الاسم:	نموذج تدريبي 2
الرقم:	
المدة: ثلاث ساعات	
الدرجة: ستمئة	

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022

الرياضيات: (الفرع العلمي – الدورة الأولى)

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمّل جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$. **المطلوب :**

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1 \Vert$	$\nearrow$	2

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اكتب معادلة كل مقارب أفقي .
2) دل على القيم الحديّة للتابع مبيّناً نوعها .
3) أوجد $f([0,\ln 2])$.
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

السؤال الثاني: احسب التكامل $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.

السؤال الثالث: عيّن قيمة n التي تحقّق المساواة $\binom{7}{n}=\binom{7}{n+1}$.

السؤال الرابع: ليكن كثير الحدود $p(z)=z^2-\sqrt{3}z+1$. **المطلوب :**

1) حل المعادلة $p(z)=0$.
2) لتكن النقطتان A و B الممثّلتان بالعددين العقديّين z_A و z_B حلَّي المعادلة $p(z)=0$ ، أثبت أنّ المثلّث OAB متساوي الأضلاع .

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+(\ln x)^2}$. **المطلوب :**

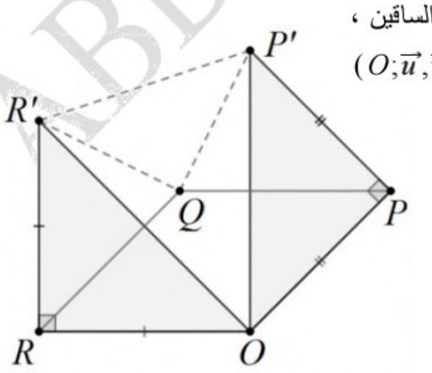
1) عيّن العددين الحقيقيّين a و b إذا علمت أنّ المستقيم T الذي معادلته $y=x$ يمس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x=1$.
2) ادرس الوضع النسبي للمماس T بالنسبة لـ C .

السؤال السادس: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(3,2,1)$, $B(0,2,7)$, $C(1,2,1)$ و **المطلوب :**

1) أوجد إحداثيّات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$.
2) صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقّق $\Vert\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\Vert=\Vert\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\Vert$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة لكل من التمرينين الأول و الثاني – 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول: $OPQR$ متوازي أضلاع . ننشئ على الضلع OP المثلث OPP' القائم في P و متساوي الساقين ، و ننشئ على الضلع OR المثلث ORR' القائم في R و متساوي الساقين . نتخذ المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن الأعداد $p\,,\,q\,,\,r\,,\,p'\,,\,r'$ الممثّلة للنقاط $P\,,\,Q\,,\,R\,,\,P'\,,\,R'$ بالترتيب . **المطلوب :**



1) أثبت أنّ $p'=(1+i)p$ و $r'=(1-i)r$.
2) اكتب العدد العقدي q بدلالة p و r .
3) احسب العدد $\dfrac{q-r'}{q-p'}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $QP'R'$.

يتبع في الصفحة الثانية

نموذج تدريبي 2

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة دورة عام 2022

الاسم:

الرقم:

الرياضيات: (الفرع العلمي – الدورة الأولى) **المدة: ثلاث ساعات**

الدرجة: ستمئة

الصفحة الثانية

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$ عند كل $n \geq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$ متزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

2) أثبت بالتدريج أنّ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ و ذلك أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

3) استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة ، و احسب نهايتها .

التمرين الثالث: يحتوي صندوق على خمس كرات ، منها ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 2 ، 1 ، 2 و كرتان بيضاوان تحملان الرقمين 1 ، 2 .
نسحب من الصندوق كرتين معاً ، و نتأمل الحدثين :

A : " سحب كرتين من لونين مختلفين " B :" سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

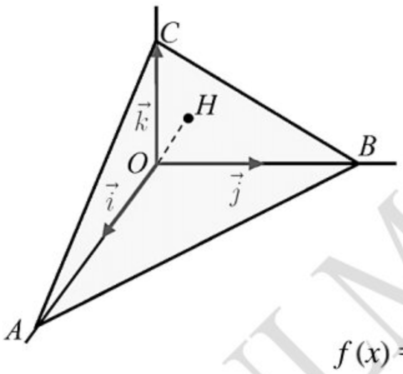
1) احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$.

2) إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

3) ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمَي الكرتين المسحوبتين . اكتب جدول القانون الاحتمالي لـ X و احسب توقعه الرياضي .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,0)$ ، $B(0,2,0)$ ، $C(0,0,1)$. **المطلوب:**



1) أثبت أنّ $x + y + 2z = 2$ معادلة للمستوي ABC .

2) استنتج تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC) .

3) أوجد إحداثيّات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) .

4) تحقّق من أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC .

5) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0,2[\cup]2,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{3\ln x}{4 - x^2}$
و ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x$. **المطلوب:**

1) ادرس تغيّرات التابع g و نظّم جدولاً بها .

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.

3) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

4) أثبت من أجل كل x من I أنّ $f'(x) = \frac{3xg(x)}{(4-x^2)^2}$ ، ثم نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

5) اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

6) في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C .

– – – – – **انتهت الأسئلة** – – – – –

إعداد: عبد الملك خير الله 0964621810

حل النموذج الشامل 2022-2

أولاً: السؤال الأول:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$y=0$ مقارب أفقي للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $-\infty$

$y=2$ مقارب أفقي للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$.

② $f(0)=1$ قيمة حدية كبرى

$f(\ln 2)=-1$ قيمة حدية صغرى.

③ $f([0,\ln 2])=[-1,1]$

④ حلان.

السؤال الثاني:

$$\int_0^1 x e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(e^{-1}-e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

السؤال الثالث: نوجد شرط الحل

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \leq 7 \\ n \leq 7 \end{array}\right\} \quad n \leq 6$$

إما $n = n+1$

مرفوض $0 = 1$

أو $n+(n+1) = 7$

$2n+1 = 7$

$2n = 6 \Rightarrow$ $\boxed{n=3}$ مقبول

السؤال الرابع:

$a=1 \quad b=-\sqrt{3} \quad c=1$

① $\Delta = b^2-4ac = 3-4=-1 < 0$

للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

② $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$$\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}\cdot\frac{2}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{3+1}$$

$$= \frac{3+2i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

أي أنه:

$$\left|\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0}\right| = 1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\arg\left(\frac{z_A-z_0}{z_B-z_0}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\vec{OB},\vec{OA}) = \frac{\pi}{3}$$

المثلث OAB متساوي الساقين فيه الزاوية $A\hat{O}B=60^\circ$

فهو متساوي الأضلاع.

السؤال الخامس:

① المستقيم T يمس الخط C في النقطة $(1,1)$

أي أنه $f(1)=1$

ومنه: $a+b=1 \longrightarrow (*)$

كما أنه $f'(1) = m_T = 1$

$$f'(x) = \frac{a(1+(\ln x)^2) - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x\,(ax+b)}{(1+(\ln x)^2)^2}$$

$f'(1) = a \Rightarrow \boxed{a=1}$

نعوض في $(*)$ فنجد $\boxed{b=0}$

أي أنه $f(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$

②
$$f(x)-y_T = \frac{x}{1+(\ln x)^2} - x$$

$$= x\left(\frac{1}{1+(\ln x)^2}-1\right) = x\cdot\frac{-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2} \leq 0$$

C تحت المماس T.

السؤال السادس :

① $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{(1)(3)+(2)(0)+(3)(1)}{6}$

$$x_G = \frac{6}{6} = 1$$

$$y_G = \frac{(1)(2)+(2)(2)+(3)(2)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$z_G = \frac{(1)(1)+(2)(7)+(3)(1)}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\boxed{G(1,2,3)}$$

② $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

$\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC} = 6\vec{MG}$

$\vec{MA}+2\vec{MB}-3\vec{MC} = \underbrace{\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}}-6\vec{MC}$

$$= 6\vec{MG}-6\vec{MC}$$

$$= 6(\vec{MG}+\vec{CM}) = 6\vec{CG}$$

تصبح العلاقة ،

$$6MG = 6CG$$

$$MG = CG$$

إذن Γ هي كرة مركزها G وتمر من النقطة C

(أو: مركزها G نصف قطرها $r=CG$)

ثانياً التمرين الأول:

① P' صورة O وفق دوران مركزه P زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$p'-p = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0-p)$$

$$p'-p = -i(-p)$$

$$p' = p+ip = (1+i)p$$

R' صورة O وفق دوران مركزه R زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$r'-r = e^{i\frac{\pi}{2}}(0-r)$$

$$r'-r = -ir$$

$$\Rightarrow r' = r-ir = (1-i)r$$

② نعلم أنه $\vec{OQ} = \vec{OP}+\vec{OR}$

$$(q-0) = (p-0)+(r-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{q = p+r}$$

③ $\frac{q-r'}{q-p'} = \frac{p+r-(1-i)r}{p+r-(1+i)p} = \frac{p+\cancel{r}-\cancel{r}+ir}{\cancel{p}+r-\cancel{p}-ip}$

$$= \frac{p+ir}{r-ip} = \frac{i(r-ip)}{(r-ip)} = i$$

$\left|\frac{q-r'}{q-p'}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \boxed{QR' = QP'}$ —(I)

$\arg\left(\frac{q-r'}{q-p'}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{QR' \perp QP'}$ —(II)

من (I) و (II) نستنتج أنه المثلث $QP'R'$ قائم و متساوي الساقين.

التمرين الثاني:

① $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \geq 0$

$f'(x)$ لاينعدم على أي مجال جزئي من $[1,+\infty[$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

② $E(n): \quad 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$E(0)$ محققة لأنه :

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$

③ بما أنه $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

فالمتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة.

ونهايتها ℓ هي حل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x \leftrightarrow \cancel{x}+\frac{1}{x}-1=\cancel{x}$

$\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

التمرين الثالث :

1)
$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(B)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

2)
$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

حيث
$$P(B\cap A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

$$P(B|A)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

3)
$$X(\Omega)=\{2,3,4\}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i P(X=x_i)$$

$$=(2)\left(\frac{1}{10}\right)+(3)\left(\frac{6}{10}\right)+(4)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{32}{10}=3.2$$

ثالثا: المسألة الأولى :

1)
$$\overrightarrow{AB}(-2,2,0)\quad,\quad\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$$

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي ABC

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -2a+2b=0$$

$$a=b \text{ ——— } *$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow -2a+c=0$$

$$c=2a \text{ ——— } **$$

نعوض $a=1$ فنجد $b=1$ و $c=2$

$$\vec{n}(1,1,2)$$

معادلة المستوي من الشكل

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$x-2+y+2z=0$$

$$\boxed{ABC:\ x+y+2z=2}$$

2) المستقيم Δ يقبل ناظم المستوي ABC كشعاع موجه له

$$\vec{v}(1,1,2)$$

$$\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\rightarrow\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases}$$

3) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي:

$$t+t+4t=2$$

$$6t=2\Rightarrow\boxed{t=\frac{1}{3}}$$

$$x_H=\frac{1}{3}\qquad y_H=\frac{1}{3}\qquad z_H=\frac{2}{3}$$

$$H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

4)
$$\overrightarrow{HA}\left(\frac{5}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)\quad,\quad\overrightarrow{HB}\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{5}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)\cdot(0,-2,1)$$

$$=0+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

إذاً (HA) ارتفاع في المثلث ABC .... (1)

$$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3}\right)\cdot(-2,0,1)$$

$$=\frac{2}{3}+0-\frac{2}{3}=0$$

إذاً (HB) ارتفاع في المثلث ABC .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

5)
$$V=\frac{1}{3}S_{OAB}\cdot h$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\quad,\ h=OC=1$$

$$\boxed{V=\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

حيث h في هذه الحالة هي بعد النقطة O عن المستوي ABC أي بأن $h = OH$

$$h = OH = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\frac{2}{\cancel{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} S_{ABC} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot S_{ABC} = 2$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{6}}$$

المسألة الثانية :

1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - x + 2x\ln x\right)$$

$$= (+\infty)(+\infty - 0 + 0) = +\infty$$

(حيث $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$)

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 - 1 + \infty = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{0-8x}{x^4} + \frac{2}{x} = \frac{-8}{x^3} + \frac{2}{x}_{(x^2)} = \frac{-8+2x^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -8 + 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

مرفوض $x_1 = -2$ $\qquad$ مقبول $x_2 = 2$

$$g(2) = 2\ln 2$$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

2) نلاحظ أنه $g(x) \geq 2\ln 2$ أياً كانت x من $\mathbb{R}_+^*$

أي بأن $g(x) > 0$.

3) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cdot\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{3\cdot(0)}{0-1} = 0$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

4) $$f'(x) = 3\cdot\frac{\frac{1}{x}(4-x^2) - (-2x)(\ln x)}{(4-x^2)^2}$$

$$= 3\cdot\frac{\frac{4}{x} - x + 2x\ln x}{(4-x^2)^2} = \frac{3x\left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2\ln x\right)}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x\, g(x)}{(4-x^2)^2} > 0$$

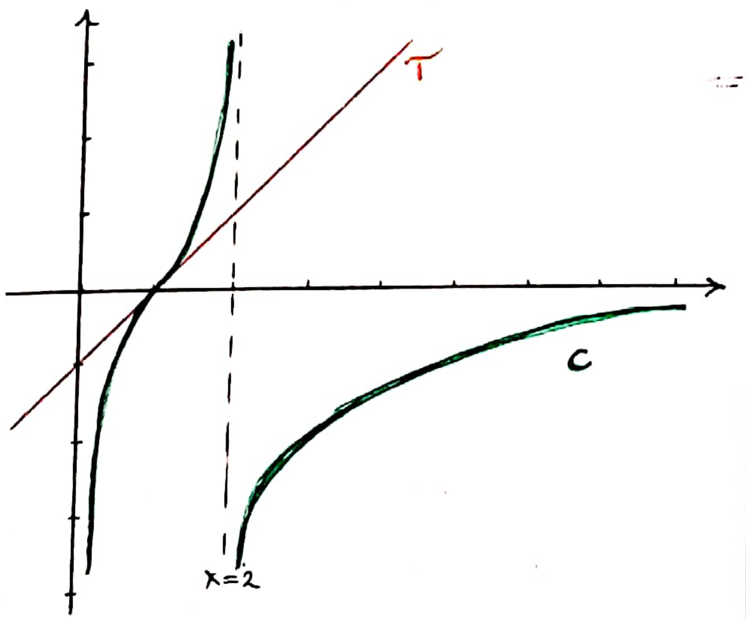
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

5) $T:\quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$

حيث $f(1) = 0$

$$f'(1) = \frac{3\, g(1)}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\boxed{T:\ y = x - 1}$$



— انتهى الحل —

إعداد : عبدالملك خيرالله