol{IJ}]$

نستنتج مما سبق أنّ $\boldsymbol{G}$ نقطة تلاقي القطع المستقيمة $[\boldsymbol{IJ}]$ $[\boldsymbol{PR}]$ $[\boldsymbol{SQ}]$ فالمستقيمات $(\boldsymbol{IJ})$ و $(\boldsymbol{PR})$ $(\boldsymbol{QS})$ متلاقية في نقطة واحدة

نثبت وجود مركز أبعاد واحد هو نفسه نقطة تلاقي المستقيمات

- **بوجه عام** : لتكن المثلث ABC ولتكن G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) , (B,β) , (C,γ) ونفترض أن A' هو مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين (B,β) , (C,γ) وأن B' هو مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (C,γ), (A,α) وكذلك أن C' هو مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) , (B,β).

عندئذ تتلاقى المستقيمات

(AA') و (BB') و (CC') في نقطة واحدة هي G

السؤال 26: كيف نعيين α وβ وγ لتكون مثلاً M مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين: (A,α) , (B,β) , (C,γ) (تُعطى علاقة شعاعية فقط)؟

في حال طلب تعيين α وβ توصل علاقة الشعاعية المعطاة الى الشكل $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

بالمقارنة نحصل على α وβ **وذلك عن طريق استخدام خواص الاشعة وغالباً نستخدم شال**

اما في حال طلب تعيين α وβ وγ فبنفس الأسلوب لكن توصل العلاقة الشعاعية الى $\alpha \overrightarrow{MA}+\beta \overrightarrow{MB}+\gamma \overrightarrow{MC}=\vec{0}$

وبالمقارنة نصل الى المطلوب

ويمكن ك طريقة ثانية اللجوء الى التنويه الهام الذي اشرت له في الصفحة 18

مثال: أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

(A,α) و (B,β).

1. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$
2. $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
3. $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

الحل: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

الطريقة 1 $\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \implies \begin{cases}\beta=2\\ \alpha+\beta=7\end{cases} \implies \alpha=5$

الطريقة 2: $7\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})$ حسب شال

$$7\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$\rightarrow 5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \rightarrow -5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \rightarrow 5\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

بالمقارنة مع علاقة مركز الابعاد العامة نجد: $\beta=2$ و $\alpha=5$

2 و 3 بنفس الأسلوب.

مثال: جد الأ عاد α و β و γ لتكون M مركز المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

1. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

الحل: 1

$\overrightarrow{AM}=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$ حسب شال

$\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

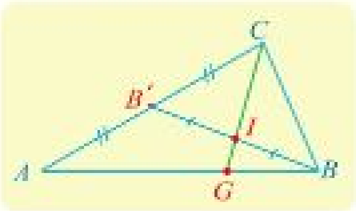
$-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ بالمقارنة مع علاقة مركز الابعاد العامة $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ نجد:

$\alpha=0$ و $\beta=-2$ و $\gamma=1$

طريقة 2 يمكننا ايضاً تعيين α وβ وγ حسب التنويه الهام الذي اشرتُ اليه في السؤال 18

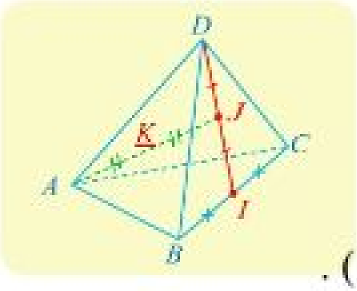
2 بنفس الأسلوب

السؤال 27: كيف نعيين α وβ وγ لتكون مثلاً M مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين: (A,α) ، (B,β) ، (C,γ) (يعطى شكل)؟مثال:



❖ انطلاقاً من الشكل المجاور . جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (c,γ)

واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA} + \lambda\ \overrightarrow{GB} = \vec{0}$



انطلاقاً من الشكل المجاور . جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (c,γ) و (D,δ) .

❖ الحل:

B' منتصف $[AC]$ ومنه B' مركز ابعاد متناسبة للنقطتين: $(A,1)$, $(B,1)$

و I منتصف $[BB']$ ومنه I مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين: (B,β) , $(B',2)$ ومنه حتماً $\beta = 2$ لتكون I منتصف $[BB']$

وبالتالي فإن: $\gamma = 1$ و $\alpha = 1$ وبما ان G تنتمي الى $[AB]$ فتكون G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,2)$ ومنه نكتب $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

بالمقارنة نجد $\lambda = 2$

I منتصف $[BC]$ ومنه I مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$

J منتصف $[DI]$ ومنه J مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$, $(D,2)$

أي ومنه J مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,2)$

K منتصف $[AJ]$ ومنه K مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(J,4)$, $(A,4)$

ومنه K مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,4)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,2)$

أي ان: $\delta = 2$ و $\gamma = 1$ و $\beta = 1$ و $\alpha = 4$

السؤال 28 كيف نوجد احداثيات مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط A , B , C مثلاً؟

إذا كان G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

(A,α) , (B,β) , (C,γ) ,A,B,C

فإن:

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B + \gamma X_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$Y_G = \frac{\alpha Y_G + \beta Y_B + \gamma Y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: احسب احداثيات G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,1)$, $(B,-2)$, $(C,3)$ حيث: $A(1,1,-1)$, $B(0,2,1)$, $C(-1,0,0)$

الحل: ان احداثيات G هي

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B + \gamma X_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{1\times1-2\times0+3\times-1}{1-2+3} = -1$$

$$Y_G = \frac{\alpha Y_G + \beta Y_B + \gamma Y_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{1\times1-2\times2+3\times0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{1\times-1-2\times1+3\times0}{2} = -\frac{3}{2}$$

ومنه $G\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

السؤال29: كيف نعيين مجموعة النقاط M مثلاً في الفراغ التي تحقق (سيكتب علاقة شعاعية)؟

سنوصل هذه العلاقة الشعاعية الى احدى هذه الحالات التي وردت معنا:

$\|\overrightarrow{MG}\| = K$ تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها K
$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها AB
$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ تمثل كرة مركزها منتصف $[AB]$ وقطرها $[AB]$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ تمثل مستوٍ مار من A ويقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظم له.

مثال:

لتكن $G(2,1,0)$ مركز ثقل المثلث ABC و $G'\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$, $(B,-1)$, $(C,1)$ عين مجموعة النقاط M التي تحقق:

1. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
2. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
3. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
4. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

سنعتمد على مبرهنة الاختزال التي نوهت عليها سابقاً سنتذكر هذه المبرهنة معاً وسأقف بعض الملاحظات عليها

- بفرض A, B, C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ ضمها نكن M من الفراغ فإن: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
حيث G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط: $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$
حيث $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$
- في حال كان $\alpha+\beta+\gamma = 0$ فإن الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ شعاع مستقل عن M نبحث عنه لنرى ما هو باستخدام مهارتنا في الاشعة (تحليل أحد الاشعة-استخدام شال-استخدام خاصية متوازي الاضلاع...الخ)
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC أي G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1), (B,1), (C,1)$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$ حيث G منتصف $[AB]$

بما ان Gمركز ثقل المثلث ABC ومنه فحسب الملاحظة فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ نعوض

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=6 \Longmapsto 3\|\overrightarrow{MG}\|=6 \Longmapsto \|\overrightarrow{MG}\|=2$$

وهي تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها2

2 $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

بما ان Gمركز ثقل المثلث ABC ومنه فحسب الملاحظة فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

و G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط$(C,1)$, $(B,-1)$, $(A,3)$ فيكون

:$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ نعوض في العلاقة فيكون: $\|3\overrightarrow{MG}\|=\left\|3\overrightarrow{MG'}\right\|$

$$\Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\|=3\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\|=\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$$

وهي تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

3 $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-1\overrightarrow{MB}-1\overrightarrow{MC}\|$

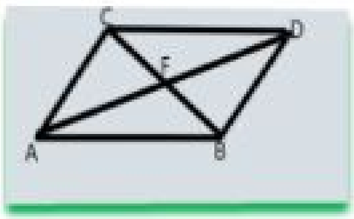
بما ان Gمركز ثقل المثلث ABC ومنه فحسب الملاحظة فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

وبما ان مجموع الامثال في الطرف الايمين يساوي الصفر أي:$2-1-1=0$ وبالتالي فالشعاع $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M لنبحث عنه لنرى ما هو:

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=$$

$$-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=-\underbrace{(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})}_{\text{حسب شال}}-\underbrace{(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})}_{\text{حسب شال}}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$$

$-\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})}_{\text{حسب قاعدة متوازي الاضلاع}}=-2\overrightarrow{AF}$ حيث أن F منتصف $[AD]$



بالتعويض في العلاقة نجد:

$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|-2\overrightarrow{AF}\| \Longmapsto \|\overrightarrow{MG}\|=\frac{2}{3}\|\overrightarrow{AF}\|=K=$ ثابت

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها Gونصف قطرها $\frac{2}{3}AF$

4 $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

ما ان Gمركز ثقل المثلث ABC ومنه فحسب الملاحظة فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

و G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط$(C,1)$, $(B,-1)$, $(A,3)$

:$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ نعوض في العلاقة فيكون:$3\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{MG'}=0 \Longmapsto 9\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$ تمثل كرة مركزها منتصف$[GG']$ وقطرها $[GG']$

السؤال30: كيف نعين طبيعة المجموعة M مثلاً (تُعطى معادلة فقط)؟

نرد هذه المعادلة الى الصيغة العامة وذلك عن طريق الاتمام الى مربع كامل ثم يتبين لنا ماهي طبيعة المعادلة من شكلها

مثال:

في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ عيّن طبيعة مجموعة

النقاط: $M(x,y,z)$ الحالات الآتية:

فائدة:

- $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R>0$

تمثل كرة

- $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$

تمثل نقطة

- $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R<0$

تمثل مجموعة خالية

1. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$
2. $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$
3. $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

الحل:

1. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

$$x^2-2x+(1)^2-(1)^2+y^2+6y+(3)^2-(3)^2+z^2-2=0$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-12=0 \Longmapsto (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$تمثل كرة مركزها $\omega(1,-3,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

3 و 2 بنفس الأسلوب تماماً

مثال: في معلم متجانس$(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ نتأمل النقطتين $\boldsymbol{A(2,1,2)}$, $\boldsymbol{B(-2,0,2)}$

- أعط معادلة للمجموعة Mالمكونة من النقاط $M(x,y,z)$التي تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

ما طبيعة المجموعة M ؟

الحل: لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)\\ \overrightarrow{MB}(-2-x,0-y,2-z)\end{matrix}\right) \Longmapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$

$$(2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)+(2-z)(2-z)=0 \Longmapsto$$

$x^2-4+y^2-y+(z-2)^2=0$ **وبالإتمام الى مربع كامل نجد:**

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$**طبيعة المجموعة M هي كرة مركزها** $\omega(0,\frac{1}{2},2)$ ونصف قطرها

$$R=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

السؤال31: كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في المستوى؟

يجري التعبير عن الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ كما في حالة المستوي أي:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

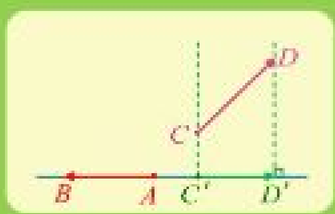
او $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

تحليلاً إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ في معلم متجانس هي (x,y) , (x',y') بالترتيب كان:

$$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$$

شعاعياً إذا كان $\overline{C'D'}$ المسقط القائم للشعاع $\overline{CD}$ على المستقيم (AB)

(نستخدمها عندما نريد حساب الجداء السلمي في حال اعطانا شكل هندسي)

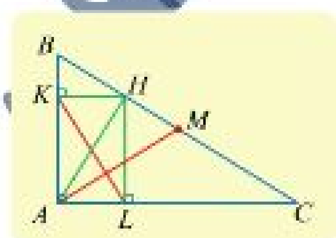


ملاحظة:الجداء السلمي لشعاعين يساوي الصفر يعنى ان الشعاعين متعامدين

مثال: ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(2,1)$, $\vec{v}(0,5)$ احسب الجداء السلمي للشعاعين ثم احسب $\cos\alpha$ حيث αالزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u},\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = 2(0) + 5(1) = 5$ و

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



مثال: ABC مثلث قائم في A، و M منتصف $[BC]$، و Hموقع الارتفاع المرسوم من A. ليكن K وL المسقطين القائمين للنقطة H على $[AB]$ و[AC] بالترتيب.

احسب $\overrightarrow{KL}.\overrightarrow{AM}$ ماذا تستنتج؟

الحل:

حسب قاعدة متوازي الاضلاع لدينا:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ حيث M منتصف $[BC]$.

ومنه يكون:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{KL} = \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right].\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL}) \quad (1)$$

لنحسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL}$

بالاستفادة من خاصية المسقط القائم حيث بالاستفادة من المسقط القائم على (AB)

نجد: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ وبالاستفادة من المسقط القائم

على (AC) نجد: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$ ومنه بالتعويض في 1

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$$

لأنّه استناداً إلى الفرض (AH) عمودي على (BC). ومنه نستنتج تعامد المستقيمين (AM) و (KL).

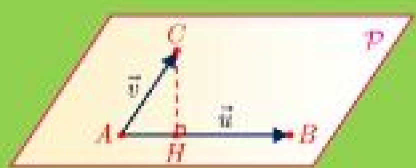
السؤال32: كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في الفراغ؟

يجري التعبير عن الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ كما في حالة الفراغ أي:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

او $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\,cos\alpha$

شعاعيا دون معلم وإذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستقيم (AB) كان $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$



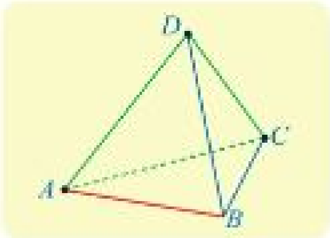
العبارة التحليلية للجداء السلمي لشعاعين في الفراغ: نفترض أن مركبات الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ في معلم متجانس هي (x, y, z) , (x', y', z') بالترتيب عندئذٍ: $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه منتظم. كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a.

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.COS\widehat{BAC} = a^2.COS\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$



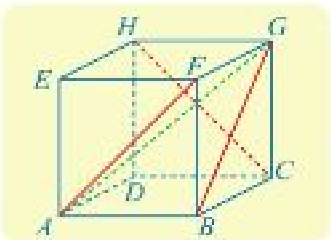
$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ لأن المثلث **ABC** متساوي الاضلاع.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\underbrace{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})}_{\text{حسب شال}} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

مثال: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

الحل:



لأنّ E هي المسقط القائم للنقطة F على (AE) استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = a^2$$

ولأنّ $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ و A هي المسقط القائم للنقطة B على (AE)

استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = a^2$.

ولأنّ H هي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (ADH)، و E هي المسقط القائم للنقطة H على $(\boldsymbol{AE})$ وجدنا ان: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = a^2$

واخيراً $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB} = 0$.

مثال: نُعطى في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ و $D(0,2,0)$ و $E(1,1,1)$. النقطة M هي منتصف $[AB]$ احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM}$

الحل: لنوجد الاشعة

$\overrightarrow{AE}(0,1,1)$ $\overrightarrow{AD}(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ و M منتصف $[AB]$ فتكون $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ ومنه يكون $\overrightarrow{CM}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ ، $\overrightarrow{OE}(1,1,1)$ وبالتالي يكون $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$ و

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 2 \text{ و } \overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM} = 0$$

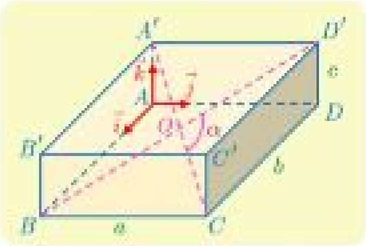
- مثال: نتأمّل هرماً $S - ABCD$ قاعدته مربّع وأرسه S. وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي

a احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

- $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a. فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$.

احسب $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$

نترك الحل لكم بنفس الأسلوب



مثال: $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O.

نضع $\alpha = \widehat{COD'}$ ونفترض أنّ $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos\alpha$. نختار معلماً متجانساً $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و$\vec{i}$ مرتبطين خطياً، و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطيّاً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و$\vec{k}$ مرتبطين خطياً. أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O.

أثبت أنّ $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$ ادرس على وجه الخصوص حالة المكعّب.

السؤال33: كيف نحسب بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي؟

مثال:

احسب بُعد النقطة A عن المستقيم d: $A(-2,4)$ و $d: 2x + y - 5$

$$dis(A,d) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2(-2)+1(4)-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = 5$$

في معلم متجانس بُعد النقطة $A(\alpha,\beta)$ عن المستقيم d الذي معادلتهُ $ax + by + c = 0$ يساوي

$$dis(A,d) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

السؤال34: كيف نحسب بُعد نقطة عن مستوٍ؟

مثال:

احسب بُعد النقطة A عن المستوي p

$A(5,-3,4)$: و $P: 2x - y + 3z - 5 = 0$

الحل:

$$dis(A,P) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(5)-1(-3)+3(4)-5|}{\sqrt{2^2+-1^2+3^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

في معلم متجانس بُعد النقطة $A(\alpha,\beta,\gamma)$ عن المستوي P الذي معادلتهُ $ax + by + cZ + d = 0$ يساوي

$$dis(A,d) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

السؤال35: كيف نثبت أن مستقيمين متعامدين؟

نثبت أن الجداء السلمي لشعاعي توجيه المستقيمين يساوي الصفر.

مثال: في معلم متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ النقاط:

اثبت أن المستقيمان (OE) و (CM) متعامدين.

الحل: $\overrightarrow{OE}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{CM}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \Longrightarrow \overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM} = 0$ وبالتالي المستقيمان (OE) و (CM) متعامدين.

مثال:

$ABCD$ مربّع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان

السؤال36: كيف نكتب معادلة مستوي مار من نقطة ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً عليه؟

مثال: نتأمل، في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقطة $A(2,1,-3)$ والشعاع $\vec{n}(1,1,2)$ أعط معادلة للمستوي P المار بالنقطة A ويقبل n شعاعاً ناظماً.

ليكن المستوي P ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً عليه ويمر بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عندئذٍ تكون معادلة المستوي P

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

الحل: تُعطى معادلة المستوي بالعلاقة

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$

بالتعويض تكون معادلة المستوي P

$$P: 1(x-2)+1(y-1)+2(z+3) \Longrightarrow P: x+y+2z+3=0$$

السؤال37: كيف نكتب معادلة مستوٍ Q مثلاً مار من نقطة ويوازي مستوٍ معلوم P مثلاً؟

مثال: اكتب معادلة للمستوي Q المار من $A(1,0,1)$ موازياً المستوي P حيث: $P: 2x-y+3z-4=0$

بما أن المستويين P,Q متوازيين فيكون ناظم المستوي Q المراد كتابة معادلته هو نفسه ناظم المستوي P أي $\vec{n}_p=\vec{n}_q$

فنكتب معادلة المستوي Q كما تعلمنا في السؤال 36

الحل:

بما أن المستويين P,Q متوازيين

فيكون $\vec{n}_p=\vec{n}_q(2,-1,3)$

تُعطى معادلة المستوي بالعلاقة

$$Q: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$

بالتعويض تكون معادلة المستوي Q المار من A

$$Q: 2(x-1)-1(y-0)+3(z-1)=0 \Longrightarrow Q: 2x-y+3z-5=0$$

السؤال38: كيف نكتب معادلة مستوٍ (ABC) يمر من ثلاث نقاط مثلاً A,B,C؟

هناك عدة طرق سأقدم شرحها جميعاً واطرح أمثلة وانت مخير باختيار احداها.

الطريقة الأولى: نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فهذه النقاط تعيين مستوٍ ونكتب حسب تعريف

المستوي هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقق:

$$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

مثال: نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط

$A(1,0,-1)\ ,B(2,2,3)\ ,C(3,1,-2)$ اكتب معادلة المستوي P المار من هذه النقاط.

الحل: لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(1,2,4)\ ,\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن

مركباتهما غير متناسبة أي: $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-1}$

ونكتب حسب تعريف المستوي هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقق:

$$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}x-1\\y-0\\z+1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x-1=a+2b & .(1)\\ y=2a+b & .(2)\\ z+1=4a-b & .(3)\end{cases}$$

بجمع (2)و(3)نجد: $y+z+1=6a\Longrightarrow a=\frac{y+z+1}{6}$ نعوض قيمة a في (3)فنجد:

$b=\frac{-2y+z+1}{-3}$ نعوض قيمة $a\ ,b$ في(1)فيكون:

$$x-1=\frac{y+z+1}{6}+2\left(\frac{-2y+z+1}{-3}\right)\xrightarrow{\text{نضرب العلاقة بـ}6}6x-6=y+z+1+8y-4z-4$$

ومنه فإن معادلة المستويP تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $P:2x-3y+z-1=0$

الطريقة الثانية: نثبت أن: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب إيجاد معادلته

والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ نحل معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c حيث نُعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ومنه نحصل على مركبات الشعاع الناظم $\vec{n}$ نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بثلاث نقاط نختار إحدى هذه النقاط (الاسهل في التعويض)

أي عُدنا الى السؤال 36

مثال: نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط

$A(1,0,-1)\ ,B(2,2,3)\ ,C(3,1,-2)$ اكتب معادلة المستوي P المار من هذه النقاط.

الحل: لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(1,2,4)$, $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي: $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-1}$

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Longmapsto(a,b,c)(1,2,4)=0\Longmapsto a+2b+4c=0 \quad (1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Longmapsto(a,b,c)(2,1,-1)\Longmapsto 2a+b-c=0 \quad (2)$$

نضع $C=1$ نعوض في 1 و 2 فيكون

$$\begin{cases}a+2b+4=0\\2a+b-1=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية ب}-2}\begin{cases}a+2b+4=0\\-4a-2b+2=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بالجمع}}-3a+6=0\Longmapsto a=2\Longmapsto b=-3$$

ومنه $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي P ويمر المستوي P بالنقاط الثلاثة نختار $A(1,0,-1)$ ونعوض في

$$P: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\Longmapsto P: 2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $P: 2x-3y+z-1=0$

الطريقة الثالثة:

نكتب شكل معادلة المستوي المعروف $ax+by+cZ+d=0$

نعوض إحداثيات النقاط A,B,C في المعادلة فنحصل على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل

a,b,c,d نعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ونحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل وبالتالي نحصل بذلك على قيمة كلاً من a,b,c,d نعوضهم في المعادلة فنكون قد حصلنا على معادلة المستوي المار بثلاث نقاط.

مثال: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$ اكتب معادلة المستوي P المار من هذه النقاط.

الحل:

نكتب شكل معادلة المستوي المعروف $ax+by+cZ+d=0$ ......$(\mathcal{M})$

نعوض $A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$ في المعادلة:

$A(1,0,-1) : a - c + d = 0$

$B(2,2,3) : 2a + 2b + 3c + d = 0$

$C(3,1,-2) : 3a + b - 2c + d = 0$

نعوض $d = 1$ مثلاً في المعادلات الثلاثة السابقة:

$$\begin{cases} a - c + 1 = 0 & 1 \\ 2a + 2b + 3c + 1 = 0 & 2 \\ 3a + b - 2c + 1 = 0 & 3 \end{cases}$$

من 1 نجد $a = c - 1$ نعوضها في 2 فيكون:

$$2(c-1) + 2b + 3c + 1 = 0 \Longrightarrow b = \frac{1-5c}{2}$$

نعوض قيمة $a\ ,\ b$ في 3 فنجد:

$$3(c-1) + \frac{1-5c}{2} - 2c + 1 = 0 \xrightarrow{\text{نضرب ب2}} 6c - 6 + 1 - 5c - 4c + 2 = 0$$

ومنه $c = -1$ ومنه يكون $a = -2$ و $b = 3$ نعوض قيمة كلاً من a, b, c, d في $(\mathcal{M})$

فيكون: $P: -2x + 3y - z + 1 = 0$ ومنه $P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

السؤال39: كيف نكتب معادلة مستوي يمر بنقطة وُعلم شعاعي توجيه $\vec{u}\ ,\vec{v}$؟

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب إيجاد معادلته

والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\vec{u}, \vec{v}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\vec{v} = 0$ و $\vec{n}.\vec{u} = 0$ نحل معادلتين بثلاث مجاهيل حيث نُعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ومنه نحصل على مركبات الشعاع الناظم $\vec{n}$ نعوض في الشكل العام لمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدنا الى السؤال 36.

مثال: اوجد معادلة المستوي P المار من $A(1,0,-1)$ والشعاعيين $\vec{v}(2,1,-1)$, $\vec{u}(1,2,4)$ شعاعي توجيه له.

الحل:

نفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\vec{v}, \vec{u}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ و $\vec{n}.\vec{v} = 0$

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Longrightarrow (a,b,c)(1,2,4) = 0 \Longrightarrow a + 2b + 4c = 0 \quad 1$$

$$\vec{n}.\vec{v} = 0 \Longrightarrow (a,b,c)(2,1,-1) \Longrightarrow 2a + b - c = 0 \quad 2$$

نضع $C = 1$ نعوض في 1 و 2 فيكون

$$\begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية ب-2}} \begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ -4a - 2b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بالجمع}} -3a + 6 = 0 \Longmapsto a = 2 \Longmapsto b = -3$$

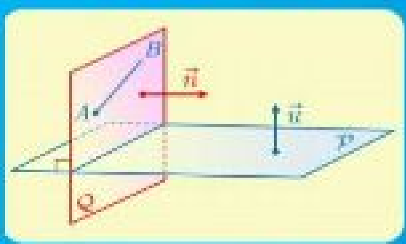
ومنه $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي P ويمر المستوي P بالنقطة $A(1,0,-1)$ ونعوض في

$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Longmapsto P: 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

السؤال40: كيف نكتب معادلة مستوي Q مثلاً العمودي على المستوي P المعلوم ويمر بنقطتين مثلاً A, B ؟

نفرض أن $\vec{n}_Q(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Q والمستويان P, Q متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم $\vec{u}$ على P شعاعاً عمودياً على $\vec{n_Q}$ كما إن المستقيم (AB) محتوى في Q فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ عمودي أيضاً على $\vec{n_Q}$



أي: نضع $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$, $\vec{u}.\vec{n} = 0$ فنحصل

على معادلتين بثلاث مجاهيل a, b, c

ولأنه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة على مستو فيمكننا إعطاء قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل فنحل جملة معادلتين بمجهولين فنحصل على الشعاع $\vec{n}_Q$ الناظم على المستوي Q

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث علم ناظمه ويمر بنقطتين نختار احداهما أي عدنا الى السؤال 36

مثال: نتأمل، في المعلم المتجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي P الذي معادلته $x - y + 3z - 4 = 0$. جد معادلةً للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B.

الحل: $P: x - y + 3z - 4 = 0$ فيكون ناظم المستوي P هو $\vec{u}(1,-1,3)$ والشعاع المحتوى في المستوي Q هو $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ ولنفرض أن $\vec{n}_Q(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Q

وبما أن المستويان P,Q متعامدان فرضاً إذن نكتب:

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_Q}=0 \Longmapsto (1,-1,3)(a,b,c)=0 \Longmapsto a-b+3c=0 \quad 1$$

و $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_Q}=0 \Longmapsto (1,1,2)(a,b,c)=0 \Longmapsto a+b+2c=0 \quad 2$$

لنضع $C=2$ ونعوض في المعادلتين 1 و 2 فيكون:

$$\left.\begin{matrix} a-b+6=0 \\ a+b+4=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 2a+10=0 \Longmapsto a=-5 \Longmapsto b=1$$

$\vec{n}_Q(-5,1,2)$ شعاع ناظم على المستوي Q ويمر المستوي Q في نقطتين لنختار $B(2,0,4)$ نعوض

$$Q: a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$\Longmapsto Q: -5(x-2)+1(y-0)+2(z-4)=0$$

ومنه فإن معادلة المستوي Q تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $Q:-5x+y+2z+2=0$

السؤال 41: كيف معادلة مستوي وليكن $\mathcal{R}$ العمودي على المستويين $\mathcal{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ المعلومين ويمر بالنقطة A مثلاً (الحالة العامة)؟

نفرض أن ناظم المستوي $\mathcal{R}$ هو $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$ وبما أن المستوي $\mathcal{R}$ عامودي على المستويين $\mathcal{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ فيكون ناظم المستوي $\mathcal{R}$ عامودي على ناظم المستوي $\mathcal{P}$ وعلى ناظم المستوي $\boldsymbol{Q}$ لذلك نضع: $\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_p}=0$ و $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R}=0$ فنحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c نعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل فنحل جملة معادلتين بمجهولين فنحصل على الشعاع $\overrightarrow{n}_R$ كناظم على المستوي $\mathcal{R}$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدنا الى السؤال 36

مثال:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ المستويين P وQ:

$$P: x-2y+3z-5=0 \quad \text{و} \quad Q: x+y+z+1=0$$

اكتب معادلة للمستوي R العمودي على كل من P وQ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

الحل: بفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي R

ولدينا: بفرض $\overrightarrow{n_P}(1,-2,3)$ شعاع ناظم على المستوي P و $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$ وشعاع ناظم على المستوي Q

وبما أن المستوي $\mathcal{R}$ عامودي على المستويين $\mathcal{P}$ و Q لذلك نكتب:

$$\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_p}=0 \Longmapsto (a,b,c)(1,-2,3)=0 \Longmapsto a-2b+3c=0 \quad 1$$

و $$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R}=0 \Longmapsto (a,b,c)(1,1,1)=0 \Longmapsto a+b+c=0 \quad 2$$

نضع: $c=1$ ونعوض في المعادلتين 1 و 2 فيكون:

$$\left.\begin{array}{r} a-2b+3=0 \\ a+b+1=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بالطرح}} 3b-2=0 \Longmapsto b=\frac{2}{3} \Longmapsto a=-\frac{5}{3}$$

$\vec{n}_R(\frac{-5}{3},\frac{2}{3},1)$ شعاع ناظم على المستوي R ويمر المستوي R في النقطة $A(2,5,-2)$

نعوض

$$R: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Longmapsto R: \frac{-5}{3}(x-2)+\frac{2}{3}(y-5)+1(z+2)=0$$

ومنه فإن معادلة المستوي R تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $R: -5x+2y+3z+6=0$

السؤال 42: كيف نكتب معادلة مستوي وليكن $\mathcal{R}$ العمودي على المستويين المعلومين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ المتقاطعين بفصل مشترك d عُلم شعاع $\overrightarrow{u_d}$ توجيهه ويمر $\mathcal{R}$ بالنقطة A مثلاً (الحالة الخاصة)؟

حالة خاصة وهامة في حال كان المستويين $\mathcal{P}$ و Q متقاطعين بفصل مشترك d (مستقيم) شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_d}$ وكان هناك مستوي ثالث R عامودي على هذين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ المتقاطعين عندئذٍ فإن ناظم المستوي R هو شعاع توجيه الفصل المشترك $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_R}$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدنا الى السؤال 36

مثال:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ المستويين P وQ:

$\boldsymbol{Q}: x+y+z+1=0$ و $P: x-2y+3z-5=0$

المتقاطعين بفصل مشترك d شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{u_d}(-5,2,3)$ اكتب معادلة للمستوي R العمودي على كل من P وQ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

الحل: بما أن: $\left.\begin{array}{c} R\perp P \\ R\perp Q \end{array}\right\} \Longrightarrow R\perp d$ ومنه فإن $\overrightarrow{u_d}(-5,2,3)$ شعاعاً ناظماً على المستوي R اي: $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_R}(-5,2,3)$

ويمر المستوي R في النقطة $A(2,5,-2)$

نعوض

$$R: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Longmapsto R: -5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0$$

ومنه فإن معادلة المستوي R تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $R: -5x+2y+3z+6=0$

السؤال 43: كيف نكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة مثلاً $[AB]$ ؟

مثال: اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

حيث: $A(4,0,-2)\ ,\ B(2,2,2)$ الحل:

بفرض I منتصف $[AB]$ ومنه فإن $I(\frac{4+2}{2},\frac{0+2}{2},\frac{-2+2}{2}) \Rightarrow I(3,1,0)$

نكتب الشعاع الناظم على المستوي حيث: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(-2,2,4)$

نعوض $-2(x-3)+2(y-1)+4(z-0)$

فإن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ $x-y-2z-2=0$

الطريقة الأولى: نوجد إحداثيات I منتصف $[AB]$ ونكتب الشعاع الناظم على المستوي حيث: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بالنقطة I أي عُدنا الى السؤال 36

مثال: اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

حيث: $A(4,0,-2)\ ,\ B(2,2,2)$

الحل

نفرض أن: $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي الى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ عندئذٍ يكون $MA=MB$

نعوض: $\sqrt{(4-x)^2+(0-y)^0+(-2-z)^2}=\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2+(2-z)^2}$

نربع $(4-x)^2+(0-y)^0+(-2-z)^2=((2-x)^2+(2-y)^2+(2-z)^2$

نفك الاقواس ونصلح فتكون معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ $x-y-2z-2=0$

الطريقة الثانية: نفرض أن: $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي الى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ عندئذٍ يكون $MA=MB$ وقد وضحت ذلك في السؤال 15

نعوض فنحصل على المعادلة المطلوبة

السؤال 44: كيف نكتب معادلة كرة التي مركزها w مثلاً وتمس المستوي P المعلوم؟

مثال: في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$

نتأمل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $P: x+2y+3z=5$.

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

$$R=\ dis(A,P)=\frac{|2(1)-2(2)+2(3)-5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

ومنه معادلة الكرة تكون: $S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

مثال:

اثبت أن المستوي P الذي معادلته: $P: 2x+y-2z+9=0$

يمس الكرة التي مركزها $A(2,-1,0)$ ونصف قطرها 4

الحل:

$$dis(A,P)=\frac{|2(2)-1(1)+0(-2)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=4$$

بما أن $R=\ dis(A,P)=4$ فإن المستوي P يمس الكرة

تعلمنا سابقاً في السؤال 14 لكتابة معادلة كرة يلزمنا نصف قطرها ومركزها

هُنا المركز معلوم لكن نصف القطر مجهول!

بما ان الكرة تمس المستوي فإن بُعد مركز الكرة w عن المستوي P يمثل نصف قطر الكرة أي:

R=$dis(A,P)$

ومنه ايضاً نستنتج السؤال التالي لاثبات أن مستوي يمس كرة

اثبت أن بُعد مركز الكرة عن المستوي هو نفسه نصف قطر الكرة

السؤال45: كيف نكتب معادلة أسطوانة؟

الحالة الأولى:

معادلة أسطوانة التي محورها $(o,\vec{i})$ ونصف قطرها R ومركزي قاعدتيها $A'(b,0,0)$

$A(a,0,0)$ هي $\begin{cases} y^2+z^2=R^2 \\ a\le x\le b \end{cases}$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها $(o,\vec{i})$ ومركزي قاعدتيها $A'(8,0,0)$ و

$A(4,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها $2\sqrt{2}$

فتكون معادلة الأسطوانة $\begin{cases} y^2+z^2=8 \\ 4\le x\le 8 \end{cases}$

الحالة الثانية: معادلة أسطوانة التي محورها $(o,\vec{j})$ ونصف قطرها R ومركزي

قاعدتيها $A'(0,b,0)$ و

$A(0,a,0)$ هي $\begin{cases} x^2+z^2=R^2 \\ a\le y\le b \end{cases}$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها $(o,\vec{j})$ ومركزي قاعدتيها $A'(0,6,0)$ و

$A(0,3,0)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$

فتكون معادلة الأسطوانة $\begin{cases} x^2+z^2=6 \\ 3\le y\le 6 \end{cases}$

الحالة الثالثة:

معادلة أسطوانة التي محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها R ومركزي قاعدتيها $A'(0,0,b)$

$A(0,0,a)$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ a\le z\le b \end{cases}$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها $(o,\vec{k})$ ومركزي قاعدتيها $A'(0,0,6)$ و

$A(0,0,3)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$

فتكون معادلة الأسطوانة $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 3\le z\le 6 \end{cases}$

السؤال 46: كيف نكتب معادلة مخروط؟

الحالة الأولى:

رأس المخروط هو O مركز القاعدة من النمط $(0,0,a)$ ونصف قطرها r فتكون معادلة المخروط من

النمط: $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{a^2}z^2=0 \\ 0\le z\le a \end{cases}$

مثال: مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,4)$ ونصف قطرها

3 فتكون معادلة المخروط $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{9}{16}z^2=0 \\ 0\le z\le 4 \end{cases}$

الحالة الثانية:

رأس المخروط هو O مركز القاعدة من النمط $(a,0,0)$ ونصف قطرها r فتكون معادلة المخروط من النمط: $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{a^2}x^2=0 \\ 0\leq x\leq a \end{cases}$

مثال: مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(4,0,0)$ ونصف قطرها 3 فتكون معادلة المخروط $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{9}{16}x^2=0 \\ 0\leq x\leq 4 \end{cases}$

الحالة الثالثة: رأس المخروط هو O مركز القاعدة من النمط $(0,a,0)$ ونصف قطرها r فتكون معادلة المخروط من النمط: $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{a^2}y^2=0 \\ 0\leq y\leq a \end{cases}$

مثال: مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{j})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,4,0)$ ونصف قطرها 3 فتكون معادلة المخروط $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{9}{16}y^2=0 \\ 0\leq y\leq 4 \end{cases}$

السؤال 47: كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم d يمر بنقطة مثلاً A وشعاع توجيهه $\vec{u_d}$ ؟

إنّ المستقيم d المار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجّه بالشعاع $\vec{u}(a,b,c)$ هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $(S)\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

تسمّى الجملة (S) **تمثيلاً وسيطياً للمستقيم** d في المعلم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ويسمّى t **وسيطاً**

مثال: نُعطى معلم متجانس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ والموجه بالشعاع $\vec{U}(0,1,-1)$

الحل:

إنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بالنقطة $A(-1,2,0)$ والموجّه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$ هو

$$(d)\begin{cases} x=-1 \\ y=t+2 \\ z=-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

السؤال48: كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم d مار بنقطتين A , B مثلاً؟

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة A والموجه بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ او نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة B والموجه بالشعاع $\overrightarrow{BA}$

يجب أن تكون بداية شعاع التوجيه هي نفسها النقطة التي نختارها للتعويض

مثال:

في حالة $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بالنقطتين B و A

الحل:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بالنقطة $A(1,2,3)$ والموجّه

بالشعاع $\overrightarrow{AB}(1,1,-2)$ هو

أو: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار $(d)\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

بالنقطة $B(2,3,1)$ والموجّه

بالشعاع $\overrightarrow{BA}(-1,-1,2)$ هو

$$(d)\begin{cases} x = -t+2 \\ y = -t+3 \\ z = 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

السؤال 49: كيف نكتب التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم؟

لتكن لدينا النقطتان $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$ من الفراغ ولنضع

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}(a,b,c)$$

عندئذٍ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$(S)\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in [0,1]$$

ونصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A ويمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$(S)\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in [0,+\infty[$$

مثال:

نتأمل النقطتين $A(-2,1,0), B(2,3,1)$ وأعط تمثيلاً وسيطياً لكل من القطعة المستقيمة $[AB]$ و نصف المستقيم $[AB)$ و نصف المستقيم $[BA)$

الحل:

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث الشعاع الموجه $\overrightarrow{AB}(4,2,1)$

$$[AB]\begin{cases} x = 4t-2 \\ y = 2t+1 \\ z = t \end{cases}, t \in [0,1]$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$ حيث الشعاع الموجه $\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ والمار من A

$$[AB]\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 0 \end{cases}, t \in [0, +\infty[$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB]$ حيث الشعاع الموجه $\overrightarrow{BA}(-4$ و -2 و $-1)$ والمار من B

$$[AB]\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -2t + 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in [0, +\infty[$$

السؤال 50: كيف نختار نقطة من مستوٍ P ؟

مثال: ليكن المستوي P الذي معادلتهُ:

$$P: 2x - y + z + 4 = 0$$

أعطِ نقطة A من المستوي P

الحل: بفرض $x = 0 , y = 0$ نعوض في

معادلة المستوي P فنجد: $z + 4 = 0 \Rightarrow z = -4$

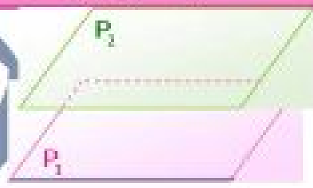
فتكون النقطة $A(0,0,-4)$ نقطة من المستوي P

معادلة المستوي $ax + by + cz + d$ نعطي قيمة اختيارية ل $x \ , y$

نعوضهم في المعادلة فنحصل على z

فتكون النقطة $A(x, y, z)$ نقطة من المستوي جاهزة

السؤال51: كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين مثلاً Q و P ؟

المستويان منطبقان	المستويان متوازيان ومختلفان	المستويان متقاطعان
		

ليكن $\overrightarrow{n_P}$ شعاعاً ناظماً على مستوٍ P وليكن $\overrightarrow{n_Q}$ شعاعاً ناظماً على مستوٍ Q.

إذا كان $\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً كان المستويان P وQ متوازيين أو منطبقان وإذا كانا غير مرتبطين خطياً كان المستويان متقاطعين بفصل مشترك (مستقيم) d سنتعلم كتابة التمثيل الوسيطي له لاحقاً

وإذا كان $\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}$ متعامدين كان المستويان P وQ متعامدين، والعكس صحيح أيضاً. (التعامد حالة خاصة من التقاطع يطلب منا دراسة تعامد أو اثبات التعامد للمستويين)

كيف تعرف إذا كان المستويين متوازيان أو منطبقان؟

نختار نقطة من المستوي الأول

ثم نعوضها بالمستوي الثاني في حال تحققت يكون المستويان منطبقان

وإن لم تتحقق يكون المستويان متوازيين

مثال: في الحالات الآتية نعطي المستويين Q و P ادرس الوضع النسبي للمستويين

1. $P: x - 4y + 7 = 0$ ، $Q: x + 2y - z + 1 = 0$
2. $P: x - 2y + 3z - 1 = 0$ ، $Q: 2x - 4y + 6z = 0$
3. $P: x + 2y + 4z - 5 = 0$ ، $Q: 2x + y - z + 1 = 0$

الحل:

1. نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_p}(1,-4,0)$ شعاع ناظم على P، و $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$ شعاع ناظم على Q. الشعاعان $\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_p}$ ليسا مرتبطين خطياً لأنّ مُرَكّباتهما ليست متناسبة، أي $\frac{0}{-1} \neq \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$.
إذن المستويان P و Q متقاطعان بفصل مشترك d ومن الطبيعي أن نتساءل إذا كانا متعامدين.
فنحسب $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_p} = -7 \neq 0$ فنرى أن $\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_p}$ ليسا متعامدين. فالمستويان P و Q غير متعامدين

2. نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_p}(1,-2,3)$ ناظم على P، و $\overrightarrow{n_Q}(2,-4,6)$ شعاع ناظم على Q. الشعاعان $\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_p}$ مرتبطين خطياً لأنّ مُرَكّباتهما متناسبة، أي $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$. إذن المستويان P و Q متوازيين أو منطبقان ولمعرفة ذلك سنختار نقطة من المستوي Q كما تعلمنا في السؤال 50
فالنقطة $A(0,0,0)$ من المستوي Q نعوضها في المستوي P فنجد: $-1 \neq 0$ غير محققة
وبالتالي فالمستويان Q و P متوازيين وليسا منطبقين

3. نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_p}(1,2,4)$ شعاع ناظم على P، و $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-1)$ شعاع ناظم على Q. الشعاعان $\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_p}$ ليسا مرتبطين خطياً لأنّ مُرَكّباتهما ليست متناسبة، أي $\frac{4}{-1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$. إذن المستويان P و Q متقاطعان بفصل مشترك d ومن الطبيعي أن نتساءل إذا كانا متعامدين.
فنحسب $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_p} = 2 + 2 - 4 = 0$ فنرى أنّ $\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_p}$ متعامدين. فالمستويان P و Q متعامدين

السؤال52: كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين d_1, d_2 ؟

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيمين في حال لم يكونا مكتوبين ونرى شعاعي توجيه المستقيمين $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ في حال كان:

1) في حال كانا الشعاعين مرتبطين خطياً كانا المستقيمان متوازيان أو منطبقين

2) في حال كانا الشعاعين غير مرتبطين خطياً كانا المستقيمان إما

متقاطعين أو متخالفين (ليسا في مستوٍ واحد)

- لمعرفة فيما إذا كان المستقيمان متوازيان أو منطبقين نساوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما فنحصل على جملة ثلاث معادلات

بمجهولين s و t نختزل المعادلات الى ابسط شكل إذا تحولت الجملة إلى ثلاث معادلات لها نفس الشكل تماماً عندها يكون حل هذه الجملة أنها تملك عدد غير منتهٍ من الحلول وبالتالي المستقيمان منطبقان

اما إذا لم تتحول الجملة الى ثلاث معادلات لها نفس الشكل عندها تكون الجملة مستحيلة الحل والمستقيمان متوازيين.

- ولمعرفة فيما إذا كان المستقيمان متخالفين أو متقاطعين نساوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما فنحصل على ثلاث معادلات

بمجهولين s و t حيث نختار معادلتين ونحلهما ونعوض المجهولين في

المعادلة الثالثة للتحقق فإذا كانت محققة كان المستقيمين متقاطعين

بنقطة تقاطع I يُطلب تعينها (تعوض قيمة t في احد التمثيلين الوسيطين للمستقيمين $d\,, d'$ فنحصل على فاصلة وترتيب وراقم نقطة التقاطع أي عينا نقطة التقاطع I وإذا لم تتحقق فـ المستقيمين متخالفين (ليسا في مستوٍ واحد)

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d' و d المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases},\ t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = t \\ y = -3t-3 \\ z = -t+1 \end{cases},\ t \in \mathcal{R}$$

الحل:

لتعيين وضع مستقيمين معرّفين وسيطياً ندرس أولاً الارتباط الخطي لأشعتهما الموجهة $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$

للمستقيمين d و d' شعاعين موجّهين $\vec{u}(1,-3,-3)\,, \overrightarrow{u'}(1,-3,-1)$ بالترتيب. ولأنّ مرّكَبات هذين الشعاعين ليست متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطياً. وعليه، إمّا أن يكون المستقيمان d و d' **متقاطعين** أو أن يكونا متخالفين (**أي غير واقعين في مستوٍ واحد**). ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} t+1=s & ❶\\ -3t+2=-3s-3 & ❷\\ -3t+3=-s+1 & ❸\end{cases} \quad \xrightarrow{\text{نعوض 1 في 2}} -3t+2+3t+3+3=0 \Rightarrow 8 \neq 0$$

ومنه فالمستقيمان d و d' متخالفين أي لا يقعان في مستوٍ واحد.

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d:\begin{cases} x=-1\\ y=1-t\\ z=1-2t\end{cases} ,t\in\mathcal{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x=4-5s\\ y=3-2s\\ z=-1+2s\end{cases} ,s\in\mathcal{R}$$

الحل:

للمستقيمين d و d' شعاعين موجّهين $\vec{u}(-5,-2,2)$, $\overrightarrow{u'}(0,-1,-2)$ بالترتيب. ولأنّ مرّكّبات هذين الشعاعين ليست متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطياً.

وعليه، إمّا أن يكون المستقيمان d و d' **متقاطعين** أو أن يكونا متخالفين (**أي غير واقعين في مستوٍ واحد**). ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} -1=4-5s & ❶\\ 1-t=3-2s & ❷\\ 1-2t=-1+2s & ❸\end{cases}$$

من ❶ نجد: $s=1$ نعوض في ❷ نجد: $t=0$ نعوض قيمة t, s في ❸ للتحقق فنجد:

$1-2(0) \overset{?}{=} -1+2(1) \Rightarrow 1=1$ محقق فالمستقيمان d و d' متقاطعان بنقطة تقاطع $I(x,y,z)$ يُطلب تعيينها: نعوض قيمة $t=0$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d فيكون:

$$\begin{cases} x=-1\\ y=1-0=1\\ z=1-2(0)=1\end{cases} \Rightarrow I(-1,1,1)$$

وهي نقطة التقاطع

أو يمكن تعويض قيمة $s=1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d' فنحصل على $I(-1,1,1)$ نقطة التقاطع.

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d:\begin{cases} x=4t\\ y=-1\\ z=2t+2\end{cases} ,t\in\mathcal{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x=2t-1\\ y=2\\ z=t+1\end{cases} ,t\in\mathcal{R}$$

الحل:

للمستقيمين d و d' شعاعين موجّهين $\vec{u}(2,0,1)$, $\overrightarrow{u'}(4,0,2)$ بالترتيب. ولأنّ مركّبات هذين الشعاعين متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ مرتبطين خطياً. وعليه، إمّا أن يكون المستقيمان d و d' متوازيين أو أن يكونا منطبقين ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} 4t = 2s - 1 & (1) \\ -1 \neq 2 & (2) \\ 2t + 2 = s + 1 & (3) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد ان الجملة مستحيلة الحل والمستقيمان متوازيين

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = -9t + 4 \\ y = -12t + 4 \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathcal{R}$$

الحل:

للمستقيمين d و d' شعاعين موجّهين $\vec{u}(-9,-12,3)$, $\overrightarrow{u'}(3,4,-1)$ بالترتيب. ولأنّ مركّبات هذين الشعاعين متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ مرتبطين خطياً. وعليه، إمّا أن يكون المستقيمان d و d' متوازيين أو أن يكونا منطبقين ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} -9t + 4 = 3s + 1 & (1) \\ -12t + 4 = 4t & (2) \\ 3t = -s + 1 & (3) \end{cases} \xLeftarrow{\text{نختزل}} \begin{cases} 3t + s - 1 = 0 \\ 3t + s - 1 = 0 \\ 3t + s - 1 = 0 \end{cases}$$

المعادلات الثلاثة متساوية وبالتالي الجملة هي المعادلة $3t + s - 1 = 0$ لها عدد غير منتهٍ من الحلول فالمستقيمان منطبقان.

السؤال 53: كيف نكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d الناتج عن تقاطع المستويين Q و P ؟

الطريقة الأولى: نحل جملة معادلتي المستويين حيث نستخدم غالباً الحذف بالتعويض نعبر عن y و x بدلالة z حيث يأخذ المجهول z أية قيمة حقيقية فنعتبر بالنهاية

$z = t$ تسهيلاً للكتابة فنكون قد حصلنا على التمثيل الوسيطي للفصل بدلالة الوسيط t

الطريقة الثانية: نعطي قيمة لاحد المتغيرات وليكن z مثلاً ونعوضه في معادلتي المستويين

فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين y و x بالحل المشترك نحصل عليهما

فنحصل على نقطة $A(x, y, z)$

نعيد إعطاء قيمة أختيارية أخرى لنفس المتغير z ونعوضها في معادلتي المستويين

فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين y و x بالحل المشترك نحصل عليهما

فنحصل على نقطة $B(x, y, z)$ فيكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه الفصل المشترك فنكتب تمثيله الوسيطي كما تعلمنا سابقاً

ملاحظة: في الطريقة الثانية ليس بالضرورة ان نختار المتغير z دائما يمكنك لختيار y او x

نتأمّل المستويين $P_1 : 2x + y - z + 2 = 0$ و $P_2 : x + 2y - z + 1 = 0$.

تيقّن أنّ هذين المستويين متقاطعان،

ثم جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d.

الحل: للمستويين P_1, P_2 الشعاعين الناظمين $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{n_2}(1,2,-1)$ بالترتيب.

الشعاعان $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مرّكّباتهما غير متناسبة.

الطريقة الأولى: إذن المستويان P_1, P_2 متقاطعان. تنتمي $M(x, y, z)$ الى

d إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: $\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$

لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبّر مثلاً عن x و y بدلالة z :

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ x + 2y = z - 1 & L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}z & (L_2 - \frac{1}{2}L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & (L_1{}') \\ y = \frac{1}{3}z & (L_2{}') \end{cases}$$

ومنه $y = \frac{1}{3}z$ و $x = \frac{1}{3}z - 1$ يأخذ المجهول z أيّة قيمة حقيقية. يمكننا إذن أن نرمز إليه

بالرمز $z = t$ تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء $M(x, y, z)$ إلى d مكافئاً للشرط

$(d)\begin{cases} x = \frac{1}{3}t - 1 \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ وهو التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d .

الطريقة الثانية: نعطي قيمة إختيارية لـ$z = 0$ نعوض في معادلتي المستويين فيكون:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{بضرب المعادلة الثانية ب}-2} \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{بالجمع}} -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه $A(-1,0,0)$

نعطي قيمة إختيارية لـ$z = 1$ نعوض في معادلتي المستويين فيكون:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{بضرب المعادلة الثانية ب}-2} \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{بالجمع}} -3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

ومنه $B(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ ومنه يكون $\overrightarrow{AB}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ شعاع توجيه الفصل المشترك d نكتب

التمثيل الوسيطي له: $t \in \mathbb{R}$; $(d): \begin{cases} x = \frac{1}{3}t - 1 \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$ وهو نفسه التمثيل الوسيطي الذي كتبناه .

السؤال 54: كيف نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار بنقطة مثلاً I وعمودي على مستوي P مثلاً؟

بما أن المستقيم d عامودي على المستوي P ومنه يكون ناظم المستوي P هو نفسه شعاع توجيه المستقيم d أي $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P}$ ومنه نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P ويمر بالنقطة I 1

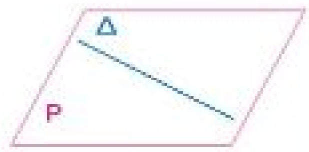
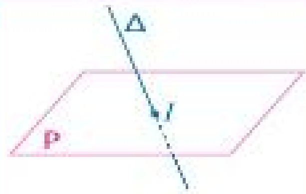
مثال: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من $J(2,1,0)$ والعمودي على المستوي P الذي معادلته:

الحل: $P: x + y - 4z = 0$ لأن $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P}(1,1,-4)$ ومنه يكون $d \perp P$

التمثيل الوسيطي للمستقيم d والمار بالنقطة $J(2,1,0)$ هو: $(d)\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

السؤال 55: كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم d مع مستوٍ P ؟

اما ان يكون المستقيم موازي للمستوي أو محتوى فيه أو قاطع له

المستقيم محتوى في المستوي	المستقيم يوازي المستوي	المستقيم يتقاطع مع المستوي
		

ملاحظة: التعامد حالة خاصة من التقاطع.

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d ثم نكتب كلاً من شعاع توجيه المستقيم $\overrightarrow{u_d}$ و الشعاع الناظم على المستوي $\overrightarrow{n_p}$

إذا كان $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ فالمستقيم قاطع للمستوي بنقطة تقاطع I يطلب تعيينها ولتعيينها نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بدلالة الوسيط t نحلها فنحصل على قيمة t

نعوض قيمة t في معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم فنحصل على نقطة تقاطع I هذا المستقيم مع المستوي.

اما إذا كان $\vec{n}.\vec{u} = 0$ فالمستقيم اما يوازي المستوي او محتوى فيه نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي اذا كانت المعادلة مستحيلة الحل أي 0t=a فيكون المستقيم يوازي المستوي اما في حال توصلت المعادلة الى الشكل 0=0 عندها يكون المستقيم محتوى في المستوي

دراسة تقاطع المستقيم والمستوي وتعيين نقطة التقاطع؟

مثال: نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$. والمستوي $P: 2x - y + z - 2 = 0$ تحقق أن (AB) يقطع المستوي P في نقطة I يُطلب تعيين إحداثياتها.

الحل:

المستقيم (AB) شعاع موجّه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3,1,3)$ و يمر من $A(2,1,-2)$ فيكون التمثيل الوسيطي ل (AB):

$(AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases} , t\epsilon\mathcal{R}$ وناظم المستوي P هو $\vec{n}(2,-1,1)$ ونلاحظ أنّ

$\vec{n}.\vec{u} = -4 \neq 0$ فالشعاعان $\vec{n},\vec{u}$ غير متعامدين مما يثبت تقاطع المستقيم (AB) والمستوي P

لإيجاد نقطة تقاطع $I(x,y,z)$ المستقيم (AB) مع المستوي P نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي فينتج: $2(-3t+2)-t-1+3t-2-2=0$

$-4t-1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{4}$ ⟸نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم فينتج

$$\begin{cases} x=-3\left(-\frac{1}{4}\right)+2=\frac{11}{4} \\ y=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4} \\ z=3\left(-\frac{1}{4}\right)-2=-\frac{11}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطة التقاطع تكون}} I\left(\frac{11}{4},\frac{3}{4},-\frac{11}{4}\right)$$

مثال: في الحالات الاتية ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي P .

1 $d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=1-3t \end{cases}, t\epsilon\mathbb{R}, P: x-y+z=1$ ، 2 $d:\begin{cases} x=s+1 \\ y=2s+1 \\ z=8s-3 \end{cases}, s\epsilon\mathbb{R}, P: 2x+3y-z=0$

الحل: 1 إن شعاع توجيه المستقيم d هو $\overrightarrow{u_d}(2,1,-3)$ وناظم المستوي P هو $\vec{n}(1,-1,1)$ ونلاحظ أن $\vec{n}.\vec{u}=-2\neq 0$ فالشعاعان $\vec{n},\vec{u}$ غير متعامدين مما يثبت تقاطع المستقيم (d) والمستوي P

لإيجاد نقطة تقاطع $I(x,y,z)$ المستقيم (d) مع المستوي P نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي فينتج:

$2t-1-t+1-3t-1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي

$\xrightarrow{\text{نقطة التقاطع تكون}} I(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

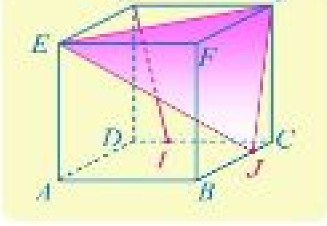
2)بنفس الأسلوب

السؤال56: كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي؟

طريقة أولى: نثبت أن شعاع توجيه $\vec{u}$ للمستقيم d وشعاعي توجيه المستوي $\vec{v}$ و$\vec{w}$ تقع جميعها في مستوٍ واحد أي: نثبت أن $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطياً وذلك كما تعلمنا في السؤال19

طريقة ثانية: نثبت أن شعاع توجيه $\vec{u}$ للمستقيم d يعامد الشعاع الناظم $\vec{n}$ على المستوي P اي نثبت ان: $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_d}=0$

مثال:



لنتأمل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ أثبت ان المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).

الحل:

لإثبات ان المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال

إثبات ان الأشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HI}$ واقعة في مستو واحد ونثبت ذلك كما تعلمنا في السؤال 19

نختار $(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ معلماً في الفراغ فيكون

$$A(0,0,0,)\ ,E(0,0,1)\ ,G(1,1,1)\ ,J\left(1,\frac{3}{4},0\right)\ ,I\left(\frac{1}{4},1,0\right)\ ,H(0,1,1)$$

فيكون: $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4},0,-1)\ ,\overrightarrow{EG}(1,1,0)\ ,\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:

$\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{\frac{3}{4}}\neq\frac{1}{1}$ ولنثبت أن $\overrightarrow{HI}$ يكتب بالشكل: $\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{EJ}$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{bmatrix}\Longmapsto\begin{cases}\frac{1}{4}=a+b & (1)\\0=a+\frac{3}{4}b & (2)\\-1=-b & (3)\end{cases}$$

من (3) نجد أن $b=1$ نعوضها في (1) نجد

$a=-\frac{3}{4}$ نعوض قيمة $a\ ,b$ في (2) للتحقق $\frac{3}{4}(1)+\frac{3}{4}-\overset{?}{=}0$

$0=0$ محققة إذاً $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{EG}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EJ}$ وبالتالي الاشعة $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً أي واقعة في مستو واحد ومنه (HI) يوازي المستوي (EGJ)

طريقة ثانية: لنوجد ناظم المستوي كما تعلمنا سابقاً

الحل: لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right),\ \overrightarrow{EG}(1,1,0)$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي: $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{\frac{3}{4}}\neq\frac{1}{1}$

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{EG}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{EJ}=0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{EG}=0\Longmapsto(a,b,c)(1,1,0)=0\Longmapsto a+b=0 \qquad 1$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{EJ}=0\Longmapsto(a,b,c)\left(1,\frac{3}{4},-1\right)\Longmapsto a+\frac{3}{4}b-c=0 \qquad 2$$

نضع $C=1$ نعوض في 2 فيكون

$$\begin{cases}a+b=0\\a+\frac{3}{4}b-1=0\end{cases}\overset{\text{بالطرح}}{\Longrightarrow}\left\{-\frac{1}{4}b-1=0\Longmapsto b=-4\Longmapsto a=4\right.$$

ومنه: أن $\vec{n}(4,-4,1)$ ناظم المستوي P و $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4},0,-1)$ شعاع توجيه المستقيم (HI)

$\vec{n}.\overrightarrow{HI}=(4,-4,1)\left(\frac{1}{4},0,-1\right)=1-1=0$ ومنه فالمستقيم (HI) يوازي لمستوي P

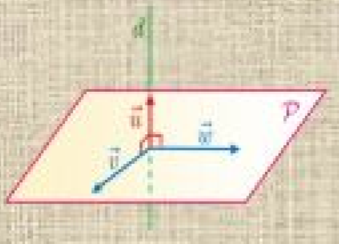
مثال: اثبت ان المستقيم d , $t \in \mathbb{R}$ $(d)\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+3 \\ z = t \end{cases}$ يوازي المستوي $p: x - 2y - 6z - 3 = 0$

الحل: أن $\vec{u}(2,-2,1)$ شعاع توجيه المستقيم d و $\vec{n}(1,-2,-6)$ ناظم المستوي p

$\vec{n}.\vec{u} = (2,-2,1)(1,-2,-6) = 2+4-6 = 0$ ومنه فالمستقيم d يوازي المستوي P

السؤال 57: كيف نثبت أن مستقيم d عامودي مستوٍ P ؟

طريقة أولى: يكفي أن نثبت أن شعاع توجيه



$\vec{u}$المستقيم d يعامد زوج $(\vec{v},\vec{w})$

من الاشعة المستقلة خطياً في مستوٍ P

طريقة ثانية:

نثبت أن شعاع توجيه $\vec{u}$ للمستقيم d

مرتبط خطياً مع شعاع الناظم $\vec{n}$

على المستوي P

مثال:

في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ نتأمل نقطتين $A(2,5,3)$, $B(-1,0,1)$ ومستوياً P يقبل

$\vec{u}(1,1,-2)$, $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين. اثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

الحل:

لنوجد شعاع توجيه المستقيم (AB) وليكن $\vec{w}$

$\vec{w}(-3,-5,-4)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

اي: $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$

لنثبت أن شعاع توجيه المستقيم $\vec{w}$ يعامد الشعاع $\vec{u}$ أي لنثبت أن $\vec{u}.\vec{w} = 0$

$\vec{u}.\vec{w} = (1,1,-2)(-3,-5,-4) = -3-5+8 = 0$ ومنه شعاع توجيه المستقيم $\vec{w}$ يعامد الشعاع $\vec{u}$

ولنثبت أن شعاع توجيه المستقيم $\vec{w}$ يعامد الشعاع $\vec{v}$, أي لنثبت أن

$\vec{v}.\vec{w} = 0$

$$\vec{v}.\vec{w} = (3,-1,-1)(-3,-5,-4) = -9+5+4 = 0$$

وبالتالي فإن المستقيم (AB) عامودي على المستوي P كون شعاع توجيهه يعامد زوج $(\vec{v},\vec{w})$ من الاشعة المستقلة خطيِاً في المستوي.

طريقة ثانية يمكننا إيجاد ناظم هذا المستوي $\vec{n}$ كما تعلمنا سابقاً ونثبت أنه مرتبط خطياً مع شعاع توجيه المستقيم (AB)

نفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\vec{v},\vec{u}$ لذلك

نضع: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ و $\vec{n}.\vec{v} = 0$

$\vec{n}.\vec{u} = 0 \mapsto (a,b,c)(1,1,-2) = 0 \mapsto a + b - 2c = 0$ 1

$\vec{n}.\vec{v} = 0 \mapsto (a,b,c)(3,-1,-1) \mapsto 3a - b - c = 0$ 2

نضع $C = 1$ نعوض في 1 و 2 فيكون

$$\begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ 3a - b - 1 = 0 \end{cases} \overset{\text{بالجمع}}{\Longrightarrow} 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

ومنه $\vec{n}(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1)$ ناظم على المستوي P وشعاع توجيه المستقيم (AB) وليكن $\vec{W}$

$\vec{W}(-3,-5,-4)$ نلاحظ ان الشعاعين $\vec{n},\vec{W}$ مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي:

$\frac{-3}{\frac{3}{4}} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = \frac{-4}{1}$ وبالتالي فإن المستقيم (AB) عامودي على المستوي P .

مثال:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط:

$A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)

الحل: لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$, $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$

نلاحظ ان الشعاعين $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:

$\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$ وبالتالي فالنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة وهي تعين مستوٍ (CDE) .

ولإثبات أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) نثبت أن شعاع توجيه المستقيم (AB) وليكن $\vec{u}$ يعامد كلاً من $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}$

$\vec{u}.\overrightarrow{CE} = (-1,-1,-4)(-3,-1,1) = 3 + 1 - 4 = 0$

و

$\vec{u}.\overrightarrow{CD}(-1,-1,-4)(-4,4,0) = 4 - 4 = 0$

وبالتالي فإن المستقيم (AB) عامودي على المستوي (CDE) كون شعاع توجيهه يعامد زوج $(\vec{v},\vec{W})$ من الاشعة المستقلة خطياً في المستوي.

طريقة ثانية: يمكننا إيجاد ناظم هذا المستوي $\vec{n}$ كما تعلمنا سابقاً ونثبت أنه مرتبط خطياً مع شعاع توجيه المستقيم (AB)

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{CE} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{CE} = 0 \mapsto (a,b,c)(-3,-1,1) = 0 \mapsto -3a - b + c = 0$ 1

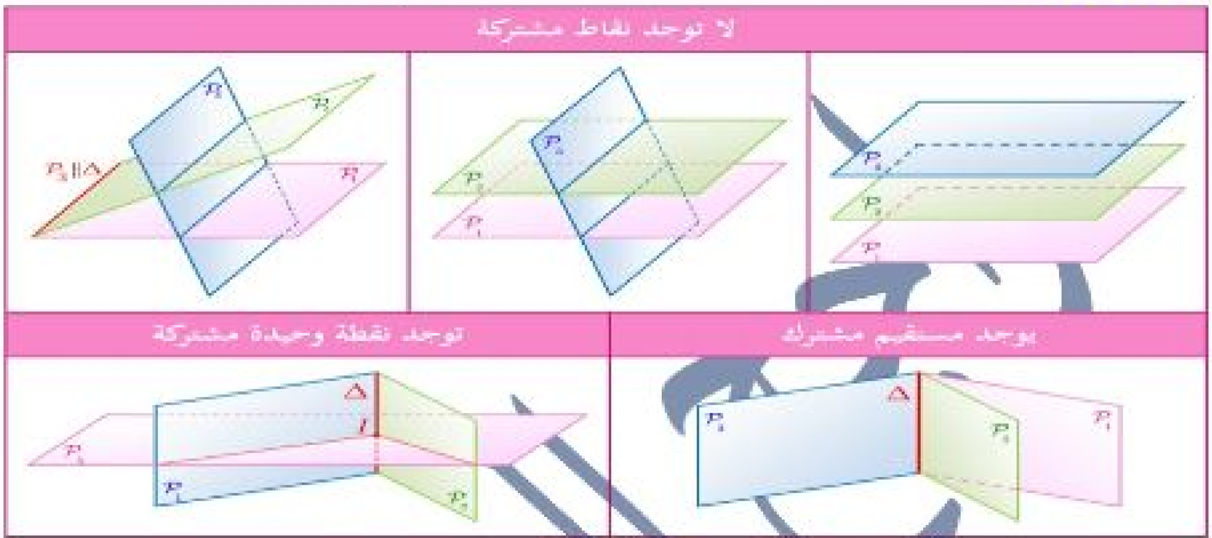
$\vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0 \mapsto (a,b,c)(-4,4,0) \mapsto -4a + 4b = 0$ 2

نضع $a=1$ نعوض في 2 فيكون $b=1$ نعوض قيمة b و a في 1 نجد $c=4$

ومنه $\vec{n}(1,1,4)$ ناظم على المستوي P و أن شعاع توجيه المستقيم (AB) وليكن $\vec{u}(-1,-1,-4)$

نلاحظ ان الشعاعيين $\vec{u},\vec{n}$ مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي: $\frac{4}{-4}=\frac{1}{-1}=\frac{1}{-1}$
وبالتالي فإن المستقيم (AB) عامودي على المستوي P .

السؤال 58: كيف ندرس الوضع النسبي لثلاث مستويات؟



نحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل.

إذا كان لها حل وحيد كانت المستويات تشترك بنقطة واحدة.

إذا كان لها عدد غير منته من الحلول كانت المستويات تشترك بمستقيم.

إذا لم تكن لها أي حل فإنها لا تشترك معاً بأي نقطة.

ملاحظة: يتم حل جملة ثلاث معادلات بطريقة غاوس أو طريقة الحذف بالتعويض أو الحذف بالجمع.

سأشرح كل طريقة على حِدى:

- طريقة الحذف بالتعويض: تعتمد هذه الطريقة على إرجاع هذه الجملة إلى جملة معادلتين خطيتين بمجهولين وذلك عن طريق معاملة أحد هذه المجاهيل بصفته مقداراً ثابتاً

حيث سنختار معادلتين 2 و 1 ونعزل مجهول في الطرف الاخر وليكن z ونتعامل معه على انه مقدار ثابت ونحل جملة المعادلتين حلاً مشتركاً حيث سنوجد قيمة x بدلالة z وكذلك سنوجد y بدلالة z نعوض هذه القيم في المعادلة 3 سنحصل على أحد الاشكال الثلاثة:

- $0.z=\alpha\epsilon\mathcal{R}^*$ نستنتج أن الجملة مستحيلة الحل.
- $0.z=0$ نستنتج ان المعادلة لها عدد غير منتهٍ من الحلول.
- $\alpha z=\beta\epsilon\mathcal{R}^*$.نستنتج أن للمعادلة حل وحيد

مثال: بيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك في أي نقطة:

$$\begin{cases} P_3: x + y - z = 2 & \text{1} \\ P_2: x - 2y + z = 1 & \text{2} \\ P_3: 2x - y + 3z = 0 & \text{3} \end{cases}$$

الحل: سنحل هذه الجملة بطريقة الحذف بالتعويض كما شرحنا

نختار المعادلتين 1 و 2 و نحلهم حل مشترك

$$\begin{cases} x + y = 2 + z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases} \overset{\text{بالطرح}}{\Rightarrow} 3y = 1 + 2z \Rightarrow y = \frac{1+2z}{3} \overset{\text{ومنه}}{\Rightarrow} x = \frac{5+z}{3}$$

نعوض قيمة x و y في 3 فينتج:

$$2\left(\frac{5+z}{3}\right) - \frac{1+2z}{3} + 3z = 0 \xrightarrow{\text{بالضرب بـ } 3} 10 + 2z - 1 - 2z + 9z = 0 \Rightarrow z = -1$$

ومنه يكون $y = -\frac{1}{3}$ و $x = \frac{4}{3}$ وبذلك يكون قد أثبتنا أن للجملة حلا وحيدا هو $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, -1)$

ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة احداثياتها هي $I(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, -1)$

❖ طريقة غاوص: نكتب المعادلات الخطية بالشكل النهائي ويفضل أن تكون المعادلة الخطية الأولى ذات أمثال x إما 1 أو -1

نحذف x من المعادلة L_2 و L_3 وهذه المرحلة الأولى فنحصل على L_3', L_2', L_1 والمرحلة الثانية نحذف y من L'_3

نحل جملة المعادلات الأخيرة بدءاً من الأدنى و باتجاه الأعلى .

بأسلوب اخر نجعل المعادلة التي أمثال x فيها 1 هي المعادلة الاولى ثم : نضرب المعادلة الأولى بمعاكس أمثال x في المعادلة الثانية ونضيف الناتج للمعادلة الثانية وضرب المعادلة الأولى بمعاكس أمثال x في المعادلة الثالثة ونضيف الناتج للمعادلة الثالثة فنحصل على جملة جديدة لا تحوي المتحول x في المعادلتين الثانية والثالثة نطبق نفس العملية بالنسبة للمعادلتين الثانية والثالثة في الجملة الجديدة فنحصل على جملة جديدة تحوي متحول واحد في الثالثة ومتحولين في الثانية وثلاثة متحولات في الاولى توجد القيم بدءا من الثالثة ثم الثانية ثم الاولى

مثال: نتأمل المستويات : $\begin{cases} P_1: -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ P_2: 3x - y - 4z + 5 = 0 \\ P_3: 2x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ أثبت أن هذه المستويات تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

الحل: سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوص كما شرحنا:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=5 & L_1 \\ 3x-y-4z=-5 & L_2 \\ 2x+3y-2z=-2 & L_3 \end{cases}$$

نحذف x من المعادلتين L_2 و L_3 وذلك عن طريق جمع ثلاثة أمثال الأولى إلى L_2 و جمع مثلي الأولى إلى L_3 أي:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (L_1) \\ 5y+5z=10 & (L_2+3L_1) \\ 7y+4z=8 & (L_3+2L_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2y+3z=5 & (L_1) \\ 5y+5z=10 & (L'_2) \\ 7y+4z=8 & (L'_3) \end{cases}$$

ثم نحذف y من المعادلة L'_3 وذلك عن طريق طرح منها سبعة أمثال L'_2 فنجد:

$$\begin{cases} -x+2y+3z=5 & (L_1) \\ y+z=2 & (L'_2) \\ -3z=-6 & (L'_3-7L'_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2y+3z=5 & (L_1) \\ y+z=2 & (L'_2) \\ z=2 & (L'_3) \end{cases}$$

ومنه $y=0$ و $x=1$ فالجملة تقبل حلاً وحيداً $(x,y,z)=(1,0,2)$ ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة احداثياتها هي $I(1,0,2)$.

مثال: بيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك في أي نقطة:

$$\begin{cases} P_3: 2x-y+3z=0 \\ P_2: x+2y+z=0 \\ P_3: 3x-4y+5z=0 \end{cases}$$

الحل سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوص كما شرحنا:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 & L_1 \\ 2x-y+3z=0 & L_2 \\ 3x-4y+5z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (-2L_1+L_2) \\ -10y+2z=0 & (-3L_1+L_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (L'_2) \\ -10y+2z=0 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (L'_2) \\ 0=0 & (-2L'_2+L'_3) \end{cases}$$

ومنه $-5y=-z \Rightarrow z=5y$ وبالتالي: $x+2y+5y=0 \Rightarrow x=-7y$ ومنه

فالجملة تقبل عدد غير منتهٍ من الحلول $S=\{(-7y,y,5y)\ ;\ y\in\mathcal{R}\}$ فالمستويات الثلاثة تتقاطع بفصل مشترك.

السؤال 59: كيف نوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P_1, P_2, P_3 ؟

الطريقة الأولى: كما تعلمنا سابقاً وذلك بحل جملة المعادلات الثلاثة

الطريقة الثانية: بما ان المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة يُطلب إيجاد احداثياتها لذلك سنكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك بين المستويين P_1, P_2 ونعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي

الثالث P_3 فنحصل على معادلة بمجهول واحد t نحلها ونقوم بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي للفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين P_1, P_2 فنحصل على احداثيات نقطة التقاطع I

مثال: عين نقطة تقاطع المستويات الثلاثة:
$$\begin{cases} P_1: -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ P_2: 3x - y - 4z + 5 = 0 \\ P_3: 2x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

الحل: **الطريقة الأولى:** سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوص كما شرحنا:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & L_1 \\ 3x - y - 4z = -5 & L_2 \\ 2x + 3y - 2z = -2 & L_3 \end{cases}$$

حذف x من المعادلتين L_2 و L_3 وذلك عن طريق جمع ثلاثة أمثال الأولى إلى L_2 و جمع مثلي الأولى إلى L_3 أي:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L_2 + 3L_1) \\ 7y + 4z = 8 & (L_3 + 2L_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L'_2) \\ 7y + 4z = 8 & (L'_3) \end{cases}$$

ثم نحذف y من المعادلة L'_3 وذلك عن طريق طرح منها سبعة أمثال L'_2 فنجد:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ -3z = -6 & (L'_3 - 7L'_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ z = 2 & (L'_3) \end{cases}$$

ومنه $y = 0$ و $x = 1$ فالجملة تقبل حلاً وحيداً $(x, y, z) = (1,0,2)$ ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة احداثياتها هي $I(1,0,2)$.

الطريقة الثانية:

لنوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d الناتج عن تقاطع المستويين P_1 , P_2 وذلك كما تعلمنا سابقاً ولكتابته لدينا طريقتين:

طريقة أولى لكتابة التمثيل الوسيطي للفصل المشترك:

المستويان P_1 وP_2 متقاطعان. تنتمي $M(x, y, z)$ الى

d إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: $\begin{cases} -x+2y+3z-5=0 \\ 3x-y-4z+5=0 \end{cases}$ لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبّر مثلاً عن x و y بدلالة z :

$$\begin{cases} -x+2y=5-3z & L_1 \\ 3x-y=-5+4z=0 & L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=5-3z & L_1 \\ 5y=10-5z & L_2+3L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=5-3z & L_1{}' \\ y=2-z & L_2{}' \end{cases}$$

ومنه $y=2-z$ و $x=-1+z$ يأخذ المجهول z أية قيمة حقيقية. يمكننا إذن أن نرمز

إليه بالرمز $z = t$ تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء $M(x, y, z)$ إلى d مكافئاً للشرط

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$ (d)وهو التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d .

نعوض التمثيل الوسيطي للفصل المشرك في معادلة المستوي الثالث P_3 ينتج:

$$2(t-1)+3(-t+2)-2(t)+2=0 \Rightarrow -3t+6=0 \Rightarrow t=2$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d :

$$\begin{cases} x=2-1=1 \\ y=-2+2=0 \\ z=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ومنه نقطة التقاطع تكون}} I(1,0,2)$$

طريقة ثانية لكتابة الفصل المشترك: نعطي قيمة إختيارية لـ $z=0$ نعوض في معادلتي المستويين فيكون:

$$\begin{cases} -x+2y-5=0 \\ 3x-y+5=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب المعادلة الثانية بـ } 2} \begin{cases} -x+2y-5=0 \\ 6x-2y+10=0 \end{cases} \overset{\text{بالجمع}}{\Rightarrow} 5x+5=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=2$$

ومنه $A(-1,2,0)$

نعطي قيمة إختيارية لـ $z = 1$ نعوض في معادلتي المستويين فيكون:

$$\begin{cases}-x+2y-2=0\\ 3x-y+1=0\end{cases} \xRightarrow{\text{ضرب المعادلة الثانية بـ } 2} \begin{cases}-x+2y-2=0\\ 6x-2y+2=0\end{cases} \overset{\text{بالجمع}}{\Rightarrow} 5x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$$

ومنه $B(0,1,1)$ ومنه يكون $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ شعاع توجيه الفصل المشترك d نكتب التمثيل الوسيطي

إذن $(d): \begin{cases} x = t-1 \\ -t+2 \\ t \end{cases} ;\ t\epsilon\mathcal{R}$ نعوض التمثيل الوسيطي للفصل المشترك في معادلة المستوي الثالث P_3 ينتج:

$$2(t-1)+3(-t+2)-2(t)+2=0 \Rightarrow -3t+6=0 \Rightarrow t=2$$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d :

$$\begin{cases} x = 2-1 = 1 \\ y = -2+2 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \xRightarrow{\text{ومنه نقطة التقاطع هي}} I(1,0,2)$$

السؤال 60: كيف نوجد إحداثيات المسقط القائم A' لنقطة A على مستقيم d ؟

الطريقة الأولى: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d وهو: $(d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ;\ t\epsilon\mathcal{R}$ في حال لم يكن مكتوب ثم نفرض أن $A'(at + x_0 , bt + y_0 , ct + z_0)$ مسقط القائم لـA على d ثم نوجد الشاعين $\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AA'}$ ونكتب: $\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$ فنحصل على معادلة بمجهول واحد t نحلها ونعوض قيمة t في A' فنحصل على احداثياتها.

الطريقة الثانية: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d وهو: $(d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ;\ t\epsilon\mathcal{R}$ في حال لم يكن مكتوب ثم نفرض أن A' المسقط القائم لـA على d فيكون لها الاحداثيات: $A'(at + x_0 , bt + y_0 , ct + z_0)$ ونشكل التابع $f(t) = AA'^2$ ندرس اطراد هذا التابع ونحدد قيمة t الموافقة لاصغر قيمة للتابع f ثم نعوض قيمة t في A' فنحصل على احداثياتها

مثال: اوجد المسقط القائم لنقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم

حيث: $(d):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;t\epsilon\mathcal{R}$

الحل: نفرض أن

$A'(-t+3,-t+2,t)$ مسقط القائم لـA على d ولنوجد

الشعاعين $\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AA'}$:

$\overrightarrow{u_d}(-1,-1,1)$ و $\overrightarrow{AA'}(-t,-t+3,t-2)$ ولنكتب: $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{AA'}=0$

فيكون: $(-t,-t+3,t-2)(-1,-1,1)=0\Rightarrow t+t-3+t-2=0$

ومنه: $t=\frac{5}{3}$ نعوض قيمة t في A' فتكون احداثيات المسقط القائم

$A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

الطريقة الثانية: نفرض ان $A'(-t+3,-t+2,t)$ سقط القائم لـA على d ونشكل

التابع $f(t)=AA'^2$ ندرس اطراد هذا التابع حيث: $f(t)=3t^2-10t+13$

ومنه: $f'(t)=6t-10\Rightarrow t=\frac{5}{3}\Rightarrow f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{14}{3}$

ومنه :

t	$\frac{5}{3}$		
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$

ومنه: $t = \frac{5}{3}$ نعوض قيمة t في A' فتكون احداثيات المسقط القائم

$A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

السؤال 61: كيف نوجد بُعد للنقطة A عن المستقيم d أو عن الفصل المشترك d الناتج من تقاطع مستويين ؟

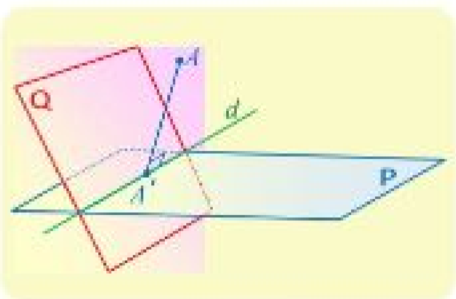
نوجد المسقط القائم A' للنقطة A على المستقيم d كما تعلمنا سابقاً

ثم نوجد البعد بُعد A عن A' حيث أن AA' يمثل بعد للنقطة A عن المستقيم d

مثال: المستويين Q و P حيث: $\begin{cases} P: 2x - y + z - 4 = 0 \\ Q: x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ متقاطعان أوجد بُعد

$A(3, -1, 2)$ عن الفصل المشترك d الناتج عن تقاطع المستويين .

الحل: لنوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d كما تعلمنا سابقاً



بما ان: المستويان Q و P متقاطعان. تنتمي $M(x, y, z)$ الى

d إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبّر مثلاً عن x و y بدلالة z :

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - z & L_1 \\ x + y = 5 - 2z & L_2 \end{cases} \xRightarrow{L_2 + L_1} \{3x = 9 - 3z \Rightarrow x = 3 - z \Rightarrow y = 2 - z$$

بالرمز $z = t$ تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء $M(x,y,z)$ إلى d مكافئاً للشرط $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ وهو (d) التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

نفرض أن $A'(-t+3\,, -t+2\,, t)$ مسقط القائم لـ A على d ولنوجد الشعاعين $\overrightarrow{u_d}$، $\overrightarrow{AA'}$:

$\overrightarrow{u_d}(-1,-1,1)$ و $\overrightarrow{AA'}(-t, -t+3, t-2)$ ولنكتب: $\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$

فيكون: $(-t, -t+3, t-2)(-1,-1,1) = 0 \Rightarrow t + t - 3 + t - 2 = 0$

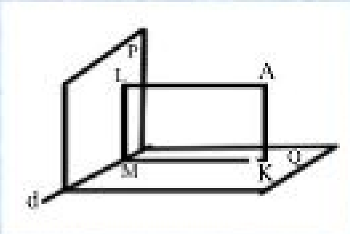
ومنه: $t = \frac{5}{3}$ نعوض قيمة t في A' فتكون احداثيات المسقط القائم $A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

فيكون بُعد A عن d هو $dis(A,d) = AA' = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$

السؤال 62: كيف نحسب بعد نقطة A عن الفصل المشترك d الناتج من تعامد مستويين

P و Q ؟

بما ان التعامد حالة خاصة من التقاطع كما ذكرنا سابقاً فيمكننا اعتماد الطريقة التي تعلمناها في السؤال 61 لكن لو فكرنا قليلاً لوجدنا طريقة اسهل وهي حسب فيثاغورث حيث ان بُعد النقطةA عن المستقيم d هو نفسه طول الوتر AM فيلزمنا إذن حساب طول الضلعين القائمتين KM و AK



إن AK هو نفسه بُعد النقطةA عن المستوي Q اي $dis(A,Q) = AK$

وايضاً إن KM هو نفسه بُعد النقطةA عن المستوي

P اي $dis(A,P) = KM$ لأن $MK = LA$ حيث $ALMK$ مستطيل

مثال: نتأمل في معلم متجانس$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين P و Q :

$$\begin{cases} P: x+y-2z-1=0 \\ Q: x+y+z=0 \end{cases}$$

أثبت أن المستويين P وQ متعامدان.

- احسب بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين P وQ.

الحل: نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_p}(1,1,-2)$ شعاع ناظم على P، و $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$ شعاع ناظم على Q.

و $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = (1,1,1)(1,1,-2) = 1+1-2 = 0$ وبالتالي فالمستويين متعامدين

الطريقة الأولى: لنوجد التمثيل الوسيطي للفصل الشترك d كما تعلمنا سابقاً تنتمي $M(x,y,z)$ الى

d إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبّر مثلاً عن x وz بدلالة y:

$$\begin{cases} x-2z=1-y & L_1 \\ x+z=-y & L_2 \end{cases} \xrightarrow{L_1-L_2} = -3z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} - y$$

بالرمز $y=t$ تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء $M(x,y,z)$ إلى d مُكافئاً للشرط $, t\in\mathbb{R}$ $\quad (d)\begin{cases} x=-\mathrm{t}+\frac{1}{3} \\ y=t \\ z=-\frac{1}{3}\end{cases}$ وهو

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

نفرض أن $A'\left(-\mathrm{t}+\frac{1}{3}, t, -\frac{1}{3}\right)$ سقط القائم لـA على d ولنوجد الشعاعين $\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AA'}$:

$\overrightarrow{u_d}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{AA'}\left(-\mathrm{t}-\frac{5}{3}, t-1, \frac{-7}{3}\right)$ ولنكتب: $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{AA'}=0$

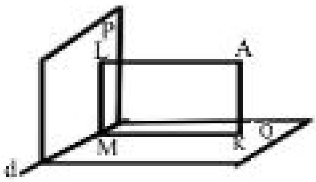
فيكون: $\left(-\mathrm{t}-\frac{5}{3}, t-1, \frac{-7}{3}\right)(-1,1,0)=0 \Rightarrow 2t+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{3}$

نعوض قيمة t في A' فتكون احداثيات السقط القائم $A'\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

فيكون بُعد A عن d هو 3 $\quad dis(A,d) = AA' = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{49}{9}} = \frac{9}{3} = 3$

الطريقة الثانية: ان بُعد النقطةA عن المستقيم d هو نفسه طول الوتر AM

فيلزمنا إذن حساب طول الضلعين القائمتين KM و AK إن AK هو نفسه بُعد النقطةA عن المستوي اي Q



$$dis(A,Q) = AK = \frac{|a.\alpha+b.\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1(2)+1(1)+1(2)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

وايضاً إن KM هو نفسه بُعد النقطةA عن المستوي P اي $dis(A,P) =$ $\frac{|1(2)+1(1)-2(2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ KM لأن $MK = AL$ حيث $ALMK$ مستطيل

ومنه حسب فيثاغورث نكتب: $dist(A,d) = AM = \sqrt{AK^2+KM^2} = \sqrt{\frac{25}{3}+\frac{4}{6}} = 3$

السؤال63 :كيف نكتب المسقط القائم D' لنقطة D على مستوٍ P ؟

هناك عدة طرق لكن سأذكر أسهلها وهي ان نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') المار من D وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي أي $\vec{u} = \overrightarrow{n_p}$ وليكن $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}\ ; t\epsilon$

ثم نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي P فنحصل على معادلة بمجهول وحيد t نحلها ونقوم بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم فنحصل على احداثيات المسقط القائم D'

مثال: في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$. يُطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC).

الحل: لنكتب أولاً معادلة المستوي (ABC) كما تعلمنا سابقاً لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}(0,3,5)$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي: $\frac{0}{-1} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{5}{1}$

ونفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \mapsto (a,b,c)(-1,-2,1) = 0 \mapsto -a - 2b + c = 0 \quad 1$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \mapsto (a,b,c)(0,3,5) \mapsto 3b + 5c = 0 \quad 2$$

نضع $C = 3$ نعوض في 2 فيكون

$3b + 15 = 0 \Rightarrow b = -5$ نعوض في 1 فيكون $-a + 10 + 3 = 0 \Rightarrow a = 13$

ومنه $\vec{n}(13,-5,3)$ ناظم على المستوي P ويمر المستوي P بالنقاط الثلاثة نختار $B(0,0,1)$ ونعوض في

$$(ABC): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \mapsto (ABC): 13(x - 0) - 5(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة: $(ABC): 13x - 5y + 3z - 3 = 0$

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') المار من $D(-11,9,-4)$ وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي $\vec{n}(13,-5,3)$ أي

$$(DD'):\begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = 3t - 4 \end{cases} ;\ t\epsilon\mathcal{R}\text{:فيكون } \vec{u} = \overrightarrow{n_p}(13,-5,3)$$

نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي (ABC) فيكون:

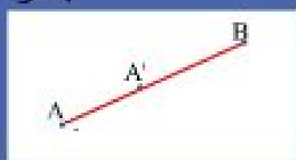
$$13(13t-11) - 5(-5t+9) + 3(3t-4) - 3 = 0 \Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

نعوض قيمة $t = 1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') فيكون:

$$\begin{cases} x = 13 - 11 = 2 \\ y = -5 + 9 = 4 \\ z = 3 - 4 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فتكون احداثيات المسقط القائم}} D'(2,4,-1)$$

السؤال 64: كيف نثبت أن المسقط القائم A' لنقطة A يقع على القطعة المستقيمة مثلاً $[AB]$؟

بافتراض ان A' تقع على القطعة المستقيمة $[AB]$



فتكون النقاط B و A و A' على استقامة واحدة وبالتالي لإثبات أن المسقط القائم A' لنقطة A يقع على القطعة المستقيمة $[AB]$ سنوجد احداثيات A' المسقط القائم لنقطة A كما تعلمنا سابقاً ثم نثبت وقوع النقاط B و A و A' على استقامة واحدة

مثال: اثبت ان المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي $P: 13x - 5y + 3z - 3 = 0$

يقع على القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$

الحل: سنوجد احداثيات D' المسقط القائم لنقطة D كما تعلمنا سابقاً ثم نثبت وقوع النقاط Bو A و D'

على استقامة واحدة

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') المار من $D(-11,9,-4)$ وشعاع توجيهه

هو ناظم المستوي أي

$$(DD'):\begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = 3t - 4 \end{cases} \; ; t\epsilon\mathcal{R}: \text{فيكون} \; \vec{u} = \overrightarrow{n_p}(13,-5,3)$$

نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي (ABC) فيكون:

$$13(13t-11) - 5(-5t+9) + 3(3t-4) - 3 = 0 \Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

نعوض قيمة $t = 1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') فيكون:

$$\begin{cases} x = 13 - 11 = 2 \\ y = -5 + 9 = 4 \\ z = 3 - 4 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فتكون احداثيات المسقط القائم}} D'(2,4,-1)$$

لنوجد الشعاعين $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD'}(1,2,-1)$, $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}$ مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة

أي: $\frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$

وبالتالي فالنقاط Bو A و D' تقع على استقامة واحدة وبالتالي فالمسقط القائم D' للنقطة D على المستوي

P يقع على القطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال 65: كيف نحسب المسافة(البُعد)بين مستويين متوازيين P_2, P_1 ؟

نختار نقطة من المستوي P_1 كما تعلمنا في السؤال 50

ثم نحسب بُعد هذه النقطة عن المستوي P_2

مثال: احسب البُعد بين المستويين المتوازيين: $\begin{cases} p_1: 2x - y - z + 4 = 0 \\ P_2: -6x + 3y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$

الحل: نختار نقطة من المستوي P_1 بفرض $x = 0 , y = 0$ نعوض في

معادلة المستوي P فنجد: $-z + 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

فتكون النقطة $A(0,0,4)$ نقطة من المستوي P_1

لنحسب بُعد A عن P_2 :

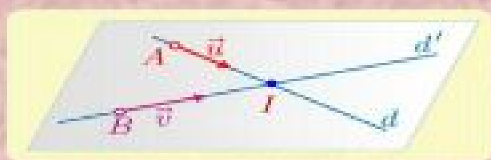
$dist(A, P_2) = \frac{|(0)(-6) + (3)(0) + (3)(4) + 3|}{\sqrt{(-6)^2 + (3)^2 + (3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{54}}$ وهو يمثل البُعد بين المستويين

السؤال 66: كيف نكتب معادلة مستوي P المحدد بالمستقيمين d' و d المتقاطعين؟

لِيكن المستقيمان d , d' حيث:

$$(d') \begin{cases} x = a't + {x_0}' \\ y = b't + {y_0}' \\ z = c't + {z_0}' \end{cases} ; t\epsilon\mathcal{R} \text{ و } (d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t\epsilon\mathcal{R}$$

المتقاطعان في I ومنه من التمثيل الوسيطي يمكننا إيجاد شعاعي توجيه المستقيمان $\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ و نقطتان يمر منهما المستقيمان حيث المستقيم d يمر من



$A(x_0, y_0, z_0)$ والمستقيم d' يمر من $B({x_0}', {y_0}', {z_0}')$

ومنه عدنا إلى السؤال 39 حيث نكتب معادلة المستوي عُلم شعاعي توجيهه $\vec{u}, \vec{v}$ ويمر بالنقطة I او B او A اي نقطة تختارها صحيحة

مثال: المستقيمان L و L' المتقاطعان في $I(-1,1,1)$ معرفان وسيطيا وفق:

$$(L'): \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases} ; s\epsilon\mathcal{R} \quad (L): \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2s \end{cases} ; s\epsilon\mathcal{R}, \text{و}$$

اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين الحل: نفرض أن: $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم على

المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي

$\overrightarrow{u_L}(0, -1, -2), \overrightarrow{u_{L'}}(-5, -2, 2)$ لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{u_L} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{u_{L'}} = 0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_L} = 0 \Longmapsto (a,b,c)(0,-1,-2) = 0 \Longmapsto -b - 2c = 0 \quad ①$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_{L'}} = 0 \Longmapsto (a,b,c)(-5,-2,2) \Longmapsto -5a - 2b + 2c = 0 \quad ②$$

نضع $C = 1$ نعوض في ① $-b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$:

نعوض في ② فيكون: $-5a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{5}$ ومنه $\vec{n}(\frac{6}{5}, -2, 1)$ ناظم على

المستوي P المحدد بالمستقيمين و L' و L المتقاطعين ومنه فإن معادلة المستوي P المار من $I(-1,1,1)$

$$P: a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$$

$$\Longmapsto P: \frac{6}{5}(x + 1) - 2(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:

$$P: 6x - 10y + 5z + 11 = 0$$

ملاحظة: يمكن أخذ النقطة $B(4,3,-1)$ او $A(-1,1,1)$ لنعوض في معادلة المستوي P بدلاً من

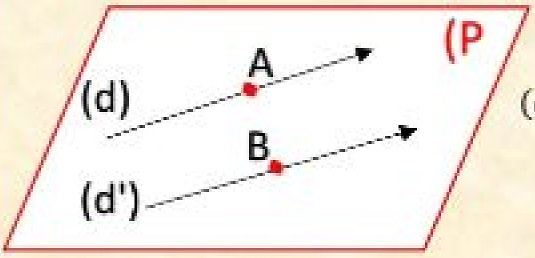
نقطة التقاطع I اي لسنا مضطرين عند كتابة معادلة مستوي محدد بمستقيمين متقاطعين ان نوجد نقطة التقاطع

يكفي إيجاد الناظم والتعويض في B او A الموجودين في التمثيل الوسيطي للمستقيمين

.السؤال 66 :كيف نكتب معادلة مستوي P محدد بمستقيمين معلومين d' و d ؟

ليكن المستقيمان d' و d حيث:

$$(d')\begin{cases}x = a't + x_0'\\ y = b't + y_0'\\ z = c't + z_0'\end{cases};t\epsilon\mathcal{R} \quad \text{و}\quad (d):\begin{cases}x = at + x_0\\ y = bt + y_0\\ z = ct + z_0\end{cases};t\epsilon\mathcal{R}$$



ناخذ _ $\overrightarrow{u_d}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم d

هو نفسه شعاع توجيه المستوي P و لمستقيم d

يمر من $A(x_0, y_0, z_0)$ والمستقيم d' يمر من $B(x_0', y_0', z_0')$ فيكون $\overrightarrow{AB}$ هو ايضاً شعاع توجيه المستوي P

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Pومنه نكتب: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

نحصل معادلتين بثلاث مجاهيل a, b, c نعطي قيمة اختيارية لاحدى المجاهيل ونوجد المجهولين الباقيين وبذلك نكون قد عينا $\vec{n}(a,b,c)$ فنكتب معادلة مستوي Pعلم ناظمه ويمر من A او B

مثال: اكتب معادلة المستوي P المار من d' و d المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$(d')\begin{cases}x = 1 + t'\\ y = -2 - t\\ z = 2t\end{cases};t\epsilon\mathcal{R} \quad \text{و}\quad (d):\begin{cases}x = t\\ y = 1 - t\\ z = -2 + 2t\end{cases};t\epsilon\mathcal{R}$$

الحل: ناخذ $\overrightarrow{u_d}(1,-1,2)$ شعاع توجيه المستقيم d هو نفسه شعاع توجيه المستوي P والمستقيم d

يمر من $A(0,1,-2)$ والمستقيم d' يمر من $B(1,-2,0)$ فيكون $\overrightarrow{AB}(1,-3,2)$ هو ايضاً شعاع توجيه المستوي P

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Pومنه نكتب: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Longmapsto (a,b,c)(1,-1,2) = 0 \Longmapsto a - b + 2c = 0 \qquad 1$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Longmapsto (a,b,c)(1,-3,2) \Longmapsto a - 3b + 2c = 0 \qquad 2$$

نضع $C = 1$ نعوض في 1 و 2

$$\left.\begin{matrix}a - b + 2 = 0\\ a - 3b + 2 = 0\end{matrix}\right\}\xRightarrow{\text{بالطرح}} 2b = 0 \Longmapsto b = 0 \Longmapsto a = -2$$

ومنه $\vec{n}(-2,0,1)$ ناظم على المستوي P المحدد بالمستقيمين و d' و d ومنه فإن معادلة المستوي P المار من

$A(0,1,-2)$

$$P: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow P: -2(x-0)+0(y-1)+1(z+2)=0$$

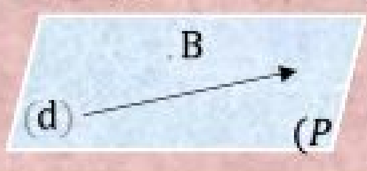
ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:

$$P: -2x+z+2=0$$

السؤال 67 كيف نكتب معادلة مستوي p يحوي مستقيم ونقطة خارجة عنه ولتكن B ؟

النقطة B لا تنتمي الى الى المستقيم $(d):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases};t\epsilon R$ ويمر هذا المستقيم من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ لذلك نكتب $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه المستوي P و $\overrightarrow{u_d}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم d هو نفسه شعاع توجيه المستوي P نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي P ومنه نكتب: $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$

نحصل معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c نعطي قيمة اختيارية لاحدى المجاهيل ونوجد المجهولين الباقيين وبذلك نكون قد عينا $\vec{n}(a,b,c)$ فنكتب معادلة مستوي P علم ناظمه ويمر من A او B



مثال: اكتب معادلة المستوي P الذي يحوي المستقيم $(d):\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases};t\epsilon R$ ويمر

الحل: النقطة B لا تنتمي الى المستقيم لانها لا تحقق التمثيل الوسيطي له المستوي من النقطة $B(2,0,1)$

ويمر هذا المستقيم من النقطة $A(1,-1,0)$ لذلك نكتب $\overrightarrow{AB}(1,1,1)$ هو شعاع توجيه

المستوي P و $\overrightarrow{u_d}(1,2,1)$ شعاع توجيه المستقيم d هو نفسه شعاع توجيه المستوي P نفرض

$\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي P ومنه نكتب:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \text{ و } \vec{n}.\vec{u}=0$$

$$\vec{n}.\vec{u}=0 \Longrightarrow (a,b,c)(1,2,1)=0 \Longrightarrow a+2b+c=0 \quad ①$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Longrightarrow (a,b,c)(1,1,1) \Longrightarrow a+b+c=0 \quad ②$$

نضع $C=1$ نعوض في ① و ②

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+1=0 \\ a+b+1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بالطرح}} b=0 \Longrightarrow a=-1$$

ومنه $\vec{n}(-1,0,1)$ ناظم على المستوي P ومنه فإن معادلة المستوي P المار من $B(2,0,1)$

$$P: a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$

$$\Longrightarrow P: -1(x-2)+0(y-0)+1(z-1)=0$$

ومنه فإن معادلة المستوي P تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:

$$P: -x+z+1=0$$

السؤال68: كيف نكتب معادلة مستوي يمس كرة معلومة في نقطة منها ولتكن A ؟

معادلة الكرة $S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ حيث $\omega(a,b,c)$ مركز الكرة و A نقطة التماس

ومنه فالمستقيم ωA المار من مركز الكرة ω ونقطة التماس A عمودي على المستوي المماس في نقطة التماس A فيكون: $\vec{n}=\overrightarrow{\omega A}$

فنكتب معادلة مستوي علم ناظمه ويمر من A

مثال: لتكن لدينا الكرة S التي معادلته $S:(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=3$ والنقطة $A(3,0,1)$ نقطة منها. اكتب

معادلة المستوي P المماس للكرة S في النقطة A الحل: المستقيم ωA المار من مركز الكرة ω ونقطة التماس A عمودي على

المستوي المماس في نقطة التماس A فيكون: $\vec{n} = \overrightarrow{Aw}(-1,1,-1)$ حيث $\omega(2,1,0)$ مركز الكرة ومنه فإن معادلة

المستوي P الذي ناظمه $\vec{n}(-1,1,-1)$ ويمر من النقطة $A(3,0,1)$

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Longrightarrow P: -1(x-3)+1(y-0)-1(z-1)=0$$

$$\Rightarrow P: -x+y-z+4=0$$

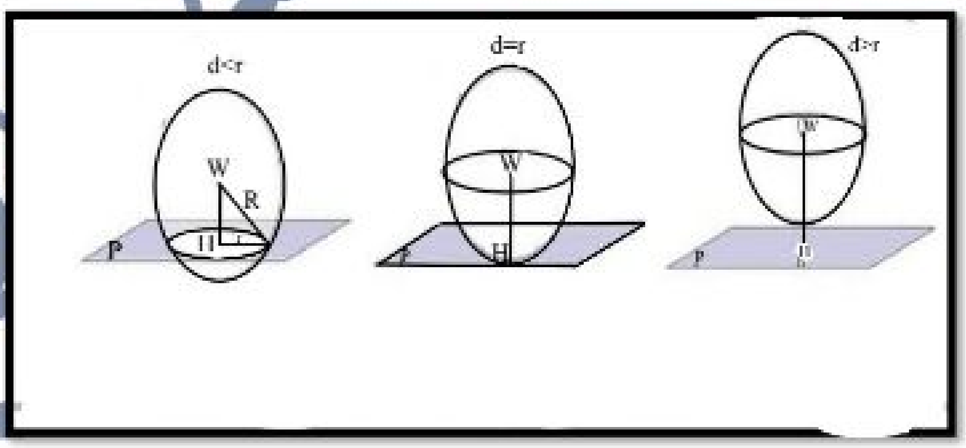
السؤال69: كيف ندرس الوضع النسبي بين المستوي P والكرة S ؟

نحسب بُعد مركز الكرة S عن المستوي P ونقارنه مع نصف قطر الكرة ونميز الحالات التالية:

$dis(\omega,P) > R$ فالمستوي P خارج الكرة S ولا يمسها

$dis(\omega,P) < R$ المستوي P يقطع الكرة بدائرة يطلب إيجاد نصف قطرها

$dis(\omega,P) = R$ المستوي P يمس الكرة S



مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستوي $p: x+y-z+6=0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1,-2,6)$ ونصف قطرها $R=4$

الحل: نحسب بُعد مركز الكرة S عن المستوي P

$$dis(\omega,P) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$\frac{|1(1)-2(1)+6(-1)+6|}{\sqrt{1^2+1^2+-1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ نلاحظ أن $dis(\omega,P) < R$ المستوي P يقطع الكرة بدائرة

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستوي $p: 2x + y - 2z + 9 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(2,-1,0)$ ونصف قطرها $R = 4$ الحل:

$$dis(A,P) = \frac{|2(2)-1(1)+0(-2)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 4$$

بما أن $R = dis(A,P) = 4$ فإن المستوي P يمس الكرة

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستوي $p: x - z - 2 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1,1,1)$ ونصف قطرها $R = 1$

الحل: نحسب بُعد مركز الكرة S عن المستوي P

$$dis(\omega,P) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

نلاحظ أن: $\frac{|1(-1)+0(1)-1(1)-2|}{\sqrt{1^2+0^2+-1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$dis(\omega,P) > R$ المستوي P خارج الكرة S ولا يمسها

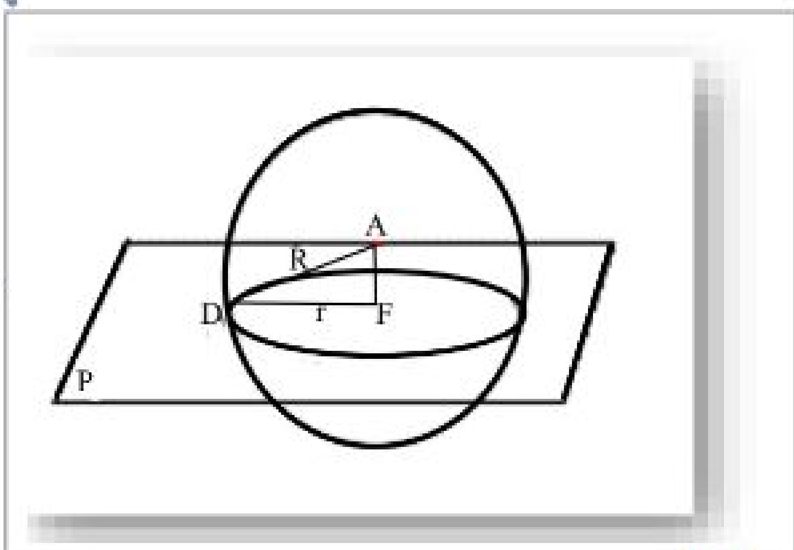
السؤال 70: كيف نوجد نصف قطر مقطع الدائرة الناتج عن تقاطع المستوي مع الكرة؟

حساب r كما نلاحظ من المثلث لقائم حسب فيثاغورث حيث يمثل $AD = R$ نصف قطر الكرة و يمثل

$AF = dis(a,p)$

بُعد A مركز الكرة عن المستوي P

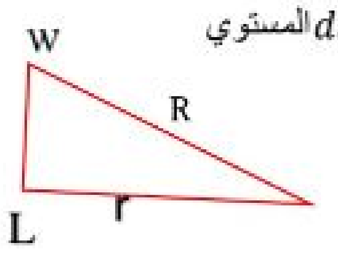
كما هو موضح في الشكل المرسوم جانباً



مثال: اثبت ان لمستوي $p: x + y - z + 6 = 0$ يقطع الكرة التي مركزها $\omega(-1,-2,6)$ ونصف قطرها $R = 4$ ثم احسب طول نصف قطر دائرة المقطع.

نحسب بُعد مركز الكرة S عن المستوي P

$$dis(\omega,P)=\frac{|a.\alpha+b.\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$



$=\frac{|1(1)-2(1)+6(-1)+6|}{\sqrt{1^2+1^2+-1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ نلاحظ أن $dis(\omega,P)<R$ المستوي P يقطع الكرة بدائرة

وحسب فيثاغورث نكتب:

$$R^2=r^2+WL^2\Rightarrow r=\sqrt{R^2-WL^2}=\sqrt{16-3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

حيث ان : $WL=dis(\omega,P)$

السؤال 71: كيف ندرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S ؟

نقوم بتعويض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بدلالة المتحول t لحلها نستخدم المميز مثلاً في حال كان

- $\Delta=0$ للمعادلة جذر مضاعف وحيد المستقيم d يمس الكرة S بنقطة لايجاد احداثياتها نعوض قيمة الحل t في التمثيل الوسيطي للمستقيم فنحصل عليها.
- $\Delta<0$ فالمستقيم d خارج الكرة S ولا يمسها

$\Delta>0$ للمعادلة حلان 2 المستقيم d يقطع الكرة بنقطتين يطلب إيجاد احداثياتهما A,B نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة نحصل على معادلة درجة ثانية بالمجهول الوسيطي نحلها فيما ان المستقيم d يقطع الكرة S فحصرا سيكون للمعادلة جذران (حلان) نعوضهما في التمثيل الوسيطي للمستقيم نحصل على احداثيات A,B

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S حيث:

$$(d):\begin{cases}x=2-t\\y=2+2t\\z=-3+2t\end{cases};t\epsilon R, S:(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=25$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنجد:

$$(2-t+1)^2+(2+2t+3)^2+(-3+2t+4)^2=25$$

$$t^2-6t+9+4t^2+20t+25+4t^2+4t+1=25$$

$$9t^2+18t+10=0$$

$$\Delta=324-360=-36<0$$

فالمستقيم d خارج الكرة S ولا يمسها

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S حيث:

$$(d):\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 + 4t \\ z = -5 + t \end{cases} ; t\epsilon R , S: (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 25$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنجد:

$$(6 - 3t + 1)^2 + (-4 + 4t + 3)^2 + (-5 + t + 4)^2 = 25$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 16t^2 - 8t + 1 + t^2 - 2t + 1 = 25$$

$$26t^2 - 52t + 26 = 0$$

$$\Delta = 2704 - 2704 = 0$$

- للمعادلة جذر مضاعف وحيد $t = 1$ المستقيم d يمس الكرة S بنقطة لايجاد احداثياتها نعوض قيمة الحل $t = 1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم فيكون

$$\begin{cases} x = 6 - 3(1) \\ y = -4 + 4(1) \\ z = -5 + 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{نقطة التماس هي}} A(3,0,-4)$$

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S حيث:

$$(d):\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t\epsilon R , S: (x+1)^2 + (y)^2 + (z+2)^2 = 6$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرةفنجد:

$$(0 + 1)^2 + (-t)^2 + (1 + t + 2)^2 = 6$$

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1 \\ t_2 = \dfrac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases}$$

فالستقيم d يقطع الكرة بنقطتين يطلب إيجاد احداثياتهما A, B نعوض قيمة $t_2 = -2, t_1 = -1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم نجد:

$$t_1 = -1 \text{ من اجل } \begin{cases} x = 0 \\ y = -(-1) \\ z = 1 + (-1) \end{cases} \Rightarrow A(0,1,0)$$

$$t_2 = -2 \text{ من اجل } \begin{cases} x = 0 \\ y = -(-2) \\ z = 1 + (-2) \end{cases} \Rightarrow B(0,2,-1)$$

السؤال72: كيف نثبت أن مستقيم ما محتوى في المستوي ؟

نعوض معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي في حال تحققت يكون المستقيم محتوى في المستوي وفي لم تتحقق فيكون المستقيم غير محتوى في المستوي

مثال: ليكن لدينا المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً : $(d):\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \; ; t \in R$

اثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي $P: 3x + z - 4 = 0$ حيث P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

الحل: نعوض معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي

$3t + 4 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ محققة وبالتالي فالمستقيم d محتوى في المستوي المحوري P

السؤال73: كيف نثبت أن نقطة ما ولتكن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث وليكن ABC ؟

لإثبات أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث ABC يكفي أن نثبت أن:

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC} = 0$

مثال: في المعلم المتجانس لدينا النقاط: $E(0,0,3)$, $D(0,3,0)$, $B(3,0,0)$, $J(1,1,1)$

اثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EBD

الحل: لإثبات أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث EBD يكفي أن نثبت أن:

$\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{DB} = 0$ و $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{EB} = 0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{ED} = 0$

$$\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{ED} = (-2,1,1)(0,3,-3) = 3 - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{EB} = (1,-2,1)(3,0,-3) = 3 - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{DB} = (1,1,-2)(3,-3,0) = 3 - 3 = 0$$

وبالتالي J هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث EBD

السؤال74: كيف نثبت أن $\vec{n}(a,b,c)$ هو شعاع ناظم على المستوي ABC ؟

طريقة أولى: الشعاع الناظم كما نعلم هو عامودي على شعاعي توجيه المستوي أي لو كان $\vec{n}$ هو الشعاع الناظم على المستوي ABC فكان $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ ويكفي اثبات ذلك ليكون كان $\vec{n}$ هو الشعاع الناظم على المستوي ABC

طريقة ثانية: يمكننا بواسطة كتابة الشعاع الناظم ومقارنته مع الشعاع الناظم المعطى ولكن انتبه ربما يظهر شعاع ناظم مكافئ له وليس نفسه تماما وهذا طبيعي حسب إعطاء القيمة الاختيارية

مثال: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقاط

$A(1,0,-1)\,,B(2,2,3)\,,C(3,1,-2)$:اثبت أن $\vec{n}(2,-3,1)$ هو الشعاع الناظم على المستوي ABC

الحل: **طريقة أولى:** لنثبت أن $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (2,-3,1)(1,2,4) = 2-6+4 = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = (2,-3,1)(2,1,-1) = 4-3-1 = 0$$

ومنه فإن $\vec{n}(2,-3,1)$ هو الشعاع الناظم على المستوي ABC

طريقة ثانية: نفرض أن: $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

لذلك نضع: $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \longmapsto (a,b,c)(1,2,4) = 0 \longmapsto a+2b+4c = 0 \quad 1$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \longmapsto (a,b,c)(2,1,-1) \longmapsto 2a+b-c = 0 \quad 2$$

نضع $C = 1$ نعوض في 1 و 2 فيكون

$$\begin{cases} a+2b+4 = 0 \\ 2a+b-1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية ب}-2} \begin{cases} a+2b+4 = 0 \\ -4a-2b+2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بالجمع}} -3a+6 = 0 \longmapsto a = 2 \longmapsto b = -3$$

ومنه $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي P وهو نفسه المعطى

السؤال57 كيف نوجد حجم رباعي الوجوه؟

إن حجم رباعي الوجوه :

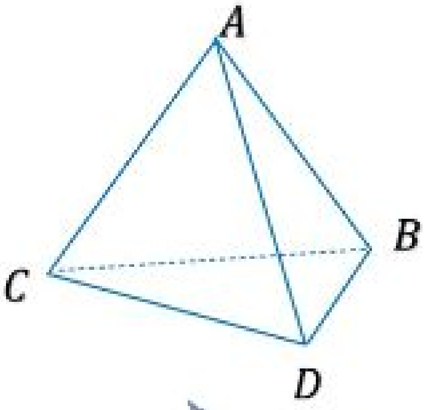
$$V = \frac{1}{3}.S.h$$

حيث ان S هي مساحة القاعدة حيث قد تكون مثلث او مربع او ...الخ ومساحة أي شكل هندسي معروف سنتذكرهم معاً في الفقرة التالية

و h :هو بُعد رأس رباعي الوجوه عن مستوي القاعدة .

مثال: لتكن النقاط $A(-4,2,1)$, $C(3,1,-2)$, $B(2,2,3)$, $D(1,0,-1)$

- اثبت ان المثلث BCD قائم واحسب مساحته



بفرض ان معادلة المستوي BCD هي:

$$2x - 3y + z - 1 = 0$$

احسب بُعد A عن المستوي DBC

واحسب حجم رباعي الوجوه V_{A-BCD}

الحل:

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{DC}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{DB}(1,2,4)$ ونلاحظ أن جدائهما السلمي يساوي الصفر أي : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = 0$ فهما متعامدين فالمثلث DBC قائم في D

ومنه مساحته تكون : $S = \frac{\|\overrightarrow{DC}\|.\|\overrightarrow{DB}\|}{2} = \frac{\sqrt{21}\ .\sqrt{6.}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

حساب بُعد A عن المستوي DBC :

$$dist = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(-4)+(-3)(2)+1(1)-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \sqrt{14}$$

إن حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\sqrt{14}.\sqrt{14} = 7$$

السؤال76: كيف نوجد مقطع مكعب بمستوٍ؟

تذكرة: 1- يقطع مستوٍ P مستويين متوازيين P_1, P_2 وفق مستقيمين d_1, d_2

2- إذا احتوى مستويين متقاطعين P_1, P_2 على مستقيمين متوازيين d_1, d_2 كان الفصل المشترك d الناتج عن تقاطع المستويين موازياً لهذين المستقيمين d_1, d_2 أي $d_1 // d_2 // d$

3- اذا كان المستقيم d موازياً لمستويين متقاطعين P_1, P_2 يكون المستقيم d موازياً لمستقيم Δ الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين

4- اذا انتمت نقطتين الى مستوي ما P فإن المستقيم d المار بهما محتوى في المستوي P

5- لإيجاد الفصل المشترك بين مستويين نبحث عن القاط المشتركة بين هذين المستويين

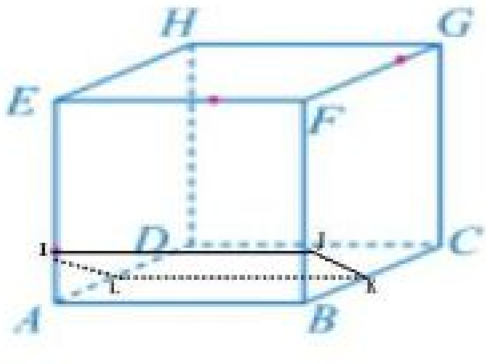
6- اذا كان P_1, P_2 مستويين متوازيين فإن كل مستوٍ Q يقطع P_1 ويقطع ايضاً P_2 ويكون الفصلان المشتركان متوازيان.

7- المستويان يشتركان بنقطة فالفصل المشترك يمر بالنقطة، والمستويان يشتركان بنقطتين فالفصل المشترك يمر بالنقطتين.

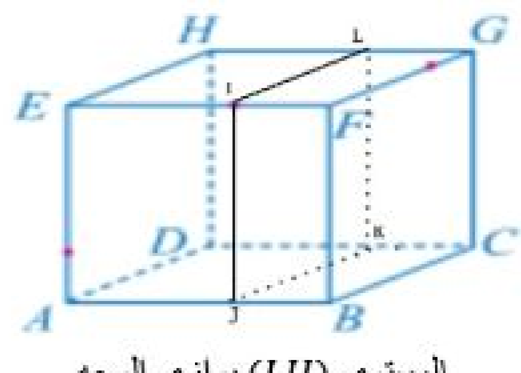
مقطع مكعب بمستوٍ P هو:

- مربع اذا كان المستوي P موازياً لاحد أوجه المكعب
- مستطيل او قطعة مستقيمة اذا اذا كان المستوي P موازياً لاحد أحرف المكعب
- نقطة- متوازي الاضلاع- مثلث -شبه منحرف- خماسي او سداسي في باقي الحالات.

مقطع المكعب بالمستوي (LJK) هو الخماسي$(LJKLM)$

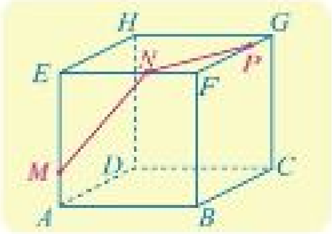


المستوي (LIJ) يوازي الحرف$[AB]$ مقطع المكعب هو المستطيل$(LJKL)$



المستوي (LIJ) يوازي الوجه $(ADEH)$ مقطع المكعب هو (IJKL)

مثال

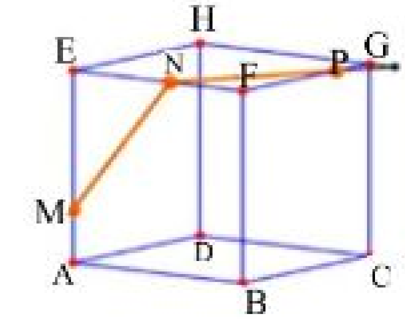


ABCDEFGH مكعب. *M* و *N* و *P* ثلاث نقاط من الأحرف

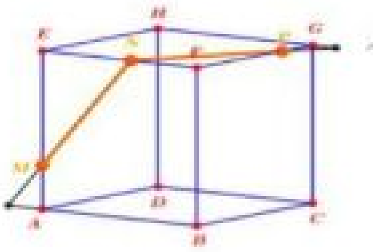
[*AE*] و[*EF*] و[*FG*] بالترتيب، كما في الشكل المجاور. يُطلب إيجاد مقطع

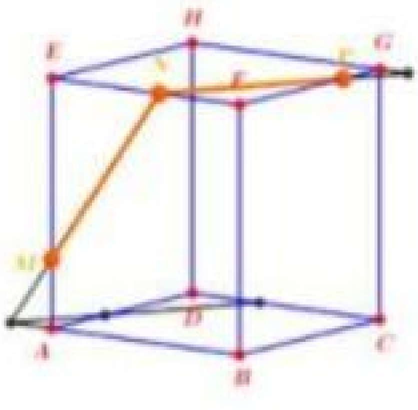
المكعب بالمستوي (*MNP*).

أولا :نعيين نقطة تقاطع المستقيمين HG,NB



ثانيا:نعيين نقطة تقاطع المستقيمين:AB,MN



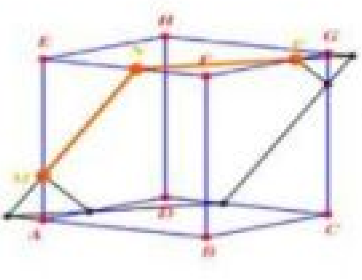


ثالثا ": نرسم من هذه النقطة مستقيم يوازي NB يقطع الضلعيين AD,DC

رسمنا المستقيم الموازي لأن الفصل المشترك

لتقاطع مستو مع مستويين ينتج فصلين مشتركين

متوازيين كما ذكرنا في الواجعة.

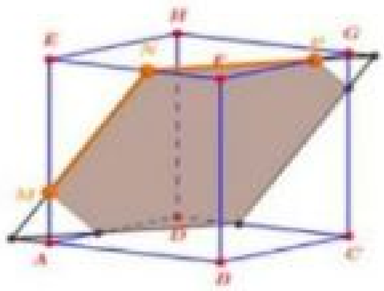


رابعا": نرسم من نقطة تقاطعه مع DC مستقيم يوازيMN يقطع الضلع GC

خامسا": نصل النقاط المتبقة.

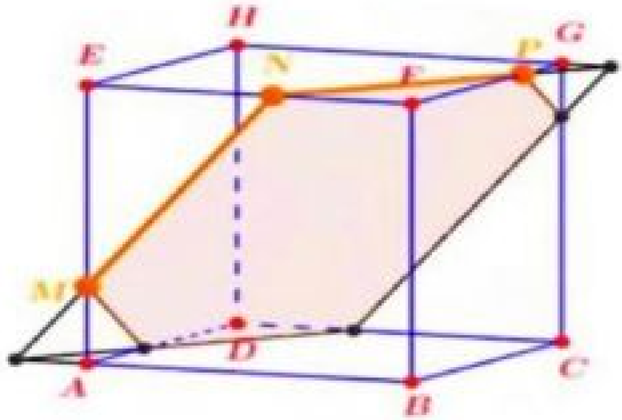
رسمنا المستقيم الموازي لأن الفصل المشترك لتقاطع مستو مع

مستويين ينتج فصلين مشتركين متوازيين كما ذكرنا في الواجعة



سادساً: وبالتالي المضلع الذي يصل بين نقاط القاطع مع أحرف المكعب هو المقطع المطلوب.

الشكل النهائي الموضح:



تذكرة قواعد هامة

❖ لإثبات نوع الشكل الهندسي

- المثلث ABC قائم في A يكفي أن نثبت:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \text{ أو } BC^2=AB^2+AC^2$$

- المثلث ABC متساوي الأضلاع يكفي ان نثبت ان $AB=AC=BC$

- المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B يكفي ان نثبت ان :

$$BA=BC$$

- $ABCD$ متوازي الأضلاع يكفي ان نثبت أن:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \text{ او } \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

- $ABCD$ مستطيل يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و احد هذه الشروط

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\\ AC^2=AB^2+CB^2\\ \|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BD}\|\end{cases}$$

- $ABCD$ مربع يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و احد هذه الشروط

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\| \text{ و } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\\ \|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BD}\| \text{ و } \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

- $ABCD$ شبه منحرف يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$ و

$$\|\overrightarrow{AB}\|\neq\|\overrightarrow{DC}\|$$

- $ABCD$ معين يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و احد هذه الشروط

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|\\ \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

❖ مساحة الاشكال الهندسية :

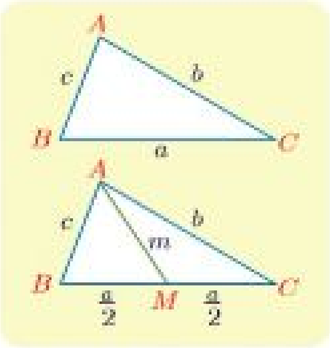
- المثلث: $\frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$
- المثلث القائم: $\frac{1}{2}$ جداء الضلعين القائمتين
- المثلث المتساوي الاضلاع: $\frac{\sqrt{3}}{4}.l^2$ حيث l طول الضلع
- المربع: a^2 حيث a طول ضلعه
- متوازي الاضلاع: القاعدة × الارتفاع
- المستطيل: جداء بُعديه
- شبه المنحرف: $\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2}$ × الارتفاع
- المعين: $\frac{1}{2}$ جداء القطرين

❖ حساب حجم الهرم:

الهرم هو رباعي وجوه وبالتالي يكون حجمه هو نفس حجم رباعي الوجوه أي

$V = \frac{1}{3}.S.h$ حيث S مساحة القاعدة و h ارتفاع الهرم

رباعي الوجوه المنتظم: هو هرم جميع اوجهه هي مثلثات متساوية الأ ضلا ع وكل حرفان فيه متقابلا ن متعامدان وكل مستقيم يصل بين منتصفي حرفين متقابلين عامودي عليهما



❖ علاقة كاشي: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

❖ مبرهنة المتوسط: $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

❖ علاقة التجيب: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

❖ في متوازي الاضلاع مجموع مربعات اطوال الاضلاع يساوي مجموع مربعي طولي القطرين.

❖ تفيد علاقة كاشي وعلاقة التجيب في تعيين اضلاع وزوايا مثلث وتفيد مبرهنة المتوسط في حساب المتوسطات والارتفاعات

رقم	السؤال	رقم	السؤال
1	كيف نعيين نقطة تحقق علاقة شعاعية ؟	21	ماذا يُفيد مفهوم مركز الابعاد المتناسبة؟
2	كيف نثبت صحة علاقة شعاعية؟	22	كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
3	كيف نوجد مركبات شعاع؟	23	كيف نثبت وقوع نقاط في مستوٍ واحد باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
4	كيف نوجد طويلة شعاع او المسافة بين نقطتين؟	24	كيف نثبت تلاقي او تقاطع مستقيمين في نقطة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
5	كيف نوجد احداثيات منتصف قطعة مستقيمة؟	25	كيف نثبت تلاقي ثلاث مستقيمات في نقطة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
6	كيف نبيّن طبيعة مثلث؟وكيف نوجد احداثيات مركز ثقله؟	26	كيف نوجد α, β ، γ باستخدام علاقة مركز الابعاد تُعطى علاقة شعاعية ؟
7	كيف نوجد احداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية؟	27	يف نوجد α, β ، γ باستخدام علاقة مركز الابعاد يُعطى شكل ؟
8	كيف نوجد احداثيان نقطة D مثلاً تجعل النقاط الأربعة A, B, C, D متوازي الاضلاع وكيف نوجد احداثيات مركز متوازي الاضلاع؟	28	كيف نوجد احداثيات مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط؟
9	كيف نوجد احداثيات نقاط رؤوس مكعب؟	29	كيف يتم تعيين مجموعة النقاط M من الفراغ
10	كيف نوجد احداثيات رؤوس متوازي السطوح في حال عُلم منها اربع منها؟	30	كيف نعيين مجموعة النقاط M تعطى معادلة؟
11	كيف نثبت الارتباط الخطي للشعاعين تحليلاً؟	31	كيف نوجد الجداء السلمي للشعاعين في المستوي؟
12	كيف نثبت الارتباط الخطي للشعاعين شعاعياً؟	32	كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في الفراغ؟
13	كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟	33	كيف نحسب بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي
14	كيف نكتب معادلة كرة ؟	34	كيف نوجد بُعد نقطة عن مستوٍ في الفراغ
15	كيف نثبت ان نقطة ما تنتمي الى المستوي المحوري لقطعة مستقيمة؟	35	كيف نثبت تعامد مستقيمين؟
16	كيف نثبت ان مجموعة نقاط معلومة تقع جميعها على كرة واحدة معلومة المركز؟	36	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار من نقطة وعُلم ناظمه؟
17	كيف نعيين على محور الفواصل او تراتيب نقطة C تكون متساوية البعد عن نقطتين A,B	37	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار من نقطة ويوازي مستو اخر
18	كيف نثبت ان ثلاث نقاط تعيين مستوٍ او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط في مستو واحد؟	38	كيف نكتب معادلة مستو مار من ثلاث نقاط
19	كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث اشعة؟	39	كيف نكتب معادلة مستو مار بنقطة وعلم شعاعي توجيهه
20	كيف نثبت انتماء أربعة نقاط الى مستو واحد؟	40	كيف نكتب معادلة مستو عامودي على مستو اخر ومار بنقطتين ؟

41	كيف نكتب معادلة مستو عامودي على مستويين ويمر بنقطة (حالة عامة)
42	كيف كيف نكتب معادلة مستو مار من نقطة عامودي على مستويين المتقاطعين بفصل مشترك عام شعاع توجيهه (الحالة الخاصة)
43	كيف نكتب معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة؟
44	كيف نكتب معادلة كرة تمس المستوي؟ وكيف نثبت ان مستو يمس كرة؟
45	كيف نكتب معادلة أسطوانة ؟
46	كيف نكتب معادلة مخروط ؟
47	كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم مار بنقطة وعلم شعاع توجيهه ؟
48	كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم مار بنقطتين؟
49	كيف نكتب التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم ؟
50	كيف نعيين نقطة من مستوي
51	كيف ندرس الوضع النسبي للمستويين؟
52	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين؟
53	كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين ؟
54	كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم المار من نقطة ويعامد مستو ؟
55	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم مع مستو؟ دراسة تقاطع مستقيم مع مستو .
56	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوٍ؟
57	كيف نثبت أن مستقيم يعامد مستو؟
58	كيف ندرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث؟
59	كيف نوجد احداثيات نقطة تقاطع المستويات؟
60	كيف نوجد احداثيات المسقط القائم لنقطة على مستوٍ؟
61	كيف نوجد بُعد نقطة عن مستقيم او عن الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين؟

62	كيف ننوجد بُعد نقطة عن مستقيم الفصل المشترك الناتج عن تعامد مستويين؟
63	كيف نوجد احداثيات المسقط القائم لنقطة على مستوٍ؟
64	كيف نثبت أن المسقط القائم لنقطة على مستو يقع على القطعة المستقيمة [AB]؟
65	كيف نحسب البُعد (المسافة)بين مستويين متوازيين؟
66	كيف نكتب معادلة مستو المحدد بالمستقيمين d1,d2المتقاطعين؟
67	كيف نكتب معادلة مستو محدد بمستقيمين d1,d2 معلومين؟
68	كيف نكتب معادلة مستو يحوي مستقيم ونقطة خارجة عنه؟
69	كيف نكتب معادلة مستو يمس كرة معلومة في نقطة منها معلومة؟
70	كيف ندرس الوضع النسبي بين المستوي والكرة ؟
71	كيف نوجد نصف قطر الدائرة الناتج عن تقاطع المستوي مع الكرة؟
72	كيف ندرس الوضع النسبي بين المستقيم والكرة؟
73	كيف نثبت أن مستقيم ما محتوى في مستوٍ ؟
74	كيف نثبت أن هذا الشعاع هو شعاع ناظم على المستوي؟
75	كيف نوجد حجم رباعي الوجوه ؟
76	كيف نوجد مقطع مكعب بمستوٍ؟
77	تذكرة ومراجعات هامة

عزيزي الطالب 😊

بعد دراستك لهذا الملف راجع النماذج الوزارية والدورات وستجدها اعتيادية وفي غاية السهولة إن شاء الله .

تنويه : إن هذا الملف متوفر *pdf* لجميع الطلبة فأنا نشرته على الانترنت ولست مسؤولاً عن نشر أي نسخة في أي مكتبة فهذا العمل نحتسبه خالصاً لوجه الله

هذا الملف هو النسخة الاصلية وكل ما ينشر ويؤخذ من هذا الملف غير مسؤول عنه .

اسال الله العظيم ان أكون قد وفقت في هذا الشرح سائلاً منكم الدعاء لوالدي ولي .

لا تنسوني من صالح دُعائِكم لي ولكل من أحب ❤️

لإ ستفسار اتكم: 0949636002