مذاكرة النهايات والاستمرار "رقم ١"

الاسم :
المدة : ساعة

◀ **السؤال الأول:** احسب نهاية التابع f عند a في كل من الحالات الآتية :

1) $f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}$ $\quad a = 0$ 2) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $\quad a = 0$

3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad a = 2$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2-2} - x$ $\quad a = +\infty$

◀ **السؤال الثاني:** أثبت أن :

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3} = 6$

◀ **السؤال الثالث:**

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق : $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

١) اكتب عبارة $f(x)$ بصورة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0\,,2[$.

٢) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

٣) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

٤) ادرس استمرارية التابع عند النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

◀ **السؤال الرابع:**

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2x + 1$ أوجد التقابل العكسي f^{-1} .

◀ **السؤال الخامس :**

- برهن أن المعادلة $x^2 + \sqrt{x-1} - 2 = 0$ تقبل حلاً وحيداً في $[1,+\infty[$.
- احصر حل المعادلة في مجال طوله يساوي الواحد .

◀ **السؤال السادس:**

١) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = 2x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f للتابع f المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$$

٢) ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه Δ .

◀ **السؤال السابع:**

إذا علمت أن $\quad x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

فاحسب:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

-انتهت الأسئلة-

◄ السؤال الأول :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها بالاستفادة من الخاصة : $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi\sqrt{1-x})}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi(1-\sqrt{1-x}))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x}$$

بالضرب بالمرافق و الإصلاح :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\pi(x)}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\pi}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=(1)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

لأن :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x+1-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{1}=\lim_{x\to 0}2\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2(2)=4$$

$$3)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)=\infty-\infty$$

حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2-x^2}{\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}=\frac{-2}{+\infty}=0$$

◀ **السؤال الثاني:**

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2(\frac{x}{2})}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

بما أن $x\to0^+$ فإن $\sin\frac{x}{2}\geq0$ أي : $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=+\sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{2x}{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)(4)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1)(1)(4)=2\sqrt{2}$$

لأن :

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

طريقة ثانية : لدينا : $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos x$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{4\left(\cos\frac{x}{2}\right)\cos x}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4(\cos 0)\cos 0}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)=(1)(6)=6$

◀ **السؤال الثالث:**

(١

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & x\in[1,2[\end{cases}$$

(٢

$$x-1<E(x)\leq x\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-x\leq -E(x)<1-x$$

نضيف x :

$$0\leq x-E(x)<1$$

نربع :

$$0\leq\left(x-E(x)\right)^2<1$$

نضيف $E(x)$:

$$E(x)\leq E(x)+\left(x-E(x)\right)^2<1+E(x)$$

$$E(x)\leq f(x)<1+E(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نقسم على $x>0$:

$$\frac{E(x)}{x}\leq\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{x}+\frac{E(x)}{x}$$

ولكن من العلاقة (١) نجد : $\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\leq1$

ولأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$

وحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1 \qquad \ggg \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{E(x)}{x}=0+1=1$$

إذن حسب مبرهنة الإحاطة نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

٣) من العلاقة (2) نجد أن :

$$E(x)<f(x)\le 1+E(x)$$

ولدينا $x-1<E(x)\le x$ أي إن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\end{cases} \qquad \ggg \lim_{x\to+\infty}E(x)=+\infty$$

ومنه نجد :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\big(E(x)\big)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(E(x)+1)=+\infty\end{cases} \qquad \ggg \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة . نستنتج أن

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$$

٤) يجب تحقق الشرط :

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

► $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x)=1$

► $f(1)=1+(1-1)^2=1$

الشرط محقق فالتابع مستمر عند النقطة التي فاصلتها $x=1$

◄ السؤال الرابع:

$$y=2x+1$$

نستبدل كل x ب y و كل y ب x :

$$x=2y+1 \ggg y=\frac{x-1}{2} \ggg f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

للتحقق من صحة الحل يجب تحقق العلاقة $f^{-1}(f(x))=x$

$$f^{-1}(f(x))=\frac{f(x)-1}{2}=\frac{2x+1-1}{2}=\frac{2x}{2}=x$$ محققة

◄ السؤال الخامس :

$$f(x)=x^2+\sqrt{x-1}-2$$

f معرف و مستمر على المجال $[1,+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=2x+\frac{2}{2\sqrt{x-1}}>0$$

فالتابع مطّرد تماماً على $[1,+\infty[$ (متزايد تماماً) و الشرط الأول محقق

$$f(1)=-1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f(1).\lim_{x\to+\infty}f(x)<0$$

و الشرط الثاني محقق . فالمعادلة $x^2+\sqrt{x-1}-2=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1,+\infty[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى .

$$f(2) = 4 + 1 - 2 = 3$$
$$f(1).f(2) = -3 < 0$$

إذن حل المعادلة ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

◀ **السؤال السادس :**

١) بإجراء القسمة الإقليدية نجد أن $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-4}$ ولدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-4}\right) = 0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

٢) $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$ ننظم جدول الإشارة :

X	$-\infty$		4		$+\infty$
$x - 4$		$- - - -$	0	$+ + + +$	
$f(x) - y_\Delta$		$- - - -$	$\|\|$	$+ + + +$	
C_f		C_f تحت Δ		C_f فوق Δ	

◀ **السؤال السابع :**

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
$$-x + \frac{x^3}{6} \ge -\sin x \ge -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

نضيف x :

$$+\frac{x^3}{6} \ge x - \sin x \ge +\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

نقسم على $x^3 > 0$:

$$+\frac{1}{6} \ge \frac{x - \sin x}{x^3} \ge +\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\left(+\frac{1}{6}\right) = +\frac{1}{6} \\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(+\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}\right) = +\frac{1}{6} \end{cases} \ggg \lim_{x\to0^+}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

حسب مبرهنة الإحاطة .

-انتهى الحل-