تفريغ اللقاءات الحية لمادة

الرياضيات المالية

[تلخيص]

قسم الإدارة والاقتصاد

المستوى الأول

الترم الصيفي للعام الدراسي

١٤٣٥ – ١٤٣٦هـ

إعداد أختكم

سارة الناصر

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الأول : أساسيات الجبر

أولا : المجموعات

ويقصد بها مجموعات الأعداد [إذا كنا نريد كتابة مجموعة أي نوع من أنواع المجموعات لابد نكتبها داخل أقواس بهذه الطريقة { } وإذا كان لدينا مجموعتين من الأعداد حتى نفرق بينهم نسمي المجموعة الأولى مثلا A والمجموعة الثانية B ولا بد أن تكون الحروف بالكابيتل]

أنواع المجموعات :

١ / مجموعة الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالرمز [N] وهي دائما الأعداد الموجبة من1 إلى ما لا نهاية فلا يدخل من ضمنها الأعداد السالبة ولا يدخل من ضمنها 0ولا يدخل من ضمنها الأعداد العشرية [يعني الأعداد التي يكون فيها فاصلة مثل 5,3]

إذن الأعداد الطبيعية هي : $N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \ldots\ldots\ldots \}$

مثلا حينما أريد أن أقول 3 تنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية يرمز للانتماء بالرمز $\in$ فنعبر عن الجملة السابقة ونقول $3 \in N$ [نقرأ هذه العبارة فنقول 3 تنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية] وإذا كان لدينا عدد لا ينتمي لمجموعة الأعداد نرمز لها بالرمز $\notin$ فنقول أن 2- لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية نعبر عن الجملة السابقة ونقول $-2 \notin N$ [نقرأ هذه العبارة فنقول 2- لا تنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]

لو فرضنا أن لدينا كسر مثلا $\frac{6}{2}$ هل نقول ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية أو لا ينتمي ؟!

لدينا هنا موجب وأكبر من صفر فماذا أفعل نقول نجري العملية الحسابية أي نقسم 6 على 2 يصبح الناتج لدينا 3 إذن $3 \in N$

لو فرضنا أن لدينا جذر مثلا $\sqrt{4}$ هل نقول ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية أو لا ينتمي ؟!

لدينا هنا موجب وأكبر من صفر فماذا أفعل نقول نجري العملية الحسابية ونستخرج جذر 4 وذلك عن طريق الزر التالي في الآلة الحاسبة  بحيث نضغط الزر هذا بالآلة ثم نكتب داخله رقم 4 ثم علامة يساوي نلاحظ أن الناتج يصبح 2 والرقم 2 ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية إذن نقول $2 \in N$

الخلاصة : $0 \notin N$

$-2 \notin N$ [أو أي عدد سالب آخر لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]

$\sqrt{4} \in N$ [قلنا ينتمي لأن ناتج الجذر يساوي 2]

إذا كان لدينا عدد سواء جذر أو كسر نجري العملية الحسابية ثم نحكم على الناتج هل ينتمي أو لا ينتمي كما أن الأعداد السالبة والأعداد العشرية لا تنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية .

٢ / مجموعة الأعداد الكلية ويرمز لها بالرمز [W] وهي عبارة عن الأعداد الطبيعية بالإضافة إلى الصفر تبدأ من صفر إلى ما لا نهاية أي أن الأعداد الكلية هي

$W = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \ldots\ldots\ldots \}$

فحينما نقول العدد 1 ينتمي إلى أي مجموعة من مجموعات الأعداد نجيب فنقول ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الكلية أي نقول :

$1 \in N + W$

وحينما نقول العدد 2 ينتمي إلى أي مجموعة من مجموعات الأعداد نجيب فنقول ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الكلية أي نقول :

$2 \in N + W$

وحينما نقول العدد 0 ينتمي إلى أي مجموعة من مجموعات الأعداد نجيب فنقول ينتمي لمجموعة الأعداد الكلية فقط ولا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية أي نقول :

$0 \in W \notin N$

٣ / مجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز [Z] وهي جميع الأعداد الموجبة والسالبة والصفر أي نقول أن مجموعة الأعداد الصحيحة إلى ما لا نهاية هي :

$Z = \{ \ldots. -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , +1 , +2 , +3 , +4 , +5 \ldots. \}$

ملاحظة :

كل الأعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من الأعداد الكلية ونرمز للمجموعة الجزئية بالرمز $\subseteq$ فنقول

$N \subseteq W$

كل الأعداد الكلية هي مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة

$W \subseteq Z$

مثال : أي من العبارات التالية صحيحة :

١- $2 \in Z$ [عبارة صحيحة √]
٢- $-3 \notin W$ [عبارة صحيحة √]
٣- $\sqrt{9} \notin Z$ [عبارة خاطئة لأن جذر 9 = 3 وهذا العدد ينتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة فالعبارة خاطئة والصحيح $\sqrt{9} \in Z$]
٤- $2,5 \in Z$ [عبارة خاطئة لأن 2,5 عدد عشري والأعداد العشرية لا تنتمي لأي مجموعة من مجموعات الأعداد فالعبارة خاطئة والصحيح $2,5 \notin Z$]
٥- $\frac{12}{3} \notin N$ [عبارة خاطئة لأن ناتج قسمة 12 على 3 تساوي 4 وهو عدد ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية فالعبارة خاطئة والصحيح أن نقول $\frac{12}{3} \in N$]
٦- $\frac{9}{2} \in Z$ [عبارة خاطئة لأن ناتج قسمة 9 على 2 تساوي 4,5 وهو عدد عشري والأعداد العشرية لا تنتمي لأي مجموعة من مجموعات الأعداد فالعبارة خاطئة والصحيح أن نقول $\frac{9}{2} \notin Z$]
٧- $\frac{-10}{2} \in W$ [عبارة خاطئة لأن ناتج قسمة -10 على 2 تساوي -5 والسالب عموما لا يدخل ضمن مجموعة الأعداد الكلية فالعبارة خاطئة والصحيح أن نقول $\frac{-10}{2} \notin W$]
٨- $\sqrt{2} \in N$ [عبارة خاطئة لأن جذر 2 = 1,41 وهذا عدد عشري والأعداد العشرية لا تنتمي لأي مجموعة من مجموعات الأعداد فالعبارة خاطئة والصحيح أن نقول $\sqrt{2} \notin N$]

مثال : أي من الأعداد التالية ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية N

$[\,-2\,,\ \sqrt{16}\,,\ 0\,,\ \frac{15}{3}\,,\ \sqrt{3}\,,\ 3{,}1\,,\ \frac{-4}{2}\,,\ \frac{0}{1}\,]$

الحل :

١- $-2 \notin N$ [السالب لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٢- $\sqrt{16} \in N$ [لآن جذر 16 يساوي 4 وهو عدد ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٣- $0 \notin N$ [لأن الصفر لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٤- $\frac{15}{3} \in N$ [لأن ناتج قسمة 15 على 3 يساوي 5 فهو عدد ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٥- $\sqrt{3} \notin N$ [لأن ناتج جذر 3 = 1,7 وهو عدد عشري فهو لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٦- $3{,}1 \notin N$ [لأن العدد عشري والعدد العشري لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٧- $\frac{-4}{2} \notin N$ [لأن ناتج قسمة 4- على 2 يساوي 2- فالسالب لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]
٨- $\frac{0}{1} \in N$ [لأن ناتج قسمة 0 على 1 يساوي 0 وهو عدد لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية]

ثانيا : جبر المجموعات

١ / الاتحاد ويرمز له بالرمز [∪] وهو يكون بين مجموعتين أي نضع عناصر كلا المجموعتين في مجموعة واحدة بشرط عدم تكرار العناصر

مثال : لدينا مجموعتين

$A = \{ 1 , 3 , 4 , 6 , 7 \}$

$B = \{ 2 , 3 , 5 , 6 , 8 \}$

أوجد قيمة $A \cup B$

الحل : نضع أعداد المجموعتين في مجموعة واحدة والرقم المكرر نكتبه مره واحدة

$A \cup B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$

٢ / التقاطع ويرمز له بالرمز [∩] وهو يكون بين مجموعتين بحيث نأخذ الأرقام المتكررة بين المجموعتين فقط الأرقام المتكررة

مثال لدينا مجموعتين

$A = \{ 1 , 3 , 4 , 6 , 7 \}$

$B = \{ 2 , 3 , 5 , 6 , 8 \}$

أوجد قيمة $A \cap B$

الحل : نأخذ الأعداد المتكررة بين المجموعتين

$A \cap B = \{ 3 , 6 \}$

مثال : لدينا مجموعتين

$A = \{ 0 , 2 , 3 , 4 , 7 , 9 \}$

$B = \{ 1 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

أوجد قيمة كلا من : $A \cup B$ و $A \cap B$

الحل :

$A \cup B = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9 \}$

$A \cap B = \{ 3 , 4 \}$

ملاحظة : ترتيب الأعداد في الحل ليس شرط مطلوب .

مثال رقم 4 ص 15

$A = \{ 1 , 2 , 4 , 7 \}$

$B = \{ 2 , 5 , 7 , 9 \}$

أوجد قيمة $A \cup B$

الحل : $A \cup B = \{ 1 , 2 , 4 , 5 , 7 , 9 \}$

مثال رقم 5 ص 16

$A = \{ 3 , 5 , 9 , 12 , 17 \}$

$B = \{ 1 , 4 , 5 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 \}$

أوجد قيمة $A \cap B$

الحل : $A \cap B = \{ 5 , 9 , 12 \}$

مثال رقم 6 ص 16

إذا كانت $C = \{ -2 , -1 , 0 , 4 \}$ $B = \{ -1 , 0 , 2 , 5 \}$ $A = \{ 0 , 4 , 5 , 9 \}$

أوجد ما يلي : $4 . (B \cap C) \cup A$ $3 . (A \cup B) \cap C$ $2 . B \cap C$ $1 . A \cup B$

الحل : $1.\ A \cup B = \{ -1 , 0 , 2 , 4 , 5 , 9 \}$

$2.\ B \cap C = \{ -1 , 0 \}$

$3 . (A \cup B) \cap C = \{ -1 , 0 , 4 \}$ [لأنه سبق أن استخرجنا A اتحاد B فأتعامل مع المجموعة الجديدة]

$4 . (B \cap C) \cup A = \{ -1 , 0 , 4 , 5 , 9 \}$ [لأنه سبق أن استخرجنا B تقاطع C فأتعامل مع المجموعة الجديدة]

ثالثا : الخواص الحسابية للأعداد الصحيحة :

١ / مضاعفات عدد صحيح ويرمز لها بالرمز [M] حينما أريد السؤال عن مضاعفات عدد معين لنقل مضاعفات العدد 3 تكتب بالطريقة التالية

أوجد مضاعفات M_3 يعني مضاعفات العدد 3 وحينما أقول أوجد مضاعفات M_2 أي أوجد مضاعفات العدد 2

كيف أوجد المضاعف ؟!

كل مضاعفات عدد تبدا بصفر ثم بنفس العدد ثم أضرب العدد بـ 2 ثم أضرب بـ 3 ثم أضرب بـ 4 وهكذا

وكل مضاعف من المضاعفات يكون سالب وموجب

لو نفرض أن لدينا العدد K مثلا ونقول أوجد مضاعفات العدد M_k نقول

$$M_k = \{ 0 , \pm k , \pm 2k , \pm 3k , \pm 4k \ldots\ldots \}$$

فلو قلنا لنفرض أن $K = 3$ أوجد مضاعفات M_3

$$M_3 = \{ 0 , \pm 3 , \pm 6 , \pm 9 , \pm 12 , \pm 15 \ldots\ldots \}$$

وهكذا

مثال : أوجد مجموعة مضاعفات العدد 4 حتى المضاعف السادس [يعني أوجد ست مضاعفات للعدد 4]

$$M_4 = \{ 0 , \pm 4 , \pm 8 , \pm 12 , \pm 16 , \pm 20 \}$$

مثال رقم 9 ص 25

اكتب كلا من : M_{-4} M_5 M_3

الحل : $M_3 = \{ 0 , \pm 3 , \pm 6 , \pm 9 , \pm 12 \ldots\ldots \}$

$$M_5 = \{ 0 , \pm 5 , \pm 10 , \pm 15 , \pm 20 \ldots\ldots \}$$

$$M_{-4} = \{ 0 , \pm 4 , \pm 8 , \pm 12 , \pm 16 \ldots\ldots \}$$

ملاحظة : لا بد أن يكون أول عدد من المضاعفات هو صفر ، ولا بد أن تكون العلامات موجبة وسالبة لجميع المضاعفات .

٢ / قواسم عدد صحيح

لمعرفة قواسم عدد معين لا بد أولا من معرفة معنى كلمة (قابلية القسمة) تعني حينما أقسم عدد على عدد ويكون الناتج عدد صحيح (ليس عدد عشري) هنا نطلق عليه عدد قابل للقسمة مثلا أقول هل 9 يقبل القسمة على 2 هنا لا يقبل القسمة لأن الناتج يساوي 4,5 (عدد عشري) لكن حينما أقول هل 9 تقبل القسمة على 3 أقول نعم تقبل القسمة لأن الناتج يساوي 3 (عدد صحيح) فهكذا نعرف قابلية القسمة فحينما أقول ماهي الأعداد التي تقبل القسمة على 10 [أي ماهي الأعداد التي أقسم 10 عليها ويكون الناتج عدد صحيح] فأقول { 1 , 2 , 5 , 10 } جميعها أعداد تقبل القسمة على 10 وهذه الأعداد تسمى قواسم العدد 10

ملاحظة :

- فعليا كل الأعداد تقبل القسمة على 1
- كل عدد يقبل القسمة على العدد المطلوب ويكون الناتج عدد صحيح يعتبر قاسم للعدد
- الأعداد السالبة تدخل ضمن القواسم فالقواسم لكل عدد موجبة وسالبة فنقول قواسم العدد $10 = \{ \pm 1 , \pm 2 , \pm 5 , \pm 10 \}$
- الصفر لا يدخل ضمن القواسم فهو لا يقبل القسمة .

إذن مجموعة القواسم يرمز لها بالرمز [D] وكما قلنا في مضاعفات الأعداد حينما أريد إيجاد قواسم عدد معين أكتبه مصغرا أمام الحرف [D_k]

مثال : أوجد D_{10} الحل : $D_{10} = \{ \pm 1 , \pm 2 , \pm 5 , \pm 10 \}$

دائما القواسم تكون أصغر من العدد المطلوب إيجاد قواسمه لأن العدد الكبير لا يقبل القسمة على ما هو أصغر منه [نلاحظ في المثال السابق جميع القواسم أصغر من 10 والعدد نفسه فلا يوجد أي عدد أكبر من 10]

فحين يأتي سؤال أوجد قواسم عدد معين نجرب جميع الأرقام حتى نصل للعدد المطلوب إيجاد قواسمه فكل رقم نقسم عليه يكون ناتجه عدد صحيح (غير عشري) هو قاسم للعدد

مثال : أوجد D_{15} الحل : $D_{15} = \{ \pm1 , \pm3 , \pm5 , \pm15 \}$

ملاحظة : من منتصف العدد حتى نهايته لا يوجد قواسم [نلاحظ في المثال السابق من بعد الرقم 5 لا يوجد قواسم حتى الرقم 15]

مثال آخر لإيضاح المعنى : اوجد D_{20} الحل : $D_{20} = \{ \pm1 , \pm2 , \pm4 , \pm5 , \pm10 , \pm20 \}$

[نلاحظ من بعد القاسم 10 لا يوجد قواسم حتى نصل إلى الرقم 20 والرقم 10 هو منتصف الرقم 20 كما قلنا]

مثال : اوجد قواسم العدد 12

الحل : $D_{12} = \{ \pm1 , \pm2 , \pm3 , \pm4 , \pm6 , \pm12 \}$

سؤال : مجموعة جميع قواسم العدد D_{18} :

أ. $\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18 \}$
ب. $\{ \pm2 , \pm3 , \pm6 , \pm9 \}$
ت. $\underline{\{ \pm1 , \pm2 , \pm3 , \pm6 , \pm9 , \pm18 \}}$
ث. $\{ 0 , \pm1 , \pm2 , \pm3 , \pm6 , \pm9 , \pm18 \}$

الجواب الصحيح هو الجواب [ت]

لأن الجواب أ اختار فقط الأرقام الموجبة ودخل من ضمنها الصفر وهذا خطأ الصفر غير قابل للقسمة كما أن القواسم تكون موجبة وسالبة لجميع الأعداد .

والجواب ب ينقصه قاسمان هما [$\pm1 , \pm18$] والجواب ث دخل من ضمنها الصفر وهذا خطأ .

مثال رقم 11 ص 27 أوجد كلا من D_6 , D_5

الحل : $D_5 = \{ \pm1 , \pm5 \}$ $D_6 = \{ \pm1 , \pm2 , \pm3 , \pm6 \}$

رابعا : الأعداد الأولية [مهم]

هي الأعداد التي يكون قاسمها العدد 1 والعدد نفسه فقط ولا بد أن تكون أعداد موجبة وأكبر من العدد 1 لأنه غير أولي كما أن 0 غير أولي

فجميع الأمثلة السابقة هي أعداد غير أولية لأنها تقبل القسمة على أكثر من عدد

مثال للأعداد الأولية $\{ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , \ldots\ldots \}$

سؤال : أي من الأعداد التالية يعتبر عدد أولي ؟

أ. 0
ب. 39
ت. 1
ث. <u>23</u>

الجواب الصحيح هو [ث] لأن 0 و 1 ليسا ضمن الأعداد الأولية و العدد 39 يقبل القسمة على 3 فهو غير أولي .

تحليل العدد إلى عوامل الأولية

حلل العدد 6 إلى عوامله الأولية [أي ما هي الأعداد الأولية فقط الأولية التي ناتج ضربها في بعضها يعطينا العدد 6]

$2 \times 3 = 6$

حلل العدد 12 إلى عوامله الأولية

$2 \times 2 \times 3 = 12$

لاحظ جميع الأعداد أولية .

كيف أحلل العدد إلى عوامله الأولية ؟! عن طريق التحليل العامودي

مثال حلل العدد 12 إلى عوامله الأولية

الحل أضع خط عامودي وعن يسار الخط أكتب الرقم 12 ثم أبدأ بقسمته بأقل الأعداد الأولية قيمة وأكتب الرقم الأولي يمين الخط العامودي والناتج عن يسار الخط أي تحت الرقم 12 ثم أقسم على عدد آخر حتى أصل إلى أصغر عدد أولي ممكن وأقسم على نفسه ليعطي الناتج 1 هنا تنتهي عملية التحليل

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

قسمنا بداية الرقم 12 على 2 ثم كتبنا الناتج تحت 12 وهو 6 ثم قسمناه على عدد أولي آخر وهو 2 والناتج نكتبه تحت الرقم 6 وهو 3 ثم قسمناه على نفسه ليعطي الناتج 1 إذن الأعداد الأولية التي استخدمناها في التحليل هي عن يمين العامود

وهو [3 , 2 , 2] فهذه هي العوامل الأولية للعدد 12 فحينما نضربها في بعضها تعطينها الناتج 12

[يجب أن تكون جمع الأعداد يمين العامود هي أعداد أولية وإلا فإن الناتج يكون خطأ كما يجب أن يكون حاصل ضرب الأعداد يمين العامود يساوي العدد الأساسي المحلل فحينما نقول العوامل الأولية للعدد $3 \times 3 \times 2 = 12$ خطأ لأن ناتج الأعداد هذه = 18 وحينما نقول $6 \times 2 = 12$ خطأ لأن العدد 6 غير أولي]

سؤال : تحليل العدد 24 إلى عوامله الأولية يكون على الصورة :

أ. $6 \times 2 \times 2$
ب. $4 \times 3 \times 2$
ت. 8×3
ث. $\underline{3 \times 2 \times 2 \times 2}$

الحل : الجواب الصحيح هو الاختيار [ث] لأن أ يحتوي الرقم 6 وهو عدد غير أولي و ب يحتوي الرقم 4 وهو أيضا غير أولي و ت يحتوي الرقم 8 وهو أيضا عدد غير أولي .

سؤال : حلل العدد 30 إلى عوامله الأولية

الحل :

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

العوامل الأولية للعدد $30 = 2 \times 3 \times 5$

سؤال : حلل العدد 20 إلى عوامله الأولية

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

العوامل الأولية للعدد $20 = 2 \times 2 \times 5$

مجموعة الأعداد النسبية ويرمز لها بالرمز [Q]

ومجموعة الأعداد النسبية هي كل الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام مثلا $\{ \frac{1}{2} , \frac{5}{7} , 0.25 \}$

سؤال أي من الأعداد التالية ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية

$\frac{12}{4}$, 3

الجواب : قلنا أن الأعداد النسبية تحتوي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام إذن $\frac{12}{4} \in Q$

3 هل تنتمي أم لا ؟ حينما نأتي إلى الكسر الأول وهو $\frac{12}{4}$ ونجري عملية القسمة يكون الناتج 3 ومن غير المعقول أن نقول أن الكسر $\frac{12}{4}$ ينتمي لمجموعة الأعداد النسبية وناتج الكسر لا ينتمي فكيف نفس العدد مرة ينتمي ومرة لا ينتمي

الخلاصة : $3 \in Q$

ملاحظة : كل الأعداد الصحيحة فعليا يمكن كتابتها بصورة بسط ومقام إذن هي تنتمي لمجموعة الأعداد النسبية

فنقول : مجموعة الأعداد الطبيعية [N] هي الأعداد الموجبة من 1 إلى ما لا نهاية

مجموعة الأعداد الكلية [W] هي الأعداد الموجبة داخلا فيها الصفر إذن الأعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من الأعداد الكلية

$N \subseteq W$

مجموعة الأعداد الصحيحة [Z] هي الأعداد الموجبة والسالبة داخلا فيها الصفر إذن الأعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من الأعداد الكلية والأعداد الكلية هي مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة

$N \subseteq W \subseteq Z$

مجموعة الأعداد النسبية [Q] تدخل فيها جميع الأعداد إذن الأعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من الأعداد الكلية والأعداد الكلية هي مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة والأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من الأعداد النسبية [مجموعة جزئية يعني جزء من]

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

مثال : أي من الأعداد التالية ينتمي إلى الأعداد النسبية Q

أ- 0

ب- $\frac{3}{4}$

ت- -5

ث- $\sqrt{2}$

الحل : الجواب أ وهو 0 عدد نسبي لأنه يمكن كتابته بهذه الطريقة : $\frac{0}{2}$

الجواب ب وهو $\frac{3}{4}$ عدد نسبي لأنه كسر وقلنا الأعداد النسبية هي الأعداد التي يمكن كتابتها بصورة كسر

الجواب ت وهو -5 عدد نسبي لأنه يمكن كتابته بهذه الطريقة : $\frac{-10}{2}$

الجواب ث وهو $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي لأنه عندما نستخرج جذر 2 نجد أن الناتج هو عدد عشوائي غير نسبي

مثال رقم ١٩ ص ٣٦ أوجد قيمة كل مما يلي :

١- $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

٢- $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

٣- $\frac{1}{2} \times 6$

٤- $\frac{1}{2} \div \frac{2}{4}$

الحل :

١- $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

٢- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

٣- $6 \times \frac{1}{2}$

$$6 \times \frac{1}{2} = 3$$

٤- $\frac{2}{4} \div \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{4} \div \frac{1}{2} = 1$$

سؤال : أوجد قيمة $\frac{2}{5} - \frac{5}{7}$

الحل :

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{5} = \frac{11}{35}$$

تحويل الأعداد من الصورة العشرية إلى الصورة الكسرية ومن الصورة الكسرية إلى الصورة العشرية

الصورة العشرية : هي مثلا *5,3*

الصورة الكسرية : هي مثلا $\frac{1}{2}$

كيف أحول الكسر إلى عدد عشري أو أحول العدد العشري إلى كسر ؟

مثال ٢٥ ص ٤٥

عبر عن الكسر $\frac{1}{8}$ والكسر $\frac{4}{125}$ بالصورة العشرية [يعني حول الكسر إلى عدد عشري]

الحل : بالآلة الحاسبة ندخل الكسر $\frac{1}{8}$ عن طريق زر الكسر و هو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *1* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر  ثم نكتب قيمة المقام *8* ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري و هو 

يكون الناتج لدينا *0,125*

الكسر الثاني $\frac{4}{125}$ بالآلة عن طريق زر الكسر و هو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *4* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر  ثم نكتب قيمة المقام *125* ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري و هو 

يكون الناتج لدينا *0,032*

إذا كان لدينا عدد عشري ونريد تحويلة إلى كسر مثلا العدد *0,032* نكتب الرقم بالآلة الحاسبة ثم علامة يساوي ثم زر التحويل إلى كسر و هو 

يكون الناتج لدينا $\frac{4}{125}$

عمليات حسابية على الكسور العشرية

أوجد ناتج ما يلي : *0,234 + 0,731*

نجري العملية بالآلة الحاسبة بطريقة عادية نجد أن الناتج يكون عبارة عن كسر و هو $\frac{193}{200}$ ثم نضغط زر تحويل الكسر و هو 

نجد أن الناتج يصبح *0,965*

عبر عن الكسور التالية بالصورة العشرية $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$

أولا $\frac{1}{4}$ عن طريق زر الكسر و هو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *1* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر  ثم نكتب قيمة المقام *4* ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري و هو 

يكون الناتج لدينا *0,25*

ثانيا $\frac{5}{6}$ عن طريق زر الكسر وهو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *5* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر 
ثم نكتب قيمة المقام *6* ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري وهو  يكون الناتج لدينا *0,8333333333...*

هذا الناتج يسمى عدد دوري أي أن ناك عدد يدور أي يتكرر وهو هنا العدد *3* الثلاث نقاط الأخيرة بعد العدد *3* تعني أن الرقم *3* يتكرر إلى ما لا نهاية

ماهي الصيغة الرياضية لكتابة العدد العشري الدوري ؟

في الناتج السابق تكرر لدينا العدد *3* فقط إذن نكتب الناتج بهذه الطريقة : $0{,}8\overline{3}$ [الخط فوق العدد 3 يعني أن العدد 3 متكرر إلى ما لا نهاية]

مثال آخر : $0{,}2\overline{4}$ يعني ...0,24444444

مثال آخر : $0{,}\overline{24}$ [هنا الخط فوق الرقمان 2 و 4] يعني يكون الناتج ...0,2424242424 يعني الرقم الذي يكون فوقه الخط هو الرقم المتكرر

مثال : حول العدد الكسري $\frac{5}{11}$ إلى كسر عشري

الحل : عن طريق زر الكسر وهو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *5* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر 
ثم نكتب قيمة المقام *11* ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري وهو  يكون الناتج لدينا $0{,}\overline{45}$ يعني الناتج لدينا كان عدد دوري وعبرنا عنه بصيغة رياضية

<u>سؤال :</u> عند تحويل العدد الكسري $\frac{22}{33}$ إلى كسر عشري يكون على الصورة

أ- 0,6
ب- 0,67
ت- $0{,}\overline{6}$
ث- 0,65

بعد إجراء العملية الحسابية بالآلة الحاسبة عن طريق زر الكسر وهو  ثم ندخل قيم الكسر نكتب بالبسط الرقم *22* ثم ننزل للمقام بواسطة الزر  ثم نكتب قيمة المقام ٣٣ ثم علامة يساوي ثم زر تحويل الكسر إلى عدد عشري وهو  يكون الناتج لدينا $0{,}\overline{6}$ يعني الناتج لدينا كان عدد دوري وعبرنا عنه بصيغة رياضية إذن الجواب الصحيح هو الخيار ت

مثال ٢٧ ص ٤٩

حول الكسر العشري إلى كسر اعتيادي : 0,0013 - 4,05 - 0,235

عن طريق الآلة الحاسبة ندخل الرقم بشكل عادي ثم زر التحويل  تخرج لنا النتائج

$$0{,}235 = \frac{47}{200}$$

$4,05 = \frac{81}{20}$

$0,0013 = \frac{1}{10000}$

مثال ٢٨ ص ٥٠

حول كلا من الكسور العشرية التالية إلى أعداد كسرية اعتيادية

$0,\overline{14}$ - $0,\overline{502}$ - $0,\overline{3}$

لدينا هنا أعداد عشرية دورية فكيف نكتب عدد دوري متكرر إلى ما لا نهاية بصيغة كسر ؟

أولا نكتب البسط الرقم بعد الفاصلة ثم ننظر إلى العدد المكرر كم خانة مكررة ؟ هل هي خانة أم خانتين نعوض عن كل خانة مكررة بالرقم 9 في المقام

العدد العشري $0,\overline{3}$ الكسر الاعتيادي منه هو $\frac{3}{9}$ أخذنا الرقم بعد الفاصلة وهو 3 وضعناه في البسط ثم نظرنا كم خانة مكررة لدينا الخط الدال على التكرار فوق الرقم 3 فقط إذن خانة واحدة مكررة عوضنا عنها بالرقم 9 في المقام

العدد العشري $0,\overline{502}$ الكسر الاعتيادي منه هو $\frac{502}{999}$ أخذنا الرقم بعد الفاصلة وهو 502 وضعناه في البسط ثم نظرنا كم خانة مكررة لدينا الخط الدال على التكرار فوق الرقم 502 إذن ثلاث خانات مكررة عوضنا عن كل رقم مكرر بالرقم 9 في المقام

العدد العشري $0,\overline{14}$ الكسر الاعتيادي منه هو $\frac{14}{99}$ أخذنا الرقم بعد الفاصلة وهو 14 وضعناه في البسط ثم نظرنا كم خانة مكررة لدينا الخط الدال على التكرار فوق الرقم 14 إذن خانتين مكررة عوضنا عن كل رقم مكرر بالرقم 9 في المقام

سؤال : عند تحويل العدد العشري الدوري $0,\overline{34}$ إلى كسر اعتيادي يكون على الصورة

أ- $\frac{34}{100}$

ب- $\frac{34}{10}$

ت- $\frac{34}{99}$

ث- $\frac{16}{33}$

ج- الحل : نأخذ الرقم بعد الفاصلة وهو 34 ونضعه في البسط ثم ننظر كم خانة مكررة لدينا الخط الدال على التكرار فوق الرقم 34 إذن خانتين مكررة عوضنا عن كل رقم مكرر بالرقم 9 في المقام يكون الجواب الصحيح هو الخيار ت $\frac{34}{99}$

مثال ٢٩ ص ٥٠ [غير مطلوب]

النسبة المئوية ويرمز لها بالرمز [%]

كيف نحول النسبة المئوية إلى كسر اعتيادي ؟ أي نسبة مئوية أقسمها على *100* يظهر لي الكسر الاعتيادي منها

مثال الكسر الاعتيادي من النسبة المئوية *55%* هو $\frac{55}{100}$ أقسم *55* على *100* يكون الكسر الاعتيادي هو $\frac{11}{20}$

الكسر الاعتيادي من النسبة المئوية *16%* هو $\frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

الكسر الاعتيادي من النسبة المئوية *4,5%* هو $\frac{4,5}{100} = \frac{9}{200}$

مثال ٣٠ ص ٥٢

حول النسب المئوية إلى كسر اعتيادي

$7,5\%$ - 44% - 25%

الحل :

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$44\% = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

$7,5\% = \frac{7,5}{100} = \frac{3}{40}$

سؤال : عند تحويل النسبة المئوية 64% إلى كسر اعتيادي يكون على الصورة

أ- $\frac{64}{10}$

ب- $\frac{32}{100}$

ت- $\frac{64}{99}$

ث- $\frac{16}{25}$

نجري العملية الحسابية أولا نقسم النسبة المئوية على 100 ثم نستخرج الناتج

$64\% = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ إذن يكون الجواب الصحيح هو الاختيار الأخير ث

مثال : حول النسبة المئوية 25% إلى كسر عشري

نجري العملية العادية ونقسم 25 على 100 ونستخرج الناتج يكون بهيئة كسر اعتيادي ثم نحول بزر التحويل إلى كسر عشري

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ثم زر التحويل S⇔D يكون الناتج $0,25$

مثال : حول النسبة المئوية 64% إلى كسر عشري

$64\% = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ ثم زر التحويل S⇔D يكون الناتج $0,64$

مثال : حول النسبة المئوية $2,5\%$ إلى كسر عشري

$2,5\% = \frac{2,5}{100} = \frac{1}{40}$ ثم زر التحويل S⇔D يكون الناتج $0,025$

إذا كان لدي كسر كيف أحوله إلى نسبة مئوية ؟ مباشرة أضرب الكسر في 100

مثال : حول الكسور التالية إلى نسبة مئوية

$\frac{11}{25}$, $0,13$, $0,05$, $\frac{7}{40}$

أولا : نحول الكسور العشرية إلى نسبة مئوية

نضرب عادي في الآلة

0,05 × 100 = 5%

0,13 × 100 = 13%

ثانيا : الكسور الاعتيادية إلى نسبة مئوية

ندخل الكسر أولا في الآلة ثم نخرج من الكسر ونضع علامة الضرب ثم *100*

$$\frac{11}{25} \times 100 = 44\%$$

$$\frac{7}{40} \times 100 = 17{,}5\%$$

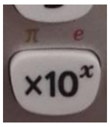
مجموعة الأعداد الغير نسبية ويرمز لها بالرمز [*I*]

وهي مجموعة الأعداد التي تحتوي الأعداد التي يستحيل كتابتها بصورة كسر

منها على سبيل المثال $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ [يعني الجذور التي لا يكون ناتجها عدد صحيح]

حتى لو كانت الجذور ضمن عملية حسابية مثلا $\sqrt{3} - 4$ أو $\sqrt{2} + 1$

أيضا العدد العشري العشوائي مثل *...0,23251109824*

والأعداد مثل e , π موجود في الآلة الحاسبة 

سؤال : هل يوجد عدد ينتمي إلى الأعداد النسبية [*Q*] وإلى الأعداد الغير نسبية [*I*] معا ؟

هل يوجد عدد مشترك بين المجموعتين *Q* و *I* ؟

الجواب : لا ، لا يكون العدد نفسه نسبي وغير نسبي بنفس الوقت

فالأعداد النسبية قلنا أنها تحتوي على الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية وهي الكسور

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

إذا قلنا ما هو تقاطع المجموعة *Q* مع المجموعة *I* ؟ الجواب تقاطعهما هو مجموعة خالية أي لا يوجد بينهما أي عدد مشترك

$Q \cap I = \Phi$

وإذا قلنا ما هو اتحاد المجموعة *Q* مع المجموعة *I* ؟ الجواب اتحاداهما ينتج أكبر مجموعة وهي مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز [*R*]

$Q \cup I = R$ وفعليا *R* هي كل الأعداد النسبية وغير النسبية أيضا فهي تضم كلا المجموعتين وهي أكبر مجموعة مطالبين بمعرفتها إذن نقول

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الكلية والأعداد الكلية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة والأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من الأعداد النسبية والأعداد النسبية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

ونقول $I \subseteq R$ مجموعة الأعداد الغير نسبية هي مجموعة نسبية من مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال ٣٧ ص ٦٠

احسب ما يلي : $5 \times (2 \times 3)$ ، $4 \times (-3)$ ، $(-5)+2$

$15-(6-5)$ ، $15-6-5$ ، $3 \times (4+6)$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{5}$$

الحل : [إجراء عمليات طبيعية بالآلة]

$(-5)+2$ = الناتج -3

$4 \times (-3) = -12$

$5 \times (2 \times 3) = 30$

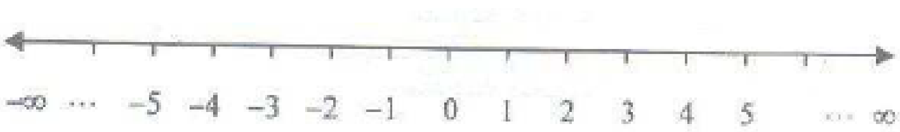
$3 \times (4+6) = 30$

$15-6-5 = 4$

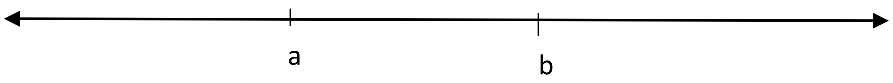
$15-(6-5) = 14$

$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{5}$ = الناتج يكون $\frac{12-5\sqrt{2}}{15}$

خط الأعداد الحقيقية : هو خط لتمثيل الأعداد يتوسطه الصفر وعن يمينه الأعداد الموجبة من 1 إلى ما لا نهاية وعن يساره الأعداد السالبة من -1 إلى سالب ما لا نهاية فكلما اتجهنا بخط الأعداد يمينا تكبر الأرقام وكلما اتجهنا يسارا تقل الأعداد ويرسم خط الأعداد كما يلي



وإذا كنا نريد تحديد عددين على خط الأعداد نقول العددين a , b



فالرقم b أكبر من a لأنها على يمين خط الأعداد فكل ما اتجهنا يمينا كبر الرقم وكلما اتجهنا يسارا صغر الرقم

ويعبر عنها بالطريقة التالية :

b أكبر من a [$a < b$] الفتحة الكبيرة تكون عند الرقم الكبير وهكذا ، b أصغر من a [$a > b$]

b أكبر من أو تساوي a [$a \leq b$] ، b أصغر من أو تساوي a [$a \geq b$]

مثال ٣٨ ص ٦٢

أي من المتباينات صحيحة وأيها خاطئة :

$$5 > 9$$

$$4 < -8$$

$$0 \geq -3$$

$$-1 \leq -10$$

$$2 \leq 2$$

$$7 > 7$$

الحل :

$5 > 9$ متباينة خاطئة لأن 5 أصغر من 9 وهنا نرى الإشارة تشير إلى أن 5 أكبر من 9 إذن عبارة خاطئة

$4 < -8$ متباينة خاطئة لأن السالب ادئما أصغر من الموجب وهنا نرى الإشارة تشير إلى أن *8*- أكبر من *4* و*4* عدد موجب أكبر من *8*- إذن عبارة خاطئة

$0 \geq -3$ متباينة صحيحة لأن الصفر أكبر من أي عدد سالب وهنا نرى أن الإشارة تشير إلى أن 0 أكبر من 3- إذن عبارة صحيحة

$-1 \leq -10$ متباينة خاطئة لأن الرقم 10- على خط الأعداد عن يسار الرقم 1- وقلنا كلما اتجهنا يسارا صغر الرقم إذن -1 أكبر من 10- وهنا نرى الإشارة تشير إلى أن 10- أكبر من 1- إذن عبارة خاطئة

$2 \leq 2$ عبارة صحيحة لأن هذه العلامة تحتمل المساواة والعددان هنا متساويان فالإجابة صحيحة

$7 > 7$ عبارة خاطئة لأن العددان متساويان ولكن العلامة لا تحتمل المساواة إذن العبارة خاطئة

الفترات الحقيقية

كيف يكون السؤال على الفترات الحقيقية : يقول متباينة نحولها إلى فترة أو فترة نحولها إلى متباينة أو نمثلها على خط الأعداد

الفترات يذكر فيها عددين ولا بد أن يكون الأول فيها أصغر من الثاني لأن الفترة تبدأ من الأقل إلى الأكبر ونقول من الفترة كذا إلى الفترة كذا مثال

الفترة من 1 إلى 2 [كيف نمثل الفترة رياضيا ؟]

نضع الفترة داخل أقول ولكن كل نوع من الأقواس له معنى

والفترات قسمين : القسم الأول من الفترات له أربع أنواع

النوع الأول : الفترة (a ، b) وتسمى الفترة المفتوحة

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a وأصغر من b ولكن a و b غير داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $a < x < b$

بحيث أن × تمثل العدد داخل الفترة كما أن العلامات لا تحتمل المساواة إذن a و b غير داخله ضمن الفترة فلا توجد مساواة

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من b إذن يكون a على يسار الخط و b على يمين الخط وما بينهما يكون هو الفترة

أولا : نمثل الأعداد بصورة دائرة مفرغة لأنها غير داخلة ضمن الفترة بحيث أن الرقم اليسار هو الأصغر والرقم اليمين هو الأكبر

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض بين الرقمين

النوع الثاني : الفترة $[a , b]$ وتسمى الفترة المغلقة

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a وأصغر من b ولكن a و b داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $a \leq x \leq b$

بحيث أن × تمثل العدد داخل الفترة كما أن العلامات تحتمل المساواة إذن a و b داخله ضمن الفترة فيوجد مساواة

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من b إذن يكون a على يسار الخط و b على يمين الخط وما بينهما يكون هو الفترة

أولا : نمثل الأعداد بصورة دائرة معبأة لأنها داخلة ضمن الفترة بحيث أن الرقم اليسار هو الأصغر والرقم اليمين هو الأكبر

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض بين الرقمين

النوع الثالث : الفترة $(a , b]$ وتسمى الفترة المفتوحة من اليمين والمغلقة من اليسار

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a وأصغر من b ولكن a غير داخلة ضمن الفترة و b داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $a < x \leq b$

بحيث أن × تمثل العدد داخل الفترة كما أن العلامة الأولى لا تحتمل المساواة إذن a غير داخلة ضمن الفترة و b داخله ضمن الفترة فيوجد مساواة

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من b إذن يكون a على يسار الخط و b على يمين الخط وما بينهما يكون هو الفترة

أولا : نمثل الرقم a بصورة دائرة مفرغة لأنه غير داخل ضمن الفترة بينما نمثل العدد b بصورة دائرة معبأة لأنه داخل ضمن الفترة بحيث أن الرقم اليسار هو الأصغر والرقم اليمين هو الأكبر

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض بين الرقمين

النوع الرابع : الفترة $[a , b)$ وتسمى الفترة المغلقة من اليمين والمفتوحة من اليسار

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a وأصغر من b ولكن a داخلة ضمن الفترة و b غير داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $a \leq x < b$

بحيث أن x تمثل العدد داخل الفترة كما أن العلامة الأولى تحتمل المساواة إذن a داخلة ضمن الفترة و b غير داخله ضمن الفترة فلا يوجد مساواة

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من b إذن يكون a على يسار الخط و b على يمين الخط وما بينهما يكون هو الفترة

أولا : نمثل الرقم a بصورة دائرة معبأة لأنه داخل ضمن الفترة بينما نمثل العدد b بصورة دائرة مفرغة لأنه غير داخل ضمن الفترة بحيث أن الرقم اليسار هو الأصغر والرقم اليمين هو الأكبر

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض بين الرقمين

<u>كيفية السؤال على هذه الجزئية :</u>

مثال : عند تمثيل المنطقة المظللة لخط الأعداد الحقيقية على صورة فترة تكون على الصورة

أ – $(1, 7)$ ب – $[1 , 7]$

ج – $(1, 7]$ د – $[1 , 7)$

الجواب الصحيح : هو الخيار د

أولا : الترتيب لا بد أن يكون صحيحا من الرقم 1 إلى الرقم 7 ثم نراعي مطابقة الأقواس لطريقة التمثيل على خط الأعداد

ثانيا : نمثل الرقم 1 بصورة دائرة معبأة لأنه داخل ضمن الفترة بينما نمثل العدد 7 بصورة دائرة مفرغة لأنه غير داخل ضمن الفترة بحيث أن الرقم اليسار هو الأصغر والرقم اليمين هو الأكبر إذن الجواب الصحيح هو الاختيار الأخير د – $[1 , 7)$

مثال : عند كتابة الفترة *(-1 , 2)* على صورة متباينة تكون على الصورة :

أ - $-1 \le x \le 2$ ب - $-1 < x < 2$

ج - $-1 \le x < 2$ د - $2 < x < -1$

أولا : لا بد أن يكون ترتيب الفترة في المتباينة أن 1- أولا ثم 2

ثانيا : الأقواس هي من النوع الأول إذن 1- و 2 غير داخلة ضمن الفترة فيجب أن تكون الإشارة لا تحتمل المساواة

إذن يكون الجواب الصحيح : هو الخيار الثاني ب - $-1 < x < 2$

<u>القسم الثاني من الفترات له أربع أنواع :</u>

النوع الأول : (∞ , a) وتسمى فترة مفتوحة

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a إلى ما لا نهاية ولكن a غير داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $x > a$

بحيث أن x تمثل العدد داخل الفترة وهو دائما أكبر من a

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من كل الأعداد بعدها إلى ما لا نهاية

أولا : نمثل الرقم a بصورة دائرة مفرغة لأنه غير داخل ضمن الفترة

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض ونتجه بالخط جهة اليمين أي الأعداد الموجبة إلى ما لا نهاية

ثالثا : نمثل الأعداد ضمن الفترة بعلامة x فوق الخط

النوع الثاني : (∞ , a] وتسمى فترة مغلقة

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أكبر من a إلى ما لا نهاية ولكن a ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $x \ge a$

بحيث أن x تمثل العدد داخل الفترة وهو دائما أكبر من a وقد يكون مساوي له ف a داخلة ضمن الفترة أي تكون العلامة تحتمل المساواة

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن a أصغر من كل الأعداد بعدها إلى ما لا نهاية

أولا : نمثل الرقم a بصورة دائرة معبأة لأنه داخل ضمن الفترة

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض ونتجه بالخط جهة اليمين أي الأعداد الموجبة إلى ما لا نهاية

ثالثا : نمثل الأعداد ضمن الفترة بعلامة × فوق الخط

النوع الثالث: (b , ∞-) وتسمى فترة مفتوحة [بما أن السالب دائما أصغر تكون كتابته أولا لأننا قلنا أن الفترة تبدأ بالرقم الأصغر قبل الأكبر

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أصغر من b إلى سالب ما لا نهاية ولكن b غير داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $\times < b$

بحيث أن × تمثل العدد داخل الفترة وهو دائما أصغر من b لأننا نتجه يسارا ف تصغر قيمة الأعداد فالعدد b هو أكبر من ما يأتي بعده ضمن الفترة كما أن العلامة لا تحتمل المساواة لأن الفترة لا تضم العدد b

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن b أكبر من كل الأعداد بعدها إلى ما لا نهاية

أولا : نمثل الرقم b بصورة دائرة مفرغة لأنه غير داخل ضمن الفترة

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض ونتجه بالخط جهة اليسار أي الأعداد السالبة إلى ما لا نهاية

ثالثا : نمثل الأعداد ضمن الفترة بعلامة × فوق الخط

النوع الرابع : [b , ∞-) وتسمى فترة مغلقة

هذا القوس يعني أن الفترة تضم الأعداد أصغر من b إلى سالب ما لا نهاية ولكن b داخلة ضمن الفترة

كيف نكتب المتباينة لهذه الفترة : $\times \leq b$

بحيث أن × تمثل العدد داخل الفترة وهو دائما أصغر من b لأننا نتجه يسارا ف تصغر قيمة الأعداد فالعدد b هو أكبر من ما يأتي بعده ضمن الفترة كما أن العلامة تحتمل المساواة لأن الفترة تضم العدد b

كيف نرسم هذه الفترة على خط الأعداد : ذكرنا أن b أكبر من كل الأعداد بعدها إلى ما لا نهاية

أولا : نمثل الرقم b بصورة دائرة معبأة لأنه داخل ضمن الفترة

ثانيا : نمثل الفترة بخط عريض ونتجه بالخط جهة اليسار أي الأعداد السالبة إلى ما لا نهاية

ثالثا : نمثل الأعداد ضمن الفترة بعلامة × فوق الخط

سؤال : لماذا كتبنا المتباينة الأخيرة بهذا الشكل $x \le b$ ؟

لأن هذه الصيغة هي الصحيحة رياضيا بحيث نبدأ بالمجاهيل أولا ثم المعاليم وهنا x عدد مجهول فنكتبه أولا

مثال : عند كتابة الفترة (∞ , 5] على صورة متباينة تكون على الصورة :

أ - $x > 5$ ب - $x < 5$

ج - $x \ge 5$ د - $x \le 5$

الجواب : نلاحظ أن العدد *5* موجب ثم إلى موجب ما لا نهاية يعني أن كل رقم سيأتي هو أكبر من *5*

كما أن القوس بجانب الرقم *5* قوس فترة مغلقة إذن هو يحتمل المساواة

إذن الجواب الصحيح هو ج - $x \ge 5$ حيث أن الفترة تعني أي عدد سيكون أكبر من أو يساوي *5*

مثال : عند تمثيل المنطقة المظللة لخط الأعداد الحقيقية على صورة

فإن المتباينة منه تكون على الصورة :

أ - $x > 3$ ب - $x < 3$

ج - $x \ge 3$ د - $x \le 3$

الجواب : نلاحظ دائرة مفرغة يعني أن المتباينة لا تحتمل المساواة واتجاه الخط للسالب يعني أن كل عدد سيكون أصغر من *3* إذن الجواب الصحيح هو ب - $x < 3$

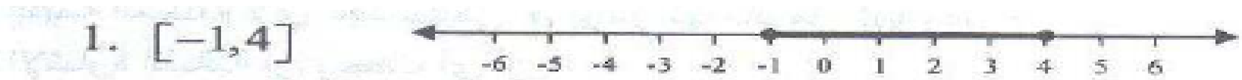
مثال ٣٩ ص ٦٤

مثل ما يلي من الفترات على خط الأعداد الحقيقية

١ – [-1 , 4] ٢ – [0 , 3) ٣ – (-5 , -2) ٤ – (-3 , ∞) ٥ – (-∞ , 2]

الحل :

الفترة الأولى تحتوي أقواس مغلقة إذن الرقمين بداية الفترة ونهايتها داخلة ضمن الفترة وتبدأ من *-1* إلى *4* يكون الحل



الفترة الثانية تحتوي قوس مفتوح من اليمين ومغلق من اليسار إذن الرقم *3* غير داخل ضمن الفترة بينما الرقم *0* داخل ضمن الفقرة يكون الحل

الفترة الثالثة تحتوي قوس مفتوح إذن جميع العددين غير داخلة ضمن الفترة يكون الحل

الفترة الرابعة تحتوي قوس مفتوح ويتجه من 3- إلى موجب ما لا نهاية إذن 3- غير داخل ضمن الفترة يكون الحل

الفترة الخامسة تحتوي قوس مغلق ويتجه من سالب ما لا نهاية حتى 2 إذن الرقم 2 داخل ضمن الفترة يكون الحل

مثال ٤٠ ص ٦٥

اكتب المتباينات التالية على صورة فترات

١ - $-5 \le x \le 6$ ٢ - $0 \le x < 3$ ٣ - $-8 < x \le -1$

٤ - $x \ge 5$ ٥ - $x < 2$

الجواب :

١ - $-5 \le x \le 6$ الفترة تبدأ من 5- حتى 6 وكون العلامات تحتمل المساواة إذن الفترة مغلقة يكون الجواب الصحيح لهذه المتباينة هو [6 , 5-]

٢ - $0 \le x < 3$ الفترة تبدأ من 0 حتى 3 وهي مغلقة من اليسار] لأن العلامة بعد 0 تحتمل المساواة [ومفتوح من اليمين لأن العلامة قبل 3 لا تحتمل المساواة يكون الجواب الصحيح لهذه المتباينة هو (3 , 0]

٣ - $-8 < x \le -1$ الفترة تبدأ من 8- حتى 1- وهي مفتوحة من اليسار لن العلامة بعد 8- لا تحتمل المساواة ومغلق من اليمين لأن العلامة قبل 1- تحتمل المساواة يكون الجواب الصحيح لهذه المتباينة هو [1- , 8-)

٤ - $x \ge 5$ الفترة من 5 حتى موجب ما لا نهاية والفترة دائما من جهة ما لا نهاية تكون مفتوحة لأننا نقول ما لا نهاية وهنا لدينا العلامة تحتمل المساواة إذن مغلقة يكون الجواب الصحيح لهذه المتباينة هو (∞ , 5]

٥ - $x < 2$ الفترة من سالب ما لا نهاية حتى الرقم 2 لأن الرقم 2 موجب فكل ما يكون عن يساره على خط الأعداد هو أصغر منه وبما أن العلامة لا تحتمل المساواة فالفترة مفتوحة إذن يكون الجواب الصحيح لهذه المتباينة هو (2 , ∞-)

<u>القيمة المطلقة</u> ويرمز لها بأن يكون العدد بين خطين مستقيمين | | وتعرف أنها العدد محذوفا منه الإشارة السالبة إن وجدت

مثال على القيمة المطلقة :

$|5| = 5$ فالقيمة المطلقة نزيل علامة السالب لو وجدت وبما أن العدد هنا موجب فيكون جوابه كما هو

$|-5| = 5$ هنا لأن العدد يحتوي علامة السالب نزيلها فيكون الجواب 5 بدون سالب

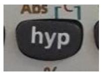
$|0| = 0$

مثال آخر : | 5 – 2 | ماهي القيمة المطلقة من هذا العدد؟

أولا لابد أن نجري العملية الحسابية داخل القيمة المطلقة فنقول | 5 – 2 | = | -3 | بعد ذلك نطبق القيمة المطلقة ونزيل علامة السالب فيكون الجواب 3 = | -3 | = | 5 – 2 |

كيف نحسب القيمة المطلقة في الآلة الحاسبة ؟

أولا نضغط الزر 

ثم الزر 

ثم ندخل القيم ثم علامة يساوي

مثال : احسب قيمة ما يلي $\frac{|1-9|}{5-3}$

الناتج يكون 4

سؤال : قيمة المقدار $\frac{|3-15|}{1-4}$ تساوي

أ - 4 ب - -4 ج – 3 د - -3

الاختيار الصحيح هنا هو ب

[قلنا القيمة المطلقة نهمل الإشارة السالبة فلماذا الناتج هنا سالب ؟ لأن القيمة المطلقة هنا على البسط فقط وليست لكامل الكسر لو كانت لكامل الكسر كان الجواب 4]

سؤال : قيمة المقدار| $\frac{1-9}{6-4}$ | تساوي

أ – 4 ب - -4 ج – 8 د - -8

الجواب الصحيح هو أ

مثال ٤٢ ص ٦٧

احسب قيمة كل مما يلي

١ - | 6 | - ٢ - | -3 | - ٣ - | $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ | ٤ - $\frac{|4-10|}{-2}$ ٥- $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}$ ٦- | $\frac{-3}{2}$ |

الحل :

١ - | 6 | - الناتج يكون -6

٢ - | -3 | - الناتج يكون -3

٣ - | $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ | الناتج يكون $\frac{1}{6}$

٤ - $\frac{|4-10|}{-2}$ الناتج -3

٥ - $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}$ الناتج يكون 2

٦ - | $\frac{-3}{2}$ | الناتج يكون $\frac{3}{2}$

طريقة استخراج الجذر من الآلة الحاسبة : عن طريق الزر  نضغط الزر ثم ندخل الرقم المراد إيجاد جذره

طريقة حساب القوى والأسس بالآلة الحسابة : عن طريق الزر  نكتب الرقم المراد إيجاد القوة له ثم نضغط الزر ثم ندخل قيمة الأس

مثال : أوجد قيمة كلا من 3^5 , 2^4

الحل : نضع في الآلة الرقم 2 ثم الزر  ثم الرقم 4 ثم علامة يساوي نجد أن الناتج 16

نضع في الآلة الرقم 3 ثم زر الأس ثم الرقم 5 ثم علامة يساوي نجد أن الناتج 243

مثال أوجد قيمة $(\frac{10}{2})^2$ أولا نفتح قوس في الآلة ثم ندخل قيم الكسر ثم نغلق القوس ثم زر الأس ثم الرقم 2 ثم علامة يساوي يكون الناتج 25

مثال أوجد قيمة $(\frac{3}{6})^{-2}$ أولا نفتح قوس في الآلة ثم ندخل قيم الكسر ثم نغلق القوس ثم زر الأس ثم علامة الطرح ثم الرقم 2 ثم علامة يساوي يكون الناتج 4

مثال أوجد قيمة $(\frac{12}{3})^{\frac{1}{2}}$ أولا نفتح قوس في الآلة ثم ندخل قيم الكسر ثم نغلق القوس ثم زر الأس ثم كسر ثم ندخل قيم كسر الأس ثم علامة يساوي يكون الناتج 2

مثال أوجد قيمة $(\frac{\sqrt{4}}{6})^{-3}$ أولا نفتح قوس في الآلة ثم ندخل قيم الكسر في البسط نضع زر الجذر  ثم نكتب الرقم 4 ثم ندخل قيم المقام ثم زر الأس ثم علامة الطرح ثم الرقم 3 ثم علامة يساوي يكون الناتج 27

[لا يوجد في الاختبار سؤال عبارة عن عرف أو عدد أو اذكر]

اللوغاريتمات

- يمكن أن تكون قيمة اللوغاريتم عدد سالب أو موجب أو صفر لكن أساس اللوغاريتم والعدد داخل اللوغاريتم موجب دائما .
- اللوغاريتم للأساس 1 غير معرف دائما [لانكتب لوغاريتم أساسه 1]
- إذا كان اللوغاريتم مكتوب بدون أساس ذلك يعني أن أساسه 10 ولكن الأساس 10 لا يكتب فقط يحسب .

ما هو أساس اللوغاريتم وما هو العدد داخل اللوغاريتم و ما هو قيمة اللوغاريتم ؟

أساس اللوغاريتم هو العدد الصغير المكتوب تحت الكلمة $\log_x$

العدد داخل اللوغاريتم هو العدد بجانب الكلمة $\log x$

قيمة اللوغاريتم هو ناتج هذه العملية

مثال ٥٠ ص ٨٦ [مكتوب في الكتاب بدون استخدام الآلة الحاسبة ولكن الدكتور سمح باستخدام الآلة الحاسبة]

أوجد قيمة المقادير التالية :

2 - $\log_7 49$ 1 - $\log_2(\frac{1}{16})$

الحل : $\log_2(\frac{1}{16})$

-4 إذن الحل

$\log_2(\frac{1}{16})$ = -4

$\log_7 49 = 2 \log_7 49$

مثال ٥١ [مكتوب في الكتاب بدون استخدام الآلة الحاسبة ولكن الدكتور سمح باستخدام الآلة الحاسبة]

أوجد قيمة المقادير التالية :

3 - $\log 1000 + \log 0{,}1$ 2 - $\log 0{,}001$ 1 - $\log 100$

الحل : [في هذا السؤال جميع الأسس للوغاريتمات غير مكتوبة إذن جميع الأسس هي 10]

$\underline{\log 100}$ 2 = $\log 100$

$\underline{\log 0{,}001}$ -3 إذن الحل $\log 0{,}001 = -3$

$\underline{\log 1000 + \log 0{,}1}$ الناتج 2 إذن الحل $\log 1000 + \log 0{,}1 = 2$

مثال ٥٢ ص ٨٧

أوجد قيمة x فيما يلي :

3 - $\log_2 16 = x$ 2 - $\log_5 x = -2$ 1 - $\log_3 x = 2$

4 - $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

الحل :

$\log_3 x = 2$ في حالة أن العدد داخل اللوغاريتم مجهول مثل هذا السؤال نأخذ أساس اللوغاريتم ونرفعه للأس [قيمة اللوغاريتم] يعني نقول $3^2 = 9$ إذن قيمة x هنا هي 9 فيكون الجواب $\log_3 9 = 2$ حتى نتأكد من صحة الحل ننفذ اللوغاريتم بالآلة نجد أن الناتج يكون 2

$\log_5 x = -2$ في حالة أن العدد داخل اللوغاريتم مجهول مثل هذا السؤال نأخذ أساس اللوغاريتم ونرفعه للأس [قيمة اللوغاريتم] يعني نقول $5^{-2} = 0{,}04$ إذن قيمة x هنا هي 0,04 فيكون الجواب $\log_5 0{,}04 = -2$ حتى نتأكد من صحة الحل ننفذ اللوغاريتم بالآلة نجد أن الناتج يكون -2

$\log_2 16 = x$ $\log_2 16 = 4$

$\log_{16} x = \frac{3}{2}$ في حالة أن العدد داخل اللوغاريتم مجهول مثل هذا السؤال نأخذ أساس اللوغاريتم ونرفعه للأس [قيمة اللوغاريتم] يعني نقول $16^{\frac{3}{2}} = 64$ إذن قيمة x هنا هي 64 فيكون الجواب $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$ حتى نتأكد من صحة الحل ننفذ اللوغاريتم بالآلة نجد أن الناتج يكون -2

مثال ٥٥ ص ٩٠

أوجد قيمة المقادير التالية

$3 - \log_5 15$ $2 - \log_6 11$ $1 - \log 7$

الحل :

$\underline{\log 7}$ الحل $\log 7 = 0{,}8450$

$\underline{\log_6 11}$ الحل $\log_6 11 = 1{,}3382$

$\underline{\log_5 15}$ الحل $\log_5 15 = 1{,}6826$

كيف نستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتم ؟ بينا ذلك عن طريق حل التمارين وقلنا أن اللوغاريتم يتكون من ثلاثة أرقام

١ – العدد داخل اللوغاريتم

٢ – أساس اللوغاريتم وهو العدد الصغير الذي يكتب أسفل كلمة $\log_x$

٣ – ناتج اللوغاريتم وهو الناتج الذي نستخرجه بالآلة .

<u>شروط أساس اللوغاريتم :</u>

١ – أن لا يساوي 1

٢ – إذا كان الأساس 10 لا يكتب في الأسفل [يعني إذا الأساس فارغ يعني أن أساس اللوغاريتم هو 10]

مثال : $\log 100 = ?$

بما أن الأساس لم يكتب إذن هو 10 فنعد حساب هذا اللوغاريتم بالآلة نجد أن الناتج يكون $\log 100 = 2$ [لا ننسى أن نضع الأساس بالآلة 10]

مثال : أوجد قيمة ما يلي :

$3 - \log_5 25$ $2 - \log_3 27$ $1 - \log_2 16$

$5 - \log 10000$ $4 - \log_2 4^6$

الحل :

$\log_2 16$ نحسب هذا اللوغاريتم بطريقة عادية بالآلة كما حسبناها سابقا نجد أن الناتج يكون $\log_2 16 = 4$

$\log_3 27$ نحسب هذا اللوغاريتم بطريقة عادية بالآلة كما حسبناها سابقا نجد أن الناتج يكون $\log_3 27 = 3$

$\log_5 25$ نحسب هذا اللوغاريتم بطريقة عادية بالآلة كما حسبناها سابقا نجد أن الناتج يكون $\log_5 25 = 2$

$\log_2 4^6$ نحسب اللوغاريتم بطريقة عادية بالآلة كما حسبناها سابقا وعند كتابة العدد داخل اللوغاريتم وهو 4 نرفعه للأس 6 بواسطة الزر  نجد أن الناتج يكون $\log_2 4^6 = 12$

$\log 10000$ نحسب اللوغاريتم بطريقة عادية بالآلة كما حسبناها سابقا ولكن ننتبه هنا أن الأساس هو 10 نجد أن الناتج يكون $\log 10000 = 4$

مثال : قيمة اللوغاريتم $\log_3 81$ يساوي ؟

أ – 2　　　　ب – 3

ج – 4　　　　د – 0

الجواب : عند أجراء عملية اللوغاريتم بالآلة نجد أن الناتج يساوي 4 إذن الجواب الصحيح هو ج

قد يكون العدد داخل اللوغاريتم مجهول مثلا $\log_2 x = 3$ كيف أوجد قيمة x

هناك طريقتين لحل هذه المسألة

الطريقة الأولى :

مثال : أوجد قيمة X $\log_2 x = 3$

أ - 1　　　　ب – 2

ج – 3　　　　د – 8

الحل : بالطريقة الأولى أجرب جميع الحلول فأضع كل مرة رقم من الحلول داخل اللوغاريتم حتى أحصل على الجواب 3 أكون توصلت للجواب الصحيح

في هذا المثال بعد تجربة جميع الأعداد نجد أن الجواب الصحيح هو د – 8 تكون صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي : $\log_2 8 = 3$

مثال : أوجد قيمة x حيث $\log_3 x = 2$

أ – 6　　　　ب – 5

ج – 9　　　　د – 8

الحل : بالطريقة الأولى أجرب جميع الحلول فأضع كل مرة رقم من الحلول داخل اللوغاريتم حتى أحصل على الجواب 2 أكون توصلت للجواب الصحيح

في هذا المثال بعد تجربة جميع الأعداد نجد أن الجواب الصحيح هو ج – 9 تكون صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي : $\log_3 9 = 2$

مثال أوجد قيمة X حيث $\log_2 x = 3$

الحل : بالطريقة الثانية و هي أن نجعل أساس اللوغاريتم عدد والناتج هو أس هذا العدد يعني نقول $2^3 = 8$

في هذا المثال صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي : $\log_2 8 = 3$

مثال : أوجد قيمة x حيث $\log_3 x = 2$

الحل : بالطريقة الثانية و هي أن نجعل أساس اللوغاريتم عدد والناتج هو أس هذا العدد يعني نقول $3^2 = 9$

في هذا المثال صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي : $\log_3 9 = 2$

مثال : أوجد قيمة X فيما يلي :

$\log_5 x = 2$ $\log_2 x = 4$

الحل :

$\log_5 x = 2$ بالطريقة الثانية وهي أن نجعل أساس اللوغاريتم عدد والناتج هو أس هذا العدد يعني نقول $5^2 = 25$

في هذا المثال صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي $\log_5 25 = 2$

$\log_2 x = 4$ بالطريقة الثانية وهي أن نجعل أساس اللوغاريتم عدد والناتج هو أس هذا العدد يعني نقول $2^4 = 16$

في هذا المثال صيغة اللوغاريتم بعد إيجاد الحل الصحيح هي $\log_2 16 = 4$

الفصل الثاني

العبارات الجبرية

درجة العبارة الجبرية

كيف أعرف العبارة الجبرية

مثال

$3X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 2X + 4$ [هذه تسمى عبارة جبرية وهي عبارة عن أرقام وحروف بينهم عمليات حسابية ويسمى كل جزء منها حد]

كيف أعرف حد العبارة الجبرية ؟ كل جزء بين عملتين حسابيتين يعتبر حد يعني في المثال السابق لدينا 5 حدود وهي :

$3X^4$ حد $5X^3$ حد $10X^2$ حد $2X$ حد 4 حد

[ننتبه هنا أن الرقم X ليس عملية ضرب]

كل حد لدينا له درجة ، كيف أعرف درجة الحد ؟ [درجة الحد هو الأس الموجود في الحد]

يعني في مثالنا السابق

$3X^4$ حد درجته هي 4

$5X^3$ حد درجته هي 3

$10X^2$ حد درجته هي 2

$2X$ حد درجته هي 1 [كيف عرفنا أن درجته 1 لأن العدد 1 لا يكتب في ثلاث مواضع وهي إذا كان أس كما في هذا المثال أو إذا كان مضروب مثلا 1×10 فلا نكتب العدد 1 في هذه الحالة لأن النتيجة تلقائية ستكون 10 فلا داعي لكتابة العدد 1 أو إذا كان العدد 1 مقام لكسر فلا يكتب]

4 حد وهنا اختفت X إذن درجتها تكون صفر [إذن في حال أن الحد لا يوجد معه حرف X تكون درجته صفر]

عرفنا كيف نعرف درجة كل حد ، كيف نعرف درجة العبارة الجبرية كاملة ؟

درجة العبارة الجبرية كاملة تكون أعلى درجة بين الحدود إذن درجة العبارة الجبرية لمثالنا السابق هي 4 وهي أعلى درجة بين الحدود

مثال : قدر قيمة درجة العبارات الجبرية التالية

$5X^6 - 2X^4 + X$ [درجة العبارة الجبرية هي 6 لأنها أعلى أس بين الأسس]

$6X^4 - X^5 + 3X^3$ [درجة العبارة الجبرية هي 5 لأنها أعلى أس بين الأسس]

$X - X^2$ [درجة العبارة الجبرية هي 2 لأنها اعلى أس بين الأسس]

مثال :

درجة العبارة الجبرية $3X^2 - 10X - X^3$ هي :

أ – 1 ب – 2

ج – 3 د – 6

الجواب الصحيح هو ج أي العدد 3 لأنه أكبر أس بين الأسس

[لانجمع الأسس هنا في حالة الطرح والجمع لا نجمع بين الأسس فقط نستخرج الأكبر]

عمليات على العبارات الجبرية سنأخذ الجمع والطرح والضرب فقط أما القسمة محذوف

جمع وطرح العبارات الجبرية :

قلنا أن العبارة الجبرية تكون إما رقم بجانبه X أو رقم مع X وله أس أو رقم بدون X فكيف نجمعها ؟

نجمع كل نوع مع ما يماثله مثلا لدينا العبارة الجبرية التالية : $3X^2 + 5X + 2X^2 + X$ ويقول السؤال بسط العبارة الجبرية

هنا العمليات الحسابية بين حدود العبارة الجبرية هي جمع إذن نجمع العبارة الجبرية ، كيف ؟

لدينا أعداد مع X ولها أس نضعها معا $3X^2 + 2X^2$ وإذا جمعناها نجمع العدد بجانب X ولكن لا نجمع الأس فقط العدد والأس يبقى كما هو فيكون ناتج الجمع هنا $3+2 = 5X^2$ [لماذا بقيت X لأننا نجمع العدد بجانبها وهي جزء من الحد ولماذا بقي الأس لأننا لا نجمع الأسس فقط الأرقام]

ولدينا أيضا عدد مع X بدون أس نضعها معا $5X + X$ وإذا جمعناها نكون جمعنا كم X لدينا هنا لدينا X واحدة مع 5X فيكون ناتج الجمع هنا $X + 5X = 6X$ نضع النواتج معا تكون لدينا عبارة جبرية مبسطة

إذن نقول تبسيط العبارة الجبرية $3X^2 + 5X + 2X^2 + X$ هو $5X^2 + 6X$

مثال : عند تبسيط العبارة الجبرية $2X^3 + X + 4 + 5X^3 + 3X$ تكون على أي صورة ؟

قلنا كل صنف من الحدود نجمعه معا ولا نجمع الأسس

أولا لدينا أعداد مع X ولها أس نجمعها معا وهي هنا $2X^3 + 5X^3$ فحينما نجمعها معا يكون الناتج $7X^3$

ثانيا لدينا أعداد مع X وليس لها أس نجمعها معا وهي هنا $X + 3X$ فحينما نجمعها معا يكون الناتج 4X

ثالثا لدينا أعداد بدون X تكون لوحدها وهي هنا 4 إذن حينما نضع النواتج معا نكون حصلنا على العبارة الجبرية المبسطة

إذن الحل : عند تبسيط العبارة الجبرية $2X^3 + X + 4 + 5X^3 + 3X$ تكون على الصورة $7X^3 + 4X + 4$

تبسيط آخر للعبارة الجبرية في حالة وجود أقواس

مثال : عند تبسيط العبارة الجبرية $2 (5X + 3) + 2X + 4$ تكون على أي صورة ؟

قبل أن أفصل الأصناف عن بعضها هنا لا بد أن أفك الأقواس أولا ، كيف ؟

أضرب العدد خارج القوس في كل عدد داخل القوس [يعني نقول $2 \times 5X$ ثم نخرج الناتج ثم نقول 2×3 ثم نخرج الناتج ثم نبدأ بعملية فصل الأصناف وتبسيط العبارة الجبرية]

$2 \times 5X = 10X$ [X لا بد أن تنزل مع الضرب لا تحذف]

$2 \times 3 = 6$

إذن العبارة الجبرية بعد فك الأقواس هي $10X + 6 + 2X + 4$

ثم نبدأ عملية تبسيط العبارة الجبرية فنقول $10X + 2X = 12X$ و $6 + 4 = 10$

إذن عند تبسيط العبارة الجبرية $2 (5X + 3) + 2X + 4$ تكون على الصورة $12X + 10$

مثال : عند تبسيط العبارة الجبرية $3 (2X – 3) – X + 10$ تكون على أي صورة ؟

قبل أن أفصل الأصناف عن بعضها هنا لا بد أن أفك الأقواس أولا ، كيف ؟

أضرب العدد خارج القوس في كل عدد داخل القوس [يعني نقول $3 \times 2X$ ثم نخرج الناتج ثم نقول 3×3 ثم نخرج الناتج ثم نبدأ بعملية فصل الأصناف وتبسيط العبارة الجبرية]

$3 \times 2X = 6X$

$3 \times 3 = 9$

إذن العبارة الجبرية بعد فك الأقواس هي $6X – 9 – X + 10$

نبدأ في تبسيط العبارة الجبرية فنضع كل صنف مع اشارته بجانب بعض فنقول

$6X – X = 5X$ [لماذا ؟ لأن العملية عملية طرح]

ونقول $-9 + 10 = 1$ [لماذا ؟ العملية طرح فعند طرح عددين تختلف إشارتهما نطرح العددين ونضع إشارة الأكبر هنا الأكبر لدينا 10 وإشارته موجبة إذن الجواب يكون 1+ و لا داعي لكتابة الإشارة]

إذن الحل عند تبسيط العبارة الجبرية $3 (2X – 3) – X + 10$ تكون الصورة $5X + 1$

مثال : عند تبسيط العبارة الجبرية $5 (2X + 1) + 3X – 3$ تكون على الصورة

أ – $8X + 2$ ب – $13X + 2$

ج – $10X + 8$ د – $5X – 2$

قبل أن أفصل الأصناف عن بعضها هنا لا بد أن أفك الأقواس أولا ، كيف ؟

أضرب العدد خارج القوس في كل عدد داخل القوس [يعني نقول $2X \times 5$ ثم نخرج الناتج ثم نقول 1×5 ثم نخرج الناتج ثم نبدأ بعملية فصل الأصناف وتبسيط العبارة الجبرية]

$5 \times 2X = 10X$

و $5 \times 1 = 5$

إذن العبارة الجبرية بعد فك الأقواس هي $10X + 5 + 3X – 3$

نبدأ في فصل الأصناف فنقول $10X + 3X = 13X$

$+5 – 3= 2$ [عند اختلاف الإشارة بين العددين نطرح مع إبقاء علامة الأكبر]

إذن العبارة الجبرية بعد التبسيط هي $13X + 2$ فيكون الجدوب الصحيح هو الجواب ب

تحليل العبارات الجبرية ص ١٠٦

إذا كان معامل X^2 هو الواحد أي يساوي الرقم 1 فإن ثلاثي الحدود يكون على الصورة $X^2 + bX + C$

أي هو عبارة جبرية مكونة من ثلاث حدود ولهذا النوع أربع حالات

مثال على الأربع حالات :

4 . $X^2 – 3X – 4$ 3 . $X^2 + 2X – 8$ 2 . $X^2 – 5X + 6$ 1 . $X^2 + 5X + 6$

مثال للنوع الأول : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 + 5X + 6$ تكون على الصورة

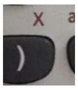
أ . $(X + 2) (X – 3)$ ب . $(X – 2) (X – 3)$

ج . $(X + 2) (X + 3)$ د . $(X – 2) (X + 3)$

الحل :

لدي طريقتين للحل :

الطريقة الأولى : أن أضرب القوسين الموجودة في الخيارات ببعضهما حتى أجد الناتج وذلك عن طريق وضع قوس عادي

كيف أكتب X في الآلة الحاسبة ؟ عن طريق الزر  ثم الزر  وأكتب الأقواس بنفس الطريقة بالخيارات ثم علامة يساوي إذا كان الناتج هو الحد الأخير من العبارة الجبرية الموجودة في السؤال وهو هنا 6 إذن يكون هو الجواب الصحيح

الطريقة الثانية : هي عن طريق تحليل العبارة الجبرية الموجودة في السؤال نفسها ، كيف أحل العبارة الجبرية ؟

تحليل العبارة الجبرية يكون عن طريق ضرب قوسين في بعضهما إذن أول خطوة أن اكتب قوسين (   ) (   )

ثم نوزع X في كلا القوسين (X   ) (X   )

العبارة الجبرية هنا هما عددان حاصل ضربهما الحد الأخير وهو 6 وحاصل جمعهما هو الحد الأوسط وهو هنا 5

الرقمين 3 و 2 حاصل ضربهما هو 6 و حاصل جمعهما هو 5 إذن نكتبها في الأقواس

(X   3) (X   2) تبقى لدينا الآن أن نجد الإشارات المناسبة

دائما الإشارة التي تسبق الحد الأوسط تكون عند الرقم الأكبر بين الأقواس [الإشارة التي تسبق الحد الأوسط 5X هي موجبة إذن نضعها في القوس الذي يحمل الرقم 3 لأنه هو الأكبر [(X + 3) (X   2) إذن تلقائيا نستبعد الخيارين أ و ب لأن الرقم 3 فيها سالب تبقى لدي الرقم 2 ماهي العلامة المناسبة ؟ قلنا أن الرقمين ناتج ضربهما يساوي 6 والعلامة التي تسبق الرقم 6 في العبارة الجبرية هي موجبة إذن يجب أن يكون ناتج ضرب الرقمين هو +6 ولكي يصبح الناتج موجب عند الضرب لابد أن تكون الإشارة متشابهة سواء موجب ضرب موجب أو سالب ضرب سالب يكون الناتج موجب أما إذا

اختلفت الشارة بين الموجب والسالب يكون الناتج سالب إذن يكون الحل (X + 3) (X + 2) فيكون الجواب الصحيح بين الخيارات هو ج

مثال آخر للنوع الثاني : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 - 5X + 6$ تكون على الصورة :

أ . (X – 2) (X + 3)　　　ب . (X – 2) (X – 3)

ج . (X + 2) (X + 3)　　　د . (X + 2) (X – 3)

الحل : نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X　　) (X　　)

ثم نوجد عددين يكون حاصل ضربهما 6+ وهو الحد الأخير للعبارة الجبرية وحاصل جمعهما هو 5- وهو الحد الأوسط للعبارة الجبرية وهما الرقمان 3 و 2 ونوزعهما على القوسين [غير مهم ترتيب الأرقام أيهم أول وأيهم ثاني]

إذن (X　3) (X　2) نأتي للإشارات نأخذ إشارة الحد الأوسط ونضعها عند الرقم الأكبر فنقول (X – 3) (X　2)

إذن نستبعد الخيارات أ و ج لأن الرقم 3 فيها موجب ، لكي يكون ناتج الضرب موجب لابد أن تكون الإشارة داخل الأقواس متشابهة سواء موجبة أو سالبة يكون الناتج موجب إذن تحليل العبارة الجبرية على الوجه الصحيح (X – 3) (X – 2) إذن الجواب الصحيح هو الخيار ب

مثال للنوع الثالث : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 + 2X - 8$ تكون على الصورة

أ . (X – 2) (X – 4)　　　ب . (X – 2) (X + 4)

ج . (X + 2) (X – 4)　　　د . (X + 2) (X + 4)

الحل : نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X　　) (X　　)

ثم نوجد عددين حاصل ضربهما هو الحد الأخير للعبارة الجبرية وهو 8- وحاصل طرحهما الحد الأوسط للعبارة الجبرية وهو 2+ وهما الرقمان 4 و 2 حاصل ضربهما 8 وحاصل طرحهما 2 نضع الأرقام في الأقواس (X　4) (X　2)

ثم نأخذ إشارة الحد الأوسط للعدد الأكبر وهي الإشارة الموجبة وتوضع للعدد الأكبر وهو 4 أي نقول (X + 4) (X　2)

تبقى إشارة الرقم الثاني ، قلنا أن ناتج الضرب لا بد أن يكون سالب وقلنا أن الإشارة إذا تشابهت سواء موجبة أو سالبة يكون الناتج موجب إذن لا بد أن تختلف الإشارة ليكون الناتج سالب إذن تحليل العبارة الجبرية بالصورة الصحيحة هي

(X + 4) (X – 2) الحل الصحيح هو الخيار ب

مثال للنوع الرابع : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 - 3X - 4$ تكون على الصورة

أ . (X – 1) (X – 4)　　　ب . (X + 1) (X + 4)

ج . (X + 1) (X – 4)　　　د . (X – 1) (X + 4)

الحل : نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X　　) (X　　)

ثم نوجد عددين حاصل ضربهما هو الحد الأخير للعبارة الجبرية وهو 4 – وحاصل طرحهما 3 - هما العددين 1 و 4 إذن نوزع الأرقام في الأقواس (1　X) (4　X) ثم نأخذ علامة الحد الأوسط ونضعها للرقم الأكبر فنقول (1　X) (4 – X)

إذن نستبعد الخيارين ب و د لأن الرقم 4 فيها موجب قلنا أن العددين حاصل ضربهما 4 – ولكي يكون الناتج سالب لا بد أن تختلف الإشارة فنقول (1 + X) (4 – X) إذن الجواب الصحيح هو ج

[إذا كانت الإشارة للحد الأخير موجبة تكون إشارات الأقواس متشابهة وإذا كانت الإشارة للحد الأخير سالبة تكون إشارات الأقواس مختلفة]

مثال : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 + 7X + 12$ تكون على الصورة :

أ . (X – 4) (X – 3)   ب . (X – 4) (X + 3)

ج . (X + 4) (X - 3)   د . (X + 4) (X + 3)

الحل : نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X   ) (X   )

ثم نوجد عددين حاصل ضربهما هو 12+ وحاصل جمعهما هو 7+ وهما العدد 4 و 3 ونوزعها على الأقواس فنقول

(X   4) (X   3) ثم نأخذ علامة الحد الأوسط ونضعها للرقم الأكبر وهي العلامة الموجبة فنضعها للرقم 4 فنقول

(X + 4) (X   3) تبقى علامة الرقم الثاني ، قلنا أن ناتج ضرب العددين هو 12+ إذن لابد أن تتشابه الإشارة ليكون الناتج موجب فيكون تحليل العبارة الجبرية على الوجه الصحيح هو (X + 4) (X + 3) إذن الجواب الصحيح هو د

مثال : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 + 5X – 14$ يكون على أي صورة ؟

الحل : نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X   ) (X   )

نوجد عددين حاصل ضربهما هو الحد الأخير للعبارة الجبرية وهو 14- وحاصل طرحهما هو الحد الأوسط للعبارة الجبرية وهو 5+ والعددين هما العدد 2 و 7 فنوزعها على القوسين (X   7) (X   2) ثم نأخذ إشارة الحد الأوسط ونضعها للرقم الأكبر أي نقول (X + 7) (X   2) قلنا أن حاصل الضرب يساوي 14- إذن لا بد أن تكون الإشارة داخل الأقواس مختلفة ليكون الناتج سالب يصبح الحل الصحيح لتحليل العبارة الجبرية هو (X + 7) (X – 2)

مثال ١٢ ص ١١٢ [تبقى من أمثلة هذا السؤال مثالين وهما]

حل ما يلي : $2 .\ X^2 – X – 12$ $1 .\ X^2 – 7X + 10$

الحل : $1 .\ X^2 – 7X + 10$

نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X   ) (X   )

ثم نوجد رقمين حاصل ضربهما يساوي 10+ وحاصل جمعهما يساوي 7 وهما لدينا الرقمان 5 و 2 ثم نوزعهما على الأقواس فنقول (X   5) (X   2) ثم نأخذ علامة الحد الأوسط ونضعه للرقم الأكبر فنقول (X – 5) (X   2) ليكون الناتج عدد موجب لا بد أن تكون الإشارات متشابهة فيكون تحليل العبارة الجبرية على الوجه الصحيح هي

(X – 5) (X – 2)

$2 .\ X^2 – X – 12$ نحلل العبارة الجبرية فنضع قوسين ونوزع X على القوسين (X   ) (X   )

ثم نوجد عددين حاصل ضربهما يساوي 12- وحاصل طرحهما يساوي 1 – لأن X هنا تعني أن القيمة 1

هما الرقمان 4 و 3 ثم نوزعها على الأقواس فنقول (X   4) (X   3) ثم نأخذ علامة الحد الأوسط ونضعها للرقم الأكبر فنقول (X – 4) (X   3) ليكون ناتج الضرب سالب لا بد أن تختلف الإشارة داخل الأقواس فنقول (X – 4) (X + 3)

فرق مربعين

ويكون فرق المربعين على الصورة $X^2 – a$ حيث a عدد يمكن إيجاد الجذر له وسمي الفرق لأن العلامة بينهما سالبة أي طرح فلا تكون العلامة جمع أبدا

مثال : حلل كل مما يلي :

$X^2 - 9$ $\quad$ $X^2 - 25$ $\quad$ $X^2 - 100$ $\quad$ $X^2 - 81$ $\quad$ $X^2 - 4$ $\quad$ $X^2 - 1$

الحل :

كما في الأمثلة الأولى التحليل يكون عن طريق فتح قوسين ونوزع فيهما X ثم أضع قوس علامة سالبة وقوس علامة موجبة ليكون الناتج سالب ثم أوجد جذر العدد الموجود في السؤال وأضعه في القوسين مثلا جذر 9 جذر 25 وهكذا فيكون حل الأمثلة السابقة هي

$$X^2 - 9 = (X + 3)(X - 3)$$

$$X^2 - 25 = (X + 5)(X - 5)$$

$$X^2 - 100 = (X + 10)(X - 10)$$

$$X^2 - 81 = (X + 9)(X - 9)$$

$$X^2 - 4 = (X + 2)(X - 2)$$

$$X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$$

مثال : عند تحليل العبارة الجبرية $X^2 - 49$ تكون على الصورة

أ . $(X - 7)(X - 7)$ $\qquad$ ب . $(X + 7)(X + 7)$

ج . $(X - 49)(X + 1)$ $\qquad$ د . $(X - 7)(X + 7)$

الجواب الصحيح هو د لأن جذر الرقم 49 هو 7 والصورة الصحيحة للجواب هي د

المعادلات وللمعادلات ثلاث أنواع

النوع الأول : المعادلة الخطية في مجهول واحد

كيف أعرف المعادلة الخطية ؟ تكون على هذه الصورة $2X + 3 = 11$ بحيث تكون X هكذا بدون تربيع ولا تكعيب أي غير مرفوعة لأس كما أن المعادلة يكون فيها علامة المساواة أما العبارة الجبرية فلا يوجد فيها مساواة

كيف أوجد حل المعادلة ؟ لا بد أن أوجد قيمة X بحيث يتساوى الطرفان في المعادلة [الطرفان هما ما يكون بينهما علامة يساوي] لإيجاد حل المعادلة نضع كل رقم يحمل X جهة اليسار أي قبل علامة المساواة وكل رقم عادي جهة اليمين أي بعد علامة المساواة ثم كل رقم ينقل من مكانه تتغير علامته فالموجب عند نقله يتحول سالب والسالب يتحول موجب وهكذا

أي عند بداية حل المعادلة $2X + 3 = 11$ حين نريد نقل المجاهيل لجهة والمعاليم لجهة $2X$ تبقى جهة اليسار وننقل الرقم 3 جانب الرقم 11 أي بعد علامة المساواة وعند نقلها تتغير علامتها فتصبح سالبة فيكون شكل المعادلة $2X = 11 - 3$

نجري عملية الطرح فنقول $2X = 8$ ثم نقسم الناتج على الرقم الموجود خلف X فنقول $8 \div 2 = 4$ إذن $X = 4$

للتحقق من صحة الحل نعوض ناتج X بالمعادلة فنقول $2 \times 4 + 3 = 11$ إذن الجواب صحيح

مثال : أوجد حل المعادلة الخطية التالية $4X - 3 = X + 12$

الحل : أولا ننقل معامل X لجهة اليسار والأرقام لجهة اليمين [ننتبه لتغيير الإشارات عند النقل]

فنقول $4X - X = 12 + 3$ ثم نجري العمليات الحسابية فنقول $3X = 15$ ثم نقسم على معامل X لإيجاد قيمتها

فنقول $5 = 3 \div 15$ إذن قيمة $X = 5$

للتحقق من صحة الحل نعوض ناتج X بالمعادلة فنقول $12 + 5 = 3 - 5 \times 4$ وعند إجراء العمليات الحسابية لكل جهة من المعادلة نجد أن كلاهما يساوي $17 = 17$ إذن الحل صحيح

مثال : حل المعادلة الخطية

$6X - 5 = 4X + 7$ هو ؟

أ . $X = -6$ ب . $X = 6$

ج . $X = -1$ د . $X = 1$

الحل : نرتب المعادلة ونضع المجاهيل في جهة والمعاليم في جهة فنقول $6X - 4X = 7 + 5$

ثم نجري العمليات الحسابية $2X = 12$ ثم نقسم 12 على معامل X وهو هنا 2 فنقول $6 = 2 \div 12$ إذن $X = 6$ فيكون الجواب الصحيح هو ب للتحقق من صحة الحل نعوض قيمة X في المعادلة فنقول $6 \times 6 - 5 = 4 \times 6 + 7$ بعد إجراء العمليات الحسابية نجد أن كل طرف من المعادلة يكون $31 = 31$ إذن الحل صحيح

إذا كان عندي أقواس يجب أولا أن أفك الأقواس ثم أكمل باقي الخطوات

مثال : أوجد حل المعادلة الخطية التالية $2 (2X + 5) = 2X + 4$

أولا نضرب العدد خارج القوس بالرقمين داخل القوس لأتخلص من الأقواس فنقول $2 \times 2X = 4X$ و $2 \times 5 = 10$

إذن بعد فك الأقواس تكون المعادلة على الصورة $4X + 10 = 2X + 4$ نكمل الآن باقي خطوات الحل فننقل المجاهيل جهة اليسار والمعاليم جهة اليمين وننتبه لتغيير الإشارات عند النقل فنقول $4X - 2X = 4 - 10$ ثم نجري العمليات الحسابية فنقول $2X = -6$ ثم نقسم على معامل X لإيجاد قيمتها فنقول $-6 \div 2 = -3$ إذن $X = -3$

مثال : أوجد حل ما يلي :

1 . $3X - 1 = 5$ 2 . $4X - 5 = 2X + 3$ 3 . $2 (X + 10) + 16 = 9 - 3 (2X - 1)$

الحل : 1 . $3X - 1 = 5$ أولا ننقل المجاهيل جهة اليسار والمعاليم جهة اليمين فنقول $3X = 5 + 1$

ثم نجري العملية الحسابية $3X = 6$ ثم نقسم على معامل X $6 \div 3 = 2$ إذن $X = 2$

2 . $4X - 5 = 2X + 3$ أولا ننقل المجاهيل جهة السيار والمعاليم جهة اليمين فنقول $4X - 2X = 3 + 5$ ثم نجري العمليات الحسابية $2X = 8$ ثم نقسم على معامل X $8 \div 2 = 4$ إذن $X = 4$

3 . $2 (X + 10) + 16 = 9 - 3 (2X - 1)$ أولا نفك الأقواس وذلك عن طريق ضرب خارج القوسين بكل عدد داخلهما فتصبح المعادلة بعد فك الأقواس على الصورة $2X + 20 + 16 = 9 - 6X + 3$ [ننتبه للإشارات وتغيرها ويفضل إجراء العمليات الحسابية بالآلة فالقوس الثاني نضرب في -3 فلإشارة التي تسبق العدد خارج القوس هو سالبة]

نجمع الأعداد في كلا الطرفين فنقول $2X + 36 = 12 - 6X$ ثم ننقل المجاهيل لجهة اليسار والمعاليم لجهة اليمين فنقول

$2X + 6X = 12 - 36$ ثم نجري العمليات الحسابية فنقول $8X = - 24$ ثم نقسم على معامل X فنقول $- 24 \div 8 = -3$

إذن $X = -3$

النوع الثاني : حل معادلتين خطيتين في مجهولين ص ١٢٤ :

الصيغة العامة للمعادلتين الخطيتين في مجهولين هي

$$Ax_1 + by_1 = c_1$$

$$Ax_2 + by_2 = c_2$$

حيث أن a + b + c تمثل أرقام معلومة و x + y تمثل مجاهيل

كيف يتم حل هذه المعادلة بالآلة الحاسبة ؟

مثال رقم ٢ ص ١٢٥ أوجد قيمة x , y التي تحقق المعادلتين

$$2X + 3Y = 2$$

$$X - Y = 6$$

الحل : نحضر الآلة الحاسبة ونضغط الزر mood تخرج لنا شاشة تحمل ثمانية خيارات ثم نضغط الرقم 5 من خانة الأرقام العادية فتظهر شاشة أخرى تحمل أربعة خيارات ثم نضغط الرقم 1 من خانة الأرقام العادية فتظهر لنا شاشة المعادلة

نبدأ بتعبئة الفراغات من أرقام المعادلة قلنا أن المعادلة هي

$$2X + 3Y = 2$$

$$X - Y = 6$$

[طبعا شاشة المعادلة مقسمة ثلاث أقسام فكل قسم ندخل فيه قيمة نبدأ بمعامل X يعني الرقم قبل X ندخل الرقم فقط بدون الحرف فنضغط الرقم 2 ثم علامة = تدخل القيمة وينتقل المؤشر تلقائيا للخانة الثانية لندخل معامل y ثم ندخل قيمة y نكتب الرقم 3 ثم علامة = تدخل القيمة تلقائيا ينتقل المؤشر للرقم الأخير نكتب الرقم 2 ثم علامة = ينتقل المؤشر تلقائيا للمعادلة الثانية نبدأ في إدخال قيم المعادلة الثانية لدينا X لم يسبقها رقم إذن معاملها يكون 1 نكتب 1 ثم علامة = ثم ندخل معامل Y نلاحظ أن الإشارة التي تسبق الرقم سالبة إذن ندخل القيمة 1- ثم ندخل القيمة الأخيرة 6 ثم علامة = ثم نضغط = مرة أخرى تظهر قيمة X ثم علامة = مرة أخرى تظهر قيمة Y إذن الحل $X = 4 \;, Y = -2$

مثال رقم ٣ ص ١٢٦

أوجد قيمة X , Y التي تمثل قيمة المعادلتين

$$3X - Y = 5$$

$$X + 2Y = 4$$

الحل : إذا كانت الآلة الحاسبة مجهزة لحل معادلة نضغط الزر 

مرتين لبدء حل معادلة جديدة

وإذا كانت الآلة أعيدت للوضع الطبيعي نتبع الخطوات السابقة أولا زر mood ثم الرقم 5 ثم الرقم 1 ثم نبدأ بإدخال قيم المعادلة 3 ثم علامة = ثم الرقم 1- (Y لم يسبقها رقم إذن معاملها هو 1 ولا ننسى أن العلامة التي تسبقه سالبة) ثم علامة = ثم الرقم 5 ثم علامة = ينتقل المؤشر بعد ذلك تلقائيا إلى السطر الثاني من المعادلة ونبدأ بإدخال القيم فنكتب الرقم 1 ثم علامة = ثم الرقم 2 ثم علامة = ثم الرقم 4 ثم علامة = مرتين يظهر لنا قيمة $X = 2$ ثم علامة = مرة أخرى ويظهر لنا قيمة $Y = 1$

سؤال : أوجد قيمة X , Y التي تمثل قيمة المعادلتين

$3X - Y = 1$

$2X + 2Y = 6$

الحل : إذا كانت الآلة الحاسبة مجهزة لحل معادلة نضغط الزر  مرتين لبدء حل معادلة جديدة

وإذا كانت الآلة أعيدت للوضع الطبيعي نتبع الخطوات السابقة أولا زر mood ثم الرقم 5 ثم الرقم 1 ثم نبدأ بإدخال قيم المعادلة 3 ثم علامة = ثم الرقم -1 (Y لم يسبقها رقم إذن معاملها هو 1 ولا ننسى أن العلامة التي تسبقه سالبة) ثم علامة = ثم الرقم 1 ثم علامة = ينتقل المؤشر بعد ذلك تلقائيا إلى السطر الثاني من المعادلة ونبدأ بإدخال القيم فنكتب الرقم 2 ثم علامة = ثم الرقم 2 ثم علامة = ثم الرقم 6 ثم علامة = مرتين يظهر لنا قيمة $X = 1$ ثم علامة = مرة أخرى ويظهر لنا قيمة $Y = 2$

[ملاحظة : إذا أردنا إعادة الآلة الحاسبة للوضع الطبيعي بعد إجراء المعادلات نضغط زر mood ثم الرقم 1 وإذا كانت الآلة على الوضع الطبيعي ونريد إجراء المعادلات نضغط زر mood ثم الرقم 5 ثم نختار نوع المعادلة التي نريد إجراءها]

النوع الثالث : حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ص ١٢٩ :

الصيغة العامة لهذه المعادلة هي $aX^2 + bX + c = 0$

في معادلة الدرجة الثانية لابد أن تكون نهاية المعادلة 0= إذا لم تكن نهاية المعادلة 0= إذن ليست المعادلة من هذا النوع وليست صحيحة .

[كيف أميز هل المعادلة من الدرجة الأولى أو الثانية أو الثالثة ؟ ألاحظ X في المعادلات السابقة ليس فوقها اس اذن درجة أولى وهنا لدي X^2 رفعناها لأس 2 إذن هي من الدرجة الثانية لو كانت مرفوعة للأس 3 إذن المعادلة من الدرجة الثالثة]

مثال رقم ٥ ص ١٣٠ [نلاحظ في هذا السؤال في الكتاب أن المعادلة الأولى والثالثة ليست على الصيغة العامة لهذا النوع من المعادلات إذن غير واردة في الاختبار لذلك لم تتم كتابتها في التفريغ ، لماذا هي ليست على الصيغة العامة لأنها لم تنتهي ب 0=]

أوجد حل المعادلة التالية $2X^2 - 3X - 2 = 0$

الحل : بالآلة الحاسبة نضغط الزر mood تخرج لنا شاشة تحمل ثمانية خيارات ثم نضغط الرقم 5 من خانة الأرقام العادية فتظهر شاشة أخرى تحمل أربعة خيارات ثم نضغط الرقم 3 من خانة الأرقام العادية فتظهر لنا شاشة المعادلة ثم ندخل قيم المعادلة قلنا أن المعادلة هي $2X^2 - 3X - 2 = 0$ نبدأ بإدخال الرقم 2 ثم علامة = (لا نرفع للأس 2 ولا نضيف X فقط ندخل الرقم) بعد علامة = ندخل القيمة الثانية وهي -3 ثم علامة = ثم ندخل -2 ثم علامة = ثم علامة = مرة أخرى يظهر لنا ناتج X_1 ثم علامة = مرة أخرى يظهر لنا ناتج X_2 إذن الحل : $X_1 = 2 \;, X_2 = -\frac{1}{2}$

مثال : حل المعادلة التربيعية $X^2 - 7X + 10 = 0$ هو :

أ) { 2 , 5 }   ب) { -2 , -5 }

ج) { 2 , -5 }   د) { -2 , 5 }

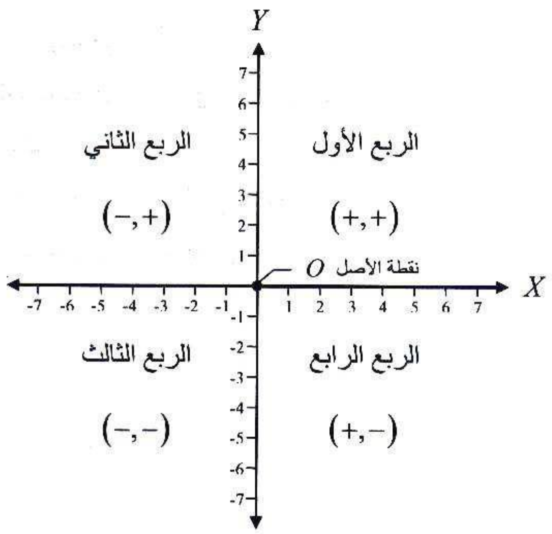
الحل : أولا نجري العملية الحسابية نضغط mood ثم الرقم 5 ثم الرقم 3 ثم نبدأ بإدخال القيم ندخل الرقم 1 ثم علامة = ثم الرقم 7- ثم علامة = ثم الرقم 10 ثم علامة = مرتين نجد أن $X_1 = 5$ ثم علامة = مرة أخرى نجد أن $X_2 = 2$ إذن الجواب الصحيح هو أ) { 2 , 5 }

[كل نوع من أنواع المعادلات الثلاث سيأتي عليها سؤال في الاختبار النهائي إذن لا بد من التركيز والتفريق بينها]

الفصل الرابع : الهندسة التحليلية ص ١٣٦ [هذا الفصل سيأتي منه أربعة أسئلة في الاختبار]

المستوى الديكارتي :

يتكون المستوى الديكارتي من خطين متعامدين ممثلا كلا منها مجموعة الأعداد الحقيقية أحدهما أفقي ويسمى محور X تكون الأعداد على يمينه موجبة والأعداد على يساره سالبة والآخر عامودي ويسمى محور Y تكون الأعداد أعلاه موجبة والأعداد أسفله سالبة ويتقاطعان في نقطة الصفر وتسمى نقطة الأصل *O* ويسميان معا بالمحاور الإحداثية ودائما في النقاط الإحداثية نقرأ قيم X قبل قيم Y [ولا ننسى أننا نقرأ من اليسار لليمين]

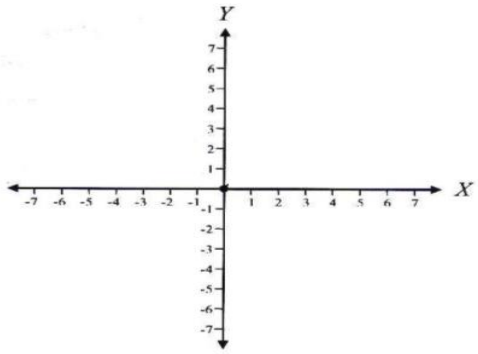


فالمنطقة تنقسم إلى أربع أرباع وقلنا دائما تبدأ الإحداثيات ب X ثم إحداثيات Y فالربع الأول يقع في اليمين الأعلى وتكون إحداثيات X و Y كلاهما موجب أما الربع الثاني الذي يقع يسارا في الأعلى تكون فيه إحداثيات X سالبة وإحداثيات Y موجبة الربع الثالث يقع في اليسار أسفل تكون إحداثيات X و Y كلاهما سالب أما الربع الأخير الرابع يقع في اليمين أسفل تكون إحداثيات X موجبة و Y سالبة

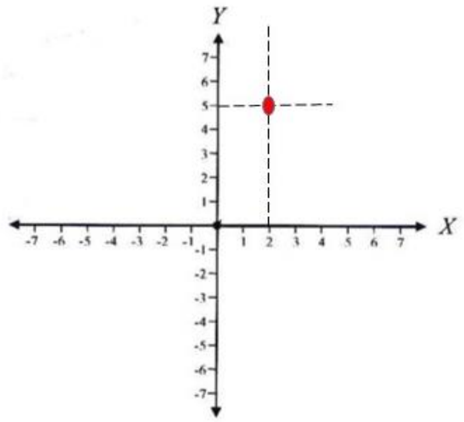
- كيف يتم تحديد نقطة على المستوى الديكارتي ؟

مثلا لو قلنا : مثّل النقطة (2 , 5) على المستوى الديكارتي

أولا : نرسم المستوى



ثانيا : قلنا أن قراءة الإحداثيات تكون من اليسار لليمين وقلنا أيضا أننا دائما نبدأ بالإحداثية X ثم Y إذن النقطة (2 , 5) X=2 و Y = 5 نمد خط متقطع من 2 على محور X باتجاه الأعلى ونمد خط متقطع من المحور Y ليتقاطع مع الخط السابق فنقطة تلاقي الخطين تمثل النقطة على المستوى الديكارتي



سؤال : النقطة (-1 , 4) تقع في الربع :

أ) الربع الأول . ب) الربع الثاني .

ج) الربع الثالث . د) الربع الرابع .

الحل : قلنا أن النقطة تقرأ من اليسار لليمين وأننا دائما نبدأ بإحداثية X إذن X هنا سالب و Y موجب إذن الجواب الصحيح الربع الثاني .

[إذا كان السؤال على أي محور تقع النقطة ننظر إذا كانت إحداثية X = 0 إذن النقطة على المحور Y وإذا كانت إحداثية Y=0 إذن النقطة تقع على المحور X]

مثال رقم ١ ص ١٣٩

حدد في أي ربع أو على أي محور تقع كل من النقاط التالية :

5 . (-7 , -9) 4 . (6 , -5) 3 . (0 , -4) 2 . (3 , 1) 1 . (-4 , 2)

6. (0 , 0)

الحل : $(-4 , 2)$ = هنا X سالب و Y موجب إذن الربع الثاني

$(3 , 1)$ = هنا كلاهما موجب إذن الربع الأول

$(0 , -4)$ = هنا $X = 0$ إذن النقطة تقع على محور Y

$(6 , -5)$ = هنا X موجب و Y سالب إذن الربع الرابع

$(-7 , -9)$ = هنا كلاهما سالبان إذن الربع الثالث

$(0 , 0)$ = نقطة الأصل وهي تقع على كلا المحورين X , y

أولا : ميل المستقيم من معادلة

مثال ٥ ص ١٤٧

إذا كانت معادلة المستقيم هي $4X + 2Y = 12$ أوجد ميل المستقيم ؟

الحل : أولا : لا بد أن ننقل جميع الأطراف لجهة ونترك فقط Y على جهة اليسار إذن نقول

$2Y = -4X + 12$ [لأننا نقلنا X ومعاملها من جهة إلى أخرى لا بد أن نغير الإشارة من موجب إلى سالب ولو كانت سالب غيرناها إلى موجب]

ثانيا : نتخلص من معامل Y ، كيف ؟ نقسم جميع الأطراف على معامل Y وهو هنا قيمته 2 فنقول $\frac{2Y}{2} = \frac{-4X}{2} + \frac{12}{2}$ بعد إجراء القسمة تكون صيغة المعادلة كالتالي $Y = -2X + 6$ إذن ما هو ميل المستقيم لهذه المعادلة ؟

الميل ويرمز له بالرمز m هو معامل X بعد أن Y لوحدها على جهة اليسار والآن معامل X هو -2 إذن الميل هو $m = -2$

مثال : أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $3Y = 12X – 6$ ؟

الحل : هنا Y في طرف لوحدها يتبقى فقط أن نتخلص من معامل Y عن طريق القسمة عليه فنقول

$\frac{3Y}{3} = \frac{12X}{3} - \frac{6}{3}$ بعد إجراء القسمة نجد أن المعادلة تكون على الصورة التالية $Y = 4X – 2$ معامل X هو 4 إذن ميل المستقيم هو $m = 4$

مسألة : ميل المستقيم الذي معادلته $6X + 2Y = 10$ يساوي :

أ) $m = 6$ ب) $m = -6$

ج) $m = 3$ د) $m = -3$

الحل : نجري الخطوات أولا : ننقل جميع الأطراف لجهة اليمين ونبقي فقط Y في جهة اليسار فنقول $2Y = -6X + 10$

ثانيا نتخلص من معامل Y فنقول $\frac{2Y}{2} = \frac{-6X}{2} + \frac{10}{2}$ وبعد إجراء القسمة تكون المعادلة $Y = -3X + 5$ إذن معامل X هو -3 إذن الجواب الصحيح هو د) $m = -3$

- ميل المستقيم المار بنقطتين :

مثال : (X_2 , Y_2)   (X_1 , Y_1)

قانونه هو : $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

سؤال : أوجد ميل المستقيم المار بنقطتين هما (4 , -3)   (2 , 5)

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (2 , 5) تكون 2 هي X1 و 5 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (4 , -3) تكون 4 هي X2 و -3 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{-3-5}{4-2}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة m = -4

مثال ٨ ص ١٥١

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين الموضحتين في كل مما يلي :

1 . (0 , 4)   (2 , 12)

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (0 , 4) تكون 0 هي X1 و 4 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (2 , 12) تكون 2 هي X2 و 12 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{12-4}{2-0}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة m = 4

2 . (4 , -6)   (1 , 3)

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (4 , -6) تكون 4 هي X1 و -6 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (1 , 3) تكون 1 هي X2 و 3 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{3-(-6)}{1-4}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة m = -3

3 . (5 , 3)   (5 , -2)

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (5 , 3) تكون 5 هي X1 و 3 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (5 , -2) تكون 5 هي X2 و -2 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{-2-3}{5-5}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة $m = \frac{-5}{0}$
وهو رقم غير معرف

4 . (2 , -1)   (7 , -1)

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (2 , -1) تكون 2 هي X1 و -1 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (7 , -1) تكون 7 هي X2 و -1 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{-1-(-1)}{7-2}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة m = 0

سؤال : ميل المستقيم المار بالنقطتين (-1 , 6) (2 , 12) يساوي :

أ) m = 2   ب) m = -2

ج) m = 3   د) m = -3

الحل : أولا نحدد X و Y قلنا أن نبدأ باليسار تكون هي النقطة X إذن من النقطة (2 , 12) تكون 2 هي X1 و 12 هي Y1 ثم نأتي للنقطة الثانية (-1 , 6) تكون -1 هي X2 و 6 هي Y2

ثانيا نكتب القانون $m = \frac{Y2-Y1}{X2-X1}$

ثالثا نعوض القيم $m = \frac{6-12}{-1-2}$ نجري العملية الحسابية بشكل كسر بالآلة الحاسبة كما درسنا سابقا تكون النتيجة m = 2 إذن الجواب الصحيح هو الخيار أ

- معادلة المستقيم بدلالة ميل ونقطة ص ١٥٢

[يعني إذا كنا نعرف ميل المستقيم ونقطة منه كيف نستخرج معادلته ؟]

عن طريق القانون التالي Y – Y1 = m (X – X1)

مثال رقم ٩ ص ١٥٣

اكتب معادلة خط المستقيم الذي ميله m = 4 ونقطه هي (2 , -3)

أولا نكتب القانون Y – Y1 = m (X – X1)

ثم نعوض القيم فنقول Y – (-3) = 4 (X – 2)

ثانيا نتخلص من الأقواس ، كيف ؟ نضرب العدد خارج القوس بالعدد داخل القوس

أولا Y – (-3) تصبح Y + 3 لماذا أصبحت الإشارة موجبة ؟ لأن علامة الطرح والسالب متجاورة تصبح موجبة

ثانيا 4 (X – 2) نضرب 4 × X = 4X ثم نضرب 4 × -2 = -8

بعد الضرب تصبح المعادلة Y + 3 = 4X – 8 ننقل الأعداد لليسار لتصبح Y لوحدها Y = 4X – 8 -3 تغيرت إشارة الرقم 3 من موجب إلى سالب لأننا نقلناها وعند النقل تتغير الإشارة نجمع الأعداد فتكون المعادلة Y = 4X – 11 هذه معادلة المستقيم بدلالة ميل ونقطة

مثال : إذا كان عندي m = 3 ونقطة هي (2 , 5)

ما هي معادلة المستقيم الذي ميله 3 والنقطة التي يمر بها هي (2 , 5)

١/ أولا نضع القانون Y – Y1 = m (X – X1)

٢/ نعوض القيم بالقانون نقول $Y - 5 = 3 (X - 2)$

٣/ نفك الأقواس [نضرب العدد خارج القوس بالأعداد داخل القوس] $Y - 5 = 3X - 6$

٤/ نرتب بحيث تصبح Y بجهة اليسار لوحدها $Y = 3X - 6 + 5$

٥/ نجري العملية الحسابية بين الأرقام لدينا عددين اشارتهم مختلفة نضع إشارة الأكبر ونطرح $Y = 3X - 1$

معادلة خط المستقيم هي $Y = 3X - 1$

سؤال : معادلة المستقيم الذي ميله 5 ويمر بالنقطة (4 , 2) هو :

أ) $Y = 5X + 6$ ب) $Y = 5X + 14$

ج) $Y = 5X - 6$ د) $Y = 5X - 14$

الحل : نجري الخطوات أولا لنعرف الجواب الصحيح

١/ نضع القانون $Y - Y1 = m (X - X1)$

٢ / نعوض القيم بالقانون $Y - 4 = 5 (X - 2)$

٣/ نفك الأقواس $Y - 4 = 5X - 10$

٤/ نرتب المعادلة $Y = 5X - 10 + 4$

٥/ نجري العملية الحسابية (الإشارة مختلفة) $Y = 5X - 6$ إذن الجواب الصحيح هو الخيار ج

المتتاليات

هي مجموعة أو سلسلة أرقام بينها فواصل تربط بينها صيغة رياضية أو قاعدة تكتب على الشكل التالي

$A_1 , a_2 , a_3 , a_4 ....a_n$

كل رقم عبارة عن حد ويسمى حسب تسلسله الحد الأول الحد الثاني الحد الثالث وهكذا

A_n هي الحد النوني أي رقم الحد وتسمى الحد العام فنعوضها بالحد المطلوب مثلا الحد العاشر تصبح a_{10} الحد الخامس a_5 الحد التاسع a_9 وهكذا

استخراج الحدود من المتتالية مثال ١ ص ١٣٦ مطلوب فقط الفقرة الأولى الفقرة الثانية والثالثة غير مطلوبة

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية $a_n = 3n + 2$

الحل : قلنا أن a_n هو الحد العام لأي رقم وهنا نريد الخمس حدود الأولى إذن من الرقم 1 وحتى الرقم 5 نعوض كل n في القاعدة بالحد المراد استخراجه

الحد الأول a_1 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 1 فنقول $a_1 = 3 (1) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_1 = 3 + 2 = 5$ إذن $a_1 = 5$

الحد الثاني a_2 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 2 فنقول $a_2 = 3 (2) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_2 = 6 + 2 = 8$ إذن $a_2 = 8$

الحد الثالث a_3 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 3 فنقول $a_3 = 3 (3) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_3 = 9 + 2 = 11$ إذن $a_3 = 11$

الحد الرابع a_4 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 4 فنقول $a_4 = 3 (4) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_4 = 12 + 2 = 14$ إذن $a_4 = 14$

الحد الخامس a_5 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 5 فنقول $a_5 = 3 (5) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_5 = 15 + 2 = 17$ إذن $a_5 = 17$

و هكذا نستمر لنهاية الحدود المطلوبة هنا طلب الخمس حدود الأولى وأوجدناها

مثال : أوجد الحد العاشر للمتتالية $a_n = 3n + 2$

الحد العاشر a_{10} أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 10 فنقول $a_{10} = 3 (10) + 2$ ثم نجري عملية الضرب ثم الجمع

$a_{10} = 30 + 2 = 32$ إذن $a_{10} = 32$

مثال : أوجد الحد الخامس للمتتالية $a_n = n^2 + 2n$

الحد الخامس a_5 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 5 فنقول $a_5 = 5^2 + 2 (5)$ أولا نرفع للأس ونجري عملية الضرب
$a_5= 25 + 10$ ثم نجري عملية الجمع يكون الناتج $a_5 = 35$

مثال أوجد الحد العاشر للمتتالية $a_n = n^2 + 2n$

الحد العاشر a_{10} أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 5 فنقول $a_{10} = 10^2 + 2 (10)$ أولا نرفع للأس ونجري عملية الضرب
$a_{10} = 100 + 20$ ثم نجري عملية الجمع يكون الناتج $a_{10} = 120$

سؤال / الحد الخامس للمتتالية $a_n = (n + 1)^2$ هو :

أ) $a_5 = 25$ ب) $a_5 = 26$

ج) $a_5 = 36$ د) $a_5 = 16$

الحل : الحد الخامس a_5 أولا نعوض كل n بالقاعدة بالرقم 5 فنقول $a_5 = (5 + 1)^2$ أولا نجري العملية الحسابية داخل الأقواس فتكون $a_5= (6)^2$ ثم نرفع للأس يكون الناتج $a_5 = 36$ إذن الجواب الصحيح هو الخيار ج

مجموع المتتالية ص ١٦٤ [غير مطلوب]

مثال ٢ ص ١٦٥ [غير مطلوب]

للمتتالية نوعين هما حسابية و هندسية

أولا / المتتالية الحسابية

كيف نحكم على متتالية هل هي حسابية أو لا ؟ نطرح كل حد من الحد الذي قبله حتى نهاية الحدود فإذا كان ناتج جميع عمليات الطرح رقم ثابت لا يتغير ويسمى هذا العدد أساس المتباينة الحسابية ويرمز له بالرمز d

مثال هل المتتالية التالية هي متتالية حسابية .... 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16

كل رقم يمثل حد فكأننا نقول $1a_1 , 4a_2 , 7a_3 , 10a_4 , 13a_5 , 16a_6$

إذن نقول نطرح كل حد من الحد الذي قبله فنقول

$A_6 - a_5 = 16 - 13 = 3$

$A_5 - a_4 = 13 - 10 = 3$

$A_4 - a_3 = 10 - 7 = 3$

$A_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$

$A_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$

هنا في كل عمليات الطرح عدد ثابت لم يتغير في أي عملية إذن هي متتالية حسابية وأساسها $d = 3$

مثال / هل المتتالية التالية هي متتالية حسابية .... 1 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10

كل رقم يمثل حد فكأننا نقول $1a_1 , 2a_2 , 4a_3 , 6a_4 , 8a_5 , 10a_6$

إذن نقول نطرح كل حد من الحد الذي قبله فنقول

$A_6 - a_5 = 10 - 8 = 2$

$A_5 - a_4 = 8 - 6 = 2$

$A_4 - a_3 = 6 - 4 = 2$

$A_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$

$A_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

ليست متتالية لأن ناتج من نواتج الطرح اختلف إذن ليست متتالية

سؤال / أي من المتتاليات التالية تعتبر متتالية حسابية :

أ) ...... 0 , 4 , 6 , 10 , 14

ب) ...... 5 , -5 , 5 , -5

ج) ...... -2 , 0 , 2 , 4

د) ..... 1 , 2 , 4 , 8 , 16

الحل : أولا نجري عمليات الطرح لنحدد أي من الخيارات هو الصحيح نتذكر نبدأ من الحد الأخير ونطرح

نبدأ بالخيار أ) ...... 0 , 4 , 6 , 10 , 14

نقول 6 – 4 = 2   10 – 6 = 4   14 – 10 = 4 تغير ناتج إذن ليست متتالية

الخيار ب) ...... 5- , 5 , 5- , 5

نقول 10 = (5-) – 5   10- = 5 – 5-   تغيرت الإشارة إذن تغيرت القيمة فليست متتالية

الخيار ج) ...... 2- , 0 , 2 , 4

نقول 2 = (2-) – 0   2 = 0 – 2   2 = 2 – 4 لم يتغير الرقم إذن متتالية

نجري نفس العملية على الخيار د) ..... 1 , 2 , 4 , 8 , 16 للتأكد انه لا توجد متتالية أخرى

نقول 4 = 4 – 8   8 = 8 – 16   تغير الناتج إذن ليست متتالية

فالجواب الصحيح هو الخيار ج

الحد العام للمتتالية الحسابية

لها قانون وهو $a_n = a_1 + d (n - 1)$ وهذا القانون حفظ

An هو الحد العام أو يسمى الحد النوني لأي عدد n تعوض برقم الحد وهو العدد الذي يذكر بالسؤال

A_1 هو الحد الأول للعدد و d هو أساس المتتالية هذا قانون الحد العام للمتتالية الحسابية

مثال ٤ ص ١٦٨

لدينا متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 3 أوجد الحد العاشر

الحل : معطيات السؤال الحد الأول : $a_1 = 4$ والأساس : $d = 3$ أولا نضع قانون الحد العام وهو $a_n = a_1 + d (n - 1)$

ثم نعوض معطيات السؤال بالقانون فيكون القانون $a_n = 4 + 3 (n - 1)$

نحن نريد إيجاد الحد العاشر بنفس الطريقة تعويض إذن $a_{10} = 4 + 3 (10 - 1)$ أولا نجري العملية الحسابية داخل القوس $a_{10} = 4 + 3 (9)$ ثم نجري عملية الضرب $a_{10} = 4 + 27$ وأخيرا الجمع يكون ناتج الحد العاشر هو $a_{10} = 31$

سؤال / لدينا متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 3 أوجد الحد السادس

معطيات السؤال الحد الأول : $a_1 = 4$ والأساس : $d = 3$ أولا نضع قانون الحد العام وهو $a_n = a_1 + d (n - 1)$

ثم نعوض معطيات السؤال بالقانون فيكون القانون $a_n = 4 + 3 (n - 1)$

نحن نريد إيجاد الحد السادس بنفس الطريقة تعويض إذن $a_6 = 4 + 3 (6 - 1)$ أولا نجري العملية الحسابية داخل القوس $a_6 = 4 + 3 (5)$ ثم نجري عملية الضرب $a_6 = 4 + 15$ وأخيرا الجمع يكون ناتج الحد السادس هو $a_6 = 19$

سؤال / الحد الخامس لمتتالية حسابية حدها الأول 5 وأساسها 2 يساوي :

أ) $a_5 = 10$ ب) $a_5 = 27$

ج) $a_5 = 13$ د) $a_5 = 15$

الحل : أولا نكتب معطيات السؤال $a_1 = 5$ ، $d = 2$ ثانيا نكتب القانون العام $an = a_1 + d (n - 1)$ ثالثا نعوض معطيات السؤال بالقانون فنقول $an = 5 + 2 (n - 1)$ ونحن نريد الحد الخامس نعوض تعويض مباشر $a_5 = 5 + 2 (5 - 1)$

نجري العملية الحسابية داخل القوس $a_5 = 5 + 2 (4)$ نجري عملية الضرب $a_5 = 5 + 8$ وأخيرا الجمع يكون الناتج $a_5=13$ إذن الجواب الصحيح هو ج

ثانيا / المتتالية الهندسية

عرفنا كيف نعرف هل المتتالية حسابية أو لا وهو عن طريق الطرح ، كيف أعرف هل المتتالية هندسية أو لا بنفس الطريقة ولكن بدل الطرح قسمة وقلنا في المتتالية الحسابية أن الناتج يعتبر أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d كذا الناتج في المتتالية الهندسية يعتبر أساسها ويرمز له بالرمز r

مثال / 1 , 2 , 4 , 8 , 16 ...... هل هذه المتتالية هندسية أم لا ؟

قلنا نقسم الحد الأخير على الذي قبله وهكذا حتى نهاية الحدود ولا بد أن تكون جميعها نفس الناتج فنقول

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{16}{8} = 2$$

إذن هذه المتتالية هندسية لأنها تحمل نفس الناتج

مثال / 1 , 3 , 6 , 18 , 54 ...... هل هذه المتتالية هندسية ؟

نحلل بنفس الطريقة فنقول

$\frac{6}{3} = 2$ $\frac{18}{6} = 3$ $\frac{54}{18} = 3$ هنا اختلف ناتج من النواتج إذن ليست هندسية

سؤال / متتالية من المتتاليات التالية تعتبر هندسية :

أ) 0 , 1 , 2 , 4 , 8 ....

ب) 3 , 6 , 9 , 18 ....

ج) 5 , -5 , 5 , -5 .....

د) 2 , 2 , 6 , 18 ......

الحل : أولا نحلل المتتاليات عن طريق القسمة

أ) 0 , 1 , 2 , 4 , 8 ....

لا يقبل القسمة $\frac{1}{0} =$ $\frac{2}{1} = 2$ $\frac{4}{2} = 2$ $\frac{8}{4} = 2$ إذن ليست هندسية

ب) .... 3 , 6 , 9 , 18

$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ $\quad 2 = \frac{18}{9}$ اختلف الناتج إذن ليست هندسية

ج) ..... 5 , -5 , 5 , -5

$\frac{5}{-5} = -1$ $\quad \frac{-5}{5} = -1$ $\quad \frac{5}{-5} = -1$ $\quad \frac{-5}{5} = -1$ متتالية هندسية وأساسها $r = -1$ ولكن نكمل بالتحليل للتحقق أنه لا توجد متتالية هندسية غيرها

د) ...... 2 , 2 , 6 , 18

$\frac{2}{2} = 1$ $\quad \frac{6}{2} = 3$ $\quad \frac{18}{6} = 3$ إذن ليست هندسية

الجواب الصحيح هو ج

الحد العام للمتتالية الهندسية ص ١٧٦

أو الحد النوني له قانون وهو $a_n = a_1 r^{n-1}$ وهذا القانون أيضا حفظ

A_n هو الحد العام لأي رقم أو الحد النوني a_1 هو الحد الأول r هو أساس المتتالية الهندسية n الموجودة في الأس هي رقم الحد

مثال ١٢ ص ١٧٧

لدينا متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها 2 أوجد الحدود الخمس الأولى لهذه المتتالية

الحل / من معطيات السؤال الأساس وهو $r = 2$ والحد الأول وهو $a_1 = 3$

نبدأ بالحد الأول $a_1 = 3$ $n = 1$ قلنا هو من معطيات السؤال

الحد الثاني أولا نكتب القانون العام $a_n = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $a_n = 3 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد الثاني أي $n = 2$ نعوض بدل كل n بالرقم 2 بالقانون فنقول $a_2 = 3 . (2)^{2-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a_2 = 3 . (2)$ [طبعا الأس 1 لكن لا يكتب إذن يظل الرقم داخل القوس كما هو] ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a_2 = 6$

الحد الثالث أولا نكتب القانون العام $a_n = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $a_n = 3 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد الثالث أي $n = 3$ نعوض بدل كل n بالرقم 3 بالقانون فنقول $a_3 = 3 . (2)^{3-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a_3 = 3 . (2)^2$ نرفع العدد 2 للأس 2 فتصبح $a_3 = 3 . (4)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a_3 = 12$

الحد الرابع أولا نكتب القانون العام $a_n = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $a_n = 3 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد الرابع أي $n = 4$ نعوض بدل كل n بالرقم 4 بالقانون فنقول $a_4 = 3 . (2)^{4-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a_4 = 3 . (2)^3$ نرفع العدد 2 للأس 3 فتصبح $a_4 = 3 . (8)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a_4 = 24$

الحد الخامس أولا نكتب القانون العام $a_n = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $a_n = 3 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد الخامس أي $n = 5$ نعوض بدل كل n بالرقم 5 بالقانون فنقول $a5 = 3 . (2)^{5-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a5 = 3 . (2)^4$ نرفع العدد 2 للأس 4 فتصبح $a5 = 3 . (16)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a5 = 48$

أوجد الحد الثامن لنفس المعادلة

الحد الثامن أولا نكتب القانون العام $an = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $an = 3 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد الثامن أي $n = 8$ نعوض بدل كل n بالرقم 8 بالقانون فنقول $a8 = 3 . (2)^{8-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a8 = 3 . (2)^7$ نرفع العدد 2 للأس 7 فتصبح $a8 = 3 . (128)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a8 = 384$

سؤال / الحد السادس لمتتالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 2 هو :

أ) $a_6 = 10$ ب) $a_6 = 60$

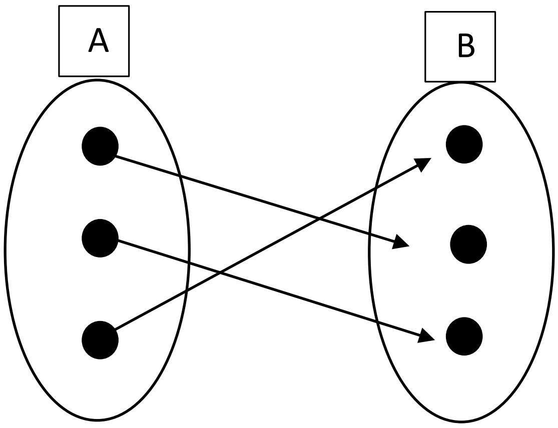
ج) $a_6 = 360$ د) $a_6 = 160$

الحل / الحد السادس أولا نكتب القانون العام $an = a_1 r^{n-1}$ ونعوض معطيات السؤال بالقانون فيصبح $an = 5 . (2)^{n-1}$

ونحن نريد الحد السادس أي $n = 6$ نعوض بدل كل n بالرقم 6 بالقانون فنقول $a6 = 5 . (2)^{6-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a6 = 5 . (2)^5$ نرفع العدد 2 للأس 5 فتصبح $a6 = 5 . (32)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a6 = 160$ إذن الجواب الصحيح هو د

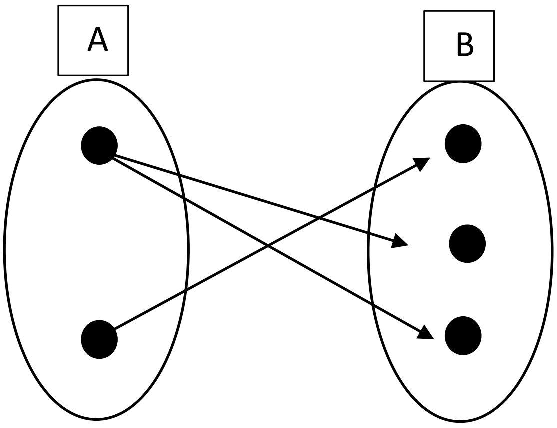
الدوال ص١٨٨

أشكال الدوال ص ١٨٩



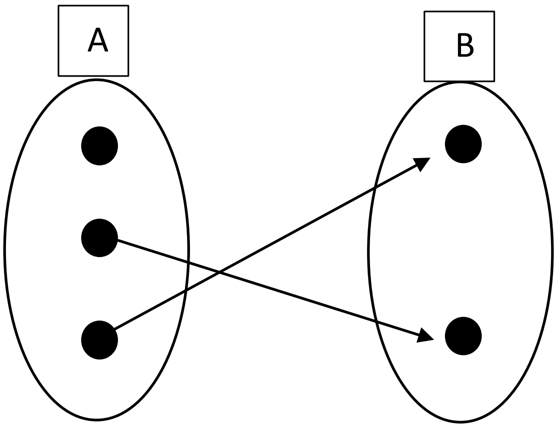
نلاحظ مجموعتين الأولى A تسمى المجال والثانية B تسمى المجال المقابل ليكون الشكل عبارة عن دالة لا بد أن يخرج سهم واحد فقط من كل عنصر في المجال حتى لو ارتبط عنصرين في المجال المقابل لا يهم ما يهمني هو المجال فقط

مثال / هل يعتبر الشكال التالي دالة ؟



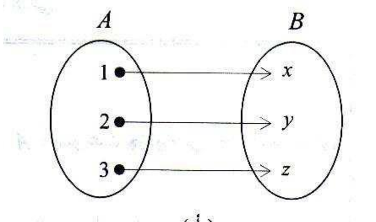
الجواب / لا يعتبر دالة لأن عنصر من عناصر المجال خرج منه سهمان والمفترض أن يخرج سهم واحد من كل عنصر

مثال / هل يعتبر الشكال التالي دالة ؟



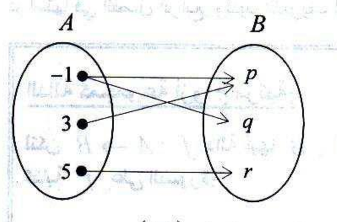
الجواب / لا يعتبر دالة لأن عنصرا من المجال لم يخرج منه أي سهم لم يرتبط بأي عنصر إذن ليس دالة

ص ١٨٩ من الأشكال التالية يعتبر دالة



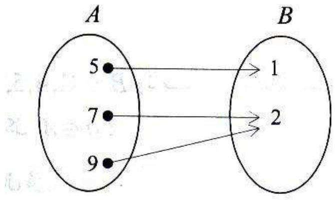
(أ)

= دالة حيث كل عنصر في المجال خرج منه سهم واحد فقط



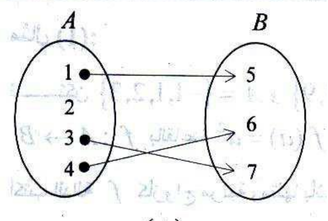
(ب)

= غير لأن العنصر الأول خرج منه سهمان



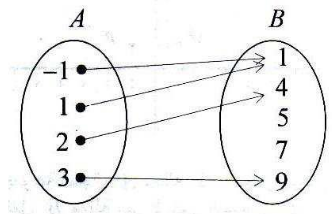
(جـ)

= دالة حيث كل عنصر في المجال خرج منه سهم واحد فقط



(د)

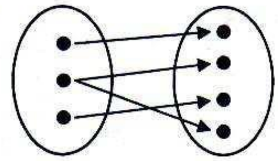
= غير دالة حيث هناك العنصر 2 لم يخرج منه سهم



= دالة حيث كل عنصر في المجال خرج منه سهم واحد لا يهمني المجال المقابل

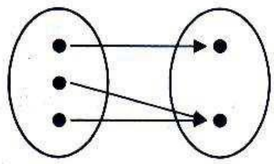
تمرين ١ ص ٢٠١ أي من الأشكال التالية يمثل دالة

a)



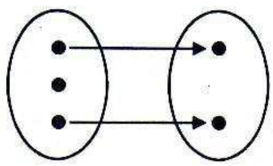
= غير دالة يوجد عنصر في المجال خرج منه سهمين

b)



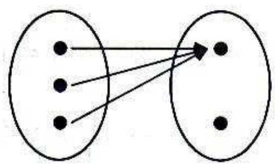
= دالة حيث كل عنصر في المجال خرج منه عنصر واحد فقط

c)



= غير دالة يوجد عنصر في المجال لم يخرج منه سهم أي لم يرتبط بعنصر آخر

d)



= دالة حيث كل عنصر في المجال خرج منه عنصر واحد فقط

مثال 3 ص ١٩٢

إذا كانت $f(x) = 3x$ أوجد الصورة $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$

الحل / نعوض الرقم المتغير داخل الدالة مكان x في الدالة [ملاحظ ليس شرط أن تكون الدالة بهذه الصورة بل حسب ما يرد في السؤال]

أولا : $f(1) = 3 \times 1 = 3$ [عوضنا 1 مكان x]

ثانيا : $f(2) = 3 \times 2 = 6$ [عوضنا 2 مكان x]

ثالثا : $f(4) = 3 \times 4 = 12$ [عوضنا 4 مكان x]

مثال / إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 5x$ أوجد $f(2)$

الحل / أولا : أعيد كتابة الدالة $f(x) = 3x^2 + 5x$

ثانيا : أعوض كل x في الدالة بالرقم 2 في السؤال لأنه المطلوب $f(2) = 3(2)^2 + 5 \times 2$

ثالثا : أجري عملية الرفع للأس $f(2) = 3 \times 4 + 5 \times 2$

رابعا : أجري عمليات الضرب [أخرج نواتج الضرب أولا قبل الجمع] $f(2) = 12 + 10$

خامسا : أجري عملية الجمع وأوجد الناتج الأخير $f(2) = 22$

مثال / إذا كانت $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ فإن قيمة $f(2)$ تساوي :

أ) 7 ب) 6

ج) 15 د) -3

الحل / أولا : أعيد كتابة الدالة $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

ثانيا : أعوض كل x في الدالة بالرقم 2 لأنه هو المطلوب في السؤال $f(2) = 4(2)^2 - 3 \times 2 + 5$

ثالثا : أجري عملية الرفع للأس $f(2) = 4 \times 4 - 3 \times 2 + 5$

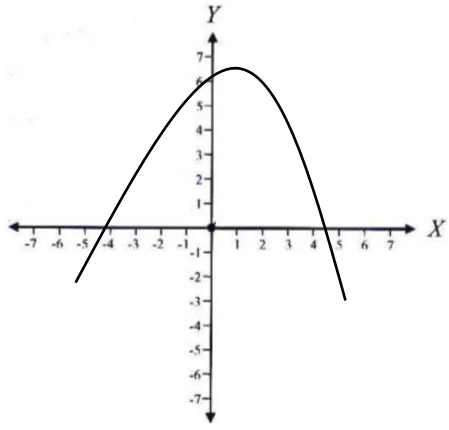
رابعا : أجري عمليات الضرب أولا $f(2) = 16 - 6 + 5$

خامسا : أجري عمليات الجمع والطرح يكون الناتج الأخير $f(2) = 15$ إذن الجواب الصحيح هو ج

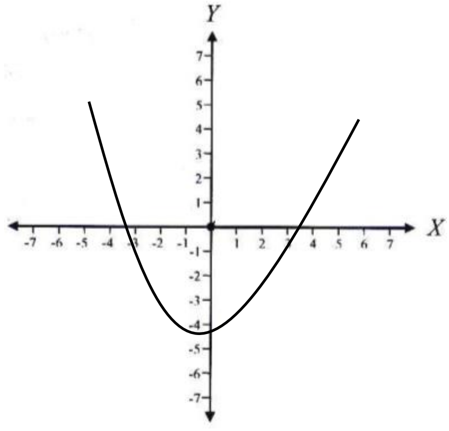
الدالة التربيعية :

الصيغة العامة للدالة التربيعية هي $f(x) = ax^2 + bx + c$ وسميت تربيعية لأن أعلى قوة لها هي 2 [أكبر أس هو 2]

وعند تمثيل الدالة التربيعية على المستوى الديكارتي يسمى هذا التمثيل القطع المكافئ وهو إما يكون مفتوحا لأعلى أو لأسفل كما في الشكل التالي



مفتوح لأسفل

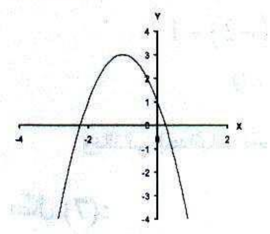


مفتوح لأعلى

متى يكون القطع المكافئ مفتوح لأعلى ومتى يكون مفتوح لأسفل ؟

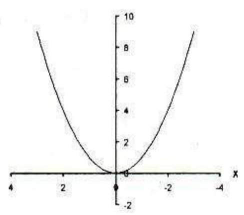
إذا كان معامل x^2 [العدد بجانب x^2] موجبا فهو مفتوح لأعلى أما إذا كان سالبا فهو مفتوح لأسفل [ملاحظة : ليس شرطا أن تكون x^2 في مقدمة الدالة قد تكون آخر الدالة لا يهم موقعها المهم معامل x^2 أيا كان مكانها]

مثال ص ١٩٣



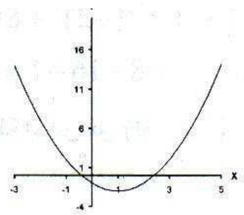
$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

القطع المكافئ مفتوح لأسفل لأن معامل x^2 هو -2 إذن عدد سالب فيتجه لأسفل



$f(x) = x^2$

القطع المكافئ مفتوح لأعلى لأن معامل x^2 هو 1 طبعا لا يكتب إذا كان العدد 1 ولم تسبقه علامة سالب إذن المعامل موجب



$f(x) = x^2 - 2x - 1$

القطع المكافئ مفتوح لأعلى لأن معامل x^2 هو 1 طبعا لا يكتب إذا كان العدد 1 ولم تسبقه علامة سالب إذن المعامل موجب

سؤال / القطع المكافئ للدالة التربيعية $f(x) = 5x - 2x^2 + 1$ مفتوحا إلى :

أ) لأعلى .   ب) لأسفل .

ج) لليمين .   د) لليسار .

الجواب الصحيح هو ب) لأسفل لأن معامل x^2 هو -2 العدد سالب إذن متجه لأسفل .

رأس القطع [غير مطلوب]

مثال ٦ ص ١٩٧ مطلوب الفرع الأول فقط

إذا كانت $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$ أوجد معامل x^2 ومعامل x والحد المطلق

الحل / معامل x^2 هو العدد بجانب x^2 وهو 2

معامل x هو العدد بجانب x وهو 8

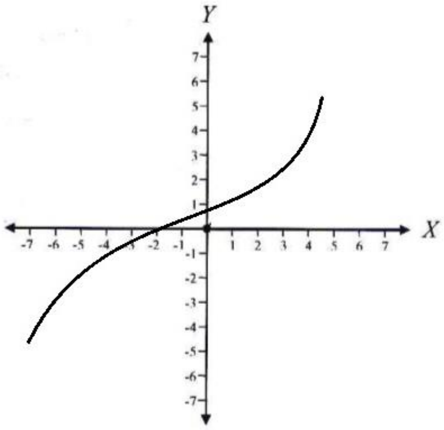
الحد المطلق وهو العدد الذي لا يكون بجانبه مجهول وهو -1

مثال ٧ ص ١٩٨ [غير مطلوب]

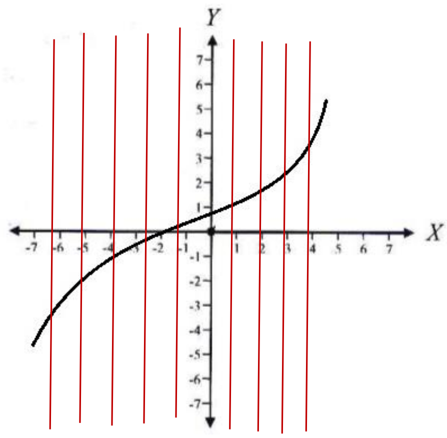
معيار تمثيل منحنى الدالة ص ١٩٩

تعطى رسمة ممثلة على المستوى الديكارتي ويطلب تقييمها هل تعتبر دالة أم غير دالة

هل هذا الشكل يعتبر دالة أم غير دالة ؟

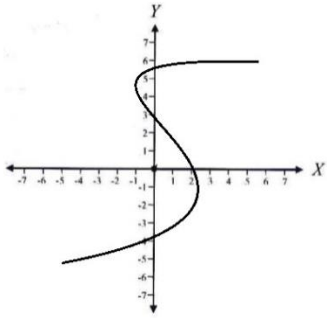


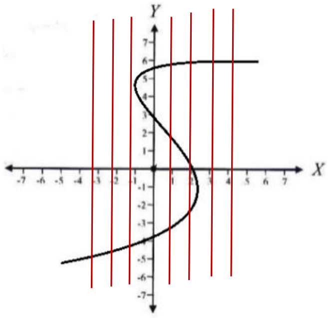
لأحكم على شكل ما هل يعتبر دالة أم لا يعتبر دالة نقيم أعمدة عامودية تمر بالدالة



نلاحظ أن كل عامود من الأعمدة العامودية قطع خط الدالة بنقطة واحدة فقط لم يمر نفس العامود بنقطتين إذن هذا الشكل يعتبر دالة

سؤال / هل الشكل التالي يعتبر دالة ؟

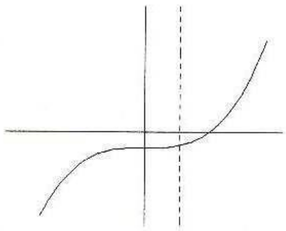




الحل / نقيم أعمدة عامودية تمر بالشكل

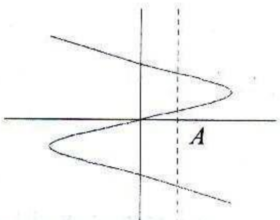
نلاحظ أن هناك أعمدة قطعت المنحنى في أكثر من نقطة إذن ليست دالة

مثال / ص ٢٠٠ هل الأشكال التالية تعتبر دالة أم غير دالة



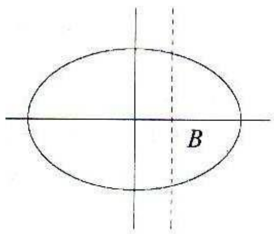
(أ)

هذا الشكل يعتبر دالة لأن الأعمدة لا تقطع المنحنى بأكثر من نقطة



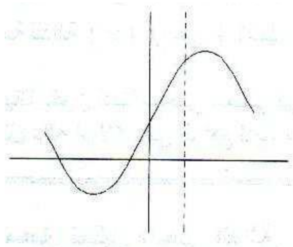
(ب)

هذا الشكل لا يعتبر دالة لأن الأعمدة تقطع المنحنى بأكثر من نقطة



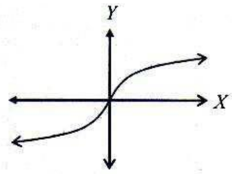
(جـ)

هذا الشكل لا يعتبر دالة لأن الأعمدة تقطع المنحنى بأكثر من نقطة

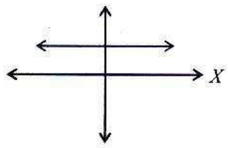


(د) هذا الشكل يعتبر دالة لأن الأعمدة تقطع المنحنى بأكثر من نقطة

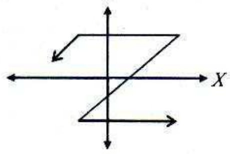
سؤال ٤ ص ٢٠٣ أي من الأشكال التالية يعتبر دالة وأيها لا يعتبر دالة



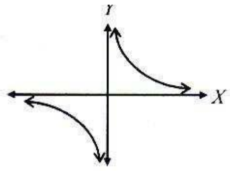
a) دالة



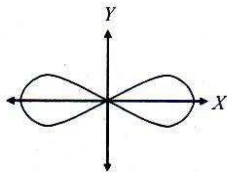
b) دالة



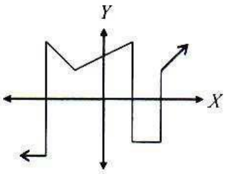
c) غير دالة



d) دالة



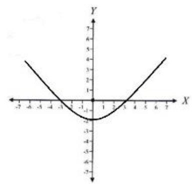
e) غير دالة

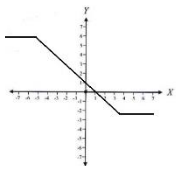


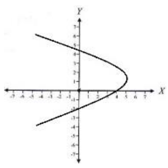
f) غير دالة

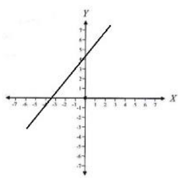
[ملاحظة : أي شكل يحتوي خط مستقيم عامودي تلقائيا يكون غير دالة مثل الشكل f]

سؤال / منحنى من المنحنيات التالية لا يمثل دالة :

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

الحل / الخيار ج [لأن رأس السؤال يطلب الشكل الذي لا يمثل دالة وباقي الخيارات الأخرى دوال]

التفاضل

وهي تعني نهاية الدالة قلنا رمز الدالة هو fx أما رمز نهاية الدالة هو lim (x)

النهايات يمكن تعويض x بالدالة بشكر مباشر قد تعطي قيمة تكون رقم أو كسر فحينما يكون ناتج النهاية كسر فلا بد أن نستخدم طريقة أخرى للحل مع الأمثلة يتبين لنا هذا الكلام

الصيغة العامة للنهاية $(x)\ \lim\limits_{x\to a}$ حيث يكون مكان x دالة ومكان حرف a رقم فنعوض الرقم بحرف x في الدالة

مثال / أوجد قيمة $(\frac{2x+4}{x+1})\ \lim\limits_{x\to 1}$

نعوض رقم 1 عن كل x داخل الدالة فنقول $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\times 1+4}{1+1}$ نجري أولا عملية الضرب في البسط $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2+4}{1+1}$ ثم نجري عمليات الجمع في البسط والمقام $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6}{2}$ الناتج هو 3

هذا مثال على أن ناتج النهاية يكون رقم

مثال / أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{x^2-4}{x-2})$

نعوض رقم 2 بجانب كل x داخل الدالة فنقول $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{2^2-4}{2-2})$ ثم نجري عملية رفع الأس في البسط $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-4}{2-2}$ ثم نجري عملية الطرح يكون الناتج $\frac{0}{0}$ وهذه النتيجة لا تعتبر قيمة فنقول في هذه الحالة نهاية غير معرفة ، كيف أوجد حل النهاية الغير معرفة ؟

عن طريق ثلاث خطوات أولا التحليل ثم الحذف ثم التعويض نطبق هذه الطريقة على النهاية السابقة $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{x^2-4}{x-2})$

أولا : التحليل قبل أن نعوض x في النهاية نحلل البسط أخذنا في درس سابق تحليل العبارة الجبرية فرق مربعين وقلنا أن العبارة الجبرية $x^2 - 4$ عند تحليلها نقول بفتح قوسين ونوزع المجهول x تصبح (x) (x) ثم نوزع العلامات مرة سالب ومرة موجب فتصبح (+ x) (- x) ثم نخرج جذر العدد في العبارة وهو 4 فجذرها 2 نوزعها على الأقواس تصبح (X + 2) (X – 2) فيكون شكل النهاية بعد التحليل بهذه الصورة $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

ثانيا : الحذف نحذف المتشابه بين البسط والمقام والمتشابه لدينا هنا هو x – 2 نحذها من البسط والمقام فتصبح النهاية بهذه الصورة $\lim\limits_{x\to 2} x+2$

ثالثا : التعويض نعوض تعويض عادي نضع الرقم 2 بدل x ونخرج الناتج فيكون جواب هذه النهاية هو $\lim\limits_{x\to 2} 2+2=4$

مثال / أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 7} (\frac{x^2-49}{x-7})$

الحل / نعوض الرقم 7 بجانب السهم عن كل x داخل الدالة $\lim\limits_{x\to 7} (\frac{7^2-49}{7-7})$ أولا نرفع 7 للأس 2 $\lim\limits_{x\to 7} \frac{49-49}{7-7}$ ثم نجري عملية الطرح يكون الناتج $\frac{0}{0}$ إذن نهاية غير معرفة نستخدم الثلاث خطوات للحل

$$\lim_{x\to 7} (\frac{x^2-49}{x-7})$$

أولا : التحليل نحلل العبارة الجبرية في البسط وبعد التحليل تصبح على الشكل $\lim\limits_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+7)}{x-7}$

ثانيا : الحذف نحذف المتشابه بين البسط والمقام وبعد الحذف تكون على الصورة $\lim\limits_{x\to 7} x+7$

ثالثا : التعويض نعوض الرقم 7 بجانب السهم بدلا من x في الدالة ونوجد النتاج تصبح على الصورة $\lim\limits_{x\to 7} 7+7=14$

سؤال / قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 6} (\frac{x^2-36}{x-6})$ هي :

أ) 0 ب) 6

ج) 12 د) غير معرفة

الحل / نعوض الرقم 6 بجانب السهم عن كل x داخل الدالة $\lim\limits_{x\to 6} (\frac{6^2-36}{6-6})$ أولا نرفع 6 للأس 2 $\lim\limits_{x\to 6} \frac{36-36}{6-6}$ ثم نجري عملية الطرح يكون الناتج $\frac{0}{0}$ إذن نهاية غير معرفة نستخدم الثلاث خطوات للحل

$\lim_{x\to 6} \left(\frac{x^2-36}{x-6}\right)$

أولا : التحليل نحلل العبارة الجبرية في البسط وبعد التحليل تصبح على الشكل $\lim_{x\to 6} \frac{(x-6)(x+6)}{x-6}$

ثانيا : الحذف نحذف المتشابه بين البسط والمقام وبعد الحذف تكون على الصورة $\lim_{x\to 6} x+6$

ثالثا : التعويض نعوض الرقم 6 بجانب السهم بدلا من x في الدالة ونوجد الناتج تصبح على الصورة

$\lim_{x\to 6} 6+6=12$ إذن الجواب الصحيح هو ج

مثال ١ ص ٢٠٨ [غير مطلوب]

خصائص النهايات ص٢٠٩ [غير مطلوب]

مثال ٢ ص ٢١٠ [غير مطلوب]

مثال ٣ ص ٢١٠ [تعويض مباشر بالقانون بنفس طريقة الأمثلة السابقة]

مثال ٤ ص٢١٢ [غير مطلوب]

اتصال الدالة من ص ٢١٣ حتى ص ٢٢٧ [غير مطلوب]

قوانين الاشتقاق

مشتقة عدد ثابت : إذا كانت f (x) = k و k تمثل عدد ثابت تكون المشتقة الأولى لها صفر f' (x) = 0 وجود الشرطة بعد تعني أنها المشتقة الأولى لو كانت شرطتين إذن المشتقة الثانية و هكذا

مثال : أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية :

F (x) = 5   f (x) = 2 $f(x)=\frac{1}{3}$ $f(x)=\sqrt{6}$

الحل : المشتقة الأولى لعدد صحيح ثابت هو 0 [عدد ثابت يعني لا يوجد معه حرف x أي لا يوجد معه مجهول]

f (x) = 2 → f' (x) = 0   F (x) = 5 → f' (x) = 0

$f(x)=\sqrt{6}$ → f' (x) = 0 $F(x)=\frac{1}{3}$ → f' (x) = 0

مثال ١٠ ص ٢٢٧

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

f (x) = 0   f (x) = -6   F (x) = 12

الحل : f (x) = 0 → f' (x) = 0   f (x) = -6 → f' (x) = 0   f (x) = 12 → f' (x) = 0

هذه الأمثلة في حال أن العدد بعد الدالة يساوي عدد ثابت

مثال $f (x) = x^3$ كيف أوجد المشتقة الأولى في هذه الحالة ؟

أولا : أضع الرقم الموجود في الأس قبل المجهول x تكون كالتالي $f (x) = 3 x$

ثانيا : كان الأس 3 أطرح منه 1 يصبح 2 يكون هو الأس الجديد تكون كالتالي $f' (x) = 3x^2$

مثال / أوجد المشتقة الأولى $f (x) = x^5$

الحل / أولا أضع الرقم الموجود في الأس قبل المجهول x تكون كالتالي $f (x) = 5x$

ثانيا : كان الأس 5 أطرح منه 1 يصبح 4 يكون هو الأس الجديد تكون المشتقة كالتالي $f' (x) = 5x^4$

مثال / أوجد المشتقة الأولى للدالة $f (x) = x^7$

الحل : أولا : أضع الرقم الموجود في الأس قبل المجهول x تكون كالتالي $f (x) = 7x$

ثانيا : كان الأس 7 أطرح منه 1 يصبح 6 يكون هو الأس الجديد تكون المشتقة كالتالي $f' (x) = 7x^6$

مثال / أوجد المشتقة الأولى للدالة $f (x) = x^9$

الحل : أولا : أضع الرقم الموجود في الأس قبل المجهول x تكون كالتالي $f (x) = 9x$

ثانيا : كان الأس 9 أطرح منه 1 يصبح 8 يكون هو الأس الجديد تكون المشتقة كالتالي $f' (x) = 9x^8$

هذه قاعدة اشتقاق دالة القوة وفي هذه القاعدة حالتين مهمتين:

الحالة الأولى : إذا كانت $f (x) = x^2$ ما هي مشتقتها الأولى ؟ نقوم بنفس الخطوات نضع الرقم الموجود في الأس قبل المجهول x تصبح $f (x) = 2x$ كان الأس 2 نطرح منه 1 يصبح 1 هو الأس الجديد لكن العدد 1 لا يكتب إذا كان أس تكون المشتقة إذا كان الأس 2 هي $f' (x) = 2x$

الحالة الثانية : إذا كانت $f (x) = x$ بدون قوة هذا يعني أنها مرفوعة للأس 1 وإذا كان الرقم بجانب x هو 1 لا يكتب وحينما نطرح 1=0 – 1 سيكون الأس الجديد 0 والعدد المرفوع للقوة 0 يكون الناتج 1 إذن المشتقة الأولى لهذه الدالة هي $f (x) = x \rightarrow f' (x) = 1$

مثال ١١ ص ٢٢٨ مطلوب الفرع الأول والثاني فقط

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

$y = x^3$ $\qquad$ $Y = x$

الحل : $y = x^3 \rightarrow f' (x) = 3x^2$ $\qquad$ $y = x \rightarrow f' (x) = 1$

مثال / أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

$F(x) = x^4$ $F(x) = x^8$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x$

الحل / ننفذ الخطوات السابقة تكون المشتقات كالتالي :

$F(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$ $f(x) = x^8 \rightarrow f'(x) = 8x^7$

$F(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$ $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

اشتقاق الدالة المضروبة بعدد ثابت

إذا كانت الدالة مضروبة بعدد ثابت مثل $f(x) = 4x^3$ كيف أوجد المشتقة الأولى لها

أولا: أضرب الأس في العدد الثابت $12 = 4 \times 3$ نضع الناتج قبل المجهول تصبح $f(x) = 12x$

ثانيا : نطرح 1 من الأس السابق تصبح المشتقة الأولى هي $f'(x) = 12x^2$

مثال / أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

$F(x) = 2x^5$ $f(x) = 5x^4$ $f(x) =3x^2$ $f(x) = -5x^2$ $f(x) = 4x$

الحل /

$F(x) = 2x^5$ نضرب الأس بالعدد الثابت ثم نطرح 1 من الأس تصبح $f'(x) = 10x^4$

$f(x) = 5x^4$ نضرب الأس بالعدد الثابت ثم نطرح 1 من الأس تصبح $f'(x) = 20x^3$

$f(x) =3x^2$ نضرب الأس بالعدد الثابت ثم نطرح 1 من الأس تصبح $f'(x) = 6x$ الأس يصبح 1 إذن لا يكتب

$f(x) = -5x^2$ نضرب الأس بالعدد الثابت ثم نطرح 1 من الأس تصبح $f'(x) = -10x$ الأس يصبح 1 إذن لا يكتب

$f(x) = 4x$ كل مشتقة $x = 1$ إذن كل x قيمتها 1 فإذا ضربنا أي عدد بـx كأننا نضرب العدد ب 1 فأي عدد مضروب بـx مشتقته نفس العدد إذن $f'(x) = 4$

بوجه عام $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$

اشتقاق حاصل جمع أو طرح دالتين

مثال $f(x) = 3x^5 + 5x^2$ لهذه الدالة حدين بينهما جمع فكيف أشتق منها

نعامل كل حد على أنه دالة منفصلة ونشتقه بنفس الطريقة ففي الحد الأول نضرب الأس بالعدد الثابت ونطرح من الأس 1 نكرر الخطوة للحد الثاني تصبح المشتقة الأولى بالشكل النهائي

$F'(x) = 15x^4 + 10x$

مثال / $f (x) = 2x^3 – 4x^2 + 6x + 7$ هذه مشتقة من أربعة حدود

الحد الأول $2x^3$ حينما ننفذ خطوات الاشتقاق عليه يصبح $6x^2$

الحد الثاني $4x^2$ حينما ننفذ خطوات الاشتقاق عليه يصبح $8x$ لأن الأس يصبح 1 لا يكتب

الحد الثالث $6x$ قلنا أي عدد مضروب x يكون اشتقاقه نفس العدد إذن يصبح 6

الحد الرابع 7 قلنا في بداية الاشتقاق أن العدد الثابت اشتقاق 0

يكون الاشتقاق الأول للدالة هو $f' (x) = 6x^2 – 8x + 6$

الحد الأخير ناتجه 0 فلا يكتب في الاشتقاق

مثال / أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية $f (x) = 5x^2 + 7x – 3$

نشتق الحد الأول فيصبح $10x$ ثم الحد الثاني يصبح 7 ثم الحد الثالث 0 لا يكتب في دالة الاشتقاق إذن الجواب

$F' (x) = 10x + 7$

سؤال / إذا كانت $f(x) = 3x^3 + 6x^2 – 5x$ فإن المشتقة الأولى $f'(x)$ تساوي :

أ) $9x^3 + 12x^2 – 5$ ب) $9x^2 + 12x – 5$

ج) $9x^2 + 12x$ د) $9x^3 + 12x^2$

الحل / نشتق الحد الأول يصبح $9x^2$ ثم نشتق الحد الثاني يصبح $12x$ ثم نشتق الحد الثالث يصبح 5 إذن تكون المشتقة الأولى $f'(x) = 9x^2 + 12x – 5$ إذن الجواب الصحيح هو ب

سؤال / إذا كانت $f (x) = 7x^2 + x$ فإن المشتقة الأولى $f'(x)$ تساوي :

أ) $7x^2 + 1$ ب) $14x + x$

ج) $14x$ د) $14x + 1$

الحل / نشتق الحد الأول ويصبح $14x$ والحد الثاني x وقلنا كل x فإن مشتقها هو 1 إذن تكون المشتقة الأولى

$f'(x) = 14x + 1$ إذن الجواب الصحيح هو الخيار د

مثال ١٣ ص٢٣١ مطلوب الفرع الأول والثاني فقط

أوجد قيمة المشتقة الأولى للقيم التالية

$y = 3x^2 – 4x – 6$ $Y = x^3 + 5$

الحل / $Y = x^3 + 5$ نشتق الحد الأول يصبح $3x^2$ الحد الثاني يصبح 0 إذن لا يكتب تكون الإجابة $f'(x) = 3x^2$

$y = 3x^2 – 4x – 6$ نشتق الحد الأول فيصبح $6x$ نشتق الحد الثاني يصبح 4 الحد الثالث يصبح 0 إذن لا يكتب تكون الإجابة $f'(x) = 6x -4$

مثال / إذا كانت $f(x) = x^3 + 2x^2$ أوجد قيمة $f'(1)$

الحل / أولا أشتق الدالة تصبح بعد الاشتقاق $f'(x) = 3x^2 + 4x$ ونحن نريد قيمة $f'(1)$ إذن بعد الاشتقاق نعوض قيم x فنقول $f'(1) = 3\,(1)^2 + 4 \times 1$ ننفذ أولا عملية التربيع [نرفع للأس] ثم الضرب في الحد الأول والحد الثاني تصبح

$F'(1) = 3\times1 + 4\times1$ بعد الضرب تصبح $f'(1) = 3 + 4 = 7$

مثال / إذا كانت $f(x) = 2x^3 + 3x$ فإن $f'(1)$ تساوي :

أ) 5 ب) 9

ج) 15 د) 7

الحل / أولا نشتق المشتقة الأولى تصبح $f'(x) = 6x^2 + 3$ ونحن نريد قيمة $f'(1)$ إذن بعد الاشتقاق نعوض قيم x فنقول $f'(1) = 6\,(1)^2 + 3$ نرفع للأس ثم نضرب العدد في 6 تصبح $f'(1) = 6+3 = 9$ إذن الجواب الصحيح ب

مثال ١٤ ص٢٣١ أوجد قيمة المشتقة الأولى للدوال التالية عند القيم المشار إليها

$F(x) = x^3 – 5x^2 + x – 7$ إذا كانت $f'(-1)$

$F(x) = x^4 – 3x^2 +3$ إذا كانت $f'(2)$

الحل / $F(x) = x^3 – 5x^2 + x – 7$ إذا كانت $f'(-1)$

نشتق الدالة فنقول $f'(x) = 3x^2 – 10x + 1$ ثم نعوض القيمة المشار إليها $f'(-1) = 3\,(-1)^2 – 10(-1) + 1$ نجري العمليات الحسابية يكون الناتج 14 [ندخل العملية بالآلة الحاسبة لتسهيل استخراج النتيجة]

$F(x) = x^4 – 3x^2 +3$ إذا كانت $f'(2)$

نشتق الدالة فنقول $f(x) = 4x^3 – 6x$ ثم نعوض القيمة المشار إليها $f'(2) = 4\,(\,2\,)^3 – 6\,(2)$ نجري العملية الحسابية يكون الناتج 20

قلنا رمز المشتقة الأولى $f'(x)$ والمشتقة الثانية $f''(x)$

مثال / إذا كانت $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x$ أوجد المشتقة الثانية لهذه الدالة

الحل / أولا نوجد المشتقة الأولى $f'(x) = 9x^2 + 10x +6$

ثانيا نشتق المشتقة الأولى مرة أخرى بنفس القاعدة والقوانين تكون هي المشتقة الثانية $f''(x) = 18x + 10$

سؤال / إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 6x^2$ فإن المشتقة الثانية $f''(x)$ تساوي :

أ) $15x^2 + 12x$ ب) $15x^3 + 12x^2$

ج) $30x + 12$ د) 30

الحل : أولا نوجد المشتقة الأولى $f'(x) = 15x^2 + 12x$ ثانيا نوجد المشتقة الثانية بحيث نشتق المشتقة الأولى مرة أخرى بنفس قوانين الاشتقاق $f''(x) = 30x + 12$ إذن الجواب الصحيح هو ج

القيم الحرجة / مثال ٢٢ ص ٢٤٤ الفرع الأول مطلوب [الفرع الثاني x مرفوعة للقوة 3 وهذه الصيغة غير مطلوبة]

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x + 2$ أوجد القيم الحرجة للدالة $f(x)$

الحل / الخطوة الأولى نوجد المشتقة الأولى للدالة بنفس قوانين الاشتقاق تكون $f'(x) = 2x + 8$

الخطوة الثانية نساوي المشتقة الأولى بالصفر [تصبح معادلة] $2x + 8 = 0$

الخطوة الثالثة نحل المعادلة [ننقل المجاهيل جهة اليسار و المعاليم جهة اليمين] $2x = -8$ [الصفر بعد النقل طبعا يحذف تلقائي لا يكتب بالمعادلة وعند النقل تتغير إشارات القيم] بعد ذلك نقسم طرفي المعادلة على معامل x وهو 2 لنوجد قيمة x

بعد القسمة تصبح النتيجة $x = -4$ إذن القيمة الحرجة -4

مثال / إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ أوجد القيمة الحرجة

الحل : أولا نوجد المشتقة الأولى للدالة $f'(x) = 6x - 12$

ثانيا نساوي المشتقة بالصفر لتكون معادلة $6x - 12 = 0$

ثالثا نحلها كمعادلة ننقل المعاليم جهة اليمين $6x = 12$ ثم نقسم على معامل x هو هنا 6 تصبح $x = 2$ إذن القيمة الحرجة هنا $= 2$

سؤال / القيمة الحرجة للدالة $f(x) = 4x^2 + 8x - 7$ هي :

أ) { 2 }	ب) { 1 }
ج) { -2 }	د) { -1 }

الحل / أولا نوجد المشتقة الأولى للدالة $f'(x) = 8x + 8$

ثانيا نساوي المشتقة بالصفر $8x + 8 = 0$

ثالثا نحلها كمعادلة ننقل المعاليم بجهة اليمين [ننتبه للإشارات] $8x = -8$ ثم نقسم على معامل x تكون القيمة الحرجة في هذا السؤال -1 إذن الجواب الصحيح هو د

سؤال / القيم الحرجة للدالة $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$ هي :

أ) { 6 }	ب) { -6 }
ج) { 3 }	د) { -3 }

الحل / أولا نوجد المشتقة الأولى للدالة $f'(x) = 4x - 12$

ثانيا نساوي المشتقة بالصفر لتكون معادلة $4x - 12 = 0$

ثالثا نحلها كمعادلة وننقل المعاليم لجهة اليمين $4x = 12$ ثم نقسم على معامل x تكون القيمة الحرجة في هذا السؤال 3 إذن الجواب الصحيح هو ج

التكامل ص ٢٦٠

التكامل عكس التفاضل ففي الدالة إذا كاملتها تعطي دالة جديدة أما أذا اشتقيتها ترجع للدالة الأولى [بالأمثلة يتبين المعنى]

التكامل الغير محدود ص٢٦٢

يكون التكامل الغير محدود على الصورة $\int f(x)\,dx$ غير محدود لنه لا توجد قيم تحت التكامل

قوانين التكامل ص ١٦٣

١ / تكامل العدد الثابت

مثال / أوجد التكامل $\int 5\,dx$

هذا عدد ثابت [لا يوجد x] في المشتقات قلنا مشتقة العدد الثابت هي 0 أما في التكامل فمشتقة العدد الثابت هو نفس العدد مضروب في x مضاف له ثابت التكامل و هو c إذن جواب التكامل هو $\int 5\,dx = 5X + c$

[إذا أوجدنا المشتقة لجواب التكامل السابق *5x + c* تكون المشتقة هي *5* إذن هي الدالة الأولى داخل التكامل]

مثال أوجد تكامل ما يلي :

$\int 4\,dx$ - $\int 1\,dx$ - $\int -2\,dx$ - $\int \frac{4}{5}\,dx$ - $\int \sqrt{3}\,dx$ - $\int 1.5\,dx$

الحل / جميعها أعداد ثابتة [لا يوجد بجانبها *x* إذن جميعها جوابها العدد داخل التكامل مضروب في *x* مضاف له ثابت التكامل] تكون الإجابات كالتالي :

$\int 4\,dx \rightarrow 4x + c$ $\int 1\,dx \rightarrow x + c$ [العدد *1* مضروب في *x* إذن لا يكتب]

$\int -2\,dx \rightarrow -2x + c$ $\int \frac{4}{5}\,dx \rightarrow \frac{4}{5}x + c$

$\int \sqrt{3}\,dx \rightarrow \sqrt{3} + c$ $\int 1.5\,dx \rightarrow 1.5x + c$

مثال *3* ص ٢٦٤ أوجد قيم تكامل ما يلي :

$\int 2\,dx$ - $\int -1dx$ - $\int dx$

الحل / $2x + c$ $\leftarrow$ $\int 2\,dx$

$\int -1dx \rightarrow -x + c$ [العدد *1* لا يكتب إذا كان معامل لكن الإشارة تبقى]

$\int dx \rightarrow x + c$ [العدد داخل التكامل لم يكتب إذن العدد *1* فحينما نضرب *1* في *x* يكون الناتج *x*]

٢ / تكامل دالة القوة

مثال $\int x^3\,dx$

في التفاضل كنا نطرح قيمة من الأس في التكامل العكس نزيد على الأس قيمة تصبح x^4 ثم نقسم على الأس الجديد ونضيف ثابت التكامل تصبح قيمة التكامل $\int x^3\,dx \rightarrow \frac{x^4}{4} + c$

مثال / أوجد قيم تكامل ما يلي :

$\int x^8\ dx$ - $\int x^5\ dx$ - $\int x^4\ dx$ - $\int x\ dx$ - $\int x^2\ dx$

الحل / نضيف على الأس قيمة [يعني زائد *1* ثم نقسم على الأس الجديد ونضيف ثابت التكامل *c*]

$\int x^2\ dx \rightarrow \frac{x^3}{3} + c$ $\int x\ dx \rightarrow \frac{x^2}{2} + c$ [لا يوجد أس على *x* لأن أسها *1* ولا يكتب]

$\int x^4\ dx \rightarrow \frac{x^5}{5} + c$ $\int x^5\ dx \rightarrow \frac{x^6}{6} + c$ $\int x^8\ dx \rightarrow \frac{x^9}{9} + c$

مثال ٤ ص ٢٦٤ [غير مطلوب إذا كان الأس سالب أو كسر أو جذر فقط إذا كان الأس عدد موجب ثابت]

٣ / تكامل الدالة المضروبة بعدد ثابت

مثال / $\int 8x^3\ dx$

أولا : العدد قبل *x* ينزل كما هو و نضيف على الأس قيمة ثم نقسم على الأس الجديد $\int 8x^3\ dx \rightarrow \frac{8x^4}{4} + c$

نجري عملية القسمة بين معامل x والعدد في البسط فنقسم 8 على 4 يكون الناتج 2 يصبح الناتج $2x^4 + c$

مثال / أوجد تكامل $\int 12x^2\ dx$

الحل / أولا العدد قبلx ينزل كما هو و نضيف على الأس قيمة [يعني الأس زائد 1] ثم نقسم على الأس الجديد

$\int 12x^2\ dx \rightarrow \frac{12x^3}{3} + c$ ثم نجري القسمة فنقسم 12 على 3 يكون الناتج 4 يصبح الجواب بالشكل النهائي

على الصورة $\int 12x^2\ dx \rightarrow \frac{12x^3}{3} + c \rightarrow 4x^3 + c$

مثال / ما تكامل $\int 6x\ dx$ - $\int 15x^2\ dx$

الحل / $\int 6x\ dx$ أولا العدد قبلx ينزل كما هو و نضيف على الأس قيمة [يعني الأس زائد 1] ثم نقسم على الأس الجديد

$\int 6x\ dx \rightarrow \frac{6x^2}{2} + c$ [كان الأس 1 لذلك لم يكتب فعندما نزيد الأس قيمة يصبح 2] نقسم على المقام يكون ناتج

التكامل $\int 6x\ dx \rightarrow \frac{6x^2}{2} + c \rightarrow 3x^2 + c$

$\int 15x^2\ dx$ أولا العدد قبل x ينزل كما هو و نضيف على الأس قيمة ثم نقسم على الأس الجديد

$\int 15x^2\ dx \rightarrow \frac{15x^3}{3} + c$ نقسم على المقام 15 تقسيم 3 يكون الناتج 5 إذن ناتج التكامل بالشكل النهائي يكون

$$\int 15x^2\ dx \rightarrow \frac{15x^3}{3} + c \rightarrow 5x^3 + c$$

٤ / تكامل مجموع أو فرق دالتين :

في الاشتقاق كنا نشتق كل حد على حده كذلك في التكامل

مثال / $\int 6x + 5dx$

الحد الأول 6x عند تكامل هذا الحد [قلنا x بدون قوة تعني أنها أس 1] إذن نضيف على الأس قيمة ثم نقسم على المقام تصبح $\frac{6x^2}{2}$ نجري عملية القسمة يكون الناتج النهائي للحد الأول $3x^2$

الحد الثاني 5 dx قلنا تكامل العدد الثابت [لا يوجد x] هو نفس العدد مضروب في x إذن يكون تكامل الحد الثاني 5x

ثم نضيف ثابت التكامل يكون تكامل الدالة بالحدود كاملة هو $3x^2 + 5x + c$

[عند اشتقاق الناتج يكون 6x + 5 إذن كما في داخل التكامل ، اشتقاق جواب التكامل يعطي ما في داخل التكامل وجواب التكامل يعطي دالة جديدة]

سؤال / ناتج التكامل $\int 4x + 3dx$ يساوي :

أ) 4 ب) $4x^2 + 3x + c$

ج) $2x^2 + 3 + c$ د) $2x^2 + 3x + c$

الحل / أولا نجري التكامل كما في المثال السابق نعامل كل حد على حده فتكامل الحد الأول [يوجد x إذن يوجد أس وهو 1]

فنضيف على الأس قيمة ثم نقسم على الأس الجديد $\frac{4x^2}{2}$ ثم نقسم البسط على المقام يكون الحد الأول $2x^2$

الحد الثاني عدد ثابت وهو 3 إذن يكون تكامله نفس العدد مضروب في x إذن تكامله 3x فيكون جواب التكامل لهذا السؤال كاملا هو $2x^2 + 3x + c$ إذن الجواب الصحيح هو د

سؤال / ناتج التكامل $\int 3x^2 + 1dx$ يساوي :

أ) 6x ب) $3x^3 + x + c$

ج) $x^3 + x + c$ د) $x^3 + 1 + c$

الحل / أولا نجري التكامل كما في المثال السابق فتكامل الحد الأول $\frac{3x^3}{3}$ بعد القسمة يكون الناتج x^3 ثم تكامل الحد الثاني إذا ضربنا العدد 1 في x يكون الجواب 1x ولا تكتب الواحد فقط يكتفى بالمجهول x إذن يكون الحد الثاني x ثم نضيف ثابت التكامل يكون جواب التكامل بالصورة النهائية هو $x^3 + x + c$ إذن الجواب الصحيح هو ج

[للتأكد من الجواب نقوم بعمل اشتقاق للجواب إذا كان ناتج الاشتقاق هو العدد داخل التكامل إذن الحل صحيح]

سؤال / ناتج التكامل $\int 2x - 10dx$ يساوي :

أ) 2 ب) $2x^2 - 10 + c$

ج) $x^2 - 10x + c$ د) $x^2 - 10 + c$

الحل / نجري التكامل كما في الأمثلة السابقة فتكامل الحد الأول $\frac{2x^2}{2}$ بعد القسمة يكون الناتج x^2 تكامل الحد الثاني 10x إذن التكامل بصورته النهائية هي $x^2 - 10x + c$ إذن الجواب الصحيح هو الخيار ج

مثال ٦ ص ٢٦٧ مطلوب الفرع الأول فقط [لن يأتي سؤال الأس سالب أو كسر أو جذر فقط الأس الموجب الثابت]

أوجد تكامل $\int x^3 - 2x\, dx$

الحل / تكامل الحد الأول يكون $\frac{x^4}{4}$ كما في قانون تكامل دالة القوة أما تكامل الحد الثاني فهو $\frac{2x^2}{2}$ ثم نجري عملية القسمة يتبقى x^2 ثم نضيف ثابت التكامل يكون الجواب بالصورة النهائية $\frac{x^4}{4} - x^2 + c$

التكامل المحدود : رمز التكامل المحدود هو $\int_a^b f(x)dx$

مثال أوجد قيمة التكامل $\int_1^2 6x\, dx$

الحل / أولا نوجد التكامل [العدد داخل التكامل بنفس القوانين السابقة لكن لا نضيف ثابت التكامل c إضافته فقط في التكامل الغير محدود] تكامل 6x هو $\frac{6x^2}{2}$ بعد القسمة يكون التكامل هو $(3x^2)\Big|_1^2 =$ [نضع حدود التكامل بنفس الطريقة الموضحة هنا]

ثانيا / نعوض حدود التكامل ب x في الدالة فنكتبها مرتين مره مع العدد 2 ومره مع العدد 1 وتكون بينهما عملية طرح فنقول $(3(2)^2) - (3(1)^2)$ نجري عملية الرفع للأسس فتكون $(3 \times 1) - (3 \times 4) =$ ثم نجري عملية الضرب داخل الأقواس تكون $12 - 3 = 9$ وهذه قيمة التكامل المحدود في هذا السؤال [التكامل المحدود تكون نتيجته دائما قيمة عددية سواء موجب أو سالب في التكامل الغير محدود كانت النتيجة دالة وليست رقم محدد كما في التكامل المحدود]

مثال / أوجد تكامل $\int_0^2 3x^2\, dx$

الحل / أولا نوجد التكامل فتكامل $3x^2$ هو $\frac{3x^3}{3}\Big|_0^2$ نجري عملية القسمة يكون التكامل $x^3\Big|_0^2$

ثانيا نعوض حدود التكامل ب x في الدالة فنكتبها مرتين مره مع العدد 2 ومره مع العدد 0 وتكون بينهما عملية طرح فنقول $(2^3) - (0^3)$ ثم نجري عملية الرفع للقوة تصبح $8 - 0 = 8$ إذن قيمة التكامل في هذا السؤال هي 8

مثال / أوجد تكامل $\int_1^2 10x + 1\, dx$

إذن الجواب هو 16

سؤال / قيمة $\int_1^2 8x dx$ تساوي :

أ) 12 ب) 6

ج) 15 د) 8

الجواب الصحيح هو أ

خواص حدود التكامل ص ٢٧٠

لنفترض أن لدينا تكامل وهو $\int_1^2 f(x)dx = 5$ إذا عكسنا حدود التكامل تنعكس إشارة الجواب $\int_2^1 f(x)dx = -5$

مثال / $\int_0^1 f(x)dx = -3$ إذا عكسنا حدود التكامل تنعكس إشارة الجواب $\int_1^0 f(x)dx = 3$

مثال / إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ أوجد $\int_2^0 3\, f(x)dx = ?$

الحل / معكوس الحدود تلقائيا كما أخذنا هو 5- نكتبها في الجواب ونخرج العدد قبل الدالة وهو 3 خارج التكامل

$3\int_2^0 f(x)dx = -5$ ثم نضرب الناتج في العدد خارج الدالة 15- = 5- × 3 إذن $\int_2^0 3\, f(x)dx = -15$

مثال / إذا كان لدينا $\int_0^2 f(x)dx = 4$ أوجد كلا من : $\int_2^0 2f(x)dx =?$ - $\int_2^0 5f(x)dx =?$

الحل / أولا : $\int_2^0 2f(x)dx =?$ أولا نوجد معكوس الحدود وهو 4- نكتبها في الجواب ونخرج العدد خارج الدالة

$2\int_2^0 f(x)dx = -4$ ثم نضرب الناتج بالعدد خارج الدالة *8- = 2 × 4-* يصبح الجواب $\int_2^0 2f(x)dx = -8$

ثانيا : $\int_2^0 5f(x)dx =?$ أولا نوجد معكوس الحدود وهو *4-* [كيف أوجدنا معكوس الحد ؟ في رأس السؤال أعطانا تكامل جوابه *4* فإذا عكسنا الحدود يكون الجواب *4-*] ثم نكتب المعكوس ونخرج العدد خارج الدالة

$5\int_2^0 f(x)dx = -4$ ثم نضرب الجواب بالعدد خارج الدالة *20- = 5×4-* يصبح الجواب $\int_2^0 5f(x)dx = -20$

سؤال / إذا كانت قيمة $\int_1^2 f(x)dx = 10$ فإن قيمة $\int_2^1 f(x)dx$ تساوي :

أ) *0* ب) *5*

ج) *10* د) *10-*

الجواب الصحيح هو د *10-* لأنه لم يوجد عدد قبل *f(X)* إذن الحل فقط عكس إشارة الجواب وهو *10-*