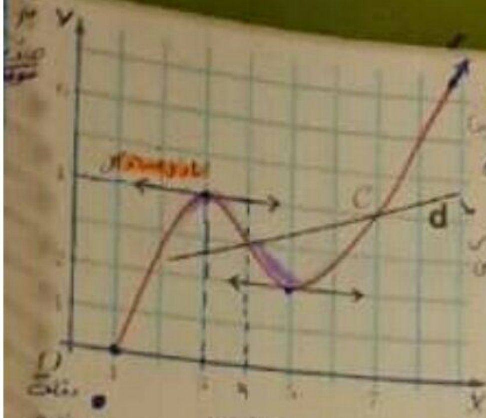

سلسلة التعليمية
Number one
الأكبر
في
سوريا
@Ba_ce2020

قراءة الخط البياني لتابع

تمرين

في الشكل المجاور نجد الخط البياني للتابع f والمطلوب:



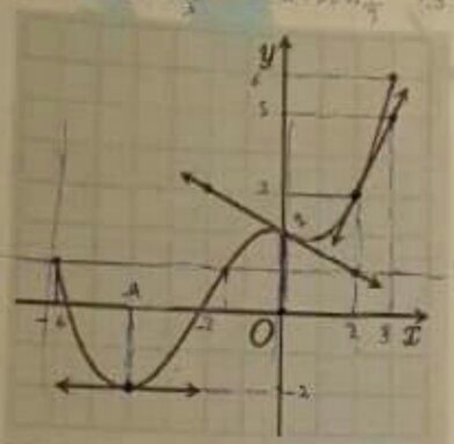
1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(1), f(3), f(5), f'(3), f'(5)$
4. أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها 3
5. أوجد معادلة المستقيم d
6. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$
7. أوجد $\lim_{x\to1^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل

1) $D_f = [1, +\infty[$
2) $[0, +\infty[$
3) $f(1) = 0$ ، $f(3) = 4$ ، $f(5) = 2$ و $f'(3) = 0$ و $f'(5) = 0$
4) $y = 4$ ،
5) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
6) $[3, 5]$
7) $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تمرين

ليكن الخط البياني للتابع f والمطلوب:



1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(0), f(-4), f(2)$
4. أوجد $f'(0), f'(-4), f'(2)$
5. اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة $(2,3)$
6. ما حلول المعادلة $f(x) = 1$
7. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \ge 3$
8. أوجد $f(]-2, 2[)$

الحل

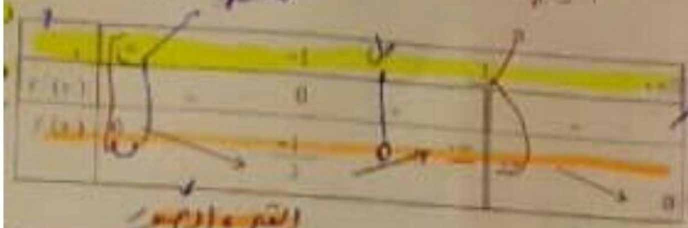
1. $D_f = [-6, 3]$
2. $[-2, 6]$
3. $f(2) = 3$ ، $f(-4) = -2$ ، $f(0) = 2$
4. $f'(2) = 2$ ، $f'(-4) = 0$ ، $f'(0) = -\frac{1}{2}$
5. من الطلب السابق: $m = f'(2) = 2$ ، $y = 2x - 1$
6. $x = -6$ و $x = -1.5$
7. $[2, 3]$
8. $]0, 3[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مكثفة الجزء الأول .. بكالوريا 2023 طريقك نحو الـ 600 مع أ. فارس جقل

مركز أمنايا التعليمي

قراءة جدول التغيرات



تأمل جدول تغيرات التابع f و المطلوب :

1. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. اكتب معادلات المقاربات الأفقية و الشاقوليه للتابع f .
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.
4. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f ثم حل المتراجحة $f'(x) > 0$.

راجعة السلاسل التعليمية الشاملة
مركز أمنايا .. يمكن الحصول عليها من مكتبة الأجتهاد
0959458194

الحل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. $y = 0$ (الأفقي) $x = 1$ (شاقولي)
3. حل وحيد $]-1,1[$
4. $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ، $]-1,1[$

قيمة حدية صغرى

3- نبحث عن العدد والمطلوب من سطر الأخير ونستنتج مقاربات والنقاط المقاربة

$[-1,1[$: $f'(x) > 0$

Sedra Mohammad Skeef ◄ فارس جقل
٢٠ أغسطس

أطباء #سوريا المستقبل

الحمود ❤ امارة ❤ زينة ❤ محمود ❤ حمزة ❤ ايت ❤ زين العابدين ❤ ساندي ❤ غزل ❤ خليل ❤ محمد ❤ كرم ❤ مجد ❤ البتول ❤ ميلاد ❤ ملاذ ❤ زينب ❤ رضا ❤ نور ❤ جود ❤ ريم ❤ اسراء ❤ ابو انيس ❤ رزان ❤ جواد ❤ براءة ❤ شيماء ❤ مرح ❤ علي ❤ رولا ❤ سيدرا ❤ لجين ❤ ديمة ❤ سدرة ❤ سارة ❤ كارولينا ❤ هديل ❤ حلا ❤ رواد ❤ عمر ❤ زهف ❤ نسيم ❤ الحارث ❤ رند ❤ يعقوب ❤ ريما ❤

انتظرت هذا اليوم كثيرا لكي افرح بنجاحكم واهنئكم..
هنيئا لنا ولاهاليكم واسوريا بكم ..فانتم املنا و مستقبلنا

#ملاحظة: يلي نسيان حطلو اشارة أو نسيان اسمو يكملي بالتعليقات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين

دورة :

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف ... البياني C المطلوب :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	+	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	4	↗	$+\infty$

1) أوجد $\lim f(x)$, $\lim f(x)$
2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C.
3) هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً ؟
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في R
5) أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2
6) ماعدد حلول المعادلة $f(x) - e = 0$

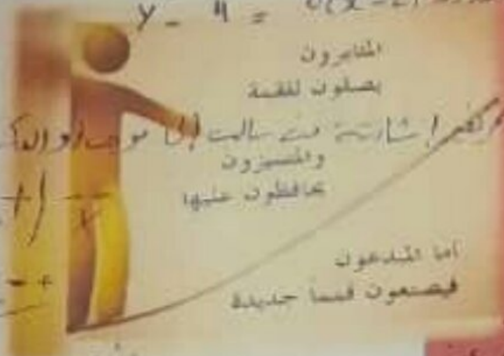
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$y - 4 = 0(x - 2)$

الحل

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2) معادلة المقارب الأفقي هو $y = 3$
3) كلا ، ليست قيمة حدية.
4) حلان.
5) $y = 4$
6) حلان. $]-\infty, 1] \cup [1, 2]$



تمرين

ليكن الجدول المجاور :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

1) أوجد مجموعة التعريف.
2) كم عدد القيم المحلية ، وما هي؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟
4) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
5) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$
6) بفرض أن التابع $f(x) = xe^{-x}$ احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور xx' المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 0$
7) ارسم الخط البياني اعتماداً على الجدول.

$]-\infty, \frac{1}{e}]$

$\sqrt{e} \approx 1.6$

$e^{1} \approx 2.5$

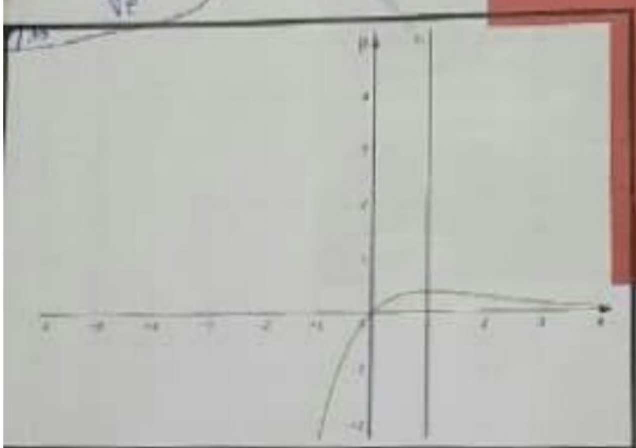
$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$

الحل

1) $D =]-\infty, +\infty[$
2) قيمة محلية واحدة هي $f(1) = \frac{1}{e}$ كبرى
3) $y = 0$ (أفقي)
4) حل وحيد (ينتمي للمجال $]1, +\infty[$)
5) لا يوجد حلول.
6) نقاط مساعدة $(0,0)$
7) $S = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

بالتجزئة : نفرض $u = x \Rightarrow \acute{u} = 1$

$u = x \Rightarrow \acute{u} = 1$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\acute{v} = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-1)$$

$$= -\frac{2}{e} + 1$$

8) اكتب معادلة المماس للخط البياني C في نقطة فاصلتها 1 (وظيفة)

$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

$y - \frac{1}{e} = 0(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{e}$

ملاحظات حول النهايات

1) عندما يكون مضمون الـ $\sin$ و $\cos$ → مبرهنة الحصر

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\cos \square - 1}{\square} = 0$$

2) تابع جذر تربيعي ← إخراج عامل مشترك داخل الجذر
← الضرب بالمرافق.

3) تابع صحيح أو تابع كسري حدودي نعوض ب الحد المسيطر في البسط والمقام عند (∞)

4) في حالة $(0 . \infty)$ تابع أسي و لوغارتمي نستخدم :

$$\lim_{t \to 0^+}(t.\ln t) = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty}(t.e^{-t}) = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty}(t.e^{t}) = 0$$

5) في حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

نخرج عامل مشترك في البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض

6) في حالة $\frac{0}{0}$:

أ) نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم lim (تابع كسري).

ب) في التابع الكسري الجذري (نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ثم نختصر ثم نوجد lim).

ج) توابع كسرية لوغاريتمية وأسية نخرج عامل مشترك من البسط و المقام ونختصر ونطبق :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \qquad \lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وظيفة

أوجد النهايات التالية

1- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-|x|$ — راسم

2- $\lim_{x\to 3} |x-3|\cos^2\left(\frac{1}{x-3}\right)$ — احاطة

3- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$ — مرافق

4- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+4-4\cos x}{x^2}$ — تايلور

5- $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\cos x}{3x^2}\right)$ — احاطة

6- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)$ — تايلور

7- $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x}$ — تايلور

8- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{3x}}{x}$ — مشتق

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x-\ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (3+e^x)-x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x}$$ — تايلور

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sin x$$ — احاطة

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot 2^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$$

نهايات مميزة

- $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$
- $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

أهم أنماط النهايات

$-1\le\cos^2\frac{1}{x-3}\le 1$

$0\le|x-3|\cos^2\frac{1}{x-3}\le|x-3|$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

تمرين هام

دورة

احسب $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\,\sin x}{x}$$ → 1

$$=2(0)(1)=0$$

$$\cos t = 1-2\sin^2\frac{t}{2}$$

قواعد هامة

1) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{1-e^{\bullet}}{\bullet}=-1$

2) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{e^{\bullet}-1}{\bullet}=1$

3) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\bullet}{e^{\bullet}-1}=1$

4) $\lim_{\bullet\to+\infty}\frac{e^{\bullet}}{\bullet^n}=+\infty$, 5) $\lim_{\bullet\to+\infty}\frac{\bullet^n}{e^{\bullet}}=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$

قواعد هامة

1) $\lim_{\bullet\to\infty}\frac{\ln\bullet}{\bullet}=0$

2) $\lim_{\bullet\to\infty}\frac{\bullet}{\ln\bullet}=\infty$

3) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\ln(1+\bullet)}{\bullet}=1$

4) $\lim_{\bullet\to 0}\frac{\bullet}{\ln(1+\bullet)}=1$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-2x=$

$\Rightarrow \frac{(\sqrt{4x^2-3}-2x)(\sqrt{4x^2-3}+2x)}{\sqrt{4x^2-3}+2x}=\frac{-3}{\sqrt{4x^2-3}+2x}\Rightarrow \lim \frac{-3}{\infty}=0^-$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}-x = x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x \Rightarrow x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} +\infty(-1) = -\infty$$

إيجاد نهاية عن طريق تعريف العدد المشتق

مثال

أوجد $\lim_{x\to1} \frac{x\ln x}{x-1}$

نفرض البسط كاملاً

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f(x) = x\ln x$$

$$f(a) = f(1) = 1\ln(1) = 1(0) = 0$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(a) = f'(1) = 1$$

نعوض بالقانون:

$$1 = \lim_{x\to1}\frac{x\ln x - 0}{x-1}$$

مثال امتحاني هام

ليكن $f(x) = e^x - 1$ والمطلوب :

أوجد $f(0)$ ثم أوجد $f'(x)$ ، $f'(0)$ ، ثم استنتج $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

نكتب القانون ثم نعوض:

$$1 = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-0}{x-0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

وظيفة

أوجد نهاية :

1) $2 = \lim_{x\to\ln2}\frac{e^x-2}{x-\ln2}$

2) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x = 1$

4) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

هام جداً : تابعوا شروحات المكثفة كاملةً على قناة (مركز أونلاين التعليمي) على اليوتيوب

@Ba_ce2020

نبرون التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دراسة قابلية الاشتقاق في a

التابع مستمر في

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

عدد حقيقي ⇐ قابل للاشتقاق (توجد معادلة المماس) $f'(a)$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

غير قابل للاشتقاق ⇐ معادلة المماس الشاقولي $x = a$

مثال

ادرس قابلية الاشتقاق عند $1 \overset{a}{=} x$

$f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

التابع مستمر على $[1, +\infty[$

$$f(a) = f(1) = 1 - 2\sqrt{1-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 2\sqrt{x-1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - 2\sqrt{1-1} - 1}{1 - 1}$$

$$= \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$= 1 - \infty = -\infty$$

ما يجب نشتق ونعوض $f(a)$ ونحصل عليها إما لنهاية أم عوامل النهاية هو (أ)

$\frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

التابع غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

استنتج معادلة المماس: $x = 1$

إثبات المقارب المائل

سؤال إجباري

نطبق ما يلي :

1) نوجد $f(x) - y_\Delta$

2) نبرهن أن $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل و المقارب الأفقي

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$ و نميز حالتين :

1- $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

2- $f(x) - y_\Delta < 0$ فالخط C يقع تحت Δ

3- $f(x) - y_\Delta = 0$ (نقطة تقاطع)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

استنتج مقاربه

مثال

ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}-2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)=\sqrt{4x^2+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}=\sqrt{4(+\infty)^2+5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\frac{|x|.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}=\frac{x.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$=\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\sqrt{4+\frac{5}{+\infty}}=\sqrt{4}=2=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)=+\infty-\infty$$ (عدم تعيين)

نضرب بالمرافق

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$=\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}=\frac{5}{+\infty}=0=b$$

المقارب المائل: $y=ax+b$

$\Leftarrow y=2x$

لاستنتاج معادلة المقارب المائل

1. نوجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
2. $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax\Rightarrow$
3. نعوض بالمعادلة $y=ax+b$

"لا تقل: لا اقدر .. عبارة يجب شطبها او استبدالها بأخرى ما الذي يمكن فعله"

فكل شخص يختار طريقه.

فإذا اخترت الهزيمة لنفسك، فعليك ان تتحمل النتائج.

"لذا كن شجاعا" واختر الطريق الصحيح حتى لو كان صعبا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 4$ مستقيم مقارب للخط C عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

الحل

$$f(x) = (x-4) + \frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - y_\Delta = \frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

مما سبق نستنتج أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 4$ مستقيم مقارب للخط C

لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta = \frac{5}{x+2}$

[illegible]

[illegible]

..... (يمكن أن ننظم جدول الوضع النسبي)

هام : تابعوا أهم الملاحظات الامتحانية بصفحتي على الفيسبوك

فارس جلل

تطبيق هام

ليكن التابع المعرف على $]0, +\infty[$ حيث $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$

أثبت أن $\Delta : y = x$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ

C بالنسبة للمقارب Δ

الحل

$$f(x) - y_\Delta = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

[illegible]

لكن أيّاً كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $\ln(x+1) > \ln(x)$ أي $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (وظيفة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = -2x$ مستقيم مقارب للخط عند $-\infty$

دراسة تغيرات تابع (سؤال إجباري 100 درجة)

مسألة 1

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

والمستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x - 1$ المطلوب :

1) اثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ
2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ثم ارسم كل مقارب وجدته وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C و Δ و المستقيمين $x = 0, x = 2$

الحـــل

1) f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{(عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{(بعد اختصار } x\text{)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

Δ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي :

$f(x) - y_\Delta > 0$ لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ فالخط C يقع فوق Δ

2) دراسة التغيرات :

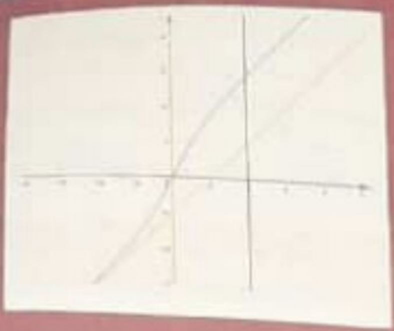
f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$$S = \int_0^2 |f(x) - y_\Delta| \, dx$$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \sqrt{5} + 1$$

مسألة 2

ليكن التابع g المعرف على $R \setminus \{1\}$ وفق العلاقة: $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

أوجد العددين الحقيقيين a و b علماً أن التابع g يقبل قيمة حدية محلية عند $x = 0$ قيمتها تساوي 2

نعرّف التابع f المعرف على $R \setminus \{1\}$ وفق العلاقة: $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$ و خطه البياني C

1) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C
2) أوجد نهايات التابع f عند حدود مجموعة تعريفه
3) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ، واستنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$
4) ارسم المقاربات ثم ارسم الخط C

الحـــل

أولاً: $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

$g(0) = 2$ يمر الخط من النقطة $(0,2)$ التابع

$$2 = \frac{0+0+a}{-1} \Rightarrow a = -2$$

$g'(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{(2x+b)(x-1) - 1(x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(0+b)(-1) - a}{1}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-b-(-2)}{1} \Rightarrow 0 = -b + 2$$

$$\Rightarrow b = 2$$

ثانياً: $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$

$$f(x) - y_\Delta = x + 3 + \frac{1}{x-1} - (x+3)$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $+\infty$
ونفس الطريقة عند $-\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دراسة التغيرات

التابع مستمر واشتقاقي على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 4 - \infty = -\infty$$

$x = 1$ مقارب $y'y$ والخط C على يساره

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4 + \infty = +\infty$$

$x = 1$ مقارب $//\ y'y$ والخط C على يمينه.

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 1$$

إما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3, -2[$

$$f(-2) = \frac{2}{3}, f(-3) = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(-3).f(-2) < 0$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

لرسم المقارب: $y = x + 3$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \ (0,3)$

$y = 0 \Rightarrow x = -3 \ (-3,0)$

لرسم الخط البياني

نوجد نقط مساعدة (نقاط التقاطع مع المحورين)

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x-1} = x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

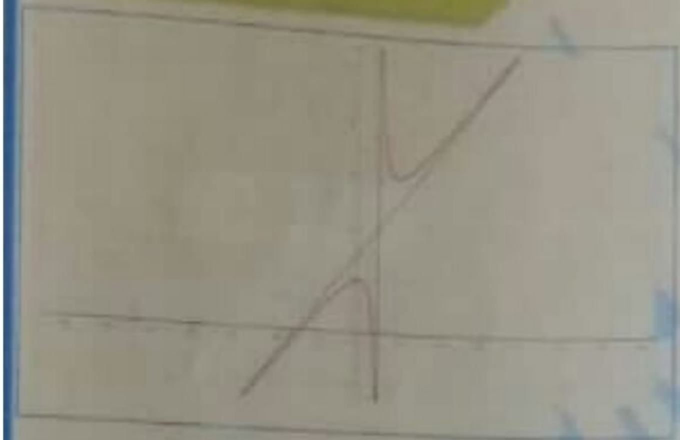
$$x_1 = -1 + \sqrt{3} = 0.7$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$f(0) = 2$ قيمة محلية كبرى

$f(2) = 6$ قيمة محلية صغرى



تمرين: ادرس تغيرات التابع $f(x) = x\ln x$

التابع مستمر و اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x = \frac{1}{2}$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(x-3) + \frac{1}{x-1}\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

ثم نعوض ....

مسألة 3

ليكن التابع $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ المعرف على R ..المطلوب :

1) أثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية له.
2) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي $x'x$ وعين وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجد…
3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
4) أوجد معادلة المماس في النقطة $(0,0)$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C
6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=0, x=\ln 2$
7) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ (وظيفة)

الحل

1) إذا كانت $x \in R$ فإن $-x \in R$ •

• $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$

$$= \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة الى مبدا الاحداثيات

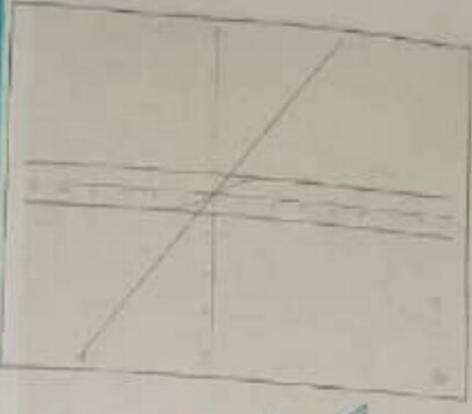
2) التابع مستمر على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Leftarrow y=-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني C يقع فوق المقارب لأن :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} + 1 = \frac{2e^x}{e^x+1} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	↗	1

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftarrow y = 1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$ والخط البياني C يقع تحت المقارب لأن :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 = \frac{-2}{e^x+1} < 0$$

3) التابع متزايد تماماً $\Leftarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

4) $y = \frac{1}{2}x$

6) الخط البياني C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0, \ln 2]$

$$S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$$

لحساب هذا التكامل يمكن كتابة f بالشكل :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-1}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx = \dots = \ln\frac{9}{8}$$

تذكر !!
$e^x e^{-x} = 1$

تمرين دورة: □

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = ae^{2x} + be^x + 1$; $a, b \in R$

أولاً : عين قيمة كلاً من a, b إذا علمت أن للتابع f قيمة كبرى أو صغرى محلياً تساوي الصفر عندما $x = 0$

ثانياً : بفرض $a = 1$ و $b = -2$ يصبح التابع ..

$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$ ..والمطلوب :

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، و استنتج معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' أو yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .
2) استنتج من تغيرات f أن للمعادلة $2 - e^{-x} + e^x$ حلاً وحيداً .. أوجد هذا الحل .
3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y = 1$ والمحور yy'

الحــــل

أولاً: التابع f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي من أجل $x = 0$
ولدينا $f(0) = 0$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً

$$\Rightarrow * \quad \boxed{a + b + 1 = 0}$$

وأيضاً : $f'(0) = 0$ نشتق التابع $f'(x) = 2ae^{2x} + be^x$

$$\Rightarrow ** \quad \boxed{f'(0) = 2a + b = 0}$$

بالحل المشترك بين * و ** نجد : $a = 1$, $b = -2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

1) دراسة التغيرات على الطالب :

لدراسة الوضع النسبي بين الخط والمستقيم $y = 1$

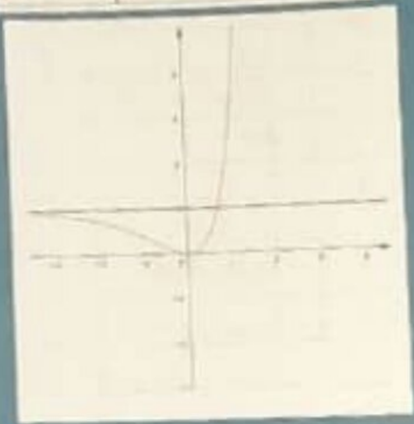
$f(x) - y_\Delta = e^{2x} - 2e^x = e^x(e^x - 2)$

ندرس الإشارة :

نقطة تقاطع C مع Δ هي $(\ln 2 , 1)$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	1 ↘ 0 ↗ $+\infty$

x	$-\infty$ $\ln 2$ $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$ 0 $+$
	C تحت Δ C فوق Δ



2) المعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ تكافئ $e^x + \frac{1}{e^x} = 2$

$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^x$

أي المطلوب : $f(x) = 0$

ومن الجدول نجد أن لهذه المعادلة حل وحيد هو $x = 0$

3) $S = \int_0^{\ln 2} (y_\Delta - f(x))\, dx$

$= \int_0^{\ln 2} (-e^{2x} + 2e^x)\, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}$

أهم أنماط التغيرات

1) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ $D = [1, +\infty[$

2) $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x+1}$ $D = R$

3) $f(x) = \ln(\frac{x-2}{2+x})$ $D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

4) $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$ $D = R/\{-1\}$

5) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $D = R$

6) $f(x) = (x-1)e^x$ $D = R$

7) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

8) $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ $D = R$

9) $f(x) = \exp(\frac{x}{x^2+1})$ $D = R$

10) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2}$ $D = R/\{-2, 1\}$

11) $f(x) = \ln(1+x) - x$ $D =]-1, +\infty[$

12) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $D =]0, +\infty[$

13) $f(x) = (x+1)\ln x$ $D =]0, +\infty[$

14) $f(x) = x - \ln x$ $D =]0, +\infty[$

15) $f(x) = x - x.\ln x$ $D =]0, +\infty[$

16) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ $D =]-\infty, +\infty[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بنك المسائل الهامة

• المسألة الأولى :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = 3e^x - x - 3$

- 1. اثبت أن المستقيم $d: y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي ، ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر و الآخر α و أثبت أن $-3 < \alpha < -2$
3. ارسم الخط البياني واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور ox و المستقيم $x = \ln 2$

• المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخطين C و d

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 + 2\ln(\frac{x}{x-1})$ .. والمطلوب :

- 1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم أثبت أن المستقيم $d: y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C
3. لتكن متتالية معرفة على $n > 1$ وفق $U_n = f(n)$ جد نهاية هذه المتتالية $(U_n)_{n>1}$
4. لتكن $S_n = u_2 + \cdots + u_n$ أوجد S_n وما نهاية $(S_n)_{n\geq 2}$

المسألة الرابعة :

ليكن التابع $x \to f(x) = x - \ln x$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ ..والمطلوب :

1. جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$
2. ما نهاية $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$
3. استنتج مشتق التابع $h(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$ واستنتج مشتق التابع $f(\ln x)$

المسألة الخامسة :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على وفق : $f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$ و $g(x) = x\sqrt{x}$

أثبت أن g اشتقاقي عند 0 ثم استنتج أن f اشتقاقي عند 0 ثم أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

- (1 أثبت أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
- (2 هل $\Delta_2: y = x + 2$ مقارب للخط C عند $-\infty$ ؟ وادرس الوضع النسبي .
- (3 ادرس تغيرات f وارسم C مع رسم المقاربات .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة السابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f [redacted]

1) أثبت أن المستقيم [redacted]

2) احسب A, B حيث [redacted]

3) احسب مساحة السطح المحصور بين [redacted] $x = 3$

المسألة الثامنة :

ليكن التابع f المعرف على [redacted] $+\infty[$ [redacted] البياني C

1. ادرس تغيرات التابع و بيّن القيم [redacted]
2. استنتج من تغيرات التابع أن [redacted]
3. ارسم الخط البياني C
4. أثبت أن التابع $x \ln x$ [redacted]

المسألة التاسعة :

ليكن f المعرف على R وفق [redacted]

1) أثبت أنه أياً كانت $x \in R$ فإن [redacted]

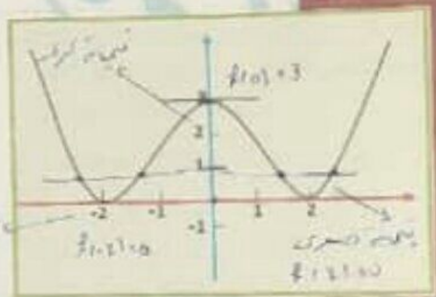
أ. $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ [redacted]

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم [redacted]

3) أثبت أن للمعادلة [redacted] $e^x - 1$ [redacted]

4) ارسم C واحسب مساحة [redacted] $x = 1$

المسألة العاشرة : في الرسم المجاور



1) كم حل للمعادلة $f(x) = 1$ [redacted]

2) ما هي قيمة $f'(0)$ [redacted] $f'(0) = 0$

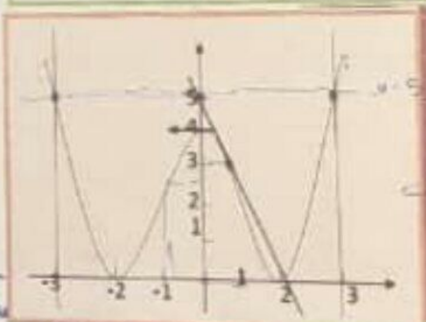
3) كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل، وما هي؟

4) عيّن $f(]-2,2[)$ [redacted]

5) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، [redacted]

$= +\infty$ [redacted] $+\infty$

المسألة الحادية عشر :



لاحظ الخط البياني للتابع f وال[redacted]

a) أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره [redacted]

b) هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك.

c) أوجد $f(-1), f(-2), f(2), f(0), f(1)$

d) أوجد $f'(-2), f'(2), f'(0), f'(1)$

e) أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1)

f) أوجد $f([-2,2])$

g) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \ge 5$

H) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ i) نظم جدول اطراد التابع

4 حلول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$]0,1[\cup]1,e[$ ، 4- حلاً

$]0,e[\cup]e,+\infty[$ .5

$y=0$ .6

$]0,1[\cup]1,e[$

.9

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		0 $+$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$ ‖ $-\infty$	-1

المسالة الثانية عشر :

1) ما هي القيم الحدية المحلية؟ و ما نوعها؟ $f(1)=0$
2) هل يوجد مقاربات مائلة؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية؟ $x=0$
4) ما هي عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ ، واحصرها بمجالات.
5) أوجد مجموعة تعريف التابع f
6) اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x=1$
7) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد : $x=1$
8) برهن أن للمعادلة $f(x)=-2$ حل وحيد.
9) اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f(x))$

$]e,+\infty[$

$-2\in f(]e,+\infty[)$

المسالة الثالثة عشر :

نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f و الذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘ -3

$]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

1) عيّن مجموعة تعريف التابع f
2) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي او افقي للخط C $x=-2$
3) هل يوجد مماس أفقي للخط C في احدى نقاطه؟
4) هل f اشتقاقي عند 3؟
5) عيّن القيم الحدية للتابع f؟

$y=1$

$y=-3$

$f(3)=0$

المسالة الرابعة عشر :

ليكن التابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ ، وفق : $f(x)=e^{-x}(1+\ln x)$ و خطه البياني C و التابع g المعرف على I وفق $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$ والمطلوب :

1. ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولاً بها
2. بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha=1$
3. أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$
4. مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
5. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

المسالة الخامسة عشر :

ليكن التابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ ، وفق : $f(x)=x-4+\ln\frac{x}{x+1}$ و خطه البياني C

1. أثبت أن f متزايد تماماً على I واستنتج $f(I)$
2. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المتتاليات : أسئلة نماذج وزارية

مثال : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$

1) اثبت أن $0 \leq u_n \leq 5$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

الحل :

1) لنبرهن أن المتراجحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 5$ بالتدريج كما يلي :

لنبرهن صحة القضية $E(0)$ محققة لأن $0 \leq u_0 = 1 \leq 5$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $0 \leq u_n \leq 5$ صحيحة

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$0 \leq u_n \leq 5 \Rightarrow 0+12 \leq u_n + 12 \leq 5+12$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{u_n+12} \leq \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12+u_n} \leq 5 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 5$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي بالتدريج وجدنا: $0 \leq u_n \leq 4$ محققة و ذلك أياً كان العدد الطبيعي n

2) سنبرهن بالتدريج أن $E(n): u_n \leq u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$ كما يلي :

$u_0 = 1$ ، $u_1 = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \Rightarrow u_0 \leq u_1$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_n \leq u_{n+1}$

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_n + 12 \leq u_{n+1} + 12$$

$$\sqrt{u_n+12} \leq \sqrt{u_{n+1}+12} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .. ولإيجاد النهاية نحل المعادلة $f(x) = x$ فنجد النهاية تساوي 4

قاعدة

لبرهان متتالية هندسية نبرهن أن $u_{n+1} = q \cdot u_n$ حيث q :عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = const$

تطبيق هام

لتكن المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$ ، $v_n = u_n + 3$

1) برهن (v_n) متتالية هندسية و عيّن أساسها .

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) إذا كانت $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب $\lim_{n\to+\infty} s_n$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

1) $v_n = u_n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 3) + 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - 1 + 1$$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \Leftarrow$ v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$v_n = q^n v_0$ حيث $v_0 = u_0 + 3 \Leftarrow v_0 = 4$

$$\Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

2) $s_n = v_0 + \dots + v_n$

s_n هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها $q = \frac{1}{3}$

و عدد حدودها $n + 1$

$$s = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) = 6 - \frac{2}{3^n}$$

بما أن: $q = 3 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (3)^n = \infty$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 6 - 0 = 6$$

قاعدة

لبرهان متتالية حسابية نبرهن أن $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r : عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن

$$u_{n+1} - u_n = const$$

مثال

أيُّ المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 0}$ و $(v_n)_{n \geq 0}$ الآتيتين حسابية

1) $u_n = 3n + 1$

2) $v_n = n^2 + 1$

الحـــل

1) $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 1 - (3n + 1) = 3 \in \mathcal{R}$

فالمتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية حدها الأول 1 و أساسها 3

2) $v_{n+1} - v_n = (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$ (ليس ثابت)

فالمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ ليست متتالية حسابية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

قواعد المتتالية الهندسية	قواعد المتتالية الحسابية
• $S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$	• $S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{أول حد} + \text{آخر حد}}{2}$
• $\frac{u_{\star}}{u_{\heartsuit}} = q^{\star - \heartsuit}$	• $u_{\star} - u_{\heartsuit} = (\star - \heartsuit) r$

تطبيق امتحاني هام

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ ، $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ برهن أنهما متجاورتين .

الحـــل

دراســة اطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

دراسة اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طلب إضافي: البك أن العدد [redacted] راجع على (u_n)

فكرة الحل: نلاحظ أن $4 >$ [redacted] u_n (تحقق وبرهانه في الدرس سابقاً)

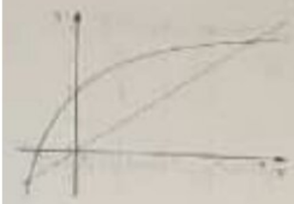
تطبيق هام

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ كما يلي [redacted]

$u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$

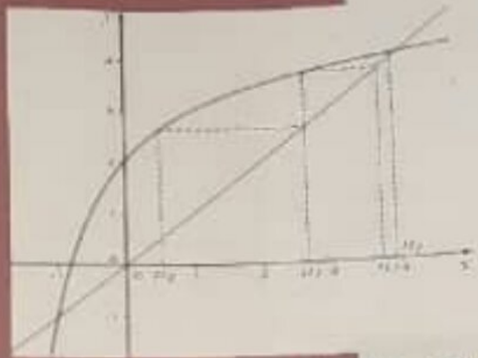
1) باستعمال الرسم مثّل على محور الفواصل ودون حساب الحدود [redacted] u_0, u

2) ضع تخميناً حول اطراد المتتالية [redacted]



الحل

1. التمثيل:



2. نلاحظ أن الحدود المتتالية [redacted] المتتالية متزايدة ومتقاربة من العدد 4 ونهايتها هو فاصلة [redacted] أي نهايتها هي العدد 4

تمرين

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $u_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n=\frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

$$u_0 = 1 \ , u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

① إثبات أن $E(n): \ u_n > 0$

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$:

محققة $u_0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$

2- نفرض صحة القضية من أجل n أي:

• $\boxed{u_n > 0}$

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n + 1$:

$u_{n+1} > 0$

نقسم البسط على المقام:

سنبرهن: $1 + \frac{-1}{1 + u_n} > 0$

ننطلق من *: $u_n > 0$

نضيف (1): $1 + u_n > 1$

نقلب: $\frac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب بـ (-1): $\frac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف (1): $1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

② $v_n = \frac{1}{u_n}$

لاثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون:

$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n =$ عدد ثابت

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} = 1 \cdot \frac{1 + u_n}{u_n}$$

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1 + u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 = const$$

$\Leftarrow$ المتتالية حسابية أساسها $r = 1$

كتابة ϑ_n بدلالة n:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \vartheta_n = \vartheta_0 + (n - 0)1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta_n = 1 + n}$$

استنتاج عبارة u_n:

$$\vartheta_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\vartheta_n} = \frac{1}{n+1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بنك التمارين الهامّة

التمرين الأول

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجيا بالعلاقات: $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ [redacted] متزايدة تماما

التمرين الثاني

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق $(u_n)_{n\ge1}$ [redacted] $u_n=1+\frac{1}{n^2}$ ، $v_n=1-\frac{1}{n}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما [redacted]

التمرين الثالث

ليكن التابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

1) أوجد النهاية على أطراف مجموعة التعريف [redacted] مقارب لخطه C_f

2) أثبت أن التابع متزايد تماماً ونظم جدول تغيراته

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة: $u_0=2, u_{n+1}=f(u_n)=\frac{2u_n}{u_n+1}$

I) أثبت أن المتتالية متناقصة [redacted] ية و أوجد نهايتها .

التمرين الرابع

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ كما يأتي: $v_0=\frac{1}{2}$ و $v_{n+1}=\frac{5v_n+4}{v_n+2}$ والمطلوب :

1) ادرس جهة اطراد المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$

2) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة [redacted]

I) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ [redacted]

II) أوجد عبارة u_n بدلالة n ، ثم [redacted]

التمرين الخامس

لتكن المتتالية [redacted] $u_{n+1}=e(u_n)^{\frac{1}{2}}$ ، e^3 و $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة بالشكل: $v_n=\ln(u_n)-$ [redacted]

1) أثبت أن $(v_n)_{n\ge0}$ هندسية [redacted]

2) اكتب $(v_n)_{n\ge0}$ بدلالة n ثم [redacted]

3) أثبت أن المتتالية u_n متقاربة

التمرين السادس

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق: $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل [redacted]

1) أثبت أن التابع $\frac{3x+2}{2x+6}$ [redacted] أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ [redacted]

التمرين السابع

أثبت أن المتتاليتين: (u_n) ، (v_n) متجاورتان حيث:

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \quad , \quad v_n=u_n+\frac{1}{n}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

قواعد حساب التوابع الأصلية

1) $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax \; ; a \in R$

مثال: $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$

2) $f(x) = g^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)(g')}$

حيث g كثير حدود درجة أولى
و $n \in R \setminus \{-1\}$

مثال: $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{(4)(1)}$

مثال: $f(x) = (2x+5)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{(2x+5)^4}{(4)(2)}$

3) $f(x) = \dfrac{g'}{g} \Rightarrow F(x) = \ln|g|$

$|g| = g \; ; g > 0$
$|g| = -g \; ; g < 0$

مثال:

$f(x) = \dfrac{5}{x-1} = 5\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \; ; I =]-\infty, 1[$

$\Rightarrow F(x) = 5 ln|x-1|$ *

$F(x) = 5\, ln(-x+1)$ *

4) $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} \; ; a \neq 0$

مثال: $f(x) = e^{3x+1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} e^{3x+1}$

5) $f(x) = g^n . g' \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)}$

مثال:

$f(x) = \dfrac{[lnx]^2}{x} = \dfrac{1}{x}.(lnx)^2$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{(lnx)^3}{3}$

قاعدة هامة:
$f(x) = \frac{x'}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$

6) $f(x) = \star' . e^{\star} \Rightarrow F(x) = e^{\star}$

مثال: $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}(2x)e^{x^2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2} e^{x^2}$

7) $f(x) = \sin(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{\star'} \cos(\star)$

8) $f(x) = \cos(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'} \sin(\star)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'} . \tan(\star)$

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}(-\cot(\star))$

قاعدة هامة:

$\sin^2(\star) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\star)$

$\cos^2(\star) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\star)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التكامل بالتجزئة: لدينا [redacted]

1) $\int_a^b x^n e^{\alpha x} dx$

2) $\int_a^b x^n \sin \alpha x \, dx$

3) $\int_a^b x^n \cos \alpha x \, dx$

4) $\int_a^b x^n \ln \alpha x \; dx$

القانون:-

$$\int_a^b u.v' = [u.v]_a^b - \int_a^b vu'$$

دورة 2021

[redacted] $-\int_0^\pi -cosx\,dx$

[redacted]

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع اصلي للتابع f

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ حيث $k \in R$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ حيث $c \in [a,b]$

دورة 2013

[redacted]

$$I' = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -cosx\,dx$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_0^\pi$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= F(1) - F(0) = \cdots$$

مثال

$$\Rightarrow I = \left[x^2 . \sin x - 2\left[-x\cos x + \sin x\right]\right]_0^{\pi} = F(1) - F(0) = \cdots$$

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3) $e^{\ln x} = x$

4) $\ln a^n = n \ln a$

5) $\ln e^x = x \ln e = x$

$$I = \int_1^e x . \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} . \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2}\right]_1^e = \cdots$$

مثال

$$I = \int_1^e \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [x \ln x]_1^e - \int_1^e x . \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x - x]_1^e = \cdots$$

مثال

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \int_1^e \ln x . x^{-2} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x}$$

$$I = \left(\frac{-\ln x}{x}\right)_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{-1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x} \ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x} \ln x\right]_1^e + \int_1^e x^{-2} \, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x} \ln x + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{-1}{x} \ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = F(e) - F(1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ترتيب قوة التوابع:
1) التابع اللوغ [redacted]
2) كثيرة الحـ [redacted]
3) المثلثية
4) الأسية

نفرض التابع الأقوى u والآخر v'

حساب تكامل التوابع ال [redacted] نفرق الكسر ثم نوجد التابع الأصلي

تفريق الكسور:

نميز شكلين: 1- عوامل المقام [redacted]

الحالة الأولى: درجة البسط أقل م [redacted]

[redacted]

نحلل المقام للشكل: $(x - r_1)(x - r_2)$ [redacted]

$$= \frac{A}{(x - r_1)} + \frac{B}{(x - r_2)}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - r_1)$ [redacted]

ولحساب B نضرب الطرفين بـ $(x - r_2)$ [redacted]

طريقة ثانية: نوحد المقامات ثم نطابق بين الطرفين ونحل المعادلات الناتجة

مثال

أوجد التابع الأصلي للتابع [redacted]

$$= \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$$

نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية

نحلل المقام: $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{A}{(x - 4)} + \frac{B}{(x - 2)}}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - 4)$ [redacted]

[redacted] $+ \frac{B(x - 4)}{x - 2}$

نجعل x تسعى إلى 4

$$\Rightarrow A = \frac{4}{4 - 2} \Rightarrow A = 2$$

[redacted] ثانية: نوحد المقامات فنجد:

$$\frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A - 4B}{(x - 4)(x - 2)}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$A + B = 1 \ldots (1)$

$-2A - 4B = 0 \ldots (2)$

بحل المعادلات نجد:

$B = -1, A = 2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ثم نجعل x تسعى إلى 2

$$\Rightarrow B=\frac{2}{2-4} \quad \Rightarrow B=-1$$

نعوض في *

$$f(x)=\frac{2}{x-4}+\frac{-1}{x-2}$$

$$F(x)=2\ln(-x+4)-\ln(x-2)+k$$

احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2-6x+8}dx$

بعد التفريق ينتج:

$$\int_0^1 \frac{2}{x-4}dx+\int_0^1 \frac{-1}{x-2}dx$$

$$=[2\ln|x-4|-\ln|x-2|]_0^1=F(1)-F(0)$$

مثال

احسب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$$

نحلل المقام لكي نفرق الكسر:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-1)

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{1} \quad \Rightarrow A=-1$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-2)

$$\Rightarrow \frac{-3}{-1}=B \quad \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{-1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

$$I=\int_0^1 \frac{-1}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{3}{x+2}dx \quad =[-\ln|x+1|+3\ln|x+2|]_0^1= \dots$$

الحالة الثانية : إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ونعود للحالة الأولى

ب- عوامل المقام درجة أولى مكررة مثل $(x+1)^2$ فإننا نفرق الكسر كما يلي

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}$$ ثم نطابق بين الطرفين

تمرين هام

احسب ما يلي $\int_0^{\ln 2} e^x(1-e^x)^5\,dx$

[redacted]

أهم أنماط المعادلات و المتراجحات في الكتابين

السؤال الأول: حل في R المعادلة : [redacted]

الحل: نلاحظ أن : $9^x = 3^{2x}$

[redacted] $= 3.3^x$

لذا نفرض $t = 3^x$ عندئذ [redacted] $-1)(t-2) = 0$

[redacted] $= \ln 1 \Rightarrow x_1.\ln 3 = 0$

[redacted] مقبول

[redacted] $\ln 2 \Rightarrow x_2.\ln 3 = \ln 2$

[redacted] مقبول

السؤال الثاني: اثبت أن $\ln x \le x - 1$ أيا كان $0 <$ [redacted] احصر e.

الحل: المتراجحة المعطاة تكافئ [redacted]

لنأخذ التابع f المعرف و الاشتقاق على [redacted]

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

[redacted] $1 \quad f(1) = 0$

نلاحظ من الجدول: أيا تكن [redacted]

[redacted] $\boxed{\ln x \le x - 1}$

حصر العدد e: [redacted]

[redacted] $\Rightarrow \boxed{\frac{64}{27} \le e}$

[redacted] $\le e^{\frac{-1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \le e^{\frac{-1}{3}}$

[redacted] $\Rightarrow \frac{64}{27} \le e \le \frac{27}{8}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث: حل في C المعادلة: $z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$

الحل: بالاتمام لمربع كامل:

$$z^2 - (1+2i)z + \left(\frac{1+2i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+2i}{2}\right)^2 + 3 + 3i = 0$$

$$\Rightarrow \left(z - \frac{1+2i}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4} - 2i$$

$$\Rightarrow \left(z - \frac{1+2i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(-15 - 8i)$$

نفرض أن: $\omega = a + bi$ الجذر التربيعي لـ $-15 - 8i$ عندئذ

$$\omega^2 = (a^2 - b^2 + 2abi) = -15 - 8i$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \\ a^2 - b^2 = -15 \\ a.b = \frac{-8}{2} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a^2 = 2$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -4 \\ a = -1 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = 1 - 4i$$

$$\omega_2 = -1 + 4i$$

$$\Rightarrow z_1 - \frac{1+2i}{2} = \frac{1-4i}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{1-4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 1 - i}$$

$$z_2 - \frac{1+2i}{2} = \frac{-1+4i}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{-1+4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 3i}$$

السؤال الرابع: أثبت أنه أيا كانت x من $]-1, +\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(x+1)$$

الحل: حل المتراجحة بكافىء:

$$\ln(x+1) - \frac{x}{1+x} \ge 0$$

نفرض التابع: $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x}$ المعرف والاشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

نلاحظ من الجدول ان $f(0) = 0$ قيمة حدية صغرى.

أيا تكن $x \in]-1, +\infty[$ فإن $0 = f(0) \le f(x)$ ومنه

$0 \le \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ وبالتالي:

$$\frac{x}{x+1} \le \ln(x+1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الخامس: اثبت ان: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ ثم حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

الحل: نلاحظ ان أمثال المعادلة حقيقية عندئذ نطبق طريقة المميز حيث:

$$a = 1,\ b = -2(1-\sqrt{3}),\ c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-2(1-\sqrt{3})\right]^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1-2\sqrt{3}) - 32 = 4(4-2\sqrt{3}) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4+2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow z_1 = \boxed{(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow z_2 = \boxed{(1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}$$

السؤال السادس: حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$

الحل: نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x) = \ln(5^{x+1})$

$$x\ln 4 = (x+1)\ln 5$$

$$x\ln 4 - x\ln 5 = \ln 5$$

$$\Rightarrow x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}}$$

السؤال السابع: حل في C المعادلة $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل: نلاحظ ان: $|1 + i2\sqrt{2}| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ $2ab = 2\sqrt{2}$ ...... (1)

$a^2 - b^2 = 1$ ...... (2)

$a^2 + b^2 = 3$ ...... (3)

نجمع (2) مع (3) نجد $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$

$$a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow z = \sqrt{2} + i$$

$$a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i$$

السؤال الثامن: حل في R المعادلة الآتية:

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln(x-1)$$

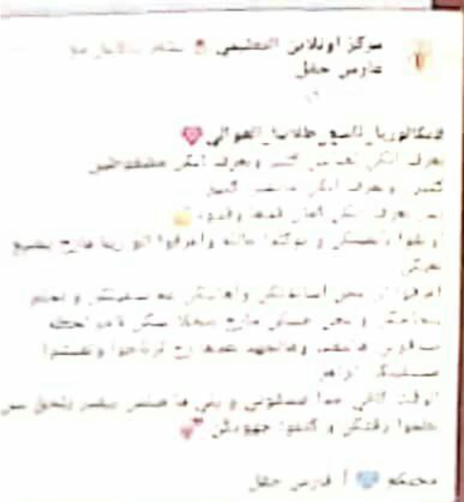
الحل: شرط الحل $x > 1$

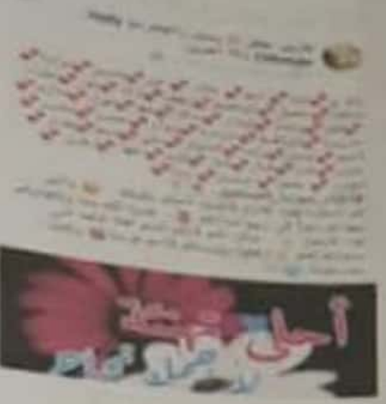
$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1) \Rightarrow \ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ مرفوض $\qquad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول





السؤال التاسع: عين العددين z_1 ، z_2 حيث:

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} 2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\bar{z}_1 = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

السؤال العاشر: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$e^x - \frac{1}{e}e^y = 1$$
$$2e^x + e^y = 4 + e$$

الحل: $D = R$ نفرض: $a = e^x$ ، $b = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} a - \frac{1}{e}b = 1 \;\dots\dots\dots \text{①} \\ 2a + b = 4 + e \;\dots\dots \text{②} \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-2) ونجمع:

$$\begin{cases} -2a + \frac{2}{e}b = -2 \\ 2a + b = 4 + e \end{cases} \Rightarrow \text{نجمع} \; \left(\frac{2}{e} + 1\right) b = 2 + e \Rightarrow \boxed{b = e}$$

ومنه:

$$e^y = e \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

السؤال الحادي عشر: حل المعادلة التفاضلية : $2y' + y = 1$ ثم عيّن حلها الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل:

$$2y' + y = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2}y + \frac{1}{2}$$

لدينا معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث:

$$b = \frac{1}{2} \quad , a = \frac{-1}{2}$$

ومجموعة حلولها من الشكل : $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ وبالتالي :

$$y = ke^{\frac{-1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لحساب قيمة k نعوض الشرط:

$$2 = ke^{\frac{-1}{2}(-1)} + 1 \Rightarrow 1 = ke^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = e^{\frac{-1}{2}}$$

فـ حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{\frac{-1}{2}} . e^{\frac{-1}{2}x} + 1 \Rightarrow y = e^{\frac{-1}{2}(x+1)} + 1$$

السؤال الثاني عشر: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad (1)$$
$$3\ln x - 5\ln y = 4 \quad (2)$$

● **الحل:** شرط الحل $y > 0$ ، $x > 0$ نفرض $\ln x = a$ ، $\ln y = b$

$$2a + b = 7$$
$$3a - 5b = 4$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 5:

$$10a + 5b = 35$$
$$3a - 5b = 4$$

بالجمع:

$$13a = 39 \Rightarrow a = \frac{39}{13} = 3$$
$$a = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

نعوض في (2)

$$3(3) - 5b = 4 \Rightarrow 9 - 5b = 4 \Rightarrow -5b = -5$$
$$b = 1 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

السؤال الثالث عشر: أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى: $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها 2- من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل: ميل المماس $\frac{1}{2}$ في النقطة التي فاصلتها 2-

y'

(x) بعلاقة المشتق

$$y' = -2y$$
$$\Rightarrow \boxed{y = ke^{-2x}}$$

الشرط: نشتق:

$$y' = -2ke^{-2x}$$
$$f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2ke^{-2(-2)} \Rightarrow k = \frac{1}{-4e^4}$$

⇐ الحل هو:

$$y = \frac{1}{-4e^4}e^{-2x}$$

السؤال الرابع عشر: حل المعادلة الآتية:

$$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

الحل: $D = R$

$$e^{3x}.e + 4e^{2x}.e + 5e^{x}.e = 0$$

$$ee^{x}(e^{2x} + 4e^{x} - 5) = 0$$

أما $ee^{x} = 0$ مستحيلة

أو $(e^{x} - 1)(e^{x} + 5) = 0$

$$e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$e^{x} + 5 = 0 \Rightarrow e^{x} = -5$$ مستحيلة الحل

السؤال الخامس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{e^{x} - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 2}$$

الحل: $D = R$

$$(e^{x} - 1)(e^{x} + 2) < (e^{2x} + 1)(e^{x} - 2)$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 2e^{x} - e^{x} - 2 < e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} - 2$$

$$\Rightarrow e^{3x} - 3e^{2x} > 0$$

$$e^{2x}(e^{x} - 3) > 0$$

وندرس: إشارة المقدار $e^{x} - 3$ فقط لأن $e^{2x} > 0$ أيا كان $x \in R$

$$e^{x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

ننظم جدول فنجد حلول المتراجحة هي:

$$]\ln 3\ , +\infty[$$

السؤال السادس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\ln(x^2 + 3x) > \ln(2x + 2)$$

شرط الحل هو: $]1\ , +\infty[$ ومنه:

$$x^2 + 3x > 2x + 2$$

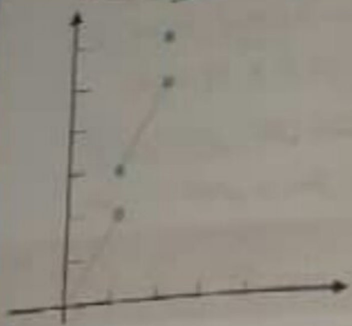
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

وهذه المتراجحة محققة عندما $x < -2$ أو $x > 1$ ....نقاطع مع شرط الحل $x > 1$

فنجد مجموعة الحلول هي: $]1\ , +\infty[$

$x-1<E(x)\le x$

تابع الجزء الصحيح



مثال : ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق العلاقة
$f(x)=2x+E(x)$ والمطلوب :

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

الحل :
$$f(x)=\begin{cases}2x & ;[0,1[\\ 2x+1 & ;[1,2[\\ 2(2)+2=6 & ;x=2\end{cases}$$

2) ارسم الخط البياني C على المجال $[0,2]$

3) أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}$

الحل :
$$x-1<E(x)\le x$$
$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}=0$$

4) نعرف تابع $g(x)=2x+\frac{E(x)}{x^2+1}$

أثبت أن $y=2x$ مقارب مائل في جوار ∞

الحل :
$$g(x)-y_\Delta=\frac{E(x)}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty}g(x)-y_\Delta=\lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}=0$$ فهو مقارب مائل

x في غاية الكبر

مثال : ليكن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ المعرف على $R\backslash\{+1\}$

أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم أعط عدد حقيقي A يحقق $x>A$ فإن : $f(x)\in]2.9\,,3.1[$

الحل :
$$|f(x)-l|<\varepsilon$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-1}=3=l \quad,\quad \varepsilon=3-2.9=0.1$$

نعوض بالقانون :
$$|f(x)-3|<0.1$$
$$\Rightarrow\left|\frac{3x+2}{x-1}-3\right|<\frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{5}{x-1}<\frac{1}{10}\Rightarrow x>\underbrace{51}_{A}$$

لأن x كبيرة

ملاحظة هامة جداً : نفس السؤال يأتي بالمتتاليات ولكن n عوضاً عن x
و u_n عوضاً عن $f(x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وظيفة

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$:

1. جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]0.9, 1.1[$
2. احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$

عين عدد طبيعي n يحقق الشرط إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n \in]2.99, 3.01[$

استنتاج خط بياني C' لتابع جديد g بدلالة الخط البياني C لتابع f معطى مسبقا

أولاً : نرسم الخط البياني C للتابع القديم f

ثانياً : نكتب التابع الجديد g بدلالة التابع القديم f

ثالثاً : نستنتج العلاقة بين C' و C حسب ما يلي :

$g(x) = -f(x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات
$g(x) = f(x) + b$	C' ينتج عن C بانسحاب شعاعه $(0, b)$
$g(x) = f(x + a)$	C' ينتج عن C بانسحاب شعاعه $(-a, 0)$
$g(x) = \|f(x)\|$	الجزء الأول من C' : هو الجزء من C الواقع فوق محور الفواصل الجزء الثاني : هو نظير الجزء من C الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(\|x\|)$	الجزء الأول من C' : هو الجزء من C الواقع على يمين محور التراتيب الجزء الثاني : هو نظير الجزء الأول بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = f(x)$ حيث $D_g \subseteq D_f$	C' هو الجزء من C الواقع ضمن D_g
$g(x) = af(x)$	C' ينتج عن C بالتحويل النقطي $(x, y) \to (x, ay)$

الجدول من إعداد المدرس : واصف خضرة

رابعاً : نرسم الخط البياني C' للتابع الجديد g

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملحق تدريبي .. الجزء الأول

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ، دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f و استنتج أن للخط البياني C مقارب يوازي yy'
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما x_1 يحقق $0 < x_1 < 1$ ثم أوجد الجذر الآخر x_2
3. أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x - 5$ مقارب للخط C
4. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$, $x = 4$

المسألة الثانية :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1]$ وفق : $f(x) = x\sqrt{1 - x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم أثبت أن $f(1)$ قيمة صغرى محليا للتابع f
2) أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال $]-\infty, 1]$

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D وفق : $f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f ثم أوجد معادلة المقارب للخط C الموازي ل yy'
2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - x$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها و بين ما له من قيم كبرى أو صغرى محليا
3) استنتج أن للمعادلة $x = e^x - 1$ جذرا وحيدا يطلب إيجاده

المسألة الخامسة :

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها
2) دل على قيمه الكبرى أو الصغرى محليا
3) استنتج من جدول التغيرات أن مجموعة حلول المتراجحة $x < 2\sqrt{x}$ هي $]0, 4[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة السادسة :

ليكن c الخط البياني للتابع : $f(x) = x\ln x$ ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

*ثم أوجد مجموعة التو [illegible]

المسألة السابعة :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني c أوجد كل مقارب للخط c يوازي احد المحورين الاحداثيين

1. ادرس تغيرات f ونظم ج [illegible] قيم صغرى محليا
2. برهن أن التابع f فردي و [illegible]
3. انطلاقاً من c ارسم الخط [illegible] g
4. احسب مساحة السطح [illegible] x

المسألة الثامنة :

أثبت أن $\frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} \leq \frac{x^2-1}{x^2+1}$ أيا يكن x .. استنتج نهاية $f(x) = \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$ عند ∞

المسألة التاسعة :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال I ..برهن أن المستقيم d مقارب..

1) $d: y = x$: $f(x) = \ln(1+e^x)$ عند $+\infty$
2) $d: y = x-1$: $f(x) = x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

المسألة العاشرة :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $R\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

أوجد $f'(x)$ واستنتج [illegible] $g(x$

المسألة الحادية عشر :

أثبت أن للمعادلة $x^3 - x + 1 = 0$ جذرا وحيدا α يقع في المجال $]-1,0[$

المسألة الثانية عشر :

ليكن c الخط البياني للتابع f [illegible] $f(x$

1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و عين المقاربات و القيم المحلية وارسم c
2) احسب مساحة السطح المحدد بـ c و المستقيمات $x = 1$ و $x = 0$ و $y = -\frac{1}{2}$

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في جروب : نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل : على الفيس بوك

المسألة الثالثة عشر :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (ax+b)e^x$

1) احسب قيمة كل من a و b لكي يكون للتابع قيمة حدبة محليا 1- عند 0

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع : $f(x) = x\ln x$ ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها و أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

*ثم أوجد مجموعة التوابع الأصلية للتابع f في المجال [illegible]

المسألة السابعة :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني C أوجد كل مقارب للخط C يوازي احد المحورين الاحداثيين

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبين ما له من قيم كبرى محليا و ما له من قيم صغرى محليا
2. برهن أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية له ثم ارسم الخط C
3. انطلاقاً من C ارسم الخط البياني [illegible] g
4. احسب مساحة السطح المحصور بالخط C والمستقيمين [illegible] x

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وارسم C

3) احسب مساحة السطح المحدد بـ C والمحور Ox والمستقيم $x = 1$ والمستقيم $x = 0$

المسألة الرابعة عشر:

f و g هما تابعان المعرفان على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

و $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ، و h هو التابع المعرف على R وفق $h = \frac{g}{f}$

احسب كلا من $f'(x)$ و $g'(x)$ واثبت أن $h' = \frac{1}{f^2}$

المسألة الخامسة عشر:

f هو التابع المعرف على المجال $I = R^{*+}$ وفق : $f(x) = 2 + \ln x$ بين أن f أشتقاقي على I

واحسب $f'(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1 ، استنتج $f'(\sqrt{x})$

المسألة السادسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^{*+} بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{2x-1} - \sqrt{2x}$ و

المتتالية: $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

1) تحقق أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$ و اثبت أن $0 \leq f(x) \leq 1$ و أيضا $0 \leq u_n \leq 1$

2) اثبت أن $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

المسألة السابعة عشر:

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ، $t_n = -\frac{1}{n}$ أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة

المسألة الثامنة عشر:

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

1) ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f و مقارباته ثم أثبت أن $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل

2) احسب احداثيات نقطة تقاطع المستقيم $d: y = x$ مع C_f ثم ارسم d على الشكل السابق

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $u_0 = 2$

ونعلم أن $u_n \geq 0$ أياً يكن n برهن بالتدريج $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

4) أثبت أن النقطة $(0,0)$ مركز تناظر للخط البياني C_f

المسألة التاسعة عشر:

1) حل في R جملة المعادلتين : $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

2) إذا كان $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^t - 3}{e^t + 4}\, dx$ ، $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^t + 4}\, dx$ فاحسب $I - 3J$ ، $I + J$ واستنتج قيمة كل من I ، J

المسألة العاشرة:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \cdots - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$.

❖ أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة

المسألة الحادية عشرة:

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \sin x$ وبافتراض أن f اشتقاقية n مرة على R
اثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $f^{(n)}(x) = sin(\frac{\pi}{2}n + x)$.

المسألة الثانية عشرة:

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق : $x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ ، $y_n = x_n + 3$

1) اثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية ثم اكتب y_n ثم x_n بدلالة n
2) نضع $s_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $s'_n = x_0 + \cdots + x_n$ احسب كلا من s_n و s'_n بدلالة n
3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(s_n)_{n\geq0}$ و $(s'_n)_{n\geq0}$

المسألة الثالثة عشرة:

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

1) اثبت أن التابع f زوجي واستنتج الصفة التناظرية للخط C
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها
3) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور xx' والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$
4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول xx'

المسألة الرابعة عشرة:

لتكن مجموعة التوابع $f_\lambda(x) = \ln(x^2 + \lambda)$ حيث λ وسيط حقيقي

أولاً : عين قيمة الوسيط λ ليمر خطه البياني بالنقطة $(2, \ln 3)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
وفق : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'
2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) إذا كان C_1 الجزء من الخط C الذي تكون فاصلة كلٍّ من نقاطه موجبة فاكتب معادلة المماس للخط C_1 في نقطة تقاطعه مع محور xx'

المسألة الخامسة عشرة:

لتكن مجموعة التوابع : $f(x) = ae^{-x} + b$

أولاً : أوجد التابع العددي الذي يمر خطه البياني من مبدأ الإحداثيات ويكون المستقيم $y = 2$ مستقيما مقارباً للخط البياني للتابع f

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = -2e^{-x} + 2$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور xx' أو المحور yy'
2) ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولا بها
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4) اكتب معادلة مماس الخط C الذي ميله يساوي 2
5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المماس السابق و المستقيم $x = 1$

المسألة السادسة والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ ولتكن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$

1) عين a, b إذا علمت أن المستقيم d يمس C في نقطة من محور xx'
2) ادرس تغيرات f: $f(x) = \frac{2x-1}{4x}$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ ونظم جدولاً بها ثم أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و d و المستقيم $\Delta: x = 2$
5) أوجد معادلة مماس آخر لـ C يوازي المماس d

المسألة السابعة والعشرون:

ثانيا: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$ خطه البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها
2) استنتج من جدول التغيرات أنه إذا كان $b \in R$ كانت المعادلة $be^x = 2 - b$ غير قابلة للحل عندما $b \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ ولها جذر وحيد عندما $b \in]0, 2[$
3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبين وضع C بالنسبة إلى كل مقارب له
4) أوجد معادلة المماس Δ للخط C في النقطة $A(0, 1)$
5) ارسم كل مقارب للخط C وارسم Δ ثم ارسم C

المسألة الثامنة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{-2, 0\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2x}$

1) أثبت أن f يكتب بالشكل $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{x^2+2x}$
2) ابحث عن كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته
3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب للخط C ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة لـ Δ

المسألة التاسعة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $]-\infty, 3]$ وفق $f(x) = x\sqrt{3-x}$ خطها البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم عين ما للتابع f من قيم كبرى وصغرى محلياً
2) ارسم الخط C
3) أثبت أن التابع g المعين بالعلاقة: $g(x) = \frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x}$ هي تابع أصلي على المجال $]-\infty, 3]$ للتابع f
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$, $x = 0$

النجاح لا ينتظر أحد، بل يتطلب الكثير من الجهد والعمل الشاق وانتهاز الفرص

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثلاثون

f هو التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$

1) أثبت أن $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$ أيا يكن $x > 1$
2) استنتج نهاية f عند $+\infty$

المسألة الحادية والثلاثون

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = e^{2x} \cos x$

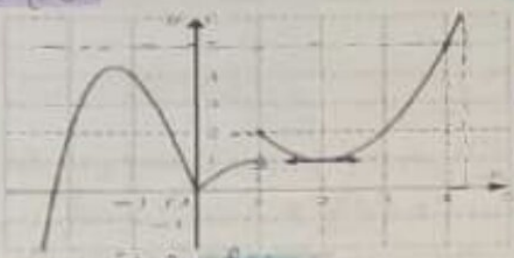
1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2) عين عددين a ، b يحققان المساواة $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ أيا كان x
3) استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على R

المسألة الثانية والثلاثون

ليكن التابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x+1}$

1) ادرس تغيرات التابع f
2) تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]0, +\infty[$

المسألة الثالثة والثلاثون : نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R و المطلوب :



1. ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 5$
2. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$
3. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع علل ذلك
4. ماعدد القيم الحدية للتابع f
5. ماقيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$
6. أيكون التابع f اشتقاقيا عند $x = 1$

المسألة الرابعة والثلاثون : دورة 2019

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند الصفر
2. عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

المسألة الخامسة والثلاثون :

يكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ و المطلوب :

1. عيّن العددين الحقيقيين a ، b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1, 0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$
2. من أجل $b = -4$ ، $a = 4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة السادسة والثلاثون: [illegible] u_n والمطلوب :

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$
2. أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$
3. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أيا كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9 , 2.1[$

المسألة السابعة والثلاثون: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. في معلم متجانس ارسم الخط C
4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محوري الاحداثيات و المستقيم $x = 1$
5. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x) = 2xe^x$
6. اثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$

المسألة الثامنة والثلاثون: احسب الأعداد:

① $\int_0^3 (2 - |2 - x|)dx$

② $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

المسألة التاسعة والثلاثون: إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{x}$ أيا يكن x من R^* أوجد نهاية التابع f عند الصفر

المسألة الأربعون: ليكن C الخط [illegible] $]-\infty$ [illegible] بالعلاقة $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$

1. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f
2. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
3. ارسم الخط C في معلم متجانس
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n = f(n)$ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   اثبت أن $S_n = \ln(\frac{(n+2)(n+1)}{2})$

المسألة الواحدة والأربعون: أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق: $g(x) = e^x + 2$ [illegible]

ادرس اطراد التابع g و استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : [illegible]

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ و المستقيمين $x = 0 , x = 1$

المسألة الثانية والأربعون: لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة : $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ و $x_0 = 5$

1. احسب x_1 , x_2 , x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية
2. نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية
3. اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثالثة و الأربعون :

أثبت صحة المساواة $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

المسألة الرابعة و الأربعون :

ليكن C الخط البياني المعرف على R بالصيغة : $f(x) = xe^{-x}$

1. احسب نهاية التابع f عند $-\infty$, $+\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f و نظم جدولاً بتغيراته و عيّن قيمته الحدية ثم ارسم C
2. احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$, $x = 1$
3. بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي : $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ و $u_0 = 1$
   1) أثبت أن $0 < u_n < 1$ وذلك مهما كان الدليل n
   2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ، ثم بين تقاربها و احسب نهايتها

المسألة الخامسة و الأربعون :

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$

وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ احسب كلا من $g(1), g'(x), g'(1)$ واستنتج $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$

المسألة السادسة و الأربعون :

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

1. أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x) = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$
2. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

ثانيا : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $g(x) = -2x\ln x$

أثبت أنه عند $x > 0$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ و استنتج الوضع النسبي للخطين C_g , C_f

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0, +\infty[$

1. بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$
2. ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_g عند النقطة التي فاصلتها x_0

المسألة السابعة و الأربعون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الاحداثيين و عيّن قيمته الحدية مبينا نوعها
2. ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C
3. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e^2}$

المسألة الثامنة و الأربعون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق :

$f(x) = e^x + \ln(1-x)$ وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x) = (1-x)e^x - 1$. والمطلوب :

1. ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$
2. تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$
4. في معلم متجانس ارسم المستقيم T , ثم ارسم C الخط البياني للتابع f

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة التاسعة والأربعون : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - |x|$

احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الخمسون : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية :

$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$ ، $u_0 = \frac{5}{2}$ عند كل n والمطلوب :

1. اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. اثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة
4. بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

المسألة الواحدة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها و استنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه
2. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
3. بيّن أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α و أن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$ واستنتج أن □ تحقق المعادلة $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = 1$ ، $x = 0$
5. استنتج مجموع تعريف التابع $x \to g(x) = ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

المسألة الثانية والخمسون :

لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ والمطلوب :

1. اثبت أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً
2. اثبت أن s_n تكتب بالشكل $s_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$

المسألة الثالثة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف واكتب معادلة كل مقارب وجدته .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0, 2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C, T
4. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T و الخط البياني C
5. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C' للتابع g

المسألة الرابعة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - ln(x)$ والمطلوب :

1. أوجد مجموعة تعريف التابع ثم أوجد كل مقارب للخط البياني C .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الصغرى محلياً
3. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط البياني C
4. استنتج رسم الخط C' للتابع g المعرف وفق $g(x) = \frac{-1}{8}x^2 + ln(-x)$
5. باستعمال التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

المسألة الخامسة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = x + x(lnx)^2$ المعرف على $I =]0, +\infty[$

وليكن $g(x) = (ln(x) + 1)^2$ المطلوب :

1. أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$
2. اثبت $f'(x) = g(x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

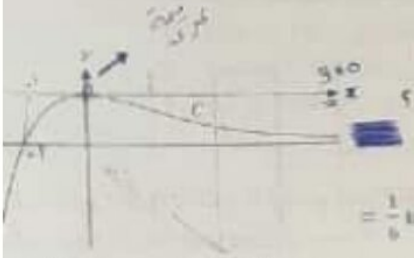
$-1 < k < 0$

3. حل المعادلة $g(x) = 0$
4. نظم جدول بتغيرات f
5. اكتب معادلة المماس Δ في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{2}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة السادسة والعشرون: ليكن ... $f(x)$ المعرف على $I = [0, 2]$

والمطلوب: ارسم C ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل

المسألة السابعة والعشرون: ... المطلوب:



1. ما معادلة المستقيم المقارب للخط C وما الوضع النسبي للخط C مع المقارب ؟
2. يقبل f فيما حدبة حددها وحدد نوعها
3. في حالة عدد حقيقي K عين بدلالة K عدد حلول المعادلة $f(x) = K$

المسألة الثامنة والعشرون: لتكن ... $= \frac{1}{6}u_n + ...$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من ... $v_n = u_n - ...$

1. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم يطلب تعيين أساسها
2. استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

المسألة التاسعة والعشرون: ليكن ... $I = R \setminus \{0, 1\}$ وفق:

$f(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ والمطلوب:

① A أثبت أن $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f

B استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط C

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه

③ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة على مقاربه d

④ ارسم في معلم واحد d ثم C

المسألة الثلاثون: ليكن C الخط ... $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$
4. في معلم متجانس ارسم الخط C
5. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع: $g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$

المسألة الواحدة والثلاثون: ... $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots$

المطلوب:

1. أثبت أن $n \le 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 1$
2. استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثانية و العشرة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

والمطلوب :

1. اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

المسألة الثالثة و العشرة: اثبت أن $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أيا كان $x > -1$

المسألة الرابعة و العشرة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0, 2[$
2. جد $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

المسألة الخامسة و العشرة: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية :

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ $u_0 = 3$ عند n وليكن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ و المطلوب :

5. اثبت أن التابع متزايد تماما على $]2, +\infty[$
6. اثبت بالتدريج أن أيا كان العدد الطبيعي $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$
7. استنتج أن المتتالية متقاربة و احسب نهايتها

المسألة السادسة و العشرة: ليكن التابع $f(x) = x + 1 + \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ ، اثبت أن المستقيم الذي معادلته $d : y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$

المسألة السابعة و العشرة: لتكن المتتالية: $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجيا وفق: $U_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$ ، $u_0 = \frac{5}{2}$

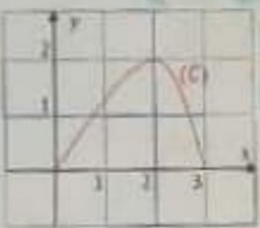
1- ارسم في معلم متجانس المستقيم Δ الذي معادلته $Y = x$ والخط c الممثل للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

2- باستعمال الرسم السابق مثّل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3, u_4

3- ليكن $V_n = u_n - 6$: أ- اثبت أن (v_n) متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$

المسألة الثامنة و العشرة: في الشكل (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0, 3]$ بالصيغة: $f(x) = x\sqrt{3 - x}$ ... عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S



1) ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x, 0)$ في حالة $x \in]0, 3[$ ؟

2) عيّن $A(x)$، مساحة هذا المقطع بدلالة x، ثم استنتج V حجم المجسم S

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الأشعة في الفراغ

خلاصة بحث الأشعة في الفراغ

1) لإثبات كون ثلاث نقاط على استقامة واحدة نطبق ما يلي

- نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين
- نثبت أن شعاعين مرسومين منهما مرتبطان خطياً

2) لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد نثبت ما يلي

- ثلاث أشعة مرسومة منها مرتبطة خطياً نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد لبقية النقاط

3) معادلة كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها R هي

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

4) معادلة كرة مركزها O (0 , 0 , 0) ونصف قطرها R هي

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

5) معادلة مخروط

* رأسه O ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته دائرة مركزها $(h,0,0)$ ونصف قطرها r هي

$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0 \; ; 0\le x\le h$$

- رأسه O ومحوره $(o,\vec{j})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0,h,0)$ ونصف قطرها r هي

$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0 ; \; 0\le y\le h$$

* رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0,0,h)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0 \; ; 0\le z\le h$$

6) معادلة الأسطوانة

* محورها $(o,\vec{i})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(a,0,0)$, $(b,0,0)$ هي

$$y^2+z^2=r^2 \; ; a\le x\le b$$

* محورها $(o,\vec{j})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(0,a,0)$, $(0,b,0)$ هي :

$$x^2+z^2=r^2 \; ; a\le y\le b$$

* محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما , $(0,0,b)$

$$y^2+x^2=r^2 \; ; a\le z\le b$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

7) إيجاد توازي مستقيمين

نثبت الارتباط الخطي لشعاع توجيه للمستقيم الاول مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني

8) إثبات تقاطع مستقيمين

① نبرهن أن شعاع توجيه للمستقيم الأول غير مرتبط خطياً مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني

② نبرهن أن المستقيمين يقعان في مستوٍ واحد

9) فائدة الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

① إثبات انتماء اربع نقاط على مستوٍ واحد

② إثبات توازي مستويين .

③ إثبات توازي مستقيم ومستوٍ .

④ إثبات وقوع ثلاثة أشعة في مستوٍ واحد

10) فائدة مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

① إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة

② إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد

③ إثبات تقاطع مستقيمات .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إحداثيات المكعب في معلم متجانس في الفراغ

لدينا معلم $\left(A, \frac{1}{٥}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{٥}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{٥}\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0, 0, 0)$

$B(٥, 0, 0)$

$D(0, ٥, 0)$

$E(0, 0, ٥)$

$C(٥, ٥, 0)$

$F(٥, 0, ٥)$

$H(0, ٥, ٥)$

$G(٥, ٥, ٥)$

فاصلة ترتيب راقم

ABCDEFGH مكعب طول حرفه (٥)

نتائج:

① كل نقاط المستوي الأرضي D , C , B , A راقمها (0)

② كل نقاط المستوى الخلفي F , E , B , A ترتيبها (0)

③ كل نقاط المستوى اليساري H , E , D , A فاصلتها (0)

④ كل نقاط المستوي اليميني (المظلل) B , C , G , F فاصلتها (٥)

⑤ كل نقاط المستوي العلوي H , G , F , E راقمها (٥)

⑥ كل نقاط المستوي الأمامي G , H , C , D ترتيبها (٥)

ملاحظات :

- يمكن ترميز المعلم السابق كما يلي $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ بحيث $\left(٥\vec{i} = \overrightarrow{AB}, ٥\vec{j} = \overrightarrow{AD}, ٥\vec{K} = \overrightarrow{AE}\right)$
- إذا كان طول ضلع (حرف) المكعب يساوي (2) مثلاً ..فإننا نضع عوضاً عن (٥) في الإحداثيات السابقة العدد (2)
- إذا كان طول الضلع يساوي (2) نرمز للمعلم بالشكل $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ أو كما يلي :

$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الارتباط الخطي لشعاعين

شرطه هو: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ حيث λ عدد حقيقي.

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{v}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ المركبات متناسبة.

نتائج:

1- الارتباط الخطي لشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ يعني أن المستقيمان (AB) و(CD) متوازيان

2- الشعاعان $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A, B, C على استقامة واحدة.

مثال امتحاني: ليكن لدينا النقاط:.

$$A(2, 1, 0), B(3, 2, -1), C(0, 2, -5)$$

هل النقاط C, B, A على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \neq 1$$

فالشعاعان غير مرتبطان خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستو

تذكر هام:

3 نقاط ليست على استقامة واحدة .. تعين مستو

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

لإثبات أن ثلاثة أشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً نثبت أنه يوجد عددان حقيقيان α, β يحققان العلاقة: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

هام: مراجعة النماذج الشاملة لمركز أونلاين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين امتحاني

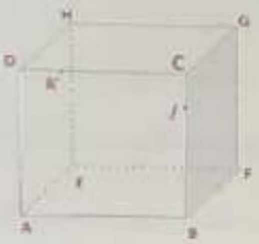
$ABCDEFGH$ مكعب حيث [redacted] بحيث : $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

المطلوب: 1) جد إحداثيات [redacted]).

2) [redacted]

3) أثبت أن [redacted]

4) استنتج أن [redacted]



الحل:

(1 $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$ [redacted]

$K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$ [redacted]

(2 $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ [redacted]

[redacted] $\frac{1}{\frac{3}{4}}$

$1 \neq 0$

المركبات غير متناسبة [redacted]

*طريقة لإيجاد حداثيات K: [redacted]

[redacted] $\frac{1}{4}(1,0,0)$

[redacted] $K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$

(3 [redacted] $\overrightarrow{EJ} + \beta\overrightarrow{EG}$

ونحسب $\beta, \propto$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \propto\left(1,-1,\frac{3}{4}\right) + \beta(1,0,1)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\propto,-\propto,\frac{3}{4}\propto\right) + (\beta,0,\beta)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\propto+\beta,-\propto+0,\frac{3}{4}\propto+\beta\right)$$

$$\propto+\beta = \frac{1}{4} \quad ①$$

$$-\propto = -1 \Rightarrow \propto = 1 \quad ②$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{3}{4}\alpha + \beta = 0 \quad ③$$

من العلاقة ② نعوض في ①:

$$1 + \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{4}$$

نعوض في ③

$$\frac{3}{4}(1) + \left(\frac{-3}{4}\right) = 0$$

محقق 0=0

$$\overrightarrow{HK} = 1\overrightarrow{EJ} - \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$$

فالاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

4) من الطلب السابق: لدينا الاشعة $\overrightarrow{EG}$ و$\overrightarrow{EJ}$ و$\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً ومنه المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)
أي: (HK) \\ (EGJ)

معادلة المستوي

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

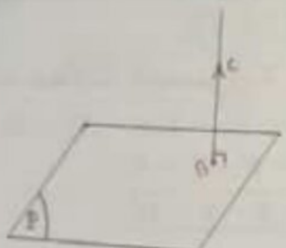
النقطة

حالات معادلة المستوي

1) معادلة مستوٍ من نقطة و ناظم معلوم (يعامد شعاع معلوم):

نعوض مباشرة في معادلة المستوي

مثال: عيّن مستوٍ يمر بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{BC}$ ناظماً: حيث $C(-1,2,1)$ ، $B(+2,-1,0)$



$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-3,3,1)$$

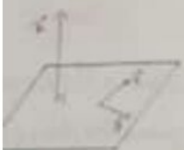
$$\Rightarrow a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$\Rightarrow -3(x - 2) + 3(y + 1) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 3y + 6 + 3 + z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: -3x + 3y + z + 9 = 0}$$

2) معادلة مستوي من ثلاث نقاط او (علم شعاعا توجيهه $\vec{u}, \vec{v}$ ويمر بنقطة):



1) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم

2) $\vec{n} \perp \vec{u} \Leftarrow ax_1 + by_1 + z_1 = 0$ *

3) $\vec{n} \perp \vec{v} \Leftarrow ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$ **

4) نفرض عدد = c ولعوض في *و** ونحل حل مشارك فنحسب a, b ثم نعوض في معادلة المستوي.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

لیكن لدينا النقاط التالية:

$A(1,2,3)\,,B(2,1,2)\,,C(3,3,1)$

المطلوب:

1) اثبت أن النقاط C ,B,A تعين مستو.
2) عين شعاع ناظم على المستوي (ABC).
3) أكتب معادلة للمستوي (ABC).

الحل: $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{-1}{-2}\;\Rightarrow\frac{1}{2}\neq-1$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط C ,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستو

2-شعاعا توجيه المستوي هما:

$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)\;,\overrightarrow{AC}(2,1,-2)$

نفرض الناظم $\vec{n}\,(a,b,c)$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$\Rightarrow\boxed{a-b-c=0}\;*$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$\boxed{2a+b-2c=0}\;**$$

نفرض $c=1 \Leftarrow$ نعوض في * :

$$\boxed{a-b-1=0}\;*$$
$$\boxed{2a+b-2=0}\;**$$

بالجمع نجد $3a-3=0\Rightarrow 3a=3$ فإن $a=1$

نعوض في * : $1-b-1=0\;\Rightarrow b=0$

$$\Rightarrow\vec{n}=(1,0,1)$$

هام جداً: راجع نوطة النماذج الشاملة النهائية لمركز أونلاين يمكن طلبها من مكتبة الأمل 0959458194

ملاحظة هامة: لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين نوجد نقطة من أحدهما ثم نحسب بعدها عن المستوي الآخر

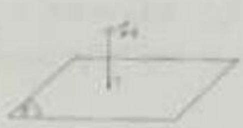
$\Leftarrow$ معادلة المستوي:

$$\Rightarrow 1(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0$$
$$\Rightarrow x-1+z-3=0$$
$$\Rightarrow\boxed{P\colon x+z-4=0}$$

وظيفة

أوجد معادلة مستوي مار بالنقطة $A(2,0,1)$ ويقبل $\vec{u}(1,0,2)$ و$\vec{v}(0,-2,1)$ شعاعي توجيه لها

3) معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي مستو معلوم:



نعتبر ناظم المستوي المعلوم هو ناظم المستوي المطلوب
لأن (المستويان المتوازيان ناظماهما مرتبطان خطيا)
ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي ثم ننشر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

اكتب معادلة المستوي P [redacted] $Q: 2x + y + 8z$

الحل : لدينا P [redacted]

[redacted] $+ 8(z-2) = 0$

[redacted] $- 17 = 0$

4) معادلة مستوي [redacted]

نعتبر شعاع توجيه المستقيم [redacted] في معادلة المستوي

مثال

اكتب معادلة [redacted] (AB) حيث

[redacted] $A(3,0,-3)$

الحل : [redacted] $3,5)$

[redacted] $+5(z-4)=0$

[redacted]

5) معادلة المستوي ا[redacted]

نعتبر الناظم $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ [redacted]

مثال

أوجد معادلة [redacted] و $B(3,-1,4)$

الحل : $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\,(x_B$ [redacted] $2,2)$

النقطة التي [redacted]

[redacted] $) \Rightarrow I(2,0,3)$

[redacted] $0)+2(z-3)=0$

[redacted] $x-y+z-5=0$

6) معادلة مستوي [redacted]

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم [redacted] $\vec{n}$ فنعود للحالة (2)

مثال

أوجد معادلة [redacted] المستويين Q, P حيث:

[redacted] $+ z - 1 = 0$

الحل : نفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$ فيكون :

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow 2a + c = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_Q} = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \quad (2)$$

بفرض $c = 1$ نحل المعادلتين فينتج $a = \frac{-1}{2}$ ، $b = \frac{3}{2}$

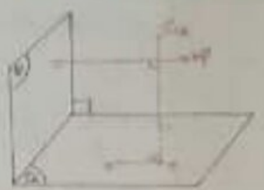
$$a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0 \Rightarrow R: -x + 3y + 2z - 7 = 0$$

7) معادلة مستوي يمر من نقطتين ويعامد مستوي :

نفرض ناظم يعامد ناظم المستوي المعطى فتنتج علاقة و يعامد الشعاع المار من النقطتين فتنتج علاقة ثانية فنعود للحالة (2)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ عموديا على المستوي P حيث: $P: 2x-3y+z-5=0$



الحل: $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ و $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ فيكون:

$$n_Q \perp n_P \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow 2a-3b+c=0 \quad ②$$

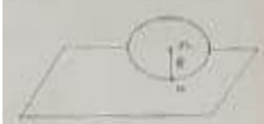
$$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -3a+4b+5c=0 \quad ①$$

بفرض $c=1$ فيكون $a=19$, $b=13$ $\Leftarrow Q: 19x+13y+z-25=0$

8) معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها:

نعتبر الناظم هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الكرة والنقطة هي نفسها نقطة التماس

مثال لتكن لدينا الكرة S التي معادلتها $S: x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$
اكتب معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة $A(1,1,0)$



الحل: مركز الكرة $\Omega(0,-2,-1)$, ونقطة التماس $A(1,1,0)$

$$\overrightarrow{\Omega A}\,(1,3,1)$$

$$\Rightarrow (x-1)+3(y-1)+(z-0)=0 \Rightarrow x+3y+z-4=0$$

9) معادلة مستوي يمر من أربع نقاط A, B, C, D:

نوجد معادلة المستوي المار من النقاط A, B, C ثم نبرهن أن D تنتمي للمستوي (نعوض)

الكرة

هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة

النقطة الثابتة: مركز الكرة البعد الثابت: نصف القطر R

معادلة الكرة: $(x-x_{\text{المركز}})^2+(y-y_{\text{المركز}})^2+(z-z_{\text{المركز}})^2=R^2$

أشكال معادلة الكرة

1) كرة علم مركزها ونصف قطرها:

نعوض في المعادلة مباشرة دون فك الأقواس

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $\Omega(1,0,-2)$ ونصف قطرها يساوي $R=\sqrt{3}$

الحل: نعوض في المعادلة $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) كرة علم مركزها وقر بنق[redacted]

نحسب نصف القطر وهو [redacted] و مركز الكرة

مثال اكتب معادلة [redacted] $A(-$

الحل : [redacted] $(1+2)^2$

ومنه $R = \sqrt{19}$ نعوض في المعادلة [redacted] $(x - x_\Omega)^2 +$ [redacted]

3) كرة علم طرفا قطرها :

نحسب نصف القطر ([redacted] احداثيات منتصف

قطعة مستقيمة (منتصف [redacted]

مثال اكتب معادلة كر[redacted]

الحل : $R = \frac{BA}{2} =$ [redacted]

نعوض في المعادلة [redacted] $= \frac{11}{4}$

هام جداً : لاثبات كرة تمس مستوي نثبت أن بعد مركز الكرة عن المستوي يساوي نصف القطر

4) كرة علم مركزها وتمس [redacted]

R هو البعد بين مركز [redacted]

مثال

لتكن النقطة [redacted]

[redacted] $- y + 2z - 1 = 0$

الحل : [redacted]

$\Rightarrow$ [redacted] $\frac{4}{\sqrt{14}}$

[redacted]

الوضع النسبي لمستقيم وكرة :

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة الكرة ثم نحل المعادلة الناتجة عن طريق المميز Δ ونميز ثلاث حالات :

1) $\Delta < 0$: مستحيلة الحل فالمستقيم لا يقطع الكرة (خارج الكرة)

2) $\Delta = 0$: يوجد حل وحيد والمستقيم مماس للكرة في نقطة نحصل عليها بتعويض قيمة الحل في المعادلات الوسيطية

3) $\Delta > 0$: يوجد حلين فالمستقيم يقطع الكرة في نقطتين مختلفتين نحصل عليهما بتعويض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي

الوضع النسبي لمستوي وكرة :

نحسب البعد $dist$ بين مركز الكرة والمستوي ونميز مايلي :

1) $dist > R$: المستوي خارج الكرة (غير قاطع)

2) $dist = R$: المستوي مماس للكرة

3) $dist < R$: المستوي قاطع للكرة في دائرة مركزها هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ونصف قطرها يحسب بفيثاغورث $r = \sqrt{R^2 - (dist)^2}$

مركز الأبعاد المتناسبة

• يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, \beta), (A, \alpha)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0$ حيث : $\alpha + \beta \neq 0$

• إذا كان G (م.أ.م) للنقاط $(B, \beta), (A, \alpha)$ فإن : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}$ (علاقة الإنشاء)

• يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B, \beta), (A, \alpha), (C, \gamma)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

• يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B, \beta), (A, \alpha), (C, \gamma), (D, \delta)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$

دورة 2017 $ABCD$ رباعي وجوه و $\propto$ عدد حقيقي ولدينا I, J هما بالترتيب منتصفا $[AB], [CD]$ و E, F نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن I, J, H تقع على استقامة واحدة

الحل:

$\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}$ ومنه F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1-\propto)$ $(c, \propto)$

$\overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$ ومنه E (م.أ.م) للنقطتين $(A, 1-\propto)$ $(D, \propto)$

ولكن H (م.أ.م) للنقطتين $(E, 1)$ $(F, 1)$ ومنه $(H, 2)$ (م.أ.م) لرؤوس رباعي الوجوه حسب الخاصة التجميعية

$(I, 2 - 2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(A, 1-\propto)$ $(B, 1-\propto)$

$(J, 2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(D, \propto)$ $(C, \propto)$

ومنه H (م.أ.م) للنقاط $(J, 2\propto)$ $(I, 2 - 2\propto)$ فالنقاط I, J, H على استقامة واحدة

فائدة استخدام مركز الأبعاد المتناسبة

1. اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

⇐ يجب أن نثبت أن إحداهما هي مركز أبعاد للنقطتين الأخرتين

2. اثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد

⇐ يجب أن نثبت أن إحداها هي مركز أبعاد للنقاط الثلاث الأخرى

3. اثبات تقاطع مستقيمات في نقطة

⇐ يجب أن نثبت وجود مركز أبعاد مشترك بين نقطتين من كل مستقيم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تحديد مجموعة النقاط

تحديد مجموعة النقاط من الشكل [redacted]

نتمم الطرف الأيسر إلى مربع [redacted]

[redacted] $= const$

عندها نميز ثلاث حالات :

1) $const > 0$: تمثل كرة [redacted]

2) $const = 0$: تمثل نقط[redacted]

3) $const < 0$: تمثل مجمو[redacted]

مثال في معلم متجانس [redacted] M [redacted] من الفراغ

[redacted]

الحل : [redacted] $= 2$

[redacted] $z^2 = 2$

[redacted] $z^2 = 12$

ومنه مجموعة [redacted] $2\sqrt{3}$

تحديد مجموعة نقاط من الفراغ [redacted]

- $\|\overrightarrow{MA}\| = const \Leftarrow$ مجموعة [redacted] $R = const$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftarrow$ مجموعة [redacted] $[AB]$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \Leftarrow$ مجموعة [redacted] $[AB]$

مثال ليكن H مركز [redacted] مجموعة

النقاط M من الفراغ [redacted]

الحل : بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ فإن:

$$\|3\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{15} \Rightarrow \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

ومنه مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة H بعداً ثابتاً $\frac{\sqrt{15}}{3}$ فهي تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{15}}{3}$

ملاحظة : ممكن فرض مركز أبعاد متناسبة للنقاط في حال لم يرد ذلك في طلبات سابقة

وظيفة $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC..جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة أشعة امتحانية شاملة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0)$ ، $B(4,3,-3)$، $C(-1,1,2)$، $D(0,0,1)$
المطلوب :

1. أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ..وهل النقاط A, B, C على استقامة واحدة
2. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$
3. جد احداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة I
4. جد احداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
5. هل المثلث ABC قائم ..فسر ذلك .
6. هل النقطة $F(2,3,-1)$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$
7. أوجد معادلة كرة مركزها A و تمر من D
8. جد على محور التراتيب نقطة M' متساوية البعد عن D, B

9. أوجد النقطة $K(x,y,z)$ بحيث يكون $ABCK$ متوازي اضلاع
10. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا .
11. استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$ حيث أن α, β, γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها
12. هل تقع E, D, C, B على كرة واحدة مركزها A ؟؟
13. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق احداثياتها العلاقات $2 \le z \le 5, x^2 + y^2 = 16$
14. $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD
أثبت أن النقاط K ، A ، G تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$

الحل :

1. $\overrightarrow{AB} = (3,3,-3)$ ، $\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)$ فالشعاعان غير مرتبطان لعدم تناسب المركبات
2. $I(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2})$
3. $\frac{5}{2} = \frac{1+x_E}{2} \Rightarrow x_E = 4$
$\Rightarrow y_E = 3$, $z_E = -3$
4. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$x-4 = 7 \Rightarrow x = 11$, $y-3 = 1 \Rightarrow y = 4$, $z+3 = -7 \Rightarrow z = -10$

$M(11,4,-10)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5 حسب عكس فيثاغورث المثلث ليس قائم

6 الشرط $\Leftarrow [FA] = [FB]$ $\sqrt{8} \neq \sqrt{11}$ لا تنتمي إلى المستوي المحوري

7 $(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2$

8 نفرض $\Leftarrow BM' = DM'$ $M'(0, y, 0)$

$$\sqrt{16+(y-3)^2+9} = \sqrt{y^2+1} \Rightarrow y = 5.5$$

9 $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow K(-4, -2, 5)$

10 فالأشعة مرتبطة خطيا $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

11 $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow -7\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = 0$

12 الشرط $AE = AD = AC = AB$

13 مجموعة النقاط تمثل أسطوانة محورها $(\overline{OK})$ ونصف قطرها $r = 4$ ومركزي القاعدتين $(0, 0, 5), (0, 0, 2)$

14 راجع كتاب الجزء الثاني ص29

المستقيـــــم في الفراغ

المعادلات الوسيطية للمستقيم

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}\right\} t \in R$$

نحتاج

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$

تطبيق: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 1, 0)$ ويقبل $\vec{u}(3, -2, 1)$ شعاع توجيه.

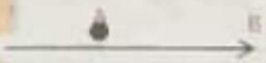
$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \Rightarrow x = 2 + 3t \\ y = y_0 + bt \Rightarrow y = 1 - 2t \\ z = z_0 + ct \Rightarrow z = t \end{array}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right\} t \in [0, +\infty[$$

دورة: أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) حيث $A(2, -1, 0)$ و $B(-2, 3, 2)$



الحل

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4, 4, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \Rightarrow x = 2 - 4t \\ y = y_0 + bt \Rightarrow y = -1 + 4t \\ z = z_0 + ct \Rightarrow z = 2t \end{array}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right\} t \in [0, 1]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستويان

- متعامدان ← الناظمان متعامدان
- متوازيان ← الناظمان مرتبطان خطياً
- متقاطعان ← الناظمان غير مرتبطان خطياً

مستقيم ومستوي

- المستقيم // المستوي ← شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم
- المستقيم ⊥ المستوي ← شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع الناظم
- المستقيم يقطع المستوي ←

الشرط : شعاع توجيه المستقيم لا يعامد الناظم

خطوات إيجاد نقطة التقاطع

1) نوجد معادلات المستقيم.
2) نعوض في المستوي.
3) نحسب t.
4) نعوض مرة أخرى في معادلات المستقيم.
5) نوجد نقطة التقاطع.

** إذا كانت الجملة مستحيلة فإن المستقيم لا يقطع المستوي.

** إذا حصلنا على مساواة محققة دوماً مثل 0=0 فالمستقيم محتوى في المستوى.

طريقة أخرى لإثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ:

أن يعامد مستقيمين متقاطعين في المستوي.

نتيجة: لإثبات $\overrightarrow{n}$ ناظم على المستوى يجب أن يعامد شعاعين غير مرتبطين في المستوي :

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n}\ (\text{ناظم})$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين محلول: أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة يطلب تعيينها $A(3,1,-2)$ و $B(0,2,1)$

$$P: 2x - y + z - 2 = 0$$

الحل: شرط التقاطع $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} \neq 0$

$\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$

$\vec{n} = (2,-1,1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ لا يعامد الناظم $\vec{n}$

$\Leftarrow$ المستقيم (AB) يقطع المستوي P

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in R$$

$\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= -2 + 3t \end{aligned}\right\} t \in R$$

نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي P فنجد $t = \frac{1}{4}$

نعوض t في معادلات المستقيم $\left(\frac{9}{4}, \ldots\right)$

الوضع النسبي لمستقيمين

- **شعاعا التوجيه**
  - مرتبطان خطياً
    - المستقيمان متوازيان ← بالحل المشترك ← مساواة خاطئة
    - المستقيمان منطبقان ← بالحل المشترك ← مساواة محققة دوماً
  - غير مرتبطان خطياً
    - المستقيمان متقاطعان ← بالحل المشترك ← t أو s = عدد ← نعوض فنتنتج نقطة التقاطع
    - المستقيمان متخالفان ← بالحل المشترك ← المساواة خاطئة

الحالات الثلاثة الأولى: المستقيمان يقعان في مستو واحد

في حالة متخالفان: المستقيمان لا يقعان في مستو واحد

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين: (هل يقع المستقيمان في مستو واحد)

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in R \quad \text{و} \quad L_2: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 3s \end{cases} ; s \in R$$

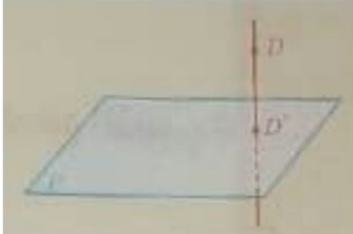
الحل : المستقيمان غير متوازيين لأن شعاعي التوجيه لهما غير مرتبطين خطياً (تحقق من ذلك) ؛
لذا لدراسة تقاطعهما نحل معادلاتهما حلاً مشتركاً.

$$2 + 2t = 2 + s$$
$$2 + t = -1 - s$$
$$1 + 2t = 3s$$

بحل المعادلتين الأولى والثانية نجد : $t = -1$ و $s = -2$

ولكن هذا لا يمثل حلاً للمعادلة الثالثة ، فجملة المعادلات متناقضة ، ولا حل مشتركاً لها ،
والمستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستو واحد .

مسقط نقطة D على مستوي P (بطريقة امتحانيه سهلة) :



1. نوجد معادلة للمستوي P
2. نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D و شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P ونحسب t ثم نعوض في المعادلات الوسيطية فينتج المسقط القائم للنقطة D على المستوي P وهو D'

تطبيق

أوجد مسقط النقطة $D(1,0,1)$ على المستوي $P : x + y + z + 1 = 0$

الحل: نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D والذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوى P

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P

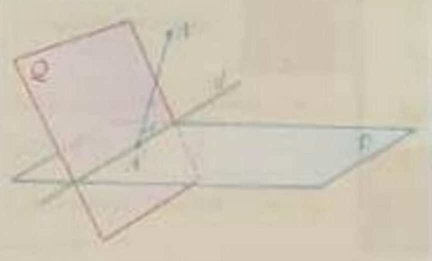
$$1 + t + t + 1 + t + 1 = 0$$
$$3t + 3 = 0 \implies t = -1$$

نعوض t في المعادلات الوسيطية فنجد $x = 0 \ , \ y = -1 \ , \ z = 0$

$$\implies D'(0, -1, 0)$$

إيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ :

أو- إيجاد بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين $P \ , Q$:



1. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (الفصل المشترك)وليكن d
2. نوجد معادلة المستوي المار من النقطة A و العمودي على المستقيم (نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم) وليكن T
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي T فتنتج t ثم نعوض مرة أخرى في المعادلات الوسيطية ل d فنجد مسقط النقطة A على المستقيم d و ليكن A'
4. نوجد البعد بين A و مسقطها A' بقانون المسافة بين نقطتين بالفراغ و هو نفسه بعد النقطة A عن الفصل المشترك

$$AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2}$$

ملاحظة : يوجد طرق أخرى..

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تطبيق

لتكن النقطة $A(3,-1,2)$ و [redacted]

أثبت تقاطع المستويين واحسـ [redacted]

الحل: لإثبات تقاطع مستويين نث [redacted]

❖ لحساب بعد النقطة عن المسـ [redacted]

1. نوجد المعادلات الوسيطية [redacted]

نفرض $x=0$ و نعوض في [redacted] $y=-1$

⟸ $F(0,-1,3)$ [redacted]

نفرض $y=0$ ونعوض في [redacted] x

⟸ $F'(1,0,2)$ [redacted]

⟸ شعاع توجيه الفصل [redacted] المعادلات الوسيطية :

$$\begin{cases} x=0+t \\ y=-1+t \quad ; t\in R \\ z=3-t \end{cases}$$

2. نوجد معادلة المستوي T [redacted]

[redacted] $+y+1-z+2=0$

3. نعوض معادلات d في T [redacted]

⟸ نعوض في d فنجد [redacted]

[redacted] $\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

إيجاد نقطة تقاطع ثلا [redacted]

1. نوجد معادلا [redacted]
2. نوجد نقطة [redacted]

تطبيق دورة 2018

ماهي نقطة تقاطع ال [redacted]

$P_1: 2x+3y$ [redacted]

$P_2: x+2$ [redacted]

$P_3: x+3y$ [redacted]

الحل:

* نوجد معادلات الفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 : (نترك الطريقة للطالب)

ولنكن
$$d: \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \quad ; t\in R \\ z=t \end{cases}$$

** نعوض معادلات d في المستوي الثالث ونحسب t فنجد: $t=\frac{3}{2}$

ثم نعوض قيمة t في معادلات d فنجد نقطة التقاطع $(\frac{-1}{2},3,\frac{3}{2})$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بنك الأسئلة المهمة

السؤال الأول : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(3,-1,2)$ و المستويان : $\begin{cases} Q: x+y+2z-5=0 \\ P: x-2y+z-4=0 \end{cases}$

1) اثبت تقاطع المستويين Q و P وتحقق من تعامدهما ثم أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك
2) أعط معادلة المستوي W الذي يعامد المستقيم d (أي يعامد كل من المستويين Q و P) ويمر من A
3) احسب إحداثيات A' نقطة تقاطع d والمستوي W
4) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .
5) اثبت أن مركبات ناظم المستوي W المعامد للمستوي P تؤلف حدود متتالية حسابية

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[G$

1) في المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ احسب DJ و IJ و ID ثم أوجد $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{IJ}$ ثم احسب مساحة المثلث (DIJ) .
2) أعط معادلة للمستوي (DIJ) ثم احسب بعد H عن المستوي (DIJ) واستنتج حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$.
3) أعط معادلة للمستوي (HDI) ثم احسب بعد النقطة J عن المستوي (HDI)
4) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم d المار من J و يعامد (HDI) ثم استنتج إحداثيات J' نقطة تقاطع d و (HDI)

السؤال الثالث : ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعبا طول حرفه 2 النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC')

في المعلم المتجانس $(D',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{D'C'}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{D'A'}=2\vec{K}$ و $\overrightarrow{D'D}=2\vec{i}$:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب ثم أعط تمثيلا وسيطيا للقطعة المستقيمة $[AC']$.
2) أعط معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (AC') و يمر من A' ثم استنتج إحداثيات H نقطة تقاطع (AC') و P
3) أوجد معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[B'C']$

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $D(1,0,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $A(3,0,3)$

1) احسب $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .
2) اثبت أن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .
3) أوجد معادلة المستوي BCD .
4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

السؤال الخامس : لتكن النقاط : $D(0,1,2)$ ، $C(-1,2,1)$ ، $B(1,0,0)$ ، $A(0,1,1)$

بين أن هذه النقاط تقع في المستوي نفسه ، ثم اكتب معادلة هذا المستوي .

السؤال السادس : لتكن النقاط : $C(3,-1,1)$ ، $B(2,1,0)$ ، $A(1,0,1)$

1) احسب مساحة المثلث ABC
2) أوجد معادلة المستوي ABC

@Ba_ce2020
نيرون التعليمية

السؤال السابع : لتكن النقطتان : $A(-3,2,1)$ و $B(9,4,3)$.

أوجد معادلة المستوي العمودي على القطعة المستقيمة AB في منتصفها .

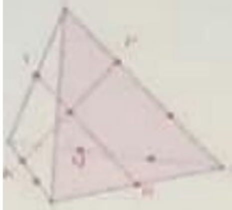
السؤال الثامن : لتكن النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي المعطى بالمعادلة $P: 5x-y+z+6=0$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(-1,1,0)$

السؤال التاسع : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين P_1 و P_2 حيث :

$P_1: 2x+z-1=0$ و $P_2: x-y+2z+3=0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



السؤال العاشر : [redacted]

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{AD}$ [redacted] صف $[AB]$

G مركز الأبعاد المتناسبة [redacted] ، المطلوب :

1) أثبت أن المستقيمين [redacted]

2) عيّن موضع النقطة J [redacted]

3) عيّن المجموعة نقاط [redacted]

السؤال الحادي عشر : [redacted]

$D(-3,3,-1)$ [redacted]

① a) أثبت أن النقاط [redacted]

b) استنتج طبيعة [redacted]

② a) أثبت أن النقطة [redacted]

b) احسب بعد [redacted]

③ احسب حجم [redacted]

④ a) أثبت أن النقاط [redacted]

b) احسب نصف [redacted]

السؤال الثاني عشر : [redacted] $B(1,-1,1)$ والمطلوب :

أعطِ معادلة للمجموعة S [redacted] وما طبيعة المجموعة S

السؤال الثالث عشر : [redacted] $C(2,0,0)$ $B(1,-2$

① برهن أن النقاط A و [redacted] $x+y-$

② ليكن المستويان P و Q [redacted] $Q: 3x$

ادرس تقاطع المستويات [redacted]

السؤال الرابع عشر : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان :
$$\begin{cases} Q: x+y+z+1=0 \\ P: x-2y+3z-5=0 \end{cases}$$

① أثبت أن المستويين متقاطعان بفصل مشترك d

② أثبت أن d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1, \frac{2}{3}z-2, z\right)$ عندما تتحول z في R

فارس جقل: لا تنسَ حلمك .. نحن ناطرين نجاحك ... والنجاح بدو عزيمة .. والعزيمة بدها تفوق ... لا تيأس لسا الوقت كافي لتحقيق الحلم ...
أ. فارس جقل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الأعداد العقدية :

*العدد التخيلي (i): نتخيل أن جذر العدد -1 هو العدد i أي : $i^2 = -1$

قوى العدد i الطبيعية:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = i.i = -1$$
$$i^3 = i^2.i^1 = (-1)(i) = -i$$
$$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4.i^1 = (1)(i) = i$$
$$i^6 = i^3.i^3 = (-i)(-i) = -1$$
$$i^7 = i^6.i^1 = (-1)(i) = -i$$
$$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$$
$$i^9 = i^5.i^4 = i.1 = i$$
$$i^{10} = i^4.i^6 = 1.-1 = -1$$

نتيجة :-
قوى العدد i الطبيعية محصورة بالمجموعة $\{\pm 1, \pm i\}$

العدد العقدي

- الشكل الجبري: $z = x + yi$
- الشكل المثلثي: $z = r(\cos\theta + \sin\theta)$
- الشكل الأسي: $z = re^{i\theta}$

قواعد هامة

1) مرافق $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - yi$
2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
3) $z.\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
4) $z + \bar{z} = 2x$
5) $z - \bar{z} = 2yi$

مثال: ليكن لدينا : $z_1 = 3 + 2i \ , \ z_2 = 4 - 5i$

الحل:
$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (2 - 5)i$$
$$= 7 - 3i$$
$$z_1.z_2 = (3 + 2i)(4 - 5i)$$
$$= 12 - 15i + 8i - 10i^2$$
$$= 22 - 7i$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام: $\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-5i}$

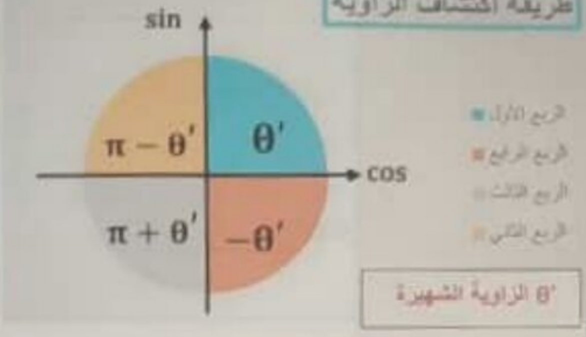
$$= \frac{(3+2i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

طريقة اكتشاف الزاوية



مثال

حول العدد العقدي التالي إلى الشكل المثلثي ثم الأسي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \theta' = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 1\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

فالشكل الأسي: $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

دستورا أويلر:

ليكن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ①

المطلوب: أوجد $e^{-i\theta}$ ثم استنتج دستورا أويلر.

الحل: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ②

بالجمع بين العلاقتين ① و②:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح بين ① و ②

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تطبيق جدا هام: اكتب $\cos^3 x$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \; dx$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دستور دوموافر: [redacted]

مثال: احسب مايلي: [redacted]

الحل: نحول إلى [redacted]

$-\frac{\pi}{6}$

[redacted] $\sin -\frac{\pi}{6}\Big]^{24}$

[redacted] $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

[redacted]

تحليل ثلاثي الحدود: [redacted]

[redacted] $z - z_1)(z - z_2)$

حلول المعادلة:

[redacted] $^2 + bz + c = 0$

مثال: حل المعادلة التالية في C [redacted]

الحل: [redacted] -100

للمعادلة جذران عقديان [redacted]

[redacted] $= -2 + 5i$

[redacted] $-2 - 5i$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال حلّل ما يلي: $z^2+4z+29$

القاعدة: $a(z-z_1)(z-z_2)$

نوجد حلول المعادلة:

$$\boxed{z^2+4z+29=0}$$

$z_1=-2+5i$ $\quad$ $z_2=-2-5i$

$$\Rightarrow z^2+4z+29$$
$$=1[z-(-2+5i)][z-(-2-5i)]$$
$$=(z+2-5i)(z+2+5i)$$

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$\boxed{z=a+bi}$$

نتّبع ما يلي:

نفرض $\omega=x+iy$ جذر تربيعي لـ $z \Leftarrow$

① $x^2-y^2=a$

② $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$

③ $x.y=\frac{b}{2}$

تطبيق هام أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$z=3+4i$$

صيغة أخرى للسؤال:
حل المعادلة
$z^2=3+4i$

الحل: بفرض $\omega=x+iy$ جذر تربيعي للعدد z

① $x^2-y^2=3$

② $x^2+y^2=\sqrt{16+9} \Rightarrow x^2+y^2=5$

③ $x.y=2$

②.①$\Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\mp 2$

من أجل: $x_1=2 \Rightarrow$③ نعوض في $\Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$

$\Rightarrow \omega_1=2+i$

$x_2=-2 \Rightarrow -2y=2 \Rightarrow y=1$

$\Rightarrow \omega_2=-2-i$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثـــــال امتحاني هام

ليكن لدينا: [redacted] أن z^6 عدد حقيقي.

الحل: [redacted] $=2$

[redacted] $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

[redacted] $+ i\sin\theta]$

[redacted] $i\sin\frac{\pi}{3}]$

إثبات أن z^6 عدد حقيقي:

[redacted] $+ i\sin\frac{\pi}{3}]^6$

[redacted] $i\sin 2\pi]$

[redacted] $2^6 \in R.$

مثـــال

ليكن لدينا: [redacted] $1+\sqrt{3}i$

$1+i$

1) اكتب بالشكل المثلثي [redacted]

الحل: [redacted] $=2$

[redacted] $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

[redacted] $i\sin\frac{\pi}{3}]$

[redacted] $=\sqrt{2}$

[redacted] $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

(قواعد هامة)

$a = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $b = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} ; w \neq 0$, $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

$|zz'| = |z| \times |z'|$, $arg(zz') = arg\, z + arg\, z' \quad (2\pi)$

$\arg(z^n) = n \arg z \quad (2\pi)$, $|z^n| = |z|^n$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w\ (2\pi) ; w \neq 0$, $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta'(2\pi))$, $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $z\bar{z} = |z|^2$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$

هام : الرجاء أخذ الملاحظات
الإمتحانية [illegible]
[illegible]
فارس جقل

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\ i\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الشعاع بعدد عقدي

إذا كان A , B نقطتين فإن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

مثال: ليكن لدينا النقاط:

$A(2\,,3)$, $B(-1\,,4)$ مثّل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بعدد عقدي

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(-1+4i)-(2+3i)$$
$$=-1+4i-2-3i=-3+i$$

العدد العقدي الممثل لمركز الأبعاد المتناسبة

لتكن النقاط $(A\,,\propto)$, $(B\,,\beta)$, $(C\,,\lambda)$ الممثلة لأعداد عقدية z_A, z_B, z_C فإن مركز الأبعاد لهذه النقاط G والعدد العقدي الموافق له يعطى بالقانون:

$$z_G=\frac{\propto z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\propto+\beta+\lambda}$$

العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة $[A\ B]$:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

ملاحظة هامة : لإثبات وقوع 3 [redacted] الاعداد العقدية...نوجد شعاعين ونبرهن [redacted]

مثال امتحاني هام

في مستو عقدي لدينا النقاط A , B , [redacted] الأعداد:
[redacted] $+ 3i$, $C = -18 + 7i$
بالترتيب و المطلوب : اثبت وقوع النـ[redacted]

الحل

ط1) [redacted] $(-6 , 3)$, $C(-18 , 7)$
[redacted] $2 , 4)\overrightarrow{AC} = (-24 , 8)$
[redacted] $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
فالشعاعين مرتبطين ⟸ [redacted] على استقامة واحدة

ط2) [redacted] $(-6 + 3i) - (6 - i)$
[redacted] $-12 + 4i$
[redacted] $(-18 + 7i) - (6 - i)$
[redacted] $24 + 8i$
[redacted] $= 2z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً [redacted] النقاط على استقامة واحدة

المسافة التي تمثلها نقطتان بالشكل المـ[redacted] :

لتكن النقطة A الممثلة للعدد العقدي z_A والنقطة [redacted] البعد (المسافة) بين A , B بالعلاقة :
[redacted] $z_A|$

تطبيق : في المثال السابق احسب المسافة بين [redacted]
[redacted] $z| = |-12 + 4i|$
$= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$

زاوية شعاع مع محور الفواصل :

[redacted] $) = \arg(z_B - z_A)$

قياس الزاوية الموجهة بين شعاعين $\overrightarrow{AB}$ [redacted]

[redacted] $) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

حالة خاصة :

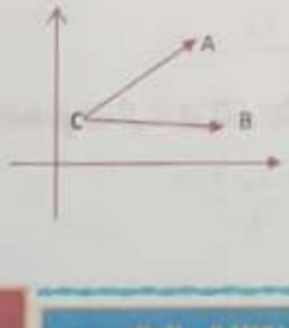
اذا كان الشعاعان لهما نفس البداية
$$(\overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CB}) = arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$$

(قواعد هامة)

لإثبات ان Z حقيقي نبرهن :
$\bar{z} = z , Im\, z = 0$ أو $\arg z = \pi$ أو $\arg z = 0$

لإثبات ان Z تخيلي بحت نبرهن :
$Re\, z = 0$ أو $\bar{z} = -z$ أو $\arg z = \frac{\pi}{2}$ أو $\arg z = \frac{-\pi}{2}$

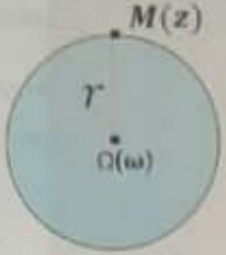
إذا كانت الأمثال غير حقيقية في معادلة الدرجة الثانية و Z_2 , Z_1 جذران تذكر القانونين :
$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$, $z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمثيل مجموعات النقاط

الدائرة : نقول عن مجموعة النقاط (Γ) المكونه من النقاط $M(z)$ والتي تحقق الشرط :



$$|z-\omega| = r$$

أنها دائرة ومركزها $\Omega(\omega)$ونصف قطرها r

$$|z-\omega| = r$$

عدد عقدي

نصف قطر

مثال

ليكن لدينا: $|z-2| = 4$

ماذا تمثل مجموعة النقاط؟؟

تمثل دائرة مركزها $\Omega\ (2,0)$ ونصف قطرها 4

مثال

ماذا تمثل مجموعة النقاط: $|z-3-2i| = 3$

الحـل:

$$|z-(3+2i)| = 3$$

مجموعة النقاط دائرة مركزها $(3,2)$ونصف قطرها 3.

محور القطعة المستقيمة $[AB]$:

هي مجموعة النقاط M التي تحقق $MA = MB$

أي : $|z-a| = |z-b|$

*. كيف نثبت ارتباط شعاعين بالاستفادة من العدد العقدي؟

او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

الشرط:

$$z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \text{عدد حقيقي} \Rightarrow \arg(z) = 0\,,\pi$$

عندها نقول أنّ الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و$\overrightarrow{CA}$ مرتبطين خطياً والنقاط الثلاثة على استقامة واحدة :

. كيف نثبت تعامد شعاعين $\overrightarrow{DC}$ و$\overrightarrow{BA}$

يجب أن يكون :

$$z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \text{عدد تخيلي}$$

$$\Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{-\pi}{2}$$

إذا كان لدينا: $arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{-\pi}{2}$

⇐الشعاعان $\overrightarrow{DC}$و$\overrightarrow{BA}$ متعامدان.

هام جداً نستفيد من القاعدة الأخيرة في برهان مثلث قائم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

1_ الصيغة العقدية للانسحاب (T)

الصيغة العقدية هي [redacted]

عدد [redacted]

وT هو [redacted]

مثال

[redacted]

أوجد $\dot{z}$ التي [redacted] $\vec{\omega} = -2\vec{u} +$ [redacted]

الحل [redacted]

أي [redacted]

مثال

عين [redacted] بالنقطة A حيث B تمثل العدد العقدي b و A تمثل العدد العقدي [redacted]

الحل [redacted] $B = T_{\vec{\omega}}(A)$ أو $\vec{\omega} =$ [redacted]

2_ الصيغة العقدية للتحاكي (H):

هام : لاثبات مثلث متساوي الساقين نثبت أن $\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1$ لأن طويلة ناتج هذه النسبة تمثل نسبة طولي الضلعين $\frac{CD}{BA}$

الصيغة العقدية لها هي :

$$\dot{z} - \omega = k(z - \omega)$$

المركز (نقطة)

نسبة التحاكي

مثال

أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (o) ونسبته 4 حيث $z = (1 + i)$

الحل:

$$\dot{z} - (0 + 0i) = 4(z - (0 + 0i))$$

$$\Rightarrow \dot{z} = 4z$$

$$\dot{z} = 4(1 + i) = 4 + 4i$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

هام : لانب...
الساقين نثب...
لان طويلة ن...
نسبة طو...

1_ الصيغة العقدية للانسحاب (T)

الصيغة العقدية هي : $\acute{z} = z + b$

عدد عقدي شعاعه $\vec{\omega} = x\vec{u} + y\vec{v}$

و T هو انسحاب شعاعه $\vec{\omega}$

مثال

M نقطة يمثلها العدد العقدي:
$z = 1 + i$

أوجد $\acute{z}$ التي تمثل النقطة $\acute{M}$ صورة M وفق انسحاب T شعاعه $\vec{\omega} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

الحل

$b = -2 + 3i$

$\acute{z} = z + b$

$= z = 1 + i + (-2 + 3i)$

$= \acute{z} = -1 + 4i$

أي $\acute{M}(-1, 4)$ هي صورة $M(1, 1)$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A حيث B تمثل العـ...
العدد العقدي a

الحل

B هي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{\omega} = -1\vec{u} + 1\vec{v}$ أي $B = T_{\vec{\omega}}(A)$

2_ الصيغة العقدية للتحاكي (H):

الصيغة العقدية لها هي :

$$\acute{z} - \omega = k(z - \omega)$$

المركز (نقطة)

نسبة التحاكي

مثال

أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (o)
ونسبته 4 حيث $z = (1 + i)$

الحل:

$\acute{z} - (0 + 0i) = 4(z - (0 + 0i))$

$\Rightarrow \acute{z} = 4z$

$\acute{z} = 4(1 + i) = 4 + 4i$

تابعوا شروحا...
17
(ارسل كل...

مثال

عيّن طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

الحل: $b - (0 + 0i) = 2(a - (0 + 0i))$

نسبة التحاكي (2)

المركز (0)

طبيعة التحويل الهندسي هو (تحاكي).

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة :

$$(b - 1) = -(a - 1)$$

طبيعة التحويل الهندسي هو تحاكي مركزه $(1, 0)$ ونسبته $k = -1$

3_ الصيغة العقدية للدوران (R)

$$\acute{z} - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

زاوية الدوران

المركز

مثال

R دوران مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ حيث $z = 1 + i$ أوجد $\acute{z}$ صورة z

الحل

$$\acute{z} - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (2 - i))$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \quad (1 + i - 2 + i)$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (-1 + 2i)$$

ثم ننشر و ننقل ونوجد $\acute{z}$

هام جداً :

أهم تمارين المعادلات في بحث العقدية موجودة ضمن نوطة الجزء الأول صفحة 35-36

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي:

الحل

① $b - 1 = e^{\pi i}(a - 1)$

دوران مركزه $(1, 0)$ وزاويته π.

② $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

$$b - (-1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$$

B صورة A وفق دوران مركزه $(-1, 1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4ـ الصيغة العقـ[redacted]

لدينا حالتين:

1ـ حالة أولى : [redacted]

2ـ حالة ثانية : [redacted]

[redacted] $= -\bar{z}$

مثال

عين $\acute{z}$ [redacted] حيث $z = 1 + i$

الحل : محور [redacted]

مثال

عين [redacted] oy حيث $z = 1 + i$

الحل : محور [redacted]

مثال

عين طبيعة التحو[redacted]

الحل: طبيعة [redacted]

B في صور[redacted]

5- الصيغة العقـ[redacted]

[redacted]

مثال

عين $\acute{z}$ [redacted] $A(1 -$ حيث $z = 1 + i$

الحل: [redacted] $(1 + i)$

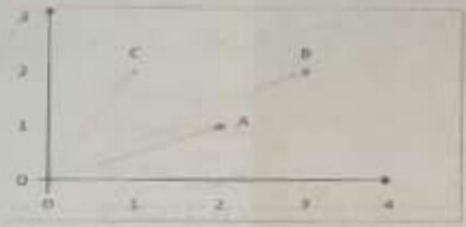
[redacted] $- i$

[redacted]

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بنك الأسئلة الهامّة



السؤال الأول : في مستو محدث بمعلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. أوجد الأعداد المركبة الاتية : z_3, z_2, z_1 إذا علمت أنها ممثلة بالنقاط C, B, A بالترتيب .
2. أثبت أن المثلث ABC قائم في A .

السؤال الثاني : عيّن العددين العقديين z_1, z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_2 - z_1 + 3 = 0 \\ \bar{z}_2 + 2\bar{z}_1 + 3 = 2\sqrt{3}\, i \end{cases}$$

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .
اثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : تحقق أنّ $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ جذر للمعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ ثم أوجد الجذر الاخر z_2

السؤال الخامس : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركّب : $z = 4 - 2\sqrt{5}i$.

السؤال السادس : أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية :

1. جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3 = 1$ واكتبه بالشكل الجبري .
2. إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $\omega = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$.
   a) اثبت أن $|\omega| = 1$.
   b) من أجل $\beta = 1$, اثبت أن : $\omega^{12} = 1$.
3. عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أن $|z - 2 + i| = 5$.

السؤال السابع : اكتب العدد العقدي z بالشكل الأسّي :

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

السؤال الثامن : اكتب العدد المركب $z = 1 + e^{2i\theta}$ بالشكل الأسّي حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

السؤال التاسع : أوجد معادلة من الشكل : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية والعدد z_1 جذر لها حيث $z_1 = 2 + i$.

السؤال العاشر : إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z . عيّن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق :

$$|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$$

السؤال الحادي عشر : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$. لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i , z_B = \sqrt{3} - i , z_C = 3\sqrt{3} + i$.

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .
3. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثاني عشر : ليكن ال[redacted]

1. اكتب كلاً من z_1 , z_2 با[redacted]
2. اكتب بالشكل الجبري و[redacted] $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم أوجد $(z)^{48}$

السؤال الثالث عشر : نتأمل [redacted] $, b = 2 + i\sqrt{3}$

$c = 2 - i\sqrt{3}$

1. ارسم النقاط [redacted] طبيعة المثلث ABC .
2. عين $\frac{a-c}{d-c}$ [redacted] .
3. أثبت أن D [redacted] $(C,2)$.

السؤال الرابع عشر : لدينا في [redacted]

المعرف كما يلي : [redacted]

1) بين أنه إذا كان a جذراً لكثي[redacted]
2) تحقق أن $1 + i$ جذر لكثي[redacted] الجذر بالشكل الجبري .
3) اكتب الجذرين السابقين ب[redacted]
4) لتكن الأعداد العقدية التالي[redacted] $a = 1 + i$, $b = -1$ [redacted]

ولتكن النقاط الممثلة لها في مع[redacted] m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربع

السؤال الخامس عشر : لتك[redacted] $z = -$ والمطلوب :

1. أثبت أ[redacted]
2. جد العد[redacted] مركزه $A(1 + i)$ نسبته 3

السؤال السادس عشر : لت[redacted] $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

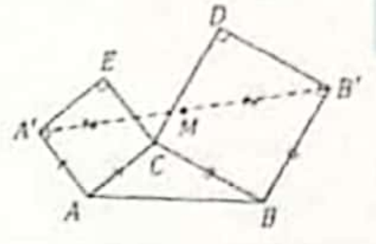
1. اكتب بالشكل الأسي [redacted]
2. اكتب بالشكل الجبري [redacted] احسب $(z_2)^6$ و $(z_3)^{24}$
3. أوجد الجذرين التربي[redacted]
4. حل المعادلة التالية [redacted] $z^3 + 6z^2$

السؤال السابع عشر : ليكن [redacted] $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه

المربعين $CBB'D, ACEA'$ كما في الشكل المجاور .

لتكن الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

1. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b , c
2. أثبت أن $a' = i(c - a) + a$
3. عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$
4. كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي



السؤال الثامن عشر :

نتأمل النقاط D , C , B , A الممثلة للأعداد العقدية

$$d = 3 \ , c = 2 - i\sqrt{3} \ , \ b = 2 + i\sqrt{3} , \ a = -1$$

1. ارسم النقاط A , B , C , D ثم احسب AC , BC , AB' واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عين $arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,2)$

السؤال التاسع عشر : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط

C, B, A الممثلة للأعداد العقدية : $a = \sqrt{3} + i$, $b = (1+i)a$ $c = ia$ بالترتيب

..والمطلوب :

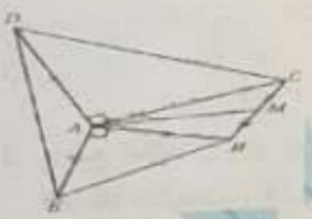
1. اكتب b بالشكل الجبري ثم احسب $|b|$ و $\arg b$ ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ ثم أكتب c بالشكل الجبري
2. برهن أن المثلث AOC قائم و متساوي الساقين ثم بين أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{OC}$
3. استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع

السؤال العشرون : لتكن النقطتان A, B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية

$$P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i \text{ ولیکن } z_B = -3i \ , \ z_A = -1 + i$$

1. أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة
2. جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3. اكتب z_A بالشكل الأسي

السؤال الواحد و العشرون : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[BC]$ وليكن AEB , ACD مثلثين قائمين في A متساوي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A و نرمز بالرمزين b , c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B , C



1. احسب بدلالة b , c الأعداد العقدية m , d , e الممثل للنقاط M , C , E بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$, $(E,3)$, $(C,1)$, $(B,1)$ ، احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال الثاني و العشرون : ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و z عدد عقدي و $f(z)$ كثير حدود معرف ب :

$$f(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$$

1. تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(z)$
2. عين العددين العقديين a , b بحيث $f(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$
3. حل في C المعادلة $f(z) = 0$

السؤال الثالث و العشرون : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i} \ , \ c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ , b = e^{i\frac{\pi}{3}} \ , a = 1$$

بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب c بالشكل الأسي و اكتب d بالشكل الجبري
2. وضع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس
3. أثبت أن الرباعي $OACB$ معين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الرابع و العشرون : ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .... والمطلوب :

1. أثبت أن $p(-1) = 0$
2. اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z) = (z+1)Q(z)$
3. حل المعادلة $p(z) = 0$
4. A, B, C ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

السؤال الخامس و العشرون :

ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ والمطلوب :

1. عين عددين حقيقيين a, b يحققان : $p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2. حل في C المعادلة $p(z) = 0$

السؤال السادس و العشرون : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$$Z_A = 3 \quad , \quad Z_B = 1 + 2i \quad , \quad Z_Q = -1 + 2i$$

1. مثل هذه الأعداد في مستو عقدي
2. جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع
4. أثبت تعامد المستقيمين OR, AB و أثبت أن $OR = \frac{1}{2}AB$

السؤال السابع و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad , \quad b = 2 - \frac{5}{4}i, c = 3 + \frac{7}{4}i$$

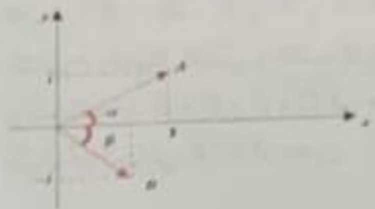
1. وضع النقاط A, B, C في شكل وما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
2. استنتج أن المثلث (ABC) قائم ومتساوي الساقين
3. احسب العدد العقدي $Z_{A'}$ ليكون الشكل $ABA'C$ مربعا

السؤال الثامن و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 2 - 2i, b = -1 + 7i, c = 4 + 2i \ , d = -4 - 2i \ , \omega = -1 + 2i$$

أثبت وقوع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

السؤال التاسع و العشرون : ليكن العددان العقديان z_A, z_B حيث $arg(z_A) = \alpha$ و $arg(z_B) = -\beta$ كما بالشكل :



1. اكتب z_A, z_B بالشكل الجبري
2. اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي
3. استنتج قيمة $\alpha + \beta$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثلاثون :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط C,B,A
التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=1-i$, $b=-1+i$, $c=\sqrt{3}(1+i)$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب a,b,c بالشكل الأسي
2. احسب arg و طويلة العدد العقدي $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بيّن نوع المثلث ABC
3. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معين
4. احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة النقطة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

السؤال الواحد و الثلاثون : ليكن العدد العقدي $w=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب :

1. بين أن $|w|=1$ ، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي
2. ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

السؤال الثاني الثلاثون :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط C,B,A
التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=8$, $b=-4+4i$, $c=-4i$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. احسب العدد العقدي $\frac{b-a}{a-c}$ واستنتج أن المثلث قائم ومتساوي الساقين
2. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$
3. احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً

السؤال الثالث و الثلاثون :

ليكن $p(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة
$p(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ، والمطلوب :

1) احسب العدد α لكي يكون $z=2$ حلاً للمعادلة $p(z)=0$.
2) بفرض أن $\alpha=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق : $p(z)=(z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$.
3) لتكن A,B,C نقاط تمثلها الأعداد العقدية بالترتيب : $c=-1+i\sqrt{3}$, $b=1+i\sqrt{3}$, $a=2$

a) أثبت أن : $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$,واستنتج طبيعة المثلث ABC.

b) ليكن $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل ، عين a' و b' و c' التي تمثلها نقاط المستوي A',B',C' على الترتيب .

التحليل التوافقي والاحتمالات

المبدأ الأساسي في العد: إذا كانت تجربة تمر بمرحلتين أو (خطوتين) m و n فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة هي $m \times n$

مثال حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة؟

الحل: عدد طرق الدخول : 4

عدد طرق الخروج: 3

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$12 = 3 \times 4$$

قانون العاملي: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

خواص:

- $n! = n(n-1)!$

$5! = 5 \times 4!$

$5! = 5 \times 4 \times 3!$

- $(n+1)! = (n+1)n!$

مثال اختزل $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

- $0! = 1$
- $1! = 1$

سؤال: متى نستخدم العاملي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض، (تبادل عناصر المجموعة في أماكن تساوي عددها)

مثال: تبادل ثلاث كرات مختلفة الألوان (اخضر ●، احمر ●، أسود ●) بين بعضها البعض بكم طريقة يمكن ذلك ؟

الحل: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ طرق

ماهي هذه الطرق؟

6 طرق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

لدينا بطاقتان مرقمتان $[1,2]$ بكم طريقة يمكن تبديلها

الحل: طريقة $2! = 1 \times 2 = 2$

الترتيب: (القوائم دون تكرار)

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء عندها نستخدم التراتيب.. أو هو ترتيب r عنصر من مجموعة فيها n عنصر.

القانون:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$$

مثال: $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار ثلاث أشخاص من أجل تشكيل لجنة مكونة من (مدير, نائب مدير ، أمين سر) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: نلاحظ ان الجزء الذي سنختاره من المجموعة يساوي عدد الأماكن , لذلك نستخدم قانون التراتيب.

$P_{10}^3 = 8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

طريقة أخرى : عدد طرق اختيار المدير 10

عدد طرق اختيار نائب المدير 9

عدد طرق اختيار أمين السر 8

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

التوافيق : هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية. أو التوفيق هو مجموعة جزئية من مجموعة منتهية.

سؤال: متى نستخدم قانون التوافيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة.

القانون: $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ أو $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: $\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ أو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = \frac{20}{2} = 10$

مثال: أب لديه خمس أبناء ، دُعي لحضور مباراة وقُدمت له 4 بطاقات دعوة ، بكم طريقة يمكن لهذا الأب أن يختار 3 من أبناءه لمرافقته لحضور المباراة؟

الفكرة: نستخدم التوافيق لأنه لا يوجد اهمية للترتيب .

$\binom{5}{3} = 10$ طرق

مثال: مجموعة تضم الأرقام $(1,2,3,4,5)$ ماعدد المجموعات الجزئية من المجموعة والمكون كل منها من عنصرين

الحل: $\binom{5}{2} = 10$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: حديقة تحوي 10 زهرات مختلفة الالوان ، نريد لتشكيل باقة [redacted] من 4 زهرات ، بكم طريقة يمكن ذلك؟

*عدد طرق [redacted] زهرات أي

[redacted]

مثال

صندوق [redacted] معاً.

الحل: بما [redacted]

[redacted]

ملاحظة..

في مسائل السحب معاً نستخدم التوافيق.

مسألة 2017 [redacted] عن 5 أسئلة من 8 أسئلة.

① بكم [redacted]

② بكم [redacted] إجبارية.

الجواب [redacted]

الجواب [redacted]

هام جداً: لا تنسى مراجعة الجلسة الامتحانية في الأيام الأربعة ماقبل المادة والتي ستجدها حصرياً على صفحة الفيسبوك ☐

فارس جقل

مثال

احسب قيمة r إذا علمت أن:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

الحل: شرط الحل هو $r\le 4$ و $r\le 5$ و $r\le 6$

إذا $0\le r\le 4$.

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{r!\,(5-r)!}}+\frac{1}{\frac{6!}{r!\,(6-r)!}}$$

$$\frac{r!\;(4-r)!}{4!}=\frac{r!\;(5-r)!}{5!}+\frac{r!\;(6-r)!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!}=\frac{(5-r)(4-r)!}{5\times 4!}+\frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times5\times4!} \quad (\text{نختصر } r!)$$

نخرج $\frac{(4-r)!}{4!}$ عامل مشترك ونقسم عليه

$$1=\frac{(5-r)}{5}+\frac{(6-r)(5-r)}{6\times5}$$

$$30=30-6r+30-11r+r^2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$r^2 - 17r + 30 = 0$$

$$(r-15)(r-2) = 0$$

مقبول $r = 2$ ، مرفوض $r = 15$

سؤال امتحاني: رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ، 3 كتب للمؤلف A و 4 للمؤلف B .

① بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B.

② بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية.

الحل: ①

عدد طرق اختيار الكتاب الأول 4

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 3

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 2

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 4 = 576$$ طريقة

② عدد طرق اختيار الكتاب الأول 1

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 6

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 5

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1 = 720$$ طريقة

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

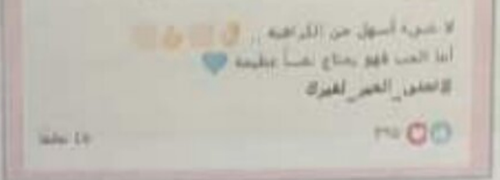
تجربة برنولي

نستخدم تجربة برنولية عندما نقوم باختبار ما:

يكون عدد مرات تكرار التجربة n مرة ((على نحو مستقل)).

ونهتم بوقوع حدث محدد احتمال وقوعه (p) واحتمال عدم وقوعه q.

ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً k من المرات .



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات ، احسب احتمال الحصول على الوجه H مرتين.

الحل:

$n = 3 , \quad K = 2 , \quad P = \frac{1}{2}, \; q = \frac{1}{2}$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$
$$= 3.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

قانون برنولي: (القانون الحداني)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}$$

مثال دورة 2017 الأولى

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$. والمطلوب:

ما هي قيم المتغير العشوائي، نظم جدولاً بها. وأحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$n = 3 , \quad k = 0 , \quad P = \frac{1}{3} \quad , \; q = \frac{2}{3}$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1.1.\frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3.\frac{1}{3}.\frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 3.\frac{1}{9}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

$$E(X) = \sum_{1}^{n} r_i . P(X = r_i)$$

$$= 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

r_i	0	1	2	3
$P(x = r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

أو طريقة ثانية حسب برنولي:

$E(X) = n.P = 3.\frac{1}{3} = 1 \qquad V(X) = n.p.q = 3.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

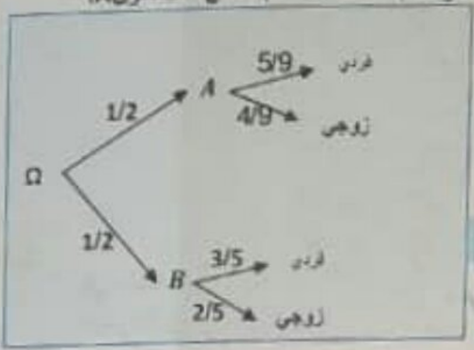
ملاحظة هامة:

عندما يكون في التجربة صندوقين متماثلين ونختار احدهما فإننا نعطي لكل صندوق احتمال $\frac{1}{2}$ وننظم مخطط.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثـــال امتـــحـــاني

لدينا صندوقان B ، A :
يحوي الصندوق A بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 و يحوي الصندوق B بطاقات مرقمة من 1إلى 5 ..نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه بطاقة فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجي ، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من الصندوقA.



بفرض C حدث البطاقة المسحوبة زوجي.
بفرض A حدث البطاقة من A.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(c)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \cdots$$

أحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة فردية.
بفرض E حدث ظهور بطاقات فردية.

$$P(E) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} =$$

ما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من B علماً أنها تحمل رقم فردي.
بفرض B حدث البطاقة المسحوبة من B.
بفرض E حدث البطاقة تحمل رقم فردي.

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \cdots$$

قانون الاحتمال الشرطي :

$$P((A|B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مسألة امتـــحـــانيـــة

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية والمطلوب:

1. ما عدد الاختبارات في هذه التجربة.
2. أكمل الجدول المجاور.
3. أحسب التوقع والتباين و الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X.

K	0	1	2	3	4 n
$P(x = k)$					$\frac{16}{81}$

الحـــل:

1. عدد الاختبارات : $n = 4$
2. نحتاج P:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} P^4 (1 - P)^0$$

$$\frac{16}{81} = 1.\,P^4 \Rightarrow P^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 1.1.\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

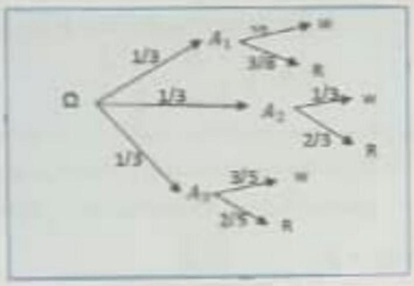
$$= 4.\frac{2}{3}.\frac{1}{27} = \frac{8}{81}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[redacted]

مثال

[redacted]



منشور ذي الحدين

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}(a)^n(b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

مثال: انشر $(x+2)^5$

$$=\binom{5}{0}(x)^5(2)^0+\binom{5}{1}(x)^4(2)^1+\binom{5}{2}(x)^3(2)^2+\binom{5}{3}(x)^2(2)^3$$

$$+\binom{5}{4}(x)^1(2)^4+\binom{5}{5}(x)^0(2)^5$$

$$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$$

مثال هام

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$$

قانون الحد العام

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=6.\frac{4}{9}.\frac{1}{9}=\frac{24}{81}$$

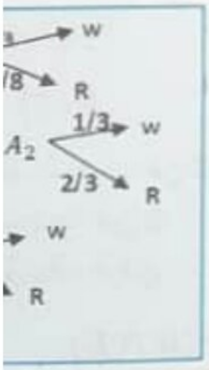
$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=4.\frac{8}{27}.\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$$

$$E(X)=n.p=4.\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$V(X)=n.p.q=4.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

مثـــال



في المخطط الشجري المرسوم جانبا:

الرمز w يدل على عدد الكرات البيضاء،

والرمز R يدل على عدد الكرات الحمراء.

نحتار عشوائياً كرة واحدة ، المطلوب:

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل :

①
$$P(R)=\frac{1}{3}.\frac{3}{8}+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{9}+\frac{2}{15}$$

②
$$P(A_1|R)=\frac{P(A_1\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}}$$

منشور ذي الحدين

$$b)^n=\binom{n}{0}(a)^n(b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

مثــال: انشر $(x+2)^5$

$$)(x)^5(2)^0+\binom{5}{1}(x)^4(2)^1+\binom{5}{2}(x)^3(2)^2+\binom{5}{3}(x)^2(2)^3$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}(x)^{-r}$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-3r}$$

من أجل الحد المستقل عن x يكون:

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{6}{4}(x^2)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 15$$

الاستقلال الاحتمالي

شرط الاستقلال الاحتمالي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

مثال: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود متوازنة معاً . إذا كان الحدث **A** ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث **B** ظهور كتابتين فقط هل الحدثان **A** ، **B** مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H) \\ ,(T,T,H),(T,T,T) \end{matrix} \right\}$$

$$A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

نعوض في الشرط : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \neq \frac{3}{16}$$

المساواة خاطئة فالحدثان غير مستقلان احتمالياً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين دورة2017

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$.

نعرف X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار.

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(T,T,T)

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = \frac{12}{27}$$

$(H,T,T)(T,H,T),(T,T,H)$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = \frac{6}{27}$$

$(H,T,H) \times 3$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \quad (H,H,H)$$

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
r_i^2	0	1	4	9

التوقع:

$$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r_i \cdot P(X = r_i)$$

$$= 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27}$$

$$= \frac{27}{27} = 1$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مسألة امتحانية

يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $(0,0,0,0,0,1,1,1,1)$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً

وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة ، اكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84} \quad , \quad P(X=1) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} \quad , \quad P(X=0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$(1,1,1) \qquad (0,0,1) \qquad (0,0,0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

التوقع الرياضي:

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X)=\sum_{r=1}^{r} r_i \cdot P(X=r_i)$$

$$E(X)=0.\frac{10}{84}+1.\frac{40}{84}+2.\frac{30}{84}+3.\frac{4}{84}$$

$$=\frac{40+60+12}{84}=\frac{112}{84}$$

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة. $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}$$

$(0,0,0)$

$$P(X=1)=\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\right)\times 3$$

$(0,0,1)\times 3$

$$P(X=2)=\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right)\times 3$$

$(1,1,0)\times 3$

$$P(X=3)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$$

$(1,1,1)$

تمرين هام يحوي فخ امتحاني: يحوي مغلف اربع بطاقات مرقمة بالأرقام $0,1,1,1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموعهما. أكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$P(X=0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$(0,0)$

$$P(X=1)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right).2=\frac{6}{16}$$

$(1,0)\times 2$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

$(1,1)$

ونتظم جدول....

مثـــال: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يلي: $3,3,3,3,2,2,0,0$ نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة.

1- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟

الحـل:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بفرض A حدث [redacted]

بفرض B حدث [redacted]

2-إذا علمت أن البطاقتان [redacted] زوجي؟

بفرض C حدث البطاقتان [redacted]

بفرض D حدث أن يكون [redacted]

الحل:

[redacted]

هام : تابعوا نماذج و توقعات جميع المواد على صفحة (مركز أونلاين التعليمي)على الفيس بوك

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بنك المسائل الهامة

السؤال الأول : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. احسب احتمال ظهور الوجه H مرتين على الأقل .

السؤال الثاني : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً ..وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع و التباين . .

السؤال الثالث : ليكن X متغيرعشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، أكمل الجدول التالي :

1) ما عدد النجاحات ؟
2) ما التوقع الرياضي للمتحول ؟
3) أوجد التباين و الانحراف .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

السؤال الرابع : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أكمل الجدول المجاور و احسب التوقع و التباين .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	

السؤال الخامس : صندوق يحوي 4 كرات زرقاء و 3 خضراء و 1 صفراء ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً على التتالي دون إعادة ..وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء بين الكرات المسحوبة .

أعد المسألة السابقة في حال السحب معاً و على التتالي مع إعادة .

السؤال السادس : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء و 1 سوداء ، نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه .

أعد المسألة السابقة في حال السحب دون إعادة و في حال السحب معاً .

السؤال السابع : لدينا 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين ؟؟

السؤال الثامن : لدينا الأعداد (0,2,3,4,5,6) بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من ثلاث أرقام على أن يكون من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500؟؟

السؤال التاسع : يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفي الكرات البيضاء

1. نسحب عشوائياً كرة ..ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟
2. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة .. ونعرف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . عين قيم X و اكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .
3. أعد المسألة إذا كان عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف الكرات البيضاء

السؤال العاشر : يشتري أحد المحلات 80% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A و يشتري الباقي منها من المصنع B ..نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% .. تختار عشوائياً قطعة غيار من المحل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة .
2. إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون من انتاج المصنع B .

السؤال الحادي عشر : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة 1,2,3 و الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة 1,2 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين من الصندوقين ..

اكتب مجموعة قيم X وعين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال الثاني عشر : X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول غير المكتمل المجاور ل X.

1. ماعدد الاختبارات في التجربة ؟ واكمل الجدول .
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟وما تباين المتحول العشوائي X

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$		

السؤال الثالث عشر : أوجد الحد الذي يحوي x^3 في منشور ذي الحدين $(x^2+\frac{1}{x})^9$

و الحد المستقل عن x في منشور $(x-\frac{1}{x^2})^{12}$

السؤال الرابع عشر : ماهي أمثال الحد x^2y في منشور $(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y})^8$

السؤال الخامس عشر : نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 1, 2, 3 و يحوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 2, 3, 4, 5 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار
2. ليكن A الحدث : (إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3)
   وليكن B الحدث : (مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من 5)
   هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا ؟ علل اجابتك
3. نعرف متحولا عشوائيا X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
   اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي و تباينه

السؤال السادس عشر : لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1. ماعدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2. ماعدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500

السؤال السابع عشر : يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء ، إذا صدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 و إذا لم يصدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 و ليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)

والمطلوب : 1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$ ثم استنتج أن $P(A_2)=0.74$

2. نعرف $P_n=P(A_n)$:

1) برهن أن $P_{n+1}=(0.2)P_n+0.6$
2) لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بالصيغة $u_n=P_n-0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2

واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} P_n$

السؤال الثامن عشر : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون أعادة ..ما احتمال ان يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال التاسع عشر : لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء . نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا .... نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n نرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1. احسب $P(R_1)$ ثم أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$
2. أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \le k \le n$
3. نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$
   1) أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسية . عيّن أساسها و حدها الأول
   2) أكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k

السؤال العشرون : يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام 2 ,1 ,0 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 1 ,0 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق

1. الحدث A : " الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $P(A)$
2. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الواحد و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء احتمال تسجيل الأولى $\frac{8}{10}$ إذا سجل الأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$ و إذا أخفق بالأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{6}{10}$ بفرض A التسجيل ، B الإخفاق

المطلوب : 1. ارسم مخطط شجري احسب احتمال تسجيل الركلة الثاني

2. إذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال التسجيل في الأولى

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ و إذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب : 1. ارسم مخططاً شجرياً ثم احسب احتمال نجاح سعاد في الحلقة الثانية

2. اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون : I صندوق أول يحوي 3 كرات حمراء R و واحدة زرقاء B و II صندوق ثاني يحوي كرتين حمراء R وواحدة زرقاء B ، نسحب كرة من الصندوق الأول و نضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II و

المطلوب : 1. ارسم مخططاً شجرياً ثم احسب احتمال أن تكون الثانية حمراء

2. إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء

السؤال الرابع و العشرون : نلقي قطعة نقود C_1 متوازنة ثم نلقي قطعة نقود C_2 غير متوازنة . احتمال ظهور الشعار $\frac{2}{3}$ و المطلوب : 1. ارسم مخطط شجري

2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب $E(X), V(X)$

السؤال الخامس و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء على هدف . احتمال تسجيل الهدف في الضربة الأولى A يساوي $\frac{3}{5}$ و في الثانية B يساوي $\frac{4}{5}$ والمطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف . احسب $E(X)$

السؤال السادس و العشرون : يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من خمس أدوار يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال $\frac{2}{3}$ و يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال فوز B

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال السابع و العشرون : صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً . X متحول عشوائي يأخذ القيمة 5 عند ظهور ثلاث كرات حمراء و يأخذ القيمة 3 عند ظهور كرتين حمراء وكرة خضراء و يأخذ القيمة 0 فيما عدا ذلك .احسب $E(X)$

السؤال الثامن و العشرون : في مدرستنا يمارس 30% لعبة التنس نسبة الذكور 60% و 55% لايمارسون التنس . ما احتمال اختيار طالبة لاتمارس التنس

السؤال التاسع و العشرون : يحوي صندوق كرتين حمراء R وكرتين بيضاء W نسحب كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات منها ثم نسحب كرة ثانية و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. اذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى حمراء

السؤال الثلاثون : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال الواحد و الثلاثون : يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة و التي تشمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثاني و الثلاثون : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0,1,2,3,4,5$

1. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

السؤال الثالث و الثلاثون :

في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب, احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة

السؤال الرابع و الثلاثون : أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أن المتحولين العشوائيين Y,X مستقلان احتمالياً

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

السؤال الخامس و الثلاثون :

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربع وجوه ملونة بالأسود و وجهان ملونان بالأحمر نلقي الحجر خمس مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يقرن بنتيجة التجربة عدد الوجوه السوداء والمطلوب:

1. اكتب مجموعة قيم المتغير X
2. احسب قانون X الاحتمالي ونظم جدولاً به

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال السادس و الثلاثون :

نملأ الخانات [| | |] بأحد العددين $+3$ و -3 والمطلوب:

1. ما احتمال أن يكون المجموع صفر
2. ما احتمال ألا يظهر العدد ذاته بخانتين متجاورتين
3. ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور العدد $+3$ في الخانات الأربعة ، نظم جدول القانون الاحتمالي

السؤال السابع و الثلاثون

لتكن C دائرة مركزها O ، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة ، لتكن $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار . والمطلوب :

1. ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟
2. ماعدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟
3. كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

السؤال الثامن و الثلاثون

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة ، واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة ، ونعرف المتحولين العشوائين X و Y كالآتي :

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة .

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين . والمطلوب:

1. اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي .
2. اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي .
3. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) هل المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً ؟ لماذا؟

مخطط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) هي نفسها(2, 3)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{}{5} \times \frac{}{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفةعن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{}{5} \times \frac{}{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملحق تدريبي .. الجزء الثاني

المسألة الأولى :

ليكن العدد المركب $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$. اكتب z بالشكل الأسي ثم أوجد كلا من جذريه التربيعيين بالشكل الأسي

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

المسألة الثانية :

لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ ,z_2 = 1 - i\ ,z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) اكتب بالشكل الأسي كل من $z_1\ ,z_2\ ,z_3\ ,z_1\ ,z_2\ ,\frac{z_1}{z_2}$

2) اكتب بالشكل الجبري $z_1. z_2, \frac{z_1}{z_2}$ استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$

المسألة الثالثة :

مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام $1\ ,1\ ,0\ ,0\ ,-1\ ,-1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع الإعادة :

1) إذا كان الحدث A الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما 0 والحدث B الحصول على بطاقتين جداء رقميهما (0)
هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا؟

2) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0 فما احتمال أن يكون جداء رقميهما 0

3) نعتبر X متغيرا عشو ائيا يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين . أوجد مجموعة قيم X واكتب جدول التوزيع الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

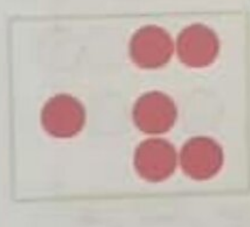
المسألة الرابعة :

ليكن n عددا طبيعيا $2 \le n \le 8$

1) يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة و لنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء و الحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد بحيث $P(A|B) = \frac{2}{3}$ والمطلوب احسب قيمة n

2) بفرض أن $n = 4$ ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

المسألة الخامسة :



يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 بيضاء و 6 حمراء

1) نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كرات في آن واحد
   - أ- احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء
   - ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، نظم جدول القانون الاحتمالي لـ X، واحسب توقعه الرياضي

3) نسحب من الصندوق في آن واحد 3 كرات خمس مرات على التتالي مع الإعادة ، احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة السادسة :

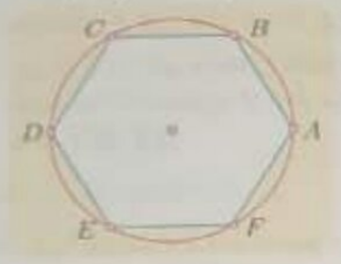
يحوي صندوق(9) كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة :

1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
2) نسحب كرة واحدة ..نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) و الكرة الزرقاء القيمة (2) . نعرّف متغيرا عشوائيا X يدل على رقم الكرة المسحوبة..اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي .

المسألة السابعة :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a, b عددان طبيعيان فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟

المسألة الثامنة :



في الشكل المرسوم جانبا لدينا ست نقاط A, B, C, D, E, F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية :
نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :
1) ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

المسألة التاسعة :

$ABCDE$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ و (EA) يعامد القاعدة ..نفرض المعلم $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$
أوجد $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{ED} . \overrightarrow{EB}$ ، ثم استنتج $\cos(BED)$ ،ثم عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A,1), (B,1), (C,1), (D,1), (E,4)$

المسألة العاشرة :

الاحتفاظ بالأشياء بقوتك أستطيع
التخلص بالأشياء بقوتك لا أستطيع

I Can

$ABCDEFGH$ مكعب . I, J, K, L هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$
ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$
جد إحداثيات جميع النقاط ثم أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا .

المسألة الحادية عشر :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[FH]$
1) جد إحداثيات الرؤوس وأثبت أن المثلث ABG قائم واحسب مساحة المثلث ABG
2) جد معادلة المستوي (ABG) واحسب بعد F عن (ABG) واستنتج حجم $ABGF$
3) أعط تمثيلا وسيطيا لكل من (IK) و (FJ) وهل تقع النقاط I, J, K, F في مستو واحد .

المسألة الثانية عشر :

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم و P و Q و R و S وفق :
$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$
1) أثبت أن P هو مركز الأبعاد للنقطتين $(B,4), (C,1)$ و أن Q هو مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1), (D,3)$
2) ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1), (B,4), (C,1), (D,3)$ بين أن G تقع على (PQ)
3) أثبت أن G تقع أيضا على(RS) ثم استنتج كون المستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4) إذا كان طول حرف رباعي الوجوه(2) ..احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ واستنتج تعامد المستقيمين (AB) و (CD)

المسألة الثالثة عشر :

لتكن النقاط : $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

1) هل C, D, E تقع على استقامة واحدة..أوجدالمعادلات الوسيطية للمستقيم (CD)
2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على (CDE) ثم جد معادلة (CDE) و استنتج المسقط القائم ل A على (CDE)
3) أوجد عددين a , b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ..هل A , B , C , D تقع في مستو واحد
4) عين إحداثيات S منتصف $[AB]$ و S' نظيرة S بالنسبة إلى C

المسألة الرابعة عشر :

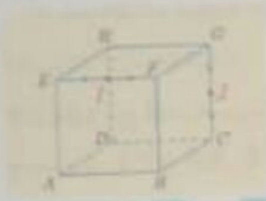
لدينا الشعاعان $\vec{v}(1,3,2)$, $\vec{u}(2,1,-1)$ و النقطة $A(1,-1,3)$, $B(1,0,-1)$

1) بين أن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المار من A و الموجه بالشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$
2) أوجد معادلة المستوي Q المار من B الموازي للمستوي P ثم أوجد البعد بين P و Q و اوجد مجموعة النقاط التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

المسألة الخامسة عشر :

① نتأمل هرما $S - ABCD$ قاعدته مربع و رأسه S و طول كل حرف من حروفه و أضلاع قاعدته يساوي a
احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

② $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$ احسب
$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$



المسألة السادسة عشر :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط
$A(-1,2,1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,-1,2)$ ولتكن (P) مجموعة النقاط M من الفضاء بحيث $AM = BM$

1) بيّن أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$
2) عيّن معادلة المستوي (Q) الذي يمر من A و يوازي (P)
3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر من C و يعامد (P)
   - عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)
   - احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)
4) عيّن معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

المسألة السابعة عشر : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$\begin{cases} P : 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ Q : x + y + z - 1 = 0 \\ R : x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

و المطلوب :

1. اثبت أن المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ اكتب تمثيلا وسيطيا له
2. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
3. اثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

المسألة الثامنة عشر :

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ، نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X
واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X و احسب توقعه الرياضي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة التاسعة عشر :

تتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=6-i$, $b=-6+3i$, $c=-18+7i$ بالترتيب و المطلوب :

1. أحسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و استنتج أن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة
2. بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته θ أحسب θ
3. جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

المسألة العشرون :

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$
و المستوي $P: 3x-y-3z-8=0$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

المسألة الواحدة والعشرون :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1), B(0,1,1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A و يقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.
2. أثبت أن المستقيمين d, (AB) متعامدان .

المسألة الثانية و العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D
2. اكتب معادلة للمستوي (ACH)
3. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: \ -2x+2y-2z+1=0$ يوازي المستوي (ACH)
4. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة
5. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسألة الثالثة والعشرون :

جد مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

المسألة الرابعة و العشرون :

عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

المسألة الخامسة و العشرون : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K

منتصفات الأحرف $[FE], [FG], [FB]$ على الترتيب
نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب :

1. أوجد احداثيات رؤوس المكعب و النقاط I, J, K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عمودياً على (IJK)
4. استنتج احداثيات N المسقط القائم ل F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}$

المسألة السادسة و العشرون :

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A ، النقطة J منتصف $[ED]$ نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ ، $\overrightarrow{Ac} = 4\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$

جد احداثيات النقاط B, C, D, E, J
جد معادلة المستوي (JBC)
اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (JC)
احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)
عيّن احداثيات النقطة K (م.ا.م) للنقاط المثقلة $(C, 2), (B, 1), (J, 2)$

المسألة السابعة و العشرون :

في معلم متجانس لدينا النقاط $A(1, 2, 4), B(1, 0, 2), C(2, 2, 5), M(2, 2, -1)$
جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ و النقطة D نظيرة I بالنسبة ل C
عيّن α, β إذا علمت أن $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$
تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستويا P أوجد معادلته
اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من M و يعامد المستوي P
عيّن احداثيات النقطة M' المسقط القائم ل M على المستوي P

المسألة الثامنة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A(0, -1, -2), B(1, 2, -1), C(1, 1, -2)$
اثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة
اثبت أن $\vec{n}(2, -1, 1)$ ناظم على المستوي (ABC) و اكتب معادلة المستوي (ABC)
لتكن G (م.ا.م) للنقاط $(A, 1), (B, -1), (C, 2)$ اكتب احداثيات النقطة G
أعط تمثيلاً وسيطيا للمستقيم (CG)
جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$

المسألة التاسعة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة : $A(6, 1, 1)$ و المستويان : $P_2: y + z = 4$ ، $P_1: x - 2y = 5$

اثبت أن المستويين متقاطعين
جد تمثيلا وسيطيا للفصل المشترك لهما Δ
اكتب معادلة المستوي Q المار من A و يعامد الفصل المشترك
أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ
احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

المسألة الثلاثون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2)$

اكتب معادلة المستوي (ABC)
اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من (O) و يعامد المستوي (ABC)
عيّن احداثيات النقطة H نقطة تقاطع Δ مع (ABC)
4. احسب الجداءات السلمية $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC

المسألة الواحدة و الثلاثون :

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين و $DA \perp (ABC)$ و $\overrightarrow{AD} = 3\vec{k}$ ، $\overrightarrow{AC} = 3\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$
بفرض لدينا معلم متجانس مبدأه A

1. عيّن احداثيات الرؤوس $ABCD$
2. اكتب معادلة المستوي (BCD)

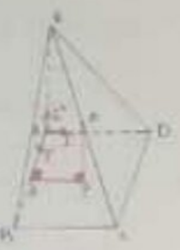
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3. اثبت ان مسقط A على المستوي (BCD) و ليكن J هو مركز ثقل المثلث BCD
4. عين احداثيات G (م.ا.م) للنقاط $(C,1)$ ، $(B,2)$، $(A,1)$
5. اوجد معادلة لكرة التي مركزها J وتمر D
6. احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. استنتج مساحة المثلث BCD
8. عين احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع

المسالة الثانية و الثلاثون :

$E-ABC$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ فيه EA عمودي على مستو القاعدة $ABCD$

وفيه $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ ، $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$



1. اوجد احداثيات رؤوس الهرم
2. اوجد احداثيات مركز ثقل BDE
3. احسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}$ و ماذا تستنتج ؟
4. اوجد معادلة المستوي EBD
5. اوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم EC
6. لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ ولتكن P المسقط القائم ل M على مستوي القاعدة $ABCD$ و لتكن H المسقط القائم ل P على AB ..احسب $[MH]$

المسالة الثالثة والثلاثون : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا مجموعة النقاط :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+\frac{5}{2}=0$ والمطلوب :

1) عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ
2) ليكن لدينا المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,1)$ والذي يقبل $\vec{u}(2,0,-2)$ شعاع موجه له . ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الكرة S
3) أثبت أن المستوي $P: 3x+2y=7$ يقطع الكرة S وأوجد مركز الدائرة الناتجة ونصف قطرها

المسالة الرابعة و الثلاثون : عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{2n}=\binom{15}{n+3}$

المسالة الخامسة والثلاثون : المستقيمان d ، d' معرفان وسيطيا وفق :

$$d': \begin{cases} x=2s-1 \\ y=s-2 \\ z=3s-2 \end{cases} ; s\in R \quad , \quad d: \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases} ; t\in R$$

1. أثبت أن d' ، d متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d,d'

المسالة السادسة و الثلاثون : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ و النقطة $A(1,1,-2)$ ، المطلوب :

1. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي
2. اكتب معادلة للمستوي Q المار من A و الموازي للمستوي P

تم بعون الله ...أتمنى لكم التوفيق

دعواتكم لمن ساهم بنجاح هذه النوطة ..

محبكم أ فارس جقل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner