منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

الهندسة التحليلية في الفضاء

الدكتور
محمد جمال حمدوش
رئيس قسم الرياضيات

عبد الفتاح عباسي
مدير أعمال في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١هـ - ٢٠١٠م

منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

الهندسة التحليلية في الفضاء

الدكتور

محمد جمال حمندوش
رئيس قسم الرياضيات

عبد الفتاح عباسي
مدير أعمال في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الأولى

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

1431هـ - 2009 م

الفهرس

البيـــــــــــــــان	رقم الصفحة

الفصل الرابع

المستقيم في الفراغ

البيـــــــــــــان	رقم الصفحة

المقدمة

تتميز الهندسة التحليلية بأهمية كبيرة في مجال العلوم الأساسية والدقيقة و بخاصة في علوم الرياضيات والفيزياء نظراً لحاجة الطلاب على اختلاف اختصاصاتهم لهذا النوع من العلوم و ذلك لارتباطها الدقيق بمختلف الفروع الأخرى لأن الهندسة التحليلية تهتم بالخصائص التي تتصف بها الظواهر الرياضية والفيزيائية و غيرها من الظواهر القابلة للحركة و التغيير .

فهي تفسر تلك الحركات وتصفها بشكل دقيق كما أنها تصف العوامل التي تؤدي إلى ذلك التغيير .

وإذا كان طلابنا قد درسوا مبادئ الهندسة التحليلية في المستوي خلال مرحلة دراستهم الثانوية فإننا قمنا من خلال مفردات هذا الكتاب بتوسيع هذا المفهوم ليشمل الهندسة التحليلية في الفراغ ، وذلك لتوسيع مدارك طلابنا و إعطائهم إمكانية تصور الكثير من الحلول التحليلية للمسائل المختلفة و بخاصة في علوم الميكانيك الرياضي أو الفيزيائي أو المعادلات التفاضلية أو التحليل الرياضي و غير ذلك .

من هنا كان لابد لجميع الطلبة و لا سيما طلاب كليات العلوم و الهندسة على تنوع اختصاصاتهم من أن يلموا بالمبادئ الأساسية للهندسة التحليلية في الفراغ للولوج إلى الرياضيات التطبيقية .

ويتميز التطور العلمي لمبادئ الهندسة الفراغية بنمو الاهتمام الشامل بها و ذلك بتوسع دائرة تطبيقاتها العملية من خلال حاجة مختلف الاختصاصات لها .

ولما كانت الغاية الأساسية للهندسة التحليلية في الفراغ هي تزويد الطالب بالمعلومات الأساسية التي تساعده على فهم الظواهر الطبيعية واكتساب دقة الملاحظة

والتحليل لجمل تلك الظواهر والتقيد بالأسلوب العلمي الذي يربط النتائج بالأسباب كما يربط المفاهيم و النظريات بالواقع.

فقد بذلنا جل جهدنا لإخراج هذا الكتاب على نحو الغايات المرجوة منه لتنمية التعامل الايجابي للطالب مع مختلف فروع العلوم الأخرى إضافة إلى اكتساب التفكير المنطقي لحل المشكلات التي يمكن أن تعترضه في دراسته التطبيقية وذلك من خلال ما قدمناه من موضوعات متنوعة بأسلوب سهل ومبسط مدعومة بمجموعة كبيرة ومتنوعة من الأمثلة والتمارين التطبيقية المحلولة وغير المحلولة التي أعطيت إجاباتها لتمكين الطالب من المساهمة في حلها كل ذلك بهدف تكريس هذه الموضوعات في ذهن الطالب وإكسابه المهارات المطلوبة .

وإننا إذ نأمل أن يحظى هذا الكتاب بالملاحظات البناءة من الزملاء والأساتذة لسد كل ثغرة قد تظهر فيه، لنرجو أن نكون قد وفقنا في عملنا هذا الذي أنجزناه في نطاق النهج المقرر لطلاب السنوات الأولى في مختلف الأقسام .

المؤلفان

عبد الفتاح عباسي		د. جمال حمندوش

الفصل الأول

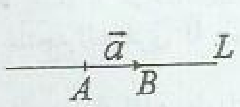
المتجهات في الفضاء وتطبيقاتها

يمكن معالجة العديد من المسائل والموضوعات في الهندسة التحليلية وغيرها من خلال ردها إلى تطبيقات أو عمليات على المتجهات، لذلك سنبدأ الهندسة التحليلية بإعطاء نبذة مختصرة عن هذه المتجهات:

1-1- مفهوم المتجه وأنواعه:

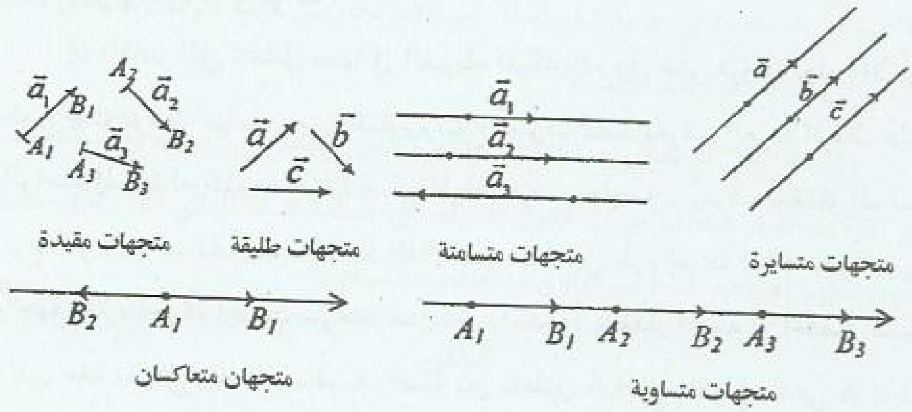
إن المقادير التي نتعامل معها في الفيزياء، الميكانيك، وفي شتى فروع العلوم الأخرى تندرج تحت نوعين أساسيين من المقادير، نوع يُعرف تماماً بمعرفة العدد الدال عليه والواحدة المميزة له، كدرجة حرارة جسم، طوله، عرضه، حجمه ... يُعرف بالمقدار السلمي ونوع آخر لايعرف تماماً بمعرفة العدد الدال عليه فقط، بل يلزم إضافة لذلك معرفة جهته أو جهة تغيره (حركة الجسم، سرعته، تسارعه ....) تدعوه بالمقدار المتجه أو اختصار المتجه والذي عادة ما يمثل بقطعة مستقيمة واصلة بين نقطتين B,A في الفراغ، تدعى A نقطة البداية (نقطة التأثير)، النقطة B نقطة النهاية، والمتجه من A إلى B يدل على جهة المتجه $\overline{AB}$، كما وأن أي مستقيم L تقع عليه النقطتان A و B يسمى حامل أو منحى المتجه، أما طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ فيدعى بطويلة المتجه (شدته أو قياسه) الشكل (1-1) والمقادير الأربعة الأخيرة (البداية، الجهة، الحامل، الطويلة) فتعرف بعناصر المتجه $\overline{AB}$.

ومن الجدير بالذكر أنه أحياناً قد يُرمز للمتجه بحرف واحد $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ وأن المتجهات بشكل عام هي متجهات طليقة إلاّ إذا ثبتت عناصرها، فإننا ندعوها بالمتجهات المقيدة (يُرمز للمتجه المقيد بالرمز $\bar{a} = \overline{AB}$) والمتجه المقيد، هو متجه لايمكن نقل نقطة تأثيره وبالتالي جميع عناصره ثابتة، أما إذا نقلنا نقطة تأثيره إلى موضع آخر على منحاه،



الشكل (1-1)

فندعو المتجه الناتج بالمتجه المنزلق، وفي حالة سحب هذا المتجه $\overline{AB}$ على حوامل Li موازية لـ L فندعو هذه المتجهات بالمتجهات المتسايرة عندما نحافظ على نفس الطول والجهة، أما إذا لم نحافظ على الطول أو على الاتجاه (أو على كليهما معاً) فندعوها بالمتجهات المتسامتة، الشكل (1-2)، بقي أن نشير إلى أنه إذا سحبنا المتجه $\overline{AB}$ محافظين على الطول والاتجاه إلى موضع آخر على نفس الحامل فيسمى المتجه $\overline{A'B'}$ بالمتجه المساوي للمتجه $\overline{AB}$، في حالة المحافظة فقط على الطول والاختلاف بالجهة ندعو المتجهين $\overline{AB}$، $\overline{A'B'}$ بالمتجهين المتعاكسين:



الشكل (1-2)

نتيجة (1):

1- يُرمز للمتجه بحرفين A و B وعليهما سهم $\overline{AB}$ أو بحرف صغير $\bar{a}$.

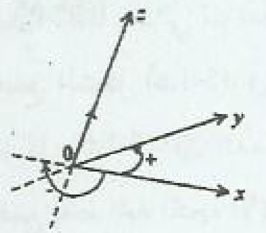
2- للمتجه أربعة عناصر هي: البداية، النهاية، الجهة، الحامل، الطويلة.

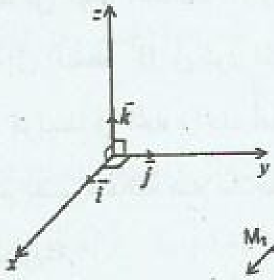
3- المتجه الصفري $\bar{0}$ طويلته مساوية للصفر ومنحاه غير معرّف.

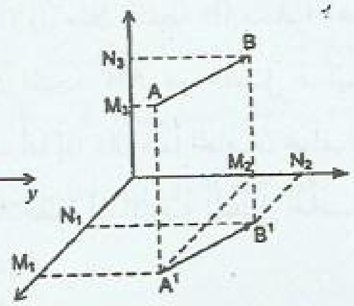
4- المتجه $\bar{e}_0$ الذي طويلته $|\bar{e}_0| = 1$ (واحدة الأطوال) يدعى بمتجه الواحدة.

ملاحظة (1): نعلم أن المحور هو مستقيم موجه $x'ox$ عليه نقطة بداية هي النقطة o فإذا اعتمدنا ثلاثة محاور متقاطعة بالنقطة o الشكل (1-3) فإننا نقول إن جملة المحاور الثلاثة هذه تشكل دوراناً موجباً (جملة موجبة التوجيه أو يمينية) إذا كان مراقب يقف في النقطة

o ورأسه باتجاه المحور oz، يرى المحور ox يدور عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وبأصغر زاوية θ ممكنة لينطبق على المحور oy الشكل (1-4) في الحالة المعاكسة، نقول إن الجملة تشكل دوراناً سالباً (يسارية التوجيه) فإضافة لذلك إذا اعتمدت المتجهات واحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ على المحاور (على الترتيب أيضاً) $o\vec{x},o\vec{y},o\vec{z}$ فإننا ندعو الجملة oxyz بجملة إحداثية مائلة، وفي حالة خاصة إذا كانت الزوايا بين هذه المحاور قائمة مثنى مثنى دعوناها جملة محاور إحداثية نظامية (قائمة موجبة التوجيه) وعندئذ فإن أي متجه $\vec{a}=\overline{AB}$ يعبر عنه بدلالتها على النحو التالي:







جملة إحداثية نظامية

الشكل (1-4)

الدوران الموجب (السالب) جملة مائلة

الشكل(1-3)

نسقط B،A إسقاطاً قائماً على المستوى xoy فنحصل على المتجه $\overline{A'B'}$ نسقط هذا الأخير على المحور ox فنحصل على المتجه $\overline{M_1N_1}$ بآلية مشابهة، نحصل على المتجه $\overline{M_2N_2}$. أخيراً نسقط المتجه $\overline{AB}$ على المحور oz فنحصل على المتجه $\overline{M_3N_3}$ باعتبار a_z,a_y,a_x هي أطوال القطع المستقيمة M_3N_3,M_2N_2,M_1N_1 وعلى الترتيب، ومع الأخذ بعين الاعتبار متجهات الواحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ في الجملة هذه، فإن المتجه $\vec{a}$ يعبر عنه وفق الصيغة:

$$\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k} \qquad (1)$$

ندعو هذه العلاقة بالعبارة التحليلية في الإحداثيات الديكارتية، كما ندعو الثلاثية (a_x,a_y,a_z) مركبات المتجه.

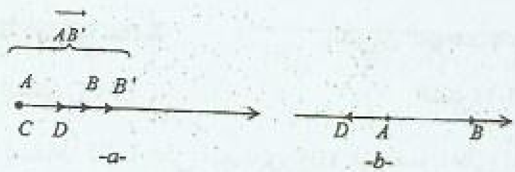
1-2- العمليات على المتجهات:

تجرى على المتجهات مجموعة من العمليات نذكر منها:

1- عملية الجمع:

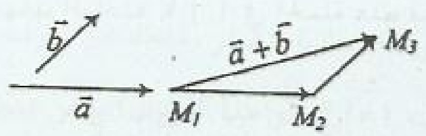
ليكن لدينا المتجهان $\bar{b} = \overline{CD}$, $\bar{a} = \overline{AB}$ عندئذ لتنفيذ عملية الجمع نميز الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: إذا كانا على نفس الحامل وكانت لهما بداية واحدة. الشكل (1-5)، فإن عملية الجمع $\bar{a}+\bar{b}$ تتم بأن نأخذ من نهاية أحدهما (الأول مثلاً النقطة B) مسايراً (هنا مساوٍ) $\overline{BB'}$ للثاني ثم نصل A إلى النقطة B' ويكون المتجه $\overline{AB'}$ هو حاصل عملية الجمع. الشكل (5-1,a)، في حالة كونهما في اتجاه واحد، أما إذا كان لهما اتجاهان مختلفان الشكل (5-1,b)، فإن العملية تتم بصورة مماثلة مع ملاحظة أن المتجه الممثل لحاصل الجمع يأخذ اتجاه المتجه الأكبر بالطويلة.



الشكل (1-5)

الحالة الثانية: إذا لم يكن للمتجهين $\bar{a}$ و $\bar{b}$ بداية مشتركة عندئذ يمكن أن نعتبر نقطة ما M_1 في الفراغ. الشكل (1-6).



الشكل (1-6) عملية جمع متجهين لهما بداية واحدة

ثم نسحب إليها أحد المتجهين ($\vec{a}$ مثلاً) وذلك برسم مساير $\overline{M_1M_2}$ ثم من النقطة M_2 نرسم مسايراً $\overline{M_2M_3}$ للمتجه الآخر $\vec{b}$ نصل النقطة M_1 إلى M_3 فنحصل على ناتج الجمع ويكون:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} \qquad (2)$$

تدعى قاعدة الجمع هذه بالجمع وفق قاعدة المثلث هذا، ونظراً لإمكانية إجراء العملية السابقة بطريقة أخرى وهي رسم مساير $\overline{M_1M_4}$ للمتجه $\vec{b}$ ثم مساير $\overline{M_3M_4}$ للمتجه الأول $\vec{a}$ وأخيراً وصل M_1 إلى M_3 للوصول إلى $\overline{M_1M_3}$ المعبر عن عملية الجمع، فإن القاعدة السابقة يمكن تسميتها الجمع وفق قاعدة متوازي الأضلاع المقام على المتجهين (على مساريهما) $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

من جهة أخرى وإذا اعتمدنا على العبارة التحليلية المتجه العلاقة (1) فإن:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

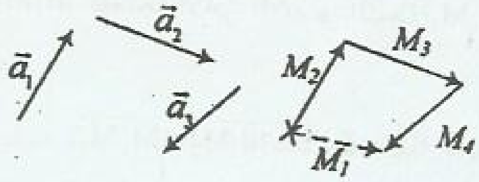
ويكون:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) + \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$$
$$\vec{c} = \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + \left(a_z + b_z\right)\vec{k}$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}:$$
$$c_x = a_x + b_x, c_y = a_y + b_y, c_z = a_z + b_z \qquad (3)$$

أي أن ناتج جمع متجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو متجه ثالث $\vec{c}$ مركباته تساوي المجموع الجبري لمركباتهما المتقابلة.

بآلية مشابهة تعمم عملية جمع عدة متجهات $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ أو $\vec{a}_\ell = \overline{A_\ell B_\ell}$، $\ell = 1, 2, 3, ..., b$ بأن نجمع $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ثم الناتج مع $\vec{a}_3$ وهكذا ... الشكل (7-1)، أو باستخدام العبارة التحليلية فإن:

$$\vec{a} = \sum_{\ell=1}^{n} \vec{a}_{\ell x}\,\vec{i} + a_{\ell y}\,\vec{j} + a_{\ell z}\,\vec{k} \tag{4}$$



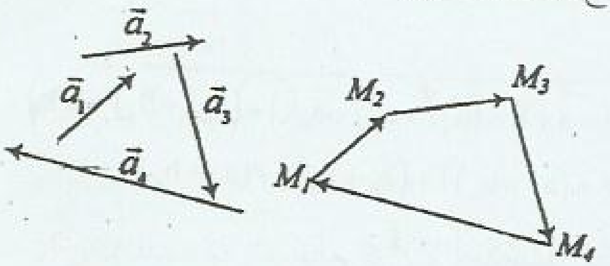
الشكل (1-7) جمع عدة متجهات

وأن:

$$a_x = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell x} \;,\; a_y = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell y} \;,\; a_z = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell z}$$

حيث: $a_{\ell x}, a_{\ell y}, a_{\ell z}$ هي مركبات المتجه $\vec{a}_\ell$.

من الملاحظ أن نتيجة حاصل جمع عدد منته من المتجهات مغايرة للصفر إذا كانت هذه المتجهات (مسايراتها) لاتشكل مضلعاً مغلقاً، بينما النتيجة تكون مساوية للصفر عندما يكون المضلع مغلقاً. الشكل (1-8)



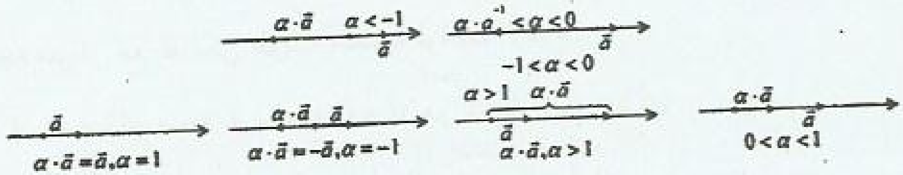
الشكل (1-8) جمع عدة متجهات مشكلة لمضلع مغلق

نتيجة (2): يلاحظ أن عملية جمع المتجهات هي عملية تبديلية، أي أن $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ إضافة لذلك فإن ناتج الجمع لايتأثر باختيار النقطة M_1 أو مع عملية ترتيب جمع المتجهات، أي أن:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{c}+\vec{a} = \vec{c}+\vec{a}+\vec{b} \tag{5}$$

2- عملية ضرب متجه بعدد a:

ليكن لدينا المتجه $\Re \ni \lambda = const,\ \bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ إن الكميـة $\lambda.\bar{a}$ تمثـل متجهاً له نفس حامل ونقطة تأثير المتجه $\bar{a}$ وطويلته مساوية لـ $|\bar{a}|$ إذا كـان $\gamma = 1$، وفي نفس الاتجاه، أما إذا كان $\lambda = -1$ $\lambda = -1$ فإن $\lambda.\bar{a}, \bar{a}$ متجهان متعاكسان، الشكل (1-9)، وعندما $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$ فهما في نفس الاتجاه (في اتجاهين مختلفين) والعملية هي عملية تكبير عندما $|\lambda| > 1$ وعملية تصغير من أجل $|\lambda| < 1$.



الشكل (1-9)

إن عملية ضرب متجه بعدد لها الخواص التالية:

-1

$$(\alpha.\beta).\bar{a} = \alpha.(\beta\bar{a}) = \beta.(\alpha\bar{a}) = \alpha.\beta\bar{a} \qquad (6)$$

حيث $\alpha, \beta \in R^*$

2- خاصة توزيع ضرب عدد في مجموع علة متجهات:

$$\alpha.(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n) = \alpha.\bar{a}_1 + \alpha\bar{a}_2 + ... + \alpha\bar{a}_n \qquad (7)$$

أو:

$$\alpha.\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha\,\bar{a}_i$$

3- خاصة التوزيع لعملية ضرب متجه في مجموع علة أعداد:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\bar{a} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{a} + ... + \alpha_n\bar{a} \qquad (8)$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$

أو:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right).\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}$$

حيث $\alpha_i \in R^*$, $\alpha_n \in R$ $\forall n \geq 2$

4- إن متجه الواحدة على أي متجه $\vec{a}$ يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$e=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{9}$$

حيث $|\vec{a}|$ هي طويلة المتجه $\vec{a}$ وبالتالي فإن متجه الواحدة على متجه $\vec{a}$ هو متجه متوافق مع $\vec{a}$ لكن طويلته مساوية لواحدة الأطوال.

5- إن ضرب أي متجه $\vec{a}$ بالعدد $\alpha = 0$ هو المتجه الصفري، أي:

$$\alpha.\vec{a}=0 \ , \ \alpha=0 \text{ أو } \vec{a}=0$$

6- بالاعتماد على العلاقة (1) فإن:

$$\alpha.\vec{a}=\alpha.\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)$$

$$\alpha.\vec{a}=\alpha a_x\vec{i}+\alpha a_y\vec{j}+\alpha a_z\vec{k}$$

وبالتالي إن عملية ضرب متجه $\vec{a}$ بعدد α توافق عملية ضرب كل مركبة من مركباته بهذا العدد.

3- عملية طرح متجه من آخر:

إن عملية طرح المتجه $\vec{b}$ من المتجه $\vec{a}$ يمكن فهمها كناتج عمليتين، الأولى هي عملية ضرب المتجه $\vec{b}$ بالعدد $\alpha=-1$ فنحصل على المتجه $\vec{c}=-\vec{b}$، والثانية هي عملية جمع للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ويكون:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{c}$$

وتحليلياً فإن:

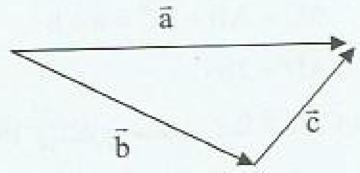
$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)-\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x\right)\vec{i}+\left(a_y-b_y\right)\vec{j}+\left(a_z-b_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k}=\vec{d} \qquad (10)$$

حيث: $d_x=a_x-b_x \quad , \quad d_y=a_y-b_y \quad , \quad d_z=a_z-b_z$

لأن طرح المتجه $\vec{b}$ من المتجه $\vec{a}$ هو المتجه $\vec{c}$ حيث $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$



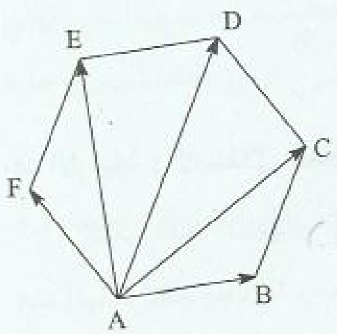
الشكل (1-9)

لأنه يمكننا كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل: $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ وهذا واضح من الشكل (1-9).

تمرين (1-1): إذا كان ABCDEF سداسي أضلاع منتظم:

1- أوجد مجموع المتجهات $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD},\overline{AE},\overline{AF}$.

وذلك بدلالة المتجه $\overline{AD}$.



2- إذا كان $\overline{AB}=a$ و $\overline{BC}=b$ أوجد كلاً من المتجهات التالية: $\overline{CD},\overline{DE},\overline{EF},\overline{FA},\overline{DA}$ بدلالة a و b.

الحل:

بملاحظة الشكل المقابل يمكننا أن نكتب:

$$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}$$

$$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=\overline{AB}+\left(\overline{AD}+\overline{DC}\right)+$$
$$+\overline{AD}+\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{AF}=$$
$$=3\overline{AD}+\left(\overline{AB}+\overline{DE}\right)+\left(\overline{AF}+\overline{DC}\right)=3\overline{AD}$$

لأن:
$$\overline{AF}=-\overline{DC}\quad,\quad \overline{AB}=-\overline{DE}$$

2- بملاحظة أن:
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=a+b$$
$$\overline{AD}=2b$$

لأن $\overline{AD}$ يوازي $\overline{BC}$ ويساوي ضعفه، كما أن $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}$.

إذاً:
$$\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}=2b-(a+b)=b-a$$

كذلك فإن:
$$\overline{DE}=-\overline{AB}=-a$$
$$\overline{EF}=-\overline{BC}=-b$$
$$\overline{FA}=-\overline{CD}=a-b$$
$$\overline{DA}=\overline{DC}+\overline{CA}$$
$$=(a-b)+(-a-b)=-2b$$
$$\overline{DE}=-\overline{AB}=-a$$

4- الارتباط والاستقلال الخطي للمتجهات:

لتكن لدينا المتجهات $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ بحيث $\bar{a}_1\neq\bar{0}$ نقول عن مجموعة المتجهات هذه إنها مرتبطة خطياً إذا وجدت الأعداد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ أحدها على الأقل غير معدوم، وبحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\alpha_1.\bar{a}_1+\alpha_2.\bar{a}_2+\ldots+\alpha_n\bar{a}_n=\bar{0} \qquad (11)$$

أو:

$$\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell.\bar{a}_\ell=\bar{0}$$

في الحالة المعاكسة نقول عن $\vec{a}_\ell$ إنها مستقلة خطياً.

نتيجة (3): إذا كانت المتجهات $\ell = 1,2,...,n, \vec{a}_\ell$ مرتبطة خطياً، فإن العلاقة (11) يمكن كتابتها على الشكل:

$$\vec{a}_n = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + ... + \beta_{n-1}\vec{a}_{n-1}, a_n \neq 0$$

نذكر أنه في حالة الارتباط الخطي فإن أحد الأعداد α_ℓ على الأقل مغاير للصفر، وهنا:

$$\beta_\ell = \frac{\alpha_\ell}{-\alpha_n} \qquad , \qquad \ell = 1,2,...,n-1$$

أي أنه في حالة الارتباط الخطي لـ n متجهاً فإنه يمكن التعبير دوماً عن أحدها بدلالة البقية في علاقة خطية، مع ملاحظة أنه وعندما $n = 4$ ومن أجل $\vec{a}_3 = \vec{k}$ و $\vec{a}_1 = \vec{i}\,, \vec{a}_2 = \vec{j}$ أو:

$$\vec{a}_4 = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3$$
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

وهي نفسها العلاقة (1) والتي دعوناها العبارة التحليلية لمتجه، وبالتالي فهي ليست إلاّ علاقة ارتباط خطي بين المتجه $\vec{a}$ ومركباته على المحاور الإحداثية في جملة إحداثية معتبرة oxyz.

نتيجة (4): في حالة الارتباط الخطي لمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فإن $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = 0$. فإذا كان $\alpha_1 \neq 0$ أو $(\alpha_2 \neq 0)$ فإن:

$$\vec{a} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{b} \qquad \vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{a}$$

أو:

$$\vec{a} = \beta\vec{b} \qquad , \qquad \vec{b} = \delta\vec{a} \tag{12}$$

وبالتالي فإنه في حالة الارتباط الخطي لمتجهين فإن أحدهما ينتج عن الآخر بضربه (قسمته) بعدد كما ويمكن كتابة العلاقات السابقة بالشكل:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \beta = \text{const} \qquad , \qquad \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \delta = \text{const} \tag{13}$$

وهكذا يكافئ القول إنه في حالة الارتباط الخطي لمتجهين فإن نسبة أحدهما إلى الآخر تساوي مقداراً ثابتاً.

من جهة أخرى إذا اعتمدنا العبارة التحليلية لمتجه فإن عملية الارتباط الخطي لمتجهين تأخذ الصيغة:

$$\bar{a} = \alpha\bar{b} \ , \ a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \alpha\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right)$$

ومنه:

$$a_x = \alpha b_x \ , \ a_y = \alpha b_y \ , \ a_z = \alpha b_z$$

أو:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha \tag{14}$$

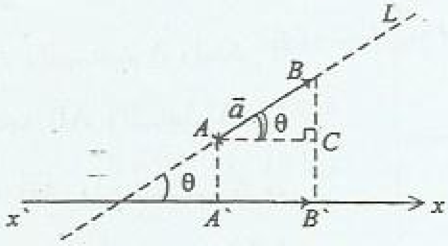
وبالتالي يمكن القول إن المركبات المتقابلة لمتجهين مرتبطين خطياً هي مركبات متناسبة (نسبة كل مركبتين متقابلتين تساوي إلى نفس الثابت α) وهذا بالطبع يعبر عنه بما يسمى توازي متجهين في الفراغ.

5- مساقط المتجهات :

أ – مسقط متجه على محور:

إن مسقط المتجه $\overline{AB}$ على المحور x'ox هو المقدار السلمي $\left|\overline{A_1B_1}\right|$ المحول على ذلك المحور ويسمى حامل المسقط والقيمة العددية لهذا المقدار السلمي تمثل طول المسقط وإشارته الجبرية تحدد الاتجاه، فإذا كانت الإشارة موجبة فإن اتجاه المسقط يتوافق مع اتجاه المحور الموجه x'ox، وإذا كانت الإشارة سالبة فإن اتجاه المسقط بعكس اتجاه المحور الموجه

ليكن لدينا المتجه $\vec{a}$ ولنعتبر المحور x'ox الشكل (1-10)



الشكل (1-10)

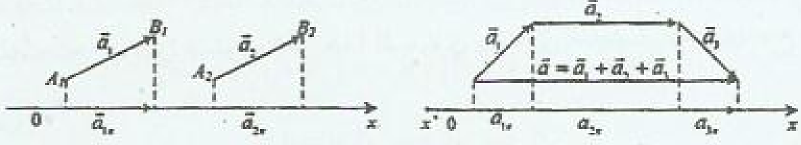
ولتكن θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{a}$ أو حامله المستقيم L مع الاتجاه الموجب لهذا المحور، عندئذ لتوضيح مفهوم مسقط المتجه $\vec{a}=\overline{AB}$ على المحور x'ox نسقط A و B على هذا المحور ويكون $\overline{A'B'}$ هو المتجه المطلوب. ومن الملاحظ (المثلث القائم $\overset{\Delta}{ACB}$ حسب فيثاغورث) أن طويلة المسقط تعطى بدلالة طويلة المتجه $\vec{a}$ وجيب تمام الزاوية θ وفق العلاقة:

$$\left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{AB}\right| \cos\theta \qquad (15)$$

وهذه القيمة تكون موجبة عندما $\theta < \frac{\pi}{2}$ (θ زاوية حادة) وسالبة عندما $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$ زاوية منفرجة، طبعاً إذا $\left|\overline{A'B'}\right| = \overline{AB}$ عندما $\cos\theta = 1$ أو $\theta = 0$ عندما يكون المتجه $\vec{a}$ والمحور x'xo متوازيين.

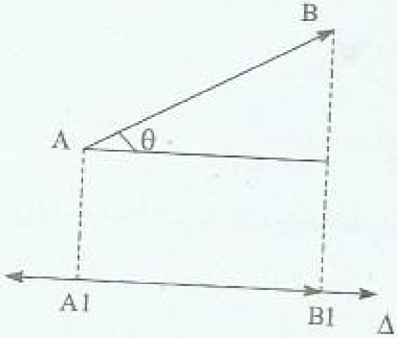
نتيجة (5):

إذا كان لدينا متجهان متسايران $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فإن مسقطيهما على محور واحد متساويان أو المتجهات المتسايرة لها مساقط متساوية على نفس المحور. الشكل (11-1,a). مسقط مجموع عدة متجهات $\vec{a}_i$ يساوي مجموع المساقط على نفس المحور. الشكل (11-1,b).



(الشكل -11)

ب – مسقط متجه على مستقيم:



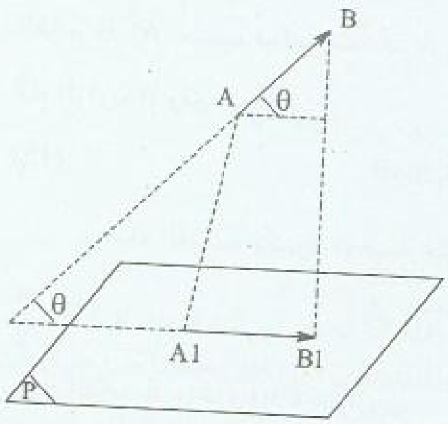
ليكن المتجه $\overline{AB}$ والمستقيم Δ ولتكن θ هي أصغر زاوية بين المتجه $\overline{AB}$ والمستقيم Δ.

إن مسقط المتجه $\overline{AB}$ على المستقيم Δ هو عبارة عن المتجه $\overline{A_1B_1}$ مبدؤه A_1 هو مسقط A ونهاية B_1 مسقط B على المحور Δ ويكون:

$$\overline{A_1B_1} = \left|\overline{AB}\right| \cos\theta \, \vec{I}$$

حيث $\vec{I}$ متجه الواحدة على Δ وبنفس اتجاه $\overline{AB}$.

ج – مسقط متجه على مستوي:



مسقط المتجه $\overline{AB}$ على المستوي P هو متجه آخر $\overline{A_1B_1}$ مبدؤه مسقط مبدأ المتجه الأصلي $\overline{AB}$ ونهايته مسقط نهاية ذلك المتجه وطوله يساوي:

$$\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\overline{AB}\right| . \cos\theta$$

نتيجة (6):

- ينعدم مسقط متجه على مستوي إذا كان المتجه عمودياً على هذا المستوي.
- مسقط متجهين متوازيين على مستوي واحد هما متجهان متوازيان.
- مسقط المجموع المتجهي لعدة متجهات على مستوي معين هو المجموع المتجهي لمساقط هذه المتجهات.
- مسقط متجه موازي لمستوي على هذا المستوي يساوي متجهاً يتساوى مع المتجه الأصلي.

6- الجداء الداخلي (السلمي، العددي) لمتجهين:

يعرف الجداء الداخلي للمتجهين:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

بالعلاقة:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta \qquad (16)$$

أي هو مقدار قيمته تساوي جداء طويلتي المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ في جيب تمام الزاوية θ التي يحصرانها حيث $o \le \theta \le \pi$.

نلاحظ أنه إذا كان:

أ - $\vec{a}.\vec{b} > 0$ فإن الزاوية θ بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هي زاوية حادة $\theta < \frac{\pi}{2}$.

ب - $\vec{a}.\vec{b} < 0$ فإن: $\theta > \frac{\pi}{2}$ وزاوية منفرجة.

جـ - $\vec{a}.\vec{b} = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ والزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هي زاوية قائمة وبالتالي فهما متعامدان (يقعان على حاملين متعامدين).

نتيجة (6):

أ – في الجملة الإحداثية الديكارتية المتعامدة لدينا:

$$\vec{i}.\vec{i} = 1 \quad , \quad \vec{j}.\vec{j} = 1 \quad , \quad \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = 0 \quad , \quad \vec{j}.\vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{k}.\vec{i} = 0$$

ب – في الجملة الإحداثية الديكارتية المتعامدة وباستخدام العبارة التحليلية لمتجه فإن:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right).\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (17)$$

وفي حالة خاصة عندما $\vec{a} \perp \vec{b}$ لدينا $\vec{a}.\vec{b} = 0$ وبالتالي تمكن كتابة شرط تعامد متجهين وفق العلاقة:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

باختصار فإن:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (18)$$

جـ - إن طويلة المتجه $\vec{a}$ تحسب من خلال العلاقة:

$$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos\theta = |\vec{a}|.1 = |\vec{a}|^2$$

ومنه:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (19)$$

د - إن الزاوية θ بين متجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يمكن أخذها من خلال العلاقة:

$$|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}.\vec{b}|.|\vec{b}|.\cos\theta$$

أي:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

أو:

$$\cos\theta = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{a_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (20)$$

هـ - إن الجداء الداخلي لمتجهين يتصف بالخاصة التبديلية لأن:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

$$\vec{b}.\vec{a} = |\vec{b}|\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right)\ ,\ \cos\theta = \cos(-\theta)$$

ضرب الأعداد عملية تبديلية $a.b = b.a$

$$\vec{a}.\vec{b}=ab\ \cos\theta$$

ومنه فإن:

$$\vec{b}.\vec{a}=b.a\cos(-\theta)=ab\ \cos\theta=\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\alpha.\vec{a}).\ \vec{b}=\alpha\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\ \ ,\ \alpha\neq 0$$

و – الجداء الداخلي لمتجهين توزيعي أي:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$$

ز – الجداء الداخلي لمتجهين تجميعي لناتج سلمي وليس لناتج متجهي، أي:

$$\forall m\in R\Rightarrow(m.\vec{a}).\vec{b}=m.\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}\neq\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$$

ح – إذا كان: $\vec{a}.\vec{b}=\mp|\vec{a}|.|\vec{b}|$

فإن للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نفس الاتجاه.

وفي الحالة الخاصة فإن: $\vec{a}.\vec{a}=+|\vec{a}|^2$

ط – إذا كان $\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ و $\vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ فإن:

$$\vec{a}_1.\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

تمرين (1-2): أثبت أن $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

الحل:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)&=\vec{a}.\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}\\&=\vec{a}^2-\vec{b}^2\end{aligned}$$

تمرين (1-3):

آ – ماهي قيمة العدد R ليكون المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدين باعتبار أن:

$$\vec{a} = R\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = 2R\vec{i} + R\vec{j} - 4\vec{k}$$

ب – أوجد الزاوية بين المتجهين:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

الحل:

أ –
$$\vec{a}.\vec{b} = o \Leftarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(R\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right).\left(2R\vec{i} - R\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= 2R^2 - 2R - 4 = o \Rightarrow R = 2 \ , \ R = -1$$

ب –

$$\cos\theta = \cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} =$$
$$= \frac{\left(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right).\left(6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (1)^2}.\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (2)^2}}$$
$$= \frac{12 - 6 - 2}{\sqrt{5}.\sqrt{49}} = \frac{4}{21}$$
$$\Rightarrow \theta = \arccos\frac{4}{21} \cong 79^\circ$$

تمرين (1-4) إذا كان:

$$\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد متجه الواحدة على المتجه $\vec{c}$ الذي يتألف من المجموع الخطي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وعمودياً على $\vec{B}$.

الحل: $\vec{C} = \vec{A} + \lambda\vec{B}$ حيث λ عدد سلمي و $\vec{c}$ متجه متعامد مع المتجه $\vec{B}$ فإن:

$$\vec{C}.\vec{B}=o \Rightarrow \left(\vec{A}+\lambda\vec{B}\right).\vec{B}=o$$

$$\Rightarrow \vec{A}\vec{B}+\lambda.\left(\vec{B}.\vec{B}\right)=o$$

$$\left(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\right).\left(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+\lambda\left(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)=o$$

وبالتالي فإن:

$$(3-2+6)+\lambda(9+1+4)=o$$

$$7+14\lambda=o \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2}$$

إذاً:

$$\vec{C}=\vec{A}+\lambda\vec{B}$$

$$=\left(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}\right)$$

ومتجه الواحدة في الاتجاه $\vec{C}$ هو:

$$\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{-\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{5}{2}\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}+\frac{4}{4}}}=\frac{+\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{30}}$$

تمرين (1-5):

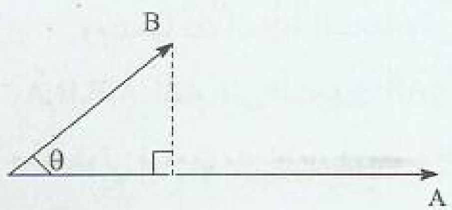
أوجد المسقط السلمي ومتجه المسقط للمتجه:

$$\vec{B}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}\right)$$

على المتجه:

$$\vec{A}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$$

الحل:



إن مسقط المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ هو $|\vec{B}|\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ وباستخدام العلاقة:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta$$

ولدينا:

$$|\vec{B}|\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

وحيث إن: $|\vec{A}| = \sqrt{9+36+4} = 7$

ومنه:

$$|\vec{B}|\cos\theta = \frac{22}{7}$$

وهو المسقط السلمي لـ $\vec{B}$ على $\vec{A}$. أما المسقط المتجهي للمتجه $\vec{B}$ على $\vec{A}$ فهو أيضاً $\frac{22}{7}$ وله نفس اتجاه المتجه $\vec{A}$ لكن مضروباً بمتجه الواحدة لـ $\vec{A}$ وهو $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$.

إذاً المسقط المتجهي لـ $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو:

$$\frac{22}{7}.\frac{3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{9+36+4}} = \frac{22}{49}\left(3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

7- الجداء الخارجي (المتجهي) لمتجهين:

إن الجداء الخارجي $\vec{a}\Lambda\vec{b}$ للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو متجه ثالث $\vec{c}$ مبدؤه هو المبدأ المشترك لهما (أو النقطة التي سحبا إليها) ومنحاه هو بحيث يكون عمودياً على مستويهما وجهته بحيث تشكل الثلاثية $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ جملة مباشرة، أما طويلته فتعطى بالعلاقة:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\Lambda\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

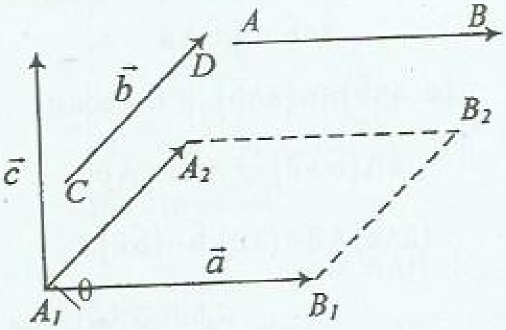
$$|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\theta \qquad (21)$$

وهندسياً فإن العلاقة السابقة يمكن فهمها على أنها تمثل مساحة متوازي أضلاع $A_1B_1B_2A_2$ المقام على المتجهين $\vec{b} = \overline{CD}, \vec{a} = \overline{AB}$ (مساحة المثلث تساوي نصف جداء طولي ضلعين متجاورين في جيب الزاوية المحصورة بينهما). الشكل (1-12).

نتيجة (7):

1- بالنسبة لمتجهات الواحدة في جملة إحداثية ديكارتية نظامية فإن:

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=0 \quad , \quad \vec{j}\wedge\vec{j}=0 \quad , \quad \vec{k}\wedge\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \quad , \quad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \quad , \quad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k} \quad , \quad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i} \quad , \quad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$



الشكل (1-12)

2- يمكن إعطاء الجداء الخارجي لمتجهين من خلال المحدد:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{22}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

في حالة خاصة وعندما $\sin\theta=0$, $\theta=0$، أي عندما يكون المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين فإن:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow$$
$$a_yb_z-a_zb_y=0 \quad , \quad a_zb_x-a_xb_z=0 \quad , \quad a_xb_y-a_yb_x=0$$

أو:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\alpha$$

وبالتالي من جديد نرى أن الشرط اللازم والكافي لتوازي متجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو:

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha \qquad (23)$$

3- بما أن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ نجد أن الجداء الخارجي لمتجهين هو عملية غير تبديلية، ويكون:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \qquad (24)$$

-4 $$(\alpha . \vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \wedge \vec{b}) \ , \ \alpha = \text{const}$$

-5 $$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

-6 $$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$$

تمرين (1-6): برهن صحة العلاقة التالية:

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}|^2 + |\vec{A}.\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 . |\vec{B}|^2$$

البرهان:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \sin\theta$$

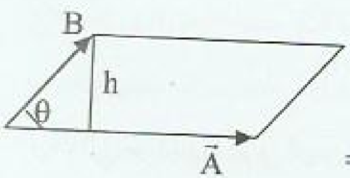
$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \cos\theta$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}|^2 + |\vec{A}.\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 . |\vec{B}|^2 \sin^2\theta + |\vec{A}|^2 \times |\vec{B}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\vec{A}|^2 . |\vec{B}|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= |\vec{A}|^2 . |\vec{B}|^2$$

تمرين (1-7): بين أن مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تساوي $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$.



الحل: مساحة متوازي الأضلاع تساوي $h.|\vec{A}|$

$$= |\vec{B}|.\sin\theta.|\vec{A}|$$

$$= |\vec{A}|.|\vec{B}| \sin\theta$$

تمـــرين (1-8): عـين متجـه واحـدة عمـودي علـى المـستوي الحـاوي للمـتجهين $\vec{A}=2\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$ و $\vec{B}=4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ واحسب جيب الزاوية ما بين هذين المتجهين.

الحل:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -6\\ 4 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}$$

ومتجه الواحدة الموازي لـ $\vec{A}\wedge\vec{B}$ هو:

$$\vec{N}=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}=\frac{15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}}{\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(3)^2}}=\frac{15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}}{35}$$

$$\vec{N}=\frac{1}{7}\left(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}\right)$$

وهناك متجه واحدة معاكس بالاتجاه هو: $-\vec{N}=\frac{-1}{7}\left(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}\right)$

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|}$$

$$=\frac{\left|15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}\right|}{\left|2\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}\right|.\left|4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right|}=\frac{35}{7\sqrt{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

- بعض التطبيقات الفيزيائية للجداء السلمي والمتجهي:

أولاً في العمل: لنعتبر المتجهين $\vec{F}$ و $\vec{d}$ حيث إن $\vec{F}$ تمثل القوة التي مقدارها F و $\vec{d}$ متجه يمثل إزاحة معلومة مقدارها d واذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{F}$ و $\vec{d}$ فإن العمل W الذي أنجز بالقوة $\vec{F}$ والإزاحة $\vec{d}$ يعرف بالعلاقة:

$$W = \vec{F}.\vec{d}$$

وإذا كان لدينا القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ المطبقة على الجزيئات التي تنتقل مسافة $\vec{d}$

فإن العمل الكلي المنجز بهذه القوى يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}_1.\vec{d} + \vec{F}_2.\vec{d} + ... + \vec{F}_n.\vec{d} \\ &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_n\right).\vec{d} \\ &= \vec{F}.\vec{d} \end{aligned}$$

حيث تقدر واحدة العمل بالجول (واط × ثانية).

ثانياً – في الاستطاعة: إذا كانت $\vec{F}$ قوة تؤثر في نقطة متحركة بسرعة $\vec{V}$ عندئذ فإن الاستطاعة P تعطى بالعلاقة:

$$P = \vec{F}.\vec{V}$$

حيث تقدر واحدة الاستطاعة بالواط.

مثال (1): أوجد العمل المنجز بتحريك جسم ما على المتجه:

$$\vec{d} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

إذا كانت القوة المطبقة هي: $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

الحل:

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}.\vec{d} \\ &= \left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}\right) \\ &= 6 - 2 + 5 = 9 \text{ Joul.} \end{aligned}$$

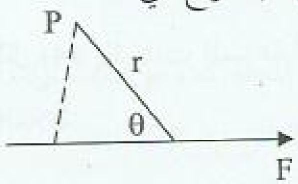
مثال (2): أوجد العمل الناتج من تحريك جسم على مستقيم من النقطة $M_1(3,2,-1)$ إلى النطقة $M_2(2,-1,4)$ بالقوة $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\vec{d} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\right) - \left(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$= -4 + 12 + 10 = 18 \text{ Joul.}$$

ثالثاً – في عزم قوة حول نقطة:

العزم M لقوة $\vec{F}$ حول نقطة P تساوي القوة مضروبة بالذراع، أي:



$$|\vec{M}|=|\vec{F}|.(r\sin\theta)$$

$$=r.F.\sin\theta=|\vec{r}\,\Lambda\vec{F}|$$

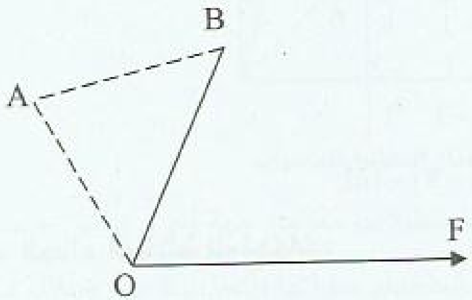
أي أن: $\vec{M}=\vec{r}\Lambda\vec{F}$

مثال (3): لتكن لدينا القوة: $\vec{F}=4\vec{i}-3\vec{k}$ المطبقة على النقطة A حيث:

$$\overline{OA}=2\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$$

أوجد عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة B، حيث: $\overline{OB}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$

الحل: الذراع:



$$\vec{r}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$

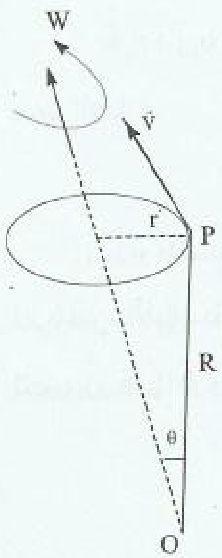
$$\vec{r}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\vec{M}=\vec{r}.\Lambda\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

$$\vec{M}=-3\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}$$

وهـــو متجـــه العـــزم المطلـــوب وقيمتـــه فهـــي:

$$.\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{9+196+16}=\sqrt{221}=11$$



رابعاً – في سرعة دوران جسم:

– السرعة الخطية $\vec{V}$ لنقطة من الجسم هي متجه موضعها $\vec{R}$ وتعطى بالعلاقة:

$$\vec{V}=\vec{\omega}\Lambda\vec{R}$$

حيث $\vec{\omega}$ متجه يمثل السرعة الزاوية للدوران حول محور واتجاهه يعطى بتطبيق قاعدة اليد اليمنى.

مثال (4): إذا كانت السرعة الزاوية لدوران جسم صلب حول محور الدوران تعطى بالعلاقة:

$$\vec{W} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

أوجد السرعة الخطية للنقطة P من الجسم والمعطاة بالعلاقة:

$$\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

الحل:

$$\vec{V} = \vec{W} \Lambda \vec{R}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} = -5\vec{i} - 8\vec{j} - 14\vec{k}$$

8- الجداء المختلط للمتجهات:

لتكن لدينا المتجهات:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ,\ \vec{b} = b_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ,\ \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

ندعو المقدار:

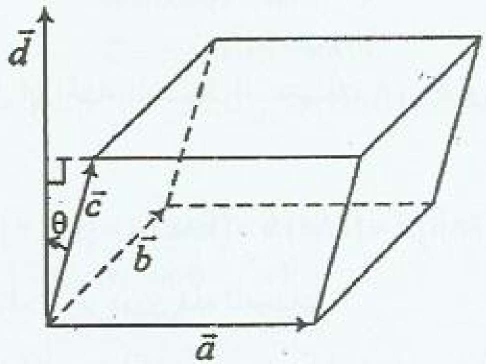
$$\left(\vec{a}\Lambda\vec{b}\right).\vec{c} = \vec{d}.\vec{c} = |\vec{d}|.|\vec{c}|.\cos\left(\vec{d},\vec{c}\right)$$

الجداء المختلط للمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وهو بالحقيقة عبارة عن ناتج عمليتين معروفتين، الأولى $\vec{a}\Lambda\vec{b}$ والتي كنا قد رأيناها تمثل مساحة متوازي الأضلاح المقام على المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وهذه القيمة محمولة على المتجه $\vec{d}$ الشكل (1-13)، العمودي على

متوازي الأضلاع هذا، أما العملية الثانية فهي الجداء الداخلي: $\vec{d}.\vec{c} = d.c.\cos\left(\widehat{\vec{d},\vec{c}}\right)$ للمتجهين $\vec{d}$ و $\vec{c}$.

إن المقدار $c.\cos\left(\vec{d},\vec{c}\right)$ يمثل مسقط المتجه $\vec{c}$ على المتجه $\vec{d}$ وهو بمثابة ارتفاع لمتوازي المستطيلات المقام على المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وبالتالي فإن العلاقة:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\Lambda\vec{b}\right).\vec{c} = dc.\cos\theta \qquad (25)$$



الشكل (1-13) الجداء المختلط للمتجهات

يمكن اعتبارها تمثل حجم متوازي المستطيلات هذا من جهة أخرى يمكن حساب قيمة الجداء المختلط للمتجهات السابقة باستخدام عباراتها التحليلية من خلال فك المحدد التالي:

$$\left(\vec{a}\Lambda\vec{b}\right).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \Delta \qquad (26)$$

ونحن أمام الاحتمالات التالية:

الاحتمال الأول: $\Delta > 0$ عندئذ فإن القيمة هذه هي حجم متوازي المستطيلات المقام على المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ والإشارة الموجبة تدل على أن جملة المتجهات السابقة تشكل دوراناً موجباً (يمينية موجبة).

الاحتمال الثاني: $\Delta < 0$ عندئذ فإن القيمة المطلقة $|\Delta|$ هي الحجم والإشارة السالبة تشير إلى أن الجملة سالبة التوجيه.

الاحتمال الثالث: $\Delta = 0$ عندئذ فإن الحجم مساوٍ للصفر، أي أن المتجهات تقع في مستوٍ واحد (لانعدام البعد الثالث لمتوازي المستطيلات) أو بعبارة أخرى إن المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هي متجهات مرتبطة خطياً، أو أن أحد المتجهات الثلاثة معدوم. أو أن هناك متجهين متوازيين.

أخيراً نشير إلى أن الجداء المختلط للمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ يتصف بالخواص التالية:

-1 $$(\vec{a}\Lambda\vec{b}).\vec{c} = (\vec{c}\Lambda\vec{a}).\vec{b} = (\vec{b}\Lambda\vec{c}).\vec{a} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

لاتختلف النتيجة بإجراء تدوير دوري لهذه المتجهات.

-2 $$(\vec{a}\Lambda\vec{b}).\vec{c} = -(\vec{a}\Lambda\vec{c}).\vec{b} \quad , \quad (\vec{a}\Lambda\vec{b}).\vec{c} = -(\vec{b}\Lambda\vec{a}).\vec{c}$$

أي أنه إذا بادلنا بين المتجهين وبشكل غير دوري فإن النتيجة تضرب بإشارة ناقص.

-3 $$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1\Lambda\vec{b}).\vec{c} + (\vec{a}_2\Lambda\vec{b}).\vec{c} = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$$

أي أن الجداء المختلط توزيعي.

-4 $$(\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{c},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \ , \ \alpha,\beta = \text{const}$$

إن برهان الخاصة الأخيرة يتم بالاعتماد على خواص المحددات كما يلي:

$$\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x+\alpha b_y+\beta c_x & a_y+\alpha b_y+\beta c_y & a_z+\alpha b_z+\beta c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ $-\alpha$ والسطر الثالث بـ $-\beta$ ونجمع للسطر الأول فيكون:

$$\left(a+\alpha\vec{b}+\beta\vec{c},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

سننهي بحث المتجهات بأخذ التطبيقين التاليين:

تمرين (1-8): لتكن لدينا المتجهات:

$$\vec{A}=3\vec{i}+\cos\theta\vec{j}+2\vec{k}$$
$$\vec{B}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}-\vec{k}$$
$$\vec{C}=\cos\theta\vec{i}+\vec{j}-\sin\theta\vec{k}$$

أوجد الجداء المختلط $\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)$ وذلك من أجل $\theta=0$.

الحل:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} 3 & \cos\theta & 2 \\ \cos\theta & \sin\theta & -1 \\ \cos\theta & 1 & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$3\left(\sin^2\theta+1\right)-\cos\theta\left(-\cos\theta.\sin\theta+\cos\theta\right)$$
$$+2\left(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$=3\sin^2\theta+3+\cos^2\theta\sin\theta-\cos^2\theta+2\cos\theta-2\sin\cos^2\theta$$
$$=0+3+0-1+2-0=4$$

تمرين (1-9): برهن أن:

$$\text{(i)}\quad \vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right).\vec{C}$$
$$\text{(ii)}\quad \vec{A}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{C}\right)=0$$

الحل:

(i) نعلم أن الجداء الداخلي تبديلي:

$$\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right).\vec{C}=\vec{C}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)$$

ومنه:

$$\vec{C}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)$$

البرهان على (ii):

$$\vec{A}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\Lambda\vec{A}\right).\vec{C}$$

$$=\vec{O}\Lambda\vec{C}=\vec{O}$$

حيث الجداء الداخلي تبديلي.

تمرين (1-9) برهن على أن:

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right).\left(\vec{B}+\vec{C}\right)\Lambda\left(\vec{C}+\vec{A}\right)=2\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{A}\right)$$

البرهان:

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right).\left(\vec{B}+\vec{C}\right)\Lambda\left(\vec{C}+\vec{A}\right)$$

$$=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\left[\vec{B}\Lambda\left(\vec{C}+\vec{A}\right)+\vec{C}\Lambda\left(\vec{C}+\vec{A}\right)\right.$$

$$=\left(\vec{A}+\vec{B}\right).\left[\vec{B}\Lambda\vec{C}+\vec{B}\Lambda\vec{A}+\left(\vec{C}\Lambda\vec{A}\right)\right];\vec{C}\Lambda\vec{C}=\vec{O}$$

$$=\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)+\vec{A}\left(\vec{B}\Lambda\vec{A}\right)+\vec{A}.\left(\vec{C}\Lambda\vec{A}\right)+$$

$$\vec{B}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)+\vec{B}\left(\vec{B}\Lambda\vec{A}\right)+\vec{B}.\left(\vec{C}\Lambda\vec{A}\right)$$

$$=\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)-\vec{A}\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right)-\vec{A}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{C}\right)+$$

$$\left(\vec{B}\Lambda\vec{B}\right).\vec{C}+\left(\vec{B}\Lambda\vec{B}\right).\vec{A}+\vec{B}.\left(\vec{C}\Lambda\vec{A}\right)$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\Lambda\vec{A}\right).\vec{B}-\left(\vec{A}\Lambda\vec{A}\right).\vec{C}$$

$$+\left(\vec{B}\Lambda\vec{B}\right).\vec{C}+\left(\vec{B}\Lambda\vec{B}\right).\vec{A}+\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right).\vec{A}$$

$$=\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)+\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)$$

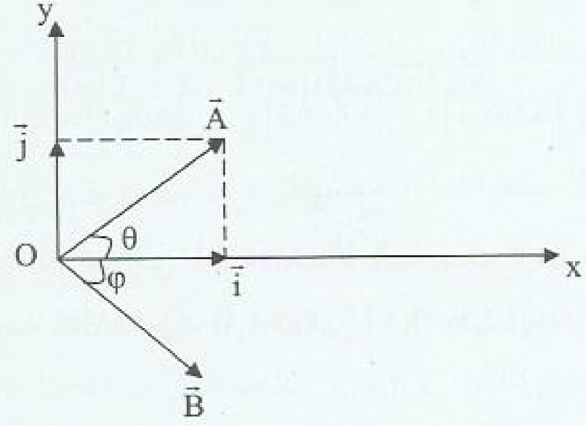
$$=2\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right)$$

حيث: $\vec{B}\wedge\vec{B}=\vec{A}\wedge\vec{A}=\vec{0}$

تمرين (10-1): برهن على أنه من أجل الزاويتين θ,φ فإنه تتحقق العلاقة:

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta.\sin\varphi$$

الحل: لنأخذ في المستوي oxy متجهي الواحدة $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ اللذين يشكلان مع المحور ox، الزاويتين φ,θ على الترتيب. كما في الشكل التالي:



لدينا:

$$\overline{OA}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$
$$\overline{OB}=\cos\varphi\vec{i}-\sin\theta\vec{j}$$

بأخذ الجداء الداخلي لهما: وحيث:

$$\left|\overline{OA}\right|=\left|\overline{OB}\right|=\sqrt{\cos^2+\sin^2}=1$$
$$\overline{OA}.\overline{OB}=\left|\overline{OA}\right|.\left|\overline{OB}\right|\cos(\theta+\varphi)=\cos(\theta+\varphi)$$

لكن:

$$\overline{OA}.\overline{OB}=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

لأن: $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=0$ للتعامد.

$$\Rightarrow\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta.\sin\varphi$$

تمرين(11-1): برهن متجهياً أن النقاط الأربع :

$$A(-6,3,2),\ B(3,-2,4),C(5,7,3),D(-13,17,-1)$$

تقع في مستوي واحد.

الحل:

$$\overline{AD}=(-13+6)\vec{i}+(17-3)\vec{j}+(-1-2)\vec{j}$$

$$=-7\vec{i}+14\vec{j}-3\vec{j}$$

$$\overline{AC}=11\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$$

$$\overline{AB}=9\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\overline{AB}.\left(\overline{AC}\Lambda\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-7 & 14 & -3\\ 11 & 4 & 1\\ 9 & -5 & 2\end{vmatrix}=0$$

فالنقاط الأربعة تقع في مستوٍ واحد.

تمرين (1-12) باستخدام خواص الجداء المختلط للمتجهات أوجد حجم متوازي السطوح الذي رؤوسه OABC حيث A(1,2,3), B(1,1,2),C(2,1,1).

الحل:

$$\overline{OA}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\overline{OB}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\overline{OC}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

$$\Rightarrow V=\overline{OA}.\left(\overline{OB}\Lambda\overline{OC}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boxed{2}$$

وحدة حجم.

9- الجداء المتجهي المضاعف (الثلاثي):

- الجداء المتجهي المضاعف للمتجهات الثلاثة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هو المتجه $\vec{P}$ حيث:

$$\vec{P}=\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)$$

وهذا المتجه $\vec{P}$ يكتب على الصورة:

$$\vec{P}=\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_x & \left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_y & \left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_z \end{vmatrix}$$

حيث:

$$(b\Lambda c)_y,\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_y,\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_x$$

هي مساقط الجداء المتجهي $\vec{b}\Lambda\vec{c}$ على كل من المحاور الإحداثية.

ملاحظة (1): إن الجداء المتجهي المضاعف يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}=\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_x\vec{i}+\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_y\vec{j}+\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_z\vec{k} \qquad (1)$$

لنجد أولاً مسقط الجداء المختلط على x أي لنجد قيمة $\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_x$

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_x=\vec{a}_y\left(\vec{b}\vec{c}\right)_z-\vec{a}_z\left(\vec{b}\Lambda\vec{C}\right)$$

$$=\vec{a}_y\left(\vec{b}_x.\vec{C}_y-\vec{b}_y\vec{C}_x\right)-\vec{a}_z\left(\vec{b}_z\vec{C}_x-\vec{B}_x\vec{C}_z\right)$$

بإضافة وطرح المقدار $\vec{a}_x\vec{b}_x\vec{c}_x$ إلى الطرف الثاني من المعادلة الأخيرة:

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_x=\vec{a}_y\vec{b}_x\vec{c}_y-\vec{a}_y\vec{b}_y\vec{c}_x-\vec{a}_z\vec{b}_z\vec{c}_z+$$

$$\vec{a}_z\vec{b}_x\vec{c}_z+\vec{a}_x\vec{b}_x\vec{c}_x-\vec{a}_x\vec{b}_x\vec{c}_x$$

$$=\vec{b}_x\left(\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{a}_z\vec{c}_z\right)-\vec{C}_x\left(\vec{a}_x\vec{b}_x+\vec{a}_y\vec{b}_y+\vec{a}_z\vec{b}_z\right)$$

لكن:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{a}_z\vec{c}_z=\vec{a}.\vec{c}\\ \vec{a}_x\vec{b}_x+\vec{a}_y\vec{b}_y+\vec{a}_z\vec{b}_z=\vec{a}.\vec{b}\end{array}\right\}$$

ومنه:

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_x=\vec{b}_x\left(\vec{a}.\vec{c}\right)-\vec{c}_x\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

وبنفس الطريقة يمكننا أن نكتب:

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_y=-\vec{a}_x\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)_z-\vec{a}_z\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right)$$

حيث لدينا:

$$\vec{b}\Lambda\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

وباتباع المراحل السابقة (يترك للطالب الاستنتاج).

يمكننا أن نستنتج:

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_y = b_y\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - c_y\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

وهي تمثل مسقط الجداء المتجهي المضاعف على المحور y.

كذلك فإن مسقط الجداء المتجهي المضاعف على المحور z هو:

$$\left[\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\right]_z = \vec{b}_z\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}_z\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

(يترك البرهان للطالب).

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c} = \left[\vec{b}_x\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}_x\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\right]\vec{j} + \left[\vec{b}_y\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}_y\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\right]\vec{j}$$
$$+\left[\vec{b}_z\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}_z\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\right]\vec{k}$$

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c} = \left[\vec{b}_x\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{i} + \vec{b}_y\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{j} + \vec{b}_z\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{k}\right]$$
$$-\left[\vec{c}_x\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{i} - \vec{c}_y\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{j} + \vec{c}_z\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{k}\right]$$

$$\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

وتدعى الأخيرة علاقة جيبس والتي يمكن كتابتها على الشكل:

$$\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right).\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}$$

باستخدام خاصية أن الجداء الداخلي عملية إبدالية.

تمرين (1-13): برهن أن:

$$\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right) + \vec{b}\left(\vec{c}\Lambda\vec{a}\right) + \vec{c}\Lambda\left(\vec{a}\Lambda\vec{b}\right) = \vec{0}$$

البرهان: نعلم أنه حسب جيبس فإن:

$$\vec{a}\Lambda\left(\vec{b}\Lambda\vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}.\vec{b}\right) \qquad (1)$$

$$\vec{b}\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)=\vec{c}.\left(\vec{b}.\vec{a}\right)-\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) \qquad (2)$$

$$\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(\vec{c}\wedge\vec{b}\right)-\vec{b}.\left(\vec{c}.\vec{a}\right) \qquad (3)$$

بجمع العلاقات (1) و (2) و(3) نجد:

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)+\vec{b}\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)+\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=0$$

تمرين (1-14): إذا كان:

$$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\ ,\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{c}=-\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$$

احسب كلاً من:

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c} \qquad (i)$$

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right) \qquad (ii)$$

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\left[\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)\right] \qquad (iii)$$

الحل:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$$

$$\vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\vec{c}\wedge\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-10\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -7 & -5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}-27\vec{i}+4\vec{j}-11\vec{k} \qquad (i)$$

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -7 & -5 \\ -10 & -4 & -6 \end{vmatrix}=22\left(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\right) \qquad (ii)$$

(iii) $$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\left[(\vec{b}\wedge\vec{c})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})\right]$$

$$=(-\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k})\wedge(22\vec{i}-88\vec{j}+22\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -7 & -5\\ 22 & -88 & 22\end{vmatrix}=22\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -7 & -5\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=22(27\vec{i}+4\vec{j}-11\vec{k})$$

ملاحظة (2): بمعرفة الجداء المتجهي والسلمي والمختلط للمتجهات فإنه يمكن تعميم الجداء لأكثر من ثلاثة متجهات بسهولة.

فعلى سبيل المثال $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})$ يمكن اعتباره جداءً مختلطاً للمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}\wedge\vec{d}$ أو $\vec{a}\wedge\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ ، وبشكل مشابه فإن الجداء $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})$ يمكن اعتباره كجداء ثلاثي متجهي للمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}\wedge\vec{d}$ أو $\vec{a}\wedge\vec{b}$ و $\vec{d}$ و $\vec{c}$.

تمرين (1-14): برهن على صحة العلاقتين:

(i) $$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D})=\begin{vmatrix}\overline{\vec{A}.\vec{C}} & \overline{\vec{B}.\vec{C}}\\ \overline{\vec{A}.\vec{D}} & \overline{\vec{B}.\vec{D}}\end{vmatrix}$$

(ii) $$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{B})+(\vec{B}\wedge\vec{C}).(\vec{A}\wedge\vec{D})+(\vec{C}\wedge\vec{A}).(\vec{B}\wedge\vec{D})$$

الحل:

(i) ليكن $$\vec{P}=\vec{C}\wedge\vec{D}$$

$$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D})=(\vec{A}\wedge\vec{B}).\vec{P}=\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{P})$$

$$=\vec{A}.\left[\vec{B}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})\right]=\vec{A}.\left[\vec{C}(\vec{B}.\vec{D})-\vec{D}(\vec{B}.\vec{C})\right]$$

$$=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C}\\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D}\end{vmatrix}$$

وهو المطلوب.

الحل:

(ii) من الجزء (i) نجد أن:

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right).\left(\vec{C}\wedge\vec{D}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\left(\vec{B}.\vec{D}\right)-\left(\vec{A}.\vec{D}\right)\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

وبشكل مشابه فإن:

$$\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right).\left(\vec{A}\wedge\vec{D}\right)=\left(\vec{B}.\vec{A}\right)\left(\vec{C}.\vec{D}\right)-\left(\vec{B}.\vec{D}\right)\left(\vec{A}.\vec{C}\right)$$

$$\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right).\left(\vec{B}\wedge\vec{D}\right)=\left(\vec{C}.\vec{B}\right)\left(\vec{A}.\vec{D}\right)-\left(\vec{C}.\vec{D}\right)\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

بالجمع طرفاً لطرف نجد:

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\left(\vec{C}\wedge\vec{D}\right)+\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\left(\vec{A}\wedge\vec{D}\right)+\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)\left(\vec{B}\wedge\vec{D}\right)=0$$

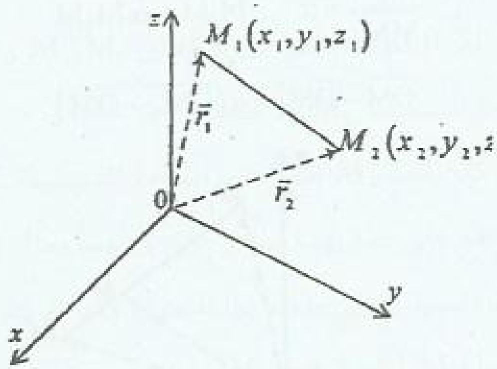
تطبيق (1):

بالاعتماد على جبر المتجهات يطلب حساب المسافة d بين النقطتين: $M_1\left(x_1,y_1,z\ \right)$ و $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$.

الحل:

إن المسافة d بين النقطتين المطلوبتين M_1, M_2 هي: $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|$.

لنصل بين نقطة الأصل 0 وكل من النقطتين M_1, M_2 الشكل (1-14).



الشكل (1-14) حساب البعد بين نقطتين

إن المتجه $\left|\overline{M_1M_2}\right|$ المطلوب حساب طويلته هو فرق متجهي الوضع $\vec{r}_2=\overline{OM_2}$ و $\vec{r}_1=\overline{OM_1}$ ويكون:

$$d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\left|\overline{OM_2}-\overline{OM_1}\right|=\left|\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_1\vec{k}\right)-\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\right|$$

$$d=\left|\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\vec{k}\right|$$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

في حالة خاصة فإن بعد نقطة في الفراغ عن نقطة الأصل هو:

$$d=\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z_2-0\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

تطبيق (2):

أوجد إحداثيات النقطة M القاسمة للقطعة المستقيمة M_1,M_2 بنسبة معلومة a ثم استنتج من ذلك إحداثيات النقطة التي تنصفها.

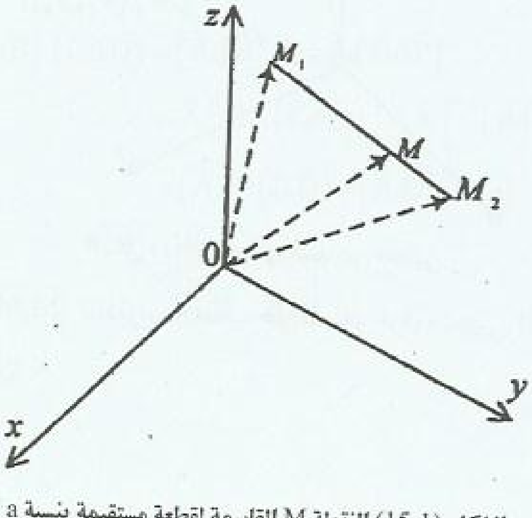
الحل:

لتكن لدينا النقطتان $M_1\left(x_1,y_2,y_2\right)$, $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ إن النقطة المطلوبة M الشكل (1-15)، يجب أن تحقق العلاقة:

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\alpha \quad , \quad \overline{M_1M}=\alpha\,\overline{M_2M}$$

وبلغة المتجهات فإن:

$$\overline{OM}-\overline{OM_1}=\alpha\left(\overline{OM_2}-\overline{OM}\right)$$



الشكل (1-15) النقطة M القاسمة لقطعة مستقيمة بنسبة a

بإصلاح العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$(1+\alpha)\overline{OM}=\overline{OM_1}+\alpha\,\overline{OM_2}$$

أو:

$$\overline{OM}=\frac{1}{1+\alpha}\left[\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)+\alpha\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)\right]$$
$$\overline{OM}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}$$

ومن شرط تساوي متجهين نجد أن:

$$x=\frac{x_1+\alpha x_2}{1+\alpha}\ ,\ y=\frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha}\ ,\ z=\frac{z_1+\alpha z_2}{1+\alpha}$$

عندما $\overline{M_1M}=\overline{M_1M_2}$ $\Leftarrow$ $\alpha=1$ ويكون:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ,\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

وهي إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$

ملاحظة (2):

1- إذا كانت $\alpha>0$ فإن النقطة M تقع بين النقطتين M_2,M_1 ونقول عن النقطة M إنها تقسم القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ داخلاً.

2- إذا كانت $\alpha<0$ فإن النقطة M تقع خارج القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ ونقول إنها تقسمها خارجاً (تقع على يساريهما معاً أو على يمينيهما معاً).

تمرين (1-16): أوجد النسبة α التي يقطع بها المستوي oxy المستقيم D الذي يصل ما بين النقطتين $M_2(-4,5,-6),M_1(1,-4,3)$.

الحل: إن النقطة التي تقسم طرفي قطعة مستقيمة بالنسبة α تعطى بالعلاقة:

$$x=\frac{x_1+\alpha x^2}{1+\alpha}$$

$$y=\frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha}\quad,\quad z=\frac{z_1+\alpha z_2}{1+\alpha}$$

ومن أجل النقطتين M_1, M_2 نجد أن إحداثيات النقطة القاسمة هي:

$$x = \frac{-4\alpha + 1}{1+\alpha} \quad , \quad y = \frac{5\alpha - 4}{1+\alpha}$$

$$z = \frac{-6\alpha + 3}{1+\alpha}$$

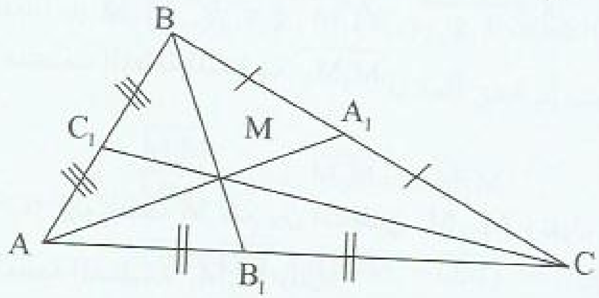
وبما أن هذه النقطة تقع على المستوي oxy فإن:

$$z = o \Rightarrow \frac{-6\alpha + 3}{1+\alpha} = o \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

وهي النسبة المطلوبة.

تمرين (1-17): ليكن ABC مثلثاً رؤوسه $A(1,2,3), B(2,1,-1), C(2,4,-2)$.

عين نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة فيه.



الحل:

بفرض A_1 منتصف الضلع $\overline{BC}$ إذاً فإن إحداثيات النقطة A_1 هي:

$$x = \frac{x_\beta + x_c}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$y = \frac{y_\beta + y_c}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$z = \frac{z_\beta + z_c}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

أي أن $A_1\left(2, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ لكن النقطة M قاسمة لـ $\overline{AA_1}$ بنسبة:

$$\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

ولدينا من إحداثيات النقطة القاسمة:

$$x_M = \frac{x_1 + \alpha x_2}{1+\alpha} = \frac{1+2(2)}{1+2} = \frac{5}{3}$$

$$y_M = \frac{y_1 + \alpha y_2}{1+\alpha} = \frac{2+2\left(\frac{5}{2}\right)}{1+2} = \frac{7}{3}$$

$$z_M = \frac{z_1 + \alpha z_2}{1+\alpha} = \frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)}{1+2} = \frac{4}{3}$$

أي أن إحداثيات النقطة القاسمة هي:

$$M\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

تمرين (1-18): أثبت أن النقاط الثلاث:

$$A(3,2,-4)\ ,\ B(5,4,-6)\ ,\ C(9,8,-10)$$

تقع على استقامة واحدة، ثم عيّن النسبة التي تقسم بها النقطة B القطعة المستقيمة $\overline{AC}$.

الحل: إن البعد بين أي نقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ يعطى بالعلاقة:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

ومنه:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{12}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(9-3)^2 + (8-2)^2 + (-10+4)^2} = \sqrt{108}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(9-5)^2 + (8-4)^2 + (-10+6)^2} = \sqrt{48}$$

ونلاحظ أن:

$$\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{12} + \sqrt{48} = 6\sqrt{3}$$

كذلك فإن:

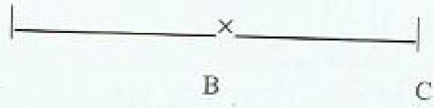
$$\overline{AC} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

أي أن:

$$\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AC}\right|$$

أي أن النقاط C,B,A تقع على استقامة واحدة.

-2 النسبة التي تقسم بها B القطعة $\overline{AC}$:



$$x_\beta = \frac{x_A + \alpha x_c}{1+\alpha} \Rightarrow 5 = \frac{3+9\alpha}{1+\alpha}$$

ومنه $9\alpha - 5\alpha = 5 - 3$ أي أن $\alpha = \frac{1}{2}$.

وبما أن $\alpha > 0$ إذاً النقطة B تقسم $\overline{AC}$ داخلاً.

تمارين محلولة

التمرين (1):

أوجد المتجه $\vec{b}$ الموازي للمتجه $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ وبحيث تتحقق العلاقة:

أ - $\vec{b}.\vec{a} = 3$ ب - $\vec{b}.\vec{a} = 2$

الحل:

بالفرض لدينا:

$$\vec{b} = \alpha.\vec{a} \;,\; \Leftarrow \vec{a} // \vec{b}$$

$$\vec{b} = \alpha\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = 2\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j} - \alpha\vec{k}$$

نحدد الوسيط a من العلاقة $\vec{b}.\vec{a} = 3$ ومنه:

$$\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right).\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = 3$$

$$4\alpha + \alpha + \alpha = 3 \Rightarrow 6\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

ومنه المتجه:

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = \vec{i} + \frac{\vec{j}}{2} - \frac{\vec{k}}{2}$$

ب – باتباع نفس الأسلوب السابق يكون:

$$\vec{b}.\vec{a} = 2, b = 2\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j} - \alpha\vec{k} \;,\; \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{\vec{j}}{3} + \frac{\vec{k}}{3}$$

التمرين (2): ادرس الاستقلال والارتباط الخطي للمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ في الحالات التالية:

أ - $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(8,3,3)$, $\vec{c}(5,1,1)$

ب - $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(1,-3,2)$, $\vec{c}(3,2,-4)$

جـ - $\vec{a}(3,2,7)$, $\vec{b}(8,6,8)$, $\vec{c}(5,4,1)$

معللاً النتيجة.

الحل:

ندرس الارتباط والاستقلال الخطي لهذه الاتجاهات من خلال جدائها المختلط ويكون:

أ -
$$\Delta_1 = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = (1).\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0-7-7 = -14 \neq 0$$

المتجهات مستقلة خطياً وهي تشكل في الفراغ متوازي مستطيلات حجمه $V = 14$ وحدة حجم والإشارة السالبة تدل على أن المتجهات $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ تشكل دوراناً سالباً.

ب -
$$\Delta_2 = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16-10+33 = 39 \neq 0$$

مستقلة خطياً حجم متوازي المستطيلات المقام على هذه المتجهات هو 39 وحدة حجم، والثلاثية من المتجهات $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ تشكل دوراناً موجباً.

جـ -
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

لأن عناصر السطر الثاني في المحدد هو ناتج جمع العناصر المتقابلة للسطرين الأول والثالث (من خواص المحددات) وبالتالي فإن المتجهات الثلاثة $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ في هذه الحالة مرتبطة خطياً، أي تقع في مستوى واحد.

ملاحظة (3): يمكن استنتاج الارتباط الخطي للمتجهات السابقة وفق العلاقة:

$$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}\ ,\ \ \alpha_1=\alpha_2=1\neq 0$$

التمرين (3):

أوجد فاصلة وترتيب النقطة M(x,y,4) لكي تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين $M_1(5,0,1), M_2(4,1,-2)$.

الحل:

تقع النقطة M على المستقيم $\overline{M_1M_2}$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$M_1M // M_1M_2 \Rightarrow \overline{M_1M}\wedge\overline{M_1M_2}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-5 & y & 4-1 \\ 4-5 & 1-0 & -2-1 \end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-5 & y & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(-3y-3)\vec{i}+(-3+3x-15)\vec{j}+(+x-5+y)\vec{k}=0$$

$$-3y-3=0\Rightarrow y=-1\ \ \&\ \ -3x+18=0\Rightarrow x=6$$

العلاقة الثالثة محققة من أجل: $y=-1\ ,\ x=6$

التمرين (4):

بيّن أن النقاط $M_1(1,2,-1), M_2(0,1,5), M_3(-1,2,1), M_4(2,1,3)$ تقع في مستوٍ واحد.

الحل:

إن شروط وقوع النقاط الأربع السابقة في مستوٍ واحد هو وقوع المتجهات:

$$\begin{vmatrix} 0-1 & 1-2 & 5+1 \\ -1-1 & 2-2 & 1+1 \\ 2-1 & 1-2 & 3+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

بالفعل إن قيمة المحدد السابق مساوية للصفر، لأن السطر الثالث مثلاً ينتج عن طرح المتجه الثاني $\overrightarrow{M_1M_3}$ من المتجه الأول $\overrightarrow{M_1M_2}$ أو جمعهما بعد ضرب $\overrightarrow{M_1M_3}$ بـ -1. وهذا يكافئ بالطبع أن:

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{M_1M_3}$$

وبالتالي النقاط الأربع تقع في مستوٍ واحد.

التمرين (5):

أوجد المتجه $\vec{d}$ المحقق للعلاقات الثلاث:

$$\vec{d}.\vec{a} = -5 \;,\; \vec{d}.\vec{b} = -11 \;,\; \vec{d}.\vec{c} = 20$$

حيث إن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هي المتجهات:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

الحل:

إن المتجه $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ المطلوب يجب أن يحقق الشروط الثلاثة أعلاه معاً

ومنه:

$$\left.\begin{array}{l} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = -5 \\ (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) = -11 \\ (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) = 20 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x - 3y - 2z = -11 \\ 3x + 2y - 4z = 20 \end{cases}$$

وهي جملة معادلات جبرية خطية (ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل x,y,z) غير متجانسة (أحد المقادير في الطرف الثاني على الأقل لايساوي الصفر، وهنا جميعها مغايرة للصفر) لها جذر مشترك عندما محدد الأمثال لايساوي الصفر، وهو هنا كذلك حيث إن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2(12-4)+(-4-6)+3(2+9)$$

$$=16-10+33=39\neq 0$$

وبالتالي بحل الجملة السابقة (طريقة كرامر، غوص، المصفوفات، الحذف بالتعويض...) وفق طريقة كرامر مثلاً يكون:

$$x=\Delta^{-1}.\Delta_x=\frac{1}{39}\begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -11 & -3 & 2 \\ 20 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\frac{1}{39}(-40+4+114)=\frac{78}{39}=2$$

$$y=\Delta^{-1}.\Delta_y=\frac{1}{39}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -11 & 2 \\ 3 & 20 & -4 \end{vmatrix}=\frac{1}{39}(8-50+159)=\frac{117}{39}=3$$

$$z=\Delta^{-1}.\Delta_z=\frac{1}{39}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -11 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix}=\frac{1}{39}(-76+53-55)=\frac{78}{39}=-2$$

وبالتالي فإن المتجه $\vec{d}$ هو: $\vec{d}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.

التمرين (6) :

أوجد الزاوية بين المتجهين في الحالات التالية:

أ - $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k} \quad , \quad \vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

ب - $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k} \quad , \quad \vec{b}=7\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

جـ - $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k} \quad , \quad \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$

الحل:

أ – إن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيان لأن:

$$\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}=-2\left(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)=-2\vec{a}$$

ب – إن المتجهين $\vec{b}$ و $\vec{a}$ متعامدان لأن:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}\right).\left(7\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}.\vec{b}=14+6-20=0 \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

جـ – إن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غير متوازيين، كما أنهما غير متعامدين لأن:

$$\vec{a}=\alpha.\vec{a}, \alpha=\text{const}$$

وأن $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, $\theta\neq 0$, $\vec{a}.\vec{b}=1-1+2=2\neq 0$ وبالتالي فإن:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left|(1)(1)+(-1)(1)+\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\ \sqrt{(1)^2+(1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{4}.\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad , \quad \theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

التمرين (7):

بفرض أن المتجهات $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ غير مرتبطة خطياً، والمطلوب:

أوجد العدد α بحيث يكون المتجهان $\vec{p}=(\alpha-2)\vec{a}+\vec{b},\vec{q}=(2\alpha+1)\vec{a}-\vec{b}$

متوازيين. ماذا تلاحظ؟

الحل:

1- إن شرط توازي $\vec{q}$ و $\vec{p}$ هو $\vec{q}=\beta\vec{p}\ , \beta\neq 0$ ولدينا:

$$(2\alpha+1)\vec{a}-\vec{b}=\beta\left[(\alpha-2)\vec{a}+\vec{b}\right]=(\beta\alpha-2\beta)\vec{a}+\beta\vec{b}$$

نجمع الحدود بالشكل:

$$(2\alpha+1-\beta\alpha+2\beta)\vec{a}+(-1-\beta)\vec{b}=0$$

بالفرض لدينا: $\vec{b}\neq 0\ ,\ \vec{a}\neq 0\ ,\ \vec{b}//\vec{a}$ إذاً:

$$2\alpha+\alpha-2+1=0\ ,\ -1-\beta=0\ ,\ \beta=-1$$

$$2\alpha+\alpha-2+1=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\vec{p}=\left(\frac{1}{3}-2\right)\vec{a}+\vec{b}=\frac{1-6}{3}\vec{a}+\vec{b}=-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

$$\vec{q}=\left(\frac{2}{3}+1\right)\vec{a}-\vec{b}=\frac{2+3}{3}\vec{a}-\vec{b}=\frac{5}{3}\vec{a}-\vec{b}$$

أي أن:

$$\vec{q}=\frac{5}{3}\vec{a}-\vec{b}=-\left(-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)=-p$$

والمتجهان متوازيان، لكن لهما جهتان مختلفتان، وبما أن لهما نفس الطويلة فهما متساويتان.

2- إن شرط الارتباط الخطي للمتجهات $\vec{r}$ و $\vec{q}$ و $\vec{p}$ هو وجود الأعداد β,α,γ بحيث أحدهما على الأقل لايساوي الصفر، وبحيث إن $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=0$ نعوض عن $\vec{r}$ و $\vec{q}$ و $\vec{p}$ بدلالة $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$:

نرتب أمثال $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$:

$$\alpha\left(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)+\beta(2\beta-\alpha-\gamma)+\vec{b}+(2\gamma-\alpha-\beta)=0$$

إن $\vec{c},\vec{b},\vec{a}\neq 0$ (بالفرض غير مرتبطة خطياً حيث إنه إذا كان أحدهما مساوياً للصفر تكون هذه المتجهات مرتبطة) ومنه:

$$-\alpha+2\beta-\gamma=0\ ,\ 2\alpha-\beta-\gamma=0$$
$$-\alpha-\beta+2\gamma=0$$

وهذه جملة معادلات جبرية خطية (ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل β,α,γ هي مرتبطة خطياً لأن الأولى مثلاً تنتج عن جمع الاثنتين الأخيرتين) متجانسة، وحيث إن قيمة محدد الأمثال مساوٍ للصفر، فإن لجملة المعادلات هذه عدداً لانهائياً من الحلول هو $\alpha=\beta=\gamma=t$ حيث p وسيط ما فمثلاً الثلاثيات:

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,1),(-1,-1,-1),(2,2,2),(-2,-2,-2)...$$

كلها تجعل العلاقة $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=0$ محققة، وبالتالي فإن المتجهات $\vec{q},\vec{p},\vec{r}$ مرتبطة خطياً.

التمرين (8):

لتكن لدينا النقاط $M_1(0,0,0),M_2(3,4,-1),M_3(2,3,5),M_4(6,0,-3)$

والمطلوب:

1- احسب المسافة بين النقطتين M_1,M_2، ثم احسب إحداثيات النقطة M التي تنصفها.

2- بيّن أن النقاط M_1,M_2,M_3 لاتقع على استقامة واحدة، ثم احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه هذه النقاط.

3- بيّن أن النقاط الأربع السابقة لاتقع في مستوٍ واحد، ثم احسب حجم الهرم الرباعي الذي رؤوسه في هذه النقاط. ما هي مساحة قاعدته، وما هو طول ارتفاعه؟

-1

$$\overline{M_1M_2}=\left(\overline{M_1M_2}\right)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{(3-5)^2+(4-5)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$$

إن إحداثيات النقطة M (منتصف M_1,M_2) تعطى بالعلاقات:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4}{2}=2\ ,\ z=\frac{z_1+z_2}{2}=-\frac{1}{2}$$

2- إن النقاط M_3,M_2,M_1 تقع على استقامة واحدة إذا كان:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha \overrightarrow{M_1M_2} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{M_1M_2} // \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\right| = 0$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3-0 & 4-0 & -1-0 \\ 2-0 & 3-0 & 5-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (20+3)\vec{i} + (-2-15)\vec{j} + (9-8)\vec{k} = 23\vec{i} - 17\vec{j} + \vec{k} \neq 0$$

، وهو متجه عمودي على كل من $\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}$ وبحيث يشكل معهما ثلاثية يمينية التوجيه (دوران موجب)، وإن طويلته تساوي مساحة متوازي الأضلاع المقام على المتجهين $\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}$ وبالتالي فإن مساحة المثلث $M_1\hat{M}_2M_3$ هي نصف القيمة المذكورة، أي:

$$S_\Delta\left(M_1\hat{M}_2M_3\right) = \frac{1}{2}\left|23\vec{i} - 17\vec{j} + \vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(23)^2 + (17)^2 + (1)^2}$$

$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{619}$ وحدة مساحة

3- النقاط الأربع تقع في مستوٍ واحد إذا كانت المتجهات:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \overrightarrow{M_1M_3} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}, \overrightarrow{M_1M_4} = 6\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$$

مرتبطة خطياً، أي: $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = 0$ ولكن لدينا:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 60(20+3) + 0 - 3(9-8) = 138 - 3 = 135 \neq 0$$

أي أن المتجهات الثلاثة لاتقع في مستوٍ واحد (غير مرتبطة خطياً).

إن القيمة $135 = \left(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M_4}\right)$ تمثل حجم متوازي السطوح المقام على هذه المتجهات، وبما أن حجم الهرم الرباعي للسطوح هو سدس حجم متوازي السطوح هذا. لذا فإن: حجم متوازي السطوح السابق هو V_1 : $V = \frac{1}{6}V_1 =$ حجم الهرم. وعليه فإن:

$$V = \frac{135}{6} = \frac{45}{2}$$ وحدة حجم

لحساب طول الارتفاع h النازل مثلاً من الرأس M_1 على القاعدة B التي رؤوسها M_2, M_3, M_4 نستخدم العلاقة التي تربط بين h, B, V_2 وهي:

$$V = \frac{1}{3}B.h \Rightarrow h = \frac{3V}{B} = \frac{3\times\frac{45}{2}}{\frac{1}{2}\left|M_2M_3 \Lambda M_2M_4\right|} = \frac{135}{\left|M_2M_3 \Lambda M_2M_4\right|}$$

ولنحسب المقدار في المقام:

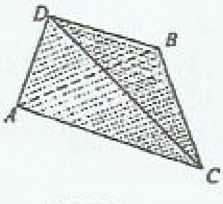
$$\left|\overline{M_2M_3}, \overline{M_2M_4}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2-3 & 3-4 & 5+1 \\ 6-3 & 0-4 & -3+1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 6 \\ 3 & -4 & -2 \end{matrix}\right\| = \left|(2+24)\vec{i} + (18-2)\vec{j} + (4+3)\vec{k}\right|$$

$$= \left|26\vec{i} + 16\vec{j} + 7\vec{k}\right| = \sqrt{(20)^2 + (16)^2 + (7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{981}$$

وبالتالي فإن الارتفاع h هو: $h = \frac{135}{\sqrt{981}} = \frac{45}{\sqrt{109}}$ وحدة طول

التمرين (9):



الشكل (16-1)

ABCD هرم ثلاثي (قاعدته المثلث ABC فيه $|AB| = |AC|$ والزاوية $\left(D\hat{A}B = D\hat{A}C\right)$ الشكل (16-1)

والمطلوب: أثبت أن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

الحل:

من شرط تعامد متجهين لدينا:

$$\overline{AD}.\overline{BC} = 0 \Rightarrow \overline{AD}.\left(\overline{AC} - \overline{AB}\right) = \overline{AD}.\overline{AC} - \overline{AD}.\overline{AB}$$

$$\overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AD}.\overline{AC}\cos\left(\overline{AD},\overline{AC}\right) - \overline{AD}.\overline{AB}\cos\left(\overline{AD},\overline{AB}\right)$$

$$\overline{A.D}\,\overline{BC} = \overline{AD}\left[\overline{AC}\cos\left(D\hat{A}C\right) - \overline{AB}\cos\left(D\hat{A}B\right)\right]$$

ولدينا:

$$D\hat{A}B = D\hat{A}C \quad , \quad \overline{AC} = \overline{AB}$$

$$\overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AD}\left[\overline{AC}\cos\left(D\hat{A}C\right) - AC\cos\left(D\hat{A}C\right)\right] = 0$$

والمتجهان:

$\overline{BC}\,,\,\overline{AD}$ أي $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

التمرين (10):

تطبق قوة $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ على نقطة مادية لتحريكها من الوضع $M_1(1,0,0)$ إلى النقطة $M_2(10,1,2)$ فما هو العمل المبذول لذلك؟

الحل:

من قوانين الحركة (نعلم أن العمل هو القوة في الانتقال، الحركة مستقيمة منتظمة والقوة ثابتة). وبالتالي فإن العمل W هو:

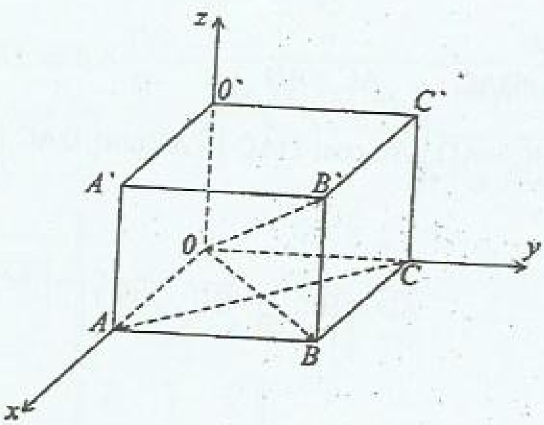
$\vec{W} = \vec{F}.\overline{M_1M_2} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right).\left(9\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 9 + 2 + 6 = 17$ وحدة عمل

التمرين (11):

احسب الزوايا بين أقطار المكعب وأقطار أوجهه، هل تتغير قيمة كل من هذه الزوايا مع تغير طول حرف المكعب أم أنها مستقلة عنه؟

الحل:

لنعتبر المكعب OABCC'O'A'B'، ولنعتبر الجملة الإحداثية الديكارتية النظامية القائمة بحيث تتمركز في O وبحيث إن المحاور oz,oy,ox تأخذ اتجاه الأحرف oo',oc,oA على الترتيب، الشكل (1-17).



الشكل (1-17)

ولنحسب الزاوية $\theta_1 = B\hat{O}'B = \left(\overline{OB'} \hat{,} \overline{OB}\right), \theta_2 = \left(\overline{OB'} \hat{,} \overline{AC}\right)$ وذلك

باستخدام العلاقة:

$$\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

آخذين بعين الاعتبار أن:

$$O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0),$$
$$C'(0,1,1), O'(0,0,1), A'(1,0,1), B'(1,1,1)$$

وبالتالي: $\overline{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \overline{OB'} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \overline{AC} = -\vec{i} + \vec{j}$

ويكون:

$$\cos\theta_1 = \frac{\overline{OB'}.\overline{OB}}{\left|\overline{OB'}\right|.\left|\overline{OB}\right|} = \frac{\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right).\left(\vec{i}+\vec{j}\right)}{\sqrt{3}.\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\theta_1 = \arccos\theta_1 = \text{arc}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx 35^{\circ}$$

بالراديان:

$$\cos\theta_2 = \frac{\overline{OB'}.\overline{AC}}{\left|\overline{OB'}\right|.\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right).\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)}{\sqrt{3}.\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

إن قيمة θ_1 و θ_2 وبالتالي الزوايا بين أقطار المكعب وأقطار أوجهه مستقلة عن طول حرفه، فمثلاً إذا كان طول الحرف هو a وحدة أطوال واعتماداً على ما جاء أعلاه فإن:

$$\cos\theta_1 = \frac{\left(a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}\right).\left(a\vec{i}+a\vec{j}\right)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\ \sqrt{a^2+a^2}} = \frac{2a}{a\sqrt{3}.\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta_1 = 35^{\circ}$$

وأيضاً:

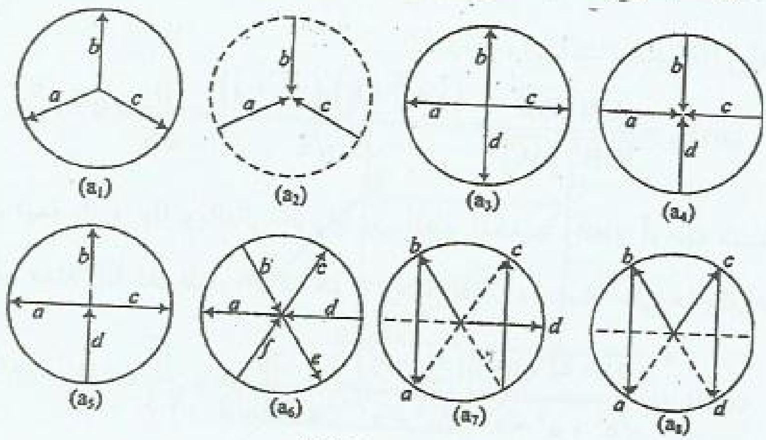
$$\cos\theta_2 = \frac{\left(a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}\right).\left(-a\vec{i}+a\vec{j}\right)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}.\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{0}{a\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

تمارين غير محلولة

التمرين (1)

في الشكل (1-18) قسمت الدائرة إلى ثلاثة، أربعة، ستة، قطاعات دائرية.

والمطلوب: أوجد مجموع المتجهات في كل من الحالات هذه:



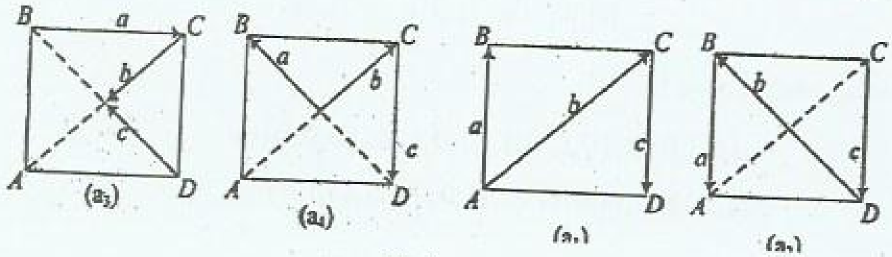
الشكل (1-18)

الجواب: $(a_1):0\,,\,(a_2):0\,,\,(a_3):0\,,\,(a_4):0\,,\,(a_5):2\vec{b}$ أو : $2\vec{d}$

$(a_6):0\,,\,(a_2):b+d$ أو $-b-d\,,\,(a_8):\vec{d}$ أو $\vec{a}$

التمرين (2):

أوجد مجموع المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ (المتجه $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$) الموضحة في كل من الرسومات التالية:



الشكل (1-19)

الجواب: $(a_1):b\ ,\ (a_2):-b\ ,\ (a_2):-b\ ,\ (a_3):0\ ,\ (a_4):0$

التمرين (3):

ما هي محصلة تأثير قوتين متعامدتين (نيوتن) $\vec{F}=6N\ ,\ \vec{F}_1=8N$ على نقطة مادية M.

الجواب: 10N.

التمرين (4):

إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يرتبطان بالعلاقة $\alpha, \vec{a}=\alpha\vec{b}$ وسيط ما، و $a\neq 0$

والمطلوب: ماهو الشرط الذي يجب أن يحققه الوسيط a ليكون:

$$1)\ |\vec{a}|=|\vec{b}|\ ,\quad 2)\ |\vec{a}|>|\vec{b}|\ ,\quad 3)\ |\vec{a}|<|\vec{b}|$$

الجواب: $1)\ \alpha=\pm 1\ ,\quad 2)\ |\alpha|>1\ ,\quad 3)\ |\alpha|<1$

التمرين (5):

حدد قيمة الوسيط α لتكون طويلة المتجه $\alpha\vec{a}$:

$$1)\ |\overrightarrow{\alpha a}|=|a|\ ,\quad 2)\ |\overrightarrow{\alpha a}|>|3a|\ ,\quad 3)\ |\overrightarrow{\alpha a}|<|\overline{5\alpha}|$$

الجواب: $1)\ \alpha=\pm 1\ ,\ 2)\ |\alpha|>3\ ,\quad 3)\ |\alpha|<5$

التمرين (6):

ليكن لدينا المتجهات $\vec{b}\neq 0\ ,\ 0\neq\vec{a}$ أوجد العدد α الذي يجب ضربه بالمتجه $\vec{a}$ لنحصل على المتجه $\vec{b}$ وبحيث يكون:

$\vec{b},\vec{a},\vec{b}\uparrow\uparrow b$ مستامتين وبنفس الاتجاه وأن: $1)\ |\vec{b}|=5$

$\vec{b}/\!/\vec{a}\uparrow\downarrow$ متسامتين وباتجاهين مختلفين وأن: $2)\ |\vec{b}|=1$

الجواب: $1)\ \alpha=\dfrac{5}{|\vec{a}|}\quad ,\qquad 2)\ \alpha=\dfrac{-1}{|\vec{a}|}$

التمرين (7):

1- عبر عن المتجه $\overrightarrow{M_1M_2}$ بدلالة المتجه $\overrightarrow{M_3M_2}$ بفرض أن النقاط M_1, M_2, M_3 مأخوذة على مستقيم ما وباتجاه واحد، وبحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{M_3M_1} = 3\overrightarrow{M_3M_2}$$

2- إذا كانت النقاط $M_i, i = 1-5$ مأخوذة على المستقيم L (باتجاه واحد) وبحيث إن M_2 هي منتصف M_1M_3 و M_4 هي منتصف M_3M_5 والمطلوب: أثبت أن: $\overrightarrow{M_5M_1} = -2\overrightarrow{M_2M_4}$.

الجواب: $\overrightarrow{M_1M_2} = -2\overrightarrow{M_3M_2}$.

التمرين (8):

أوجد طويلة مسقط المتجه $\vec{a}$ على المتجه $\vec{b}$ (ثم مسقط $\vec{b}$ على $\vec{a}$) إذا كان:

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ والزاوية $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 120^\circ$.

الجواب: $pr(\vec{b}) = -\frac{1}{2}$, $pr(\vec{u}) = -1$ والإشارة سالبة لأن المسقط عكس الاتجاه.

التمرين (9):

أوجد الجداء الداخلي للمتجهين: $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

إذا علمت أن $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$

1) $\theta = 45^\circ$, 2) $\theta = 0^\circ$, 3) $\theta = 135^\circ$

4) $\theta = 90^\circ$, 5) $\theta = 180^\circ$, 6) $\theta = 60^\circ$

الجواب: 1) $12\sqrt{2}$, 2) 24 , 3) $-12\sqrt{2}$, 4) 0 , 5) -24 , 6) 12

التمرين (10):

إذا كانت الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هي $\theta = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 120^\circ$ وكان: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$. والمطلوب: إيجاد قيمة كل من العمليات التالية:

$$1)\ \vec{a}.\vec{b}\ ,\ 2)\ a^2\ ,\ 3)\ (\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})\ ,\ 4)\ (\vec{a}-\vec{b})^2,\ \ 5)\ (7a+b)^2$$

الجواب: $1)\ -10\ ,\ 2)\ 25\ ,\ 3)\ -39\ ,\ 4)\ 61\ ,\ //10/$

التمرين (11):

إذا كانت $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ هي متجهات الواحدة في جملة ديكارتية نظامية متعامدة.

والمطلوب:

1- احسب المقدار:

أ - $\vec{i}.(\vec{j}+\vec{k})+\vec{j}.(3\vec{i}-\vec{k})+\vec{k}(\vec{i}+2\vec{j})$

ب - $\vec{i}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+\vec{j}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+\vec{k}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

2- بيِّن الثلاثية الموجبة من الثلاثية السالبة (دوران موجب أم سالب) في الحالات التالية:

أ - $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{j},\ \vec{c}=\vec{k}$

ب - $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{j},\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$

جـ - $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{c}=\vec{k}$

3- أوجد الجداء الخارجي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ في الحالات التالية:

أ - $\vec{a}=2\vec{i}\ ,\ \vec{b}=3\vec{j}$

ب - $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{k}\ ,\ \vec{b}=4\vec{k}$

جـ - $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$

الجواب: 1) أ – 0، ب - 3

2) أ – يسارية (سالبة)

ب – لايمينية ولايسارية المتجهات مرتبطة خطياً جـ - يمينية (موجبة).

3) أ - $6\vec{k}$ ، ب - $-12\vec{j}$ ، جـ - $7\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$

التمرين (12):

إذا كان المتجهان $\vec{a}=(4,-2,0), \vec{b}=(1,2,3)$ والمطلوب أوجد:

1) $\vec{a}.\vec{b}$ ، 2) b^2 ، 3) $(a-b)^2$ ، 4) $(3a-b).(2a+3b)$

الجواب: 1) 0 ، 2) 14 ، 3) 34 ، 4) 78

التمرين (13): حدد الوسطاء α,β في الحالات التالية:

1) $a\perp b$ $\quad \vec{a}=a\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\ ,\ \vec{b}=4\vec{i}+a\vec{j}-7\vec{k}$

2) $\vec{a}\perp\vec{b}\ ,\ \vec{a}=(a,-3,2), \vec{b}=(1,2,-a)$

3) $\vec{a}\perp\vec{b}\ ,\ \vec{a}=(0,-2,7), \vec{b}=(a,14,4)$

4) $\vec{a}\perp\vec{b}\ ,\ \vec{a}=(3,-4,5), |\vec{b}|=|\vec{a}|$

الجواب: 1) $a=4$ ، 2) $a=-6$ ، 3) $\forall a\in R$ ،

4) $\alpha_1=-4, \beta_1=2\ ;\ \alpha_2=-8, \beta_2=-2$

التمرين (14): أوجد المتجه $\vec{c}$ في الحالات التالية:

-1 $\vec{c}\perp oz$ ويحقـــق العلاقـــتين $\vec{c}.\vec{b}=-4$ و $\vec{c}.\vec{a}=9$ حيـــث:
$\vec{a}=(3,-1,5), \vec{b}=(1,2,-3)$.

-2 $\vec{c}$ يقع في المستوي oxy ويكون $\vec{c}\perp\vec{a}\ ,\ |\vec{a}|=|\vec{c}|$ و $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$.

-3 $\vec{c}\,//\,\vec{a}$: $\quad \vec{a}=(2,1,-1), \vec{c}.\vec{a}=3$

-4 $\vec{c}\,//\,\vec{a}$: $\quad \vec{a}=(-1,2,2), \vec{b}.\vec{a}=-2$

-5 $\vec{c}\,//\,\vec{a}$: $\quad |\vec{c}|=50$ ويشكل زاوية حادة مع المحور ox

$$\vec{a}=2i-3j-6\vec{k} \qquad c=\left(\frac{100}{7},\frac{-150}{7},\frac{-300}{7}\right)$$

-6 $\vec{c}\,//\,\vec{a}$: $\quad |\vec{c}|=50$ ويشكل زاويةو حادة مع المحور oz

الأجوبة:

1) $c=(2,3,-2)$

2) $c_1=\left(4\sqrt{2},3\sqrt{2}\right) \quad c_2=\left(-4\sqrt{2}\ ,-3\sqrt{2}\right)$

3) $c=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

4) $c=\left(-\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$

5) $c=\left(\frac{100}{7},\frac{-150}{7},\frac{-300}{7}\right)$

6) $c=(-24,32,30)$

التمرين (15):

أوجد الزاوية θ بين المتجه $\vec{c}$ والمتجهات المشار إليها فيما يلي:

-1 $\vec{c}=(3,-4)$ والمحور ox

-2 $\vec{c}=(3,-4,12)$ والمحاور الإحداثية oz,oy,ox

-3 $\vec{c}=\vec{i}$ والمتجه $\vec{j}+\vec{k}$

-4 $\vec{c}=\vec{j}$, $\vec{i}-\vec{k}$

-5 $\vec{c}=\vec{k}$ والمتجه $2\vec{i}-3\vec{k}$.

-6 $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$: $A(-2,3),B(0,8),C(5,3)D(10,5)$ والمحور ox.

الجواب:

1) $\cos\left(\widehat{\vec{c},\vec{i}}\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$

2) $\cos\left(\widehat{\vec{c},\vec{j}}\right)=-\frac{4}{13}\ ,\ \cos\left(\widehat{\vec{c},\vec{k}}\right)=\frac{12}{13}$

3) $\theta=\frac{\pi}{2}$ 4) $\theta=\frac{\pi}{2}$ 5) $\theta\approx146^{\circ}$ 6) $\theta=\frac{\pi}{4}$

التمرين (16):

لتكن لدينا المتجهـات $\vec{a}=(-2,1,1)$, $\vec{b}=(1,5,0)$, $\vec{c}=(2,2,-1)$ والمطلـوب:

احسب المساقط التالية:

1) $pr_{\vec{a}}(\vec{a})$ ، 2) $pr_{\vec{a}}(\vec{b})$ ، 3) $pr_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{c})$

5) $pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$ ، 5) $pr_{\vec{a}}(2\vec{b}+\vec{c})$

الجواب:

-1 $\frac{3}{\sqrt{26}}$ ، 2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ ، 3) $\frac{9}{\sqrt{38}}$ ، 4) 0 ، 5) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

التمرين (17):

لتكن لدينا المتجهات:

$$\vec{a}=(1,-2,3),\ \vec{b}=(2,2,-1),\ \vec{c}=(0,1,-2),\ \vec{d}=(2,-1,0)$$

والمطلوب حساب المقادير التالية:

1) $\vec{a}\Lambda\vec{b}$ 2) $\vec{a}\Lambda\vec{c}$ 3) $\vec{b}\Lambda\vec{c}$ 4) $\vec{a}\Lambda\vec{d}$

5) $(\vec{a}+\vec{b})\Lambda(\vec{d}-\vec{c})$ 6) $(\vec{a}-\vec{b})\Lambda\vec{c}$ 7) $(\vec{a}+\vec{b})\Lambda(\vec{d}-\vec{c})$

9) $(2\vec{a}-3\vec{b})\Lambda(\vec{c}+\vec{d})$ 8) $9(\vec{a}+2\vec{d})\Lambda\vec{c}$

10) $(\vec{a}-\vec{b})\Lambda(3\vec{c}+2\vec{d})$

الجواب:

1) $-4\vec{i}+7\vec{j}+6\vec{k}$ 2) $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 3) $-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

4) $3\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$ 5) $-2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$ 6) $4\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

7) $4\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ 8) $5\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k}$ 9) $20\vec{i}+10\vec{j}+20\vec{k}$

10) $20\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{k}$

التمرين (18):

احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط:

$$A(0,2,6),B(4,0,0),C(0,-2,0)$$

الجواب: 715 وحدة المساحة.

التمرين (19):

ادرس الارتباط والاستقلال الخطي (مع تعليل النتيجة) للمتجهات التالية:

1- $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$: $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=6$ إذا علمت أنها تشكل دوراناً موجباً.

2- $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ ($\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ متجهات معلومة).

3- $\vec{c}=(7,-2,4),\ \vec{b}=(5,0,0),\ \vec{a}=(0,3,-1)$

4- $\vec{c}=(4,7,-4),\ \vec{b}=(-4,2,8),\ \vec{a}=(8,5,-13)$

5- $\vec{c}=(1,5,9),\ \vec{b}=(-1,4,6),\ \vec{a}=(-2,-1,-3)$

6- $\vec{c}=(2,5,2),\ \vec{b}=(-1,3,4),\ \vec{a}=(1,2,3)$

الجواب:

1) 210 حجم متوازي المستطيلات المقام عليها، 2) $41(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

3) 50- دوران سالب، 50 هو حجم متوازي المستطيلات.

4) 80- 5) 0 مرتبطة تقع في مستوٍ واحد.

6) 27 موجبة حجم متوازي المستطيلات.

الفصل الثاني

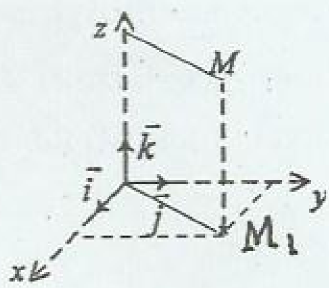
الجمل الإحداثية في الفضاء

في الفصل السابق، وعند تعريف العبارة التحليلية لمتجه كنا تطرّقنا إلى موضوع جملة المحاور الإحداثية الديكارتية المائلة، وجملة المحاور الإحداثية الديكارتية المتعامدة. حيث اعتبرت مركبات هذا المتجه كمساقط له على المحاور الإحداثية دون أن نبيّن كيفية تعيين نقطة ما في هذا الفضاء ثلاثي الأبعاد.

في الحقيقة إن العملية هذه يمكن أن تتم بطرائق عديدة (ديكارتياً، أسطوانياً، كروياً ...) حيث ينسب الفراغ ثلاثي الأبعاد هذا إلى الجملة الديكارتية، الجملة الأسطوانية، الكروية ... ولنبدأ بعرض هذه الجمل:

2-1- الجملة الإحداثية الديكارتية النظامية:

نعتبر الفضاء ثلاثي الأبعاد منسوباً إلى جملة محاور oz, oy, ox حيث نسمي المحور x'ox محور الفواصل، و نسمي المحور y'oy محور التراتيب، ونسمي المحور z'oz محور الرواقم (المحاور الإحداثية) متلاقية ومتعامدة مثنى مثنى في النقطة 0 (مبدأ الإحداثيات أو نقطة الأصل)، وعليها متجهات الواحدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ على الترتيب وموجهة بحيث تكون فيه الثلاثية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مشكلة لدوران موجب. الشكل (2-1).



الشكل (2-1)

إن الجملة المحققة لجملة الشروط المذكورة أعلاه ندعوها بالجملة الإحداثية الديكارتية النظامية، أما المستويات zox, yoz, xoy فتسمى بالمستويات الإحداثية، علماً

بأن: $-\infty \le x \le \infty ,\ -\infty \le y \le \infty ,\ -\infty \le z \le \infty$. إن أية نقطة M في الفراغ تتحدد وفق الجملة هذه على النحو التالي:

1- نسقط M إسقاطاً قائماً (توازياً مع oz) على المستوي xoy فنحصل على النقطة M_1 تقع في المستوي xoy.

2- نسقط M_1 توازياً مع oy على المحور ox فنحصل على النقطة M_x تقع على المحور ox.

3- نسقط M_1 توازياً مع ox على المحور oy فنحصل على النقطة M_y.

4- نسقط M_1 توازياً مع المتجه $\overline{OM_1}$ فنحصل على النقطة M_z.

وبالتالي النقطة M تعرف تماماً بمعرفة المقادير $\overline{OM_z}, \overline{OM_y}, \overline{OM_x}$ والتي هي بالحقيقة أطوال القطع المستقيمة المشار إليها مع الأخذ بعين الاعتبار أن إشارتها موجبة، إذا كانت متوافقة بالاتجاه مع المحور المعني وسالبة في الحالة المعاكسة. نختصر ما سبق ونقول النقطة $M(M_x, M_y, M_z)$ أو بشكل أكثر اختصاراً $M(x, y, z)$ ندعو المقادير (x, y, z) بالإحداثيات الديكارتية للنقطة M ويمكن البرهان أن هناك تقابلاً واحداً لواحد بين نقاط الفراغ ثلاثي الأبعاد وبين الثلاثيات (x,y,z) أي كل نقطة M تحدد ثلاثية (x,y,z) واحدة من الأعداد الحقيقية، والعكس صحيح أيضاً كل ثلاثية (x,y,z) تحدد نقطة واحدة فقط من الفضاء لذلك عادة ما يُرمز لنقاط الفراغ بالرمز:

$$R^3 = \{M(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

ملاحظة (1):

1- إن المقادير (x,y,z) المعرفة للنقطة M والموافقة للقيم $\overline{OM_z}, \overline{OM_y}, \overline{OM_x}$ هي بالحقيقة طويلة المتجهات $\vec{OM_z}, \vec{OM_y}, \vec{OM_x}$ (دون اعتبار للجهة بالنسبة إلى المحاور الإحداثية) وهذه الأخيرة ليست إلاّ مساقط المتجه $\vec{OM}$ على هذه المحاور (القيمة مع الجهة)، أي:

$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z = M_x\vec{i} = M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

أو:
$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وهذا الأخير ليس إلاّ المتجه الواصل بين النقطة M ونقطة الأصل، z,y,x هي مركباته، وبالتالي يمكن استبدال الخطوات من 1 إلى 4. بأخذ مساقط المتجه $\vec{OM}$ على المحاور الإحداثية للحصول على الثلاثية (x, y, z) وبالتالي تحديد النقطة M، لذلك عادةً ما يدعى المتجه $\vec{r}$ بنصف القطر المتجهي لهذه النقطة.

2-2- الجملة الإحداثية الأسطوانية:

النقطة M يمكن تحديدها بشكل آخر وذلك بأن نحافظ على الخطوات السابقة آخذين بعين الأعتبار المتجه $\vec{\rho} = \vec{OM}_1$ في المستوي xoy والزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور ox الشكل (2-2) والنقطة M تتحدد تماماً بشكل وحيد بالثلاثية (ρ, θ, z):

$$-\infty < z < \infty \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 < \rho < \infty$$

ومن الملاحظ أنه إذا ترك المستقيم M_1M يدور حول المحور oz دورة كاملة فإنه يرسم أسطوانة دائرية محورها المحور oz وقطاعاتها الدائرية التي ترسمها النقطة M_1 حول نقطة الأصل، أي مركزها النقطة 0 ونصف قطرها هو الطول ρ ، لذلك تدعى الجملة السابقة بالجملة الأسطوانية.

إذا نظرنا إلى الشكل (2-2) وحسب نظرية فيثاغورث في المثلث القائم نستنتج أن الإحداثيات الديكارتية تعطى بدلالة الأسطوانية من خلال العلاقات التالية:

$$x = \rho\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\theta \ , \ z = z \qquad (1)$$

أما العلاقات المعاكسة التي تعطينا الإحداثيات الأسطوانية بدلالة الديكارتية فهي:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \ , \ z = z \qquad (2)$$

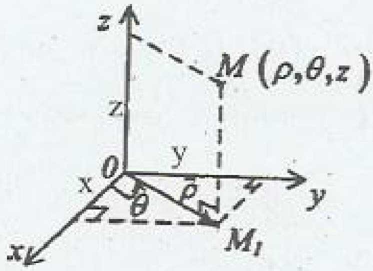
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

3-2- جملة الإحداثيات الكروية:

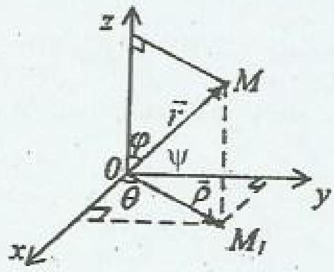
يمكن تحديد النقطة M بشكل وحيد بوساطة الثلاثية (r,θ,φ) حيث r هو طويلة نصف القطر المتجهي $\theta, \bar{OM}$ الزاوية بين $\bar{\rho}=\bar{OM_1}$ والمحور φ, ox الزاوية بين $\bar{r}$ والمحور oz الشكل (2-3) وأن :

$$r \geq 0 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \varphi \leq \pi \qquad (3)$$

ندعو المقادير (r,θ,φ) بالإحداثية الكروية (لأنه إذا تركت النقطة M تتحرك في الفراغ بحيث (r,θ,φ) تحقق المتراجحات (3) فإنها ترسم كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r) للنقطة M.



الشكل (2-2)



الشكل (2-3)

نستنتج من الشكل السابق أن العلاقات التي تربط بين الجملتين الديكارتية الأسطوانية والجملة الأخيرة هي:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \text{arc tg}\dfrac{y}{x} \\ \varphi = \text{arc tg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases} \qquad (5)$$

ملاحظة (2):

1- إذا أخذنا بعين الاعتبار الزاوية Ψ بين المتجه $\vec{r}$ والمتجه $\vec{\rho}$ الشكل (2-3) والتي ترتبط مع φ بالعلاقة $\Psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ فإن العلاقات (4) يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{cases} x = r\cos\Psi\cos\theta \\ y = r\cos\Psi\sin\theta \\ z = r\sin\Psi \end{cases} \qquad (6)$$

2- إذا ربعنا العلاقات (4) (أو طبعاً العلاقات (6)) وجمعناها طرفاً لطرف معتمدين على العلاقة المثلثية المشهورة:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

نحصل على المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

والتي بالحقيقة (كما سنرى في فصل لاحق) هي معادلة كرة نصف قطرها r ومركزها نقطة الأصل، وهو ما دعانا لتسمية الجملة (r,θ,φ) بالجملة الكروية.

ملاحظة (3):

يمكننا تلخيص العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية والكروية في الجدول التالي:

	الإحداثيات الديكارتية X,Y,Z	الإحداثيات الأسطوانية ρ,θ,Z	الإحداثيات الكروية r,θ,φ
الإحداثيات الديكارتية X,Y,Z		$X = \rho\cos\theta$ $Y = \rho\sin\theta$ $Z = Z$	$X = r\sin\varphi\cos\theta$ $Y = r\sin\varphi\sin\theta$ $Z = r\cos\varphi$
الإحداثيات الأسطوانية ρ,θ,Z	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$ $Z = Z$		$\rho = \rho\sin\varphi$ $\theta = \theta$ $Z = r\cos\varphi$
الإحداثيات الكروية r,θ,φ	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Z}$ $= \mathrm{arc\,cos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$r = \sqrt{\rho^2+Z^2}$ $\theta = \theta$ $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\rho}{z}$	

مثال :(1)

لتكن لدينا النقطة $M\left(3,\frac{\pi}{3},-4\right)$ المنسوبة إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية

ولنوجد إحداثياتها في جملة إحداثية ديكارتية

$$x=\rho\cos\theta=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

$$y=\rho\sin\theta=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z=-4$$

وبالتالي تصبح إحداثيات النقطة M في جملة إحداثية ديكارتية على الشكل

التالي:

$$M\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-4\right)$$

مثال (2):

لتكن لدينا النقطة $M\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-4\right)$ المنسوبة إلى جملة الإحداثيات الديكارتية.

المطلوب إيجاد إحداثيات النقطة M بالإحداثيات الكروية:

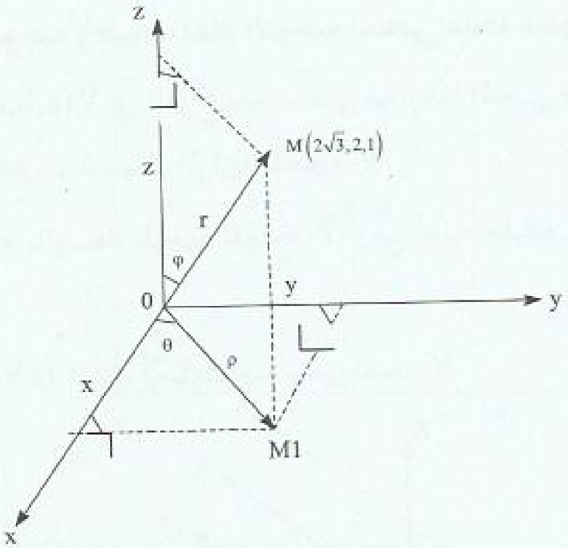
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}+\frac{64}{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=\frac{10}{2}=5$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\operatorname{arctg}\frac{6}{-8}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$$

مثال (3): أوجد الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $M\left(2\sqrt{3},2,1\right)$ ثم أوجد إحداثياتها

الكروية.



الشكل (4-2)

الحل:

1- الإحداثيات الأسطوانية:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=4$$

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

$$M\left(4,\frac{\pi}{6},1\right)\Leftarrow\quad z=z=1$$

2- الإحداثيات الكروية:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$\theta=\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Z}=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}}{1}=\operatorname{arc\,tg}4$$

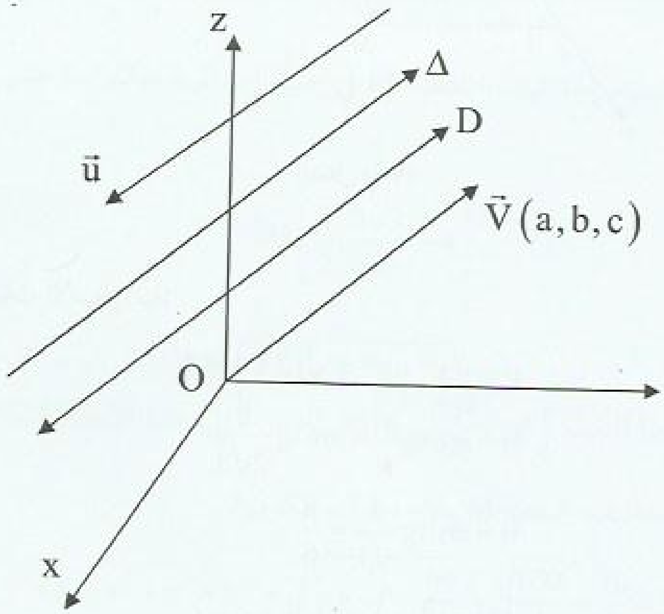
$$\Rightarrow\varphi=75^{\circ}$$

(4-2): وسطاء التوجيه وجيوب تمام التوجيه لمنحى متجه معلوم:

- إن كل متجه $\vec{V}(a,b,c)$ في الفراغ يعين منحنى فيه وهذا المنحى هو منحى جميع المستقيمات والمحاور والمتجهات الموازية للمتجه $\vec{V}$.

نسمي a,b,c بالوسطاء الموجهة للمتجه $\vec{V}$ وهي أعداد حقيقية تمثل منحى هذا المتجه.

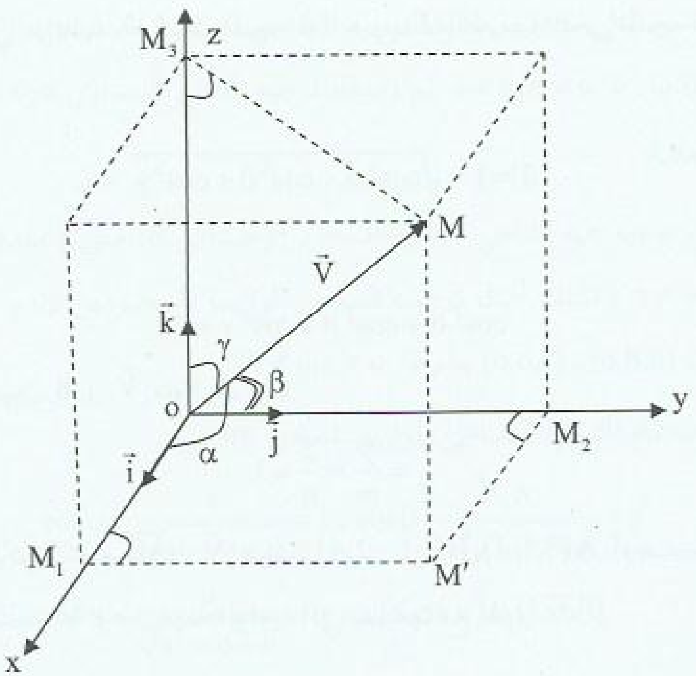
وتسمى (a,b,c) كذلك بأمثال توجيه منحى المتجه $\vec{V}$.



الشكل (5-2)

(5-2) جيوب تمام التوجيه لمنحى متجه معلوم:

إذا فرضنا أن المتجه $\vec{V}(a,b,c)$ يعين لنا منحى في الفراغ المنسوب إلى جملة إحداثية ديكارتية متعامدة ومباشرة oxyz.



الشكل (6-2)

ولتكن α,β,γ هي الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{V}$ مع المحاور الإحداثية ox,oy,oz على الترتيب حيث:

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وليكن $\vec{u}$ متجه الواحدة المحمول على المتجه $\vec{V}$ حيث:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

فإذا كانت ℓ,m,n مركبات متجه الواحدة $\vec{u}$ فإن:

$$\ell = \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$m = \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$n = \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

نسمي ℓ, m, n (مركبات المتجه $\vec{u}$) جيوب تمام التوجيه لمنحى المتجه $\vec{V}$.

وبما أن:

$$|\vec{u}| = 1 = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

فإن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

وبما أن المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{V}$ متوازيان فإن:

$$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \lambda$$

مثال (1): ليكن المتجه $\vec{V} = \overline{AB}$ حيث: $A(3,1,4), B(-1,-2,4)$ أوجد جيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{V}$ وعين قيمة الزاوية التي يصنعها مع المحور $\overrightarrow{oz}$.

الحل:

$$\vec{V} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$= -4\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

وتكون جيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{V}$:

$$\ell = \cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{16+9}} = \frac{-4}{5}$$

$$m = \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{16+9}} = \frac{-3}{5}$$

$$n = \cos\gamma = \frac{0}{5} = 0$$

وبما أن المتجه $\vec{V}$ يقع في المستوي oxy فإنه يعامد $\overrightarrow{oz}$ كون $\cos\gamma = 0$.

مثال (2): أوجد الشكل العام لوسطاء توجيه المناحي الموازية للمستويات الإحداثية.

الحل: إن وسطاء توجيه المناحي الموازية للمستوي الإحداثي oxy هي (a,b,o) بشرط $b \neq o, a \neq o$.

وبنفس الطريقة فإن وسطاء التوجيه للمناحي الموازية للمستوي الإحداثي oxz هي (a,o,c) بشرط $c \neq o , a \neq o$ ثم وسطاء توجيه المناحي للمستوي oyz هي (0,b,c).

ملاحظات هامة:

1- إن أمثال توجيه جميع المناحي الموازية للمحور الإحداثي ox هي: (a,o,o) بشرط أن يكون $a \neq o$ وكذلك أمثال توجيه المناحي الموازية للمحورين oy و z هي على الترتيب (o,b,o) ، (o,o,c) بشرط: $b \neq o , c \neq o$.

2- إن جيوب تمام التوجيه للمناحي الموازية للمحور ox هي:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+o+o}} = 1 \ , \ \cos\beta = \frac{o}{\sqrt{a^2+o+o}} = o$$

$$\cos\gamma = \frac{o}{\sqrt{a^2+o+o}} = o \Rightarrow (\ell, m, n) = (1,0,0)$$

وبنفس الطريقة فإن جيوب تمام التوجيه للمناحي الموازية للمحور الإحداثي oy هي (0,1,0) وللمناحي الموازية للمحور oz هي (0,01).

مثال (3): أوجد الزاوية θ بين قطرين من أقطار المكعب. وإذا كانت الزوايا بين المستقيم D والأقطار الأربعة هي $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ فبرهن على أن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

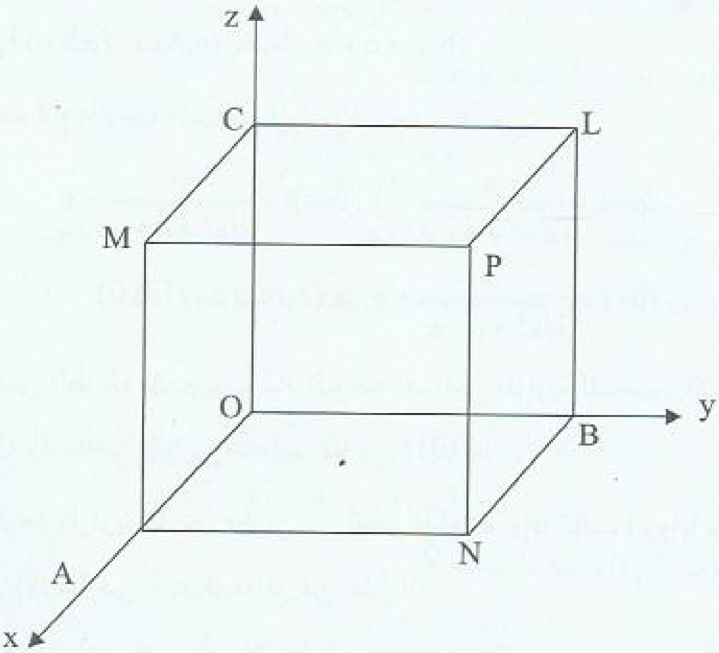
الحل: ليكن مبدأ الإحداثيات O هو أحد رؤوس المكعب OABCLPMN الذي طول حرفه a.

عندئذ نجد أن: $L(0,a,a), A(a,0,0), P(a,a,a)$

$$B(0,a,0), C(0,0,a), M(a,0,a), N(a,a,0)$$

وتكون جيوب تمام التوجيه للمستقيم OP هي:

$$\left.\begin{aligned}\ell &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ n &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\} \frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$$



الشكل (2-7)

وجيـوب تمـام التوجيـه للمـستقيم AL هـي بـنفس الطريقـة الـسابقة $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$ – وإذا كانت θ هي الزاوية بين القطرين OP, AL فإن:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OP}.\overline{AL}}{\left|\overline{OP}\right|.\left|\overline{AL}\right|} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}$$

كـذلك فـإن جيـوب تمـام التوجيـه للمـستقيم BM هـي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

وللمستقيم $\overline{CN}$ هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\cos\alpha=\frac{\ell+m+n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}.\sqrt{3}}=\frac{\ell+m+n}{\sqrt{3}};\ \ell^2+m^2+n^2=1$$

$$\cos\beta=\frac{-\ell+m+n}{\sqrt{3}}\ ,\ \cos\gamma=\frac{\ell-m+n}{\sqrt{3}}\ ,\ \cos\delta=\frac{\ell+m-n}{\sqrt{3}}$$

بالتربيع والجمع نجد أن:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$$

2-4- تغيير الإحداثيات في الفضاء:

2-4-1- الانسحاب:

لـتكن لـدينا الجملـة الإحداثيـة الديكارتيـة النظاميـة oxyz الـشكل (2-8) $M(x,y,z)$ نقطة كيفية في الفراغ، $O'(x_o,y_o,z_o)$ كيفية في الفراغ ونثبتها، ولنرسم منها مسايرات $o'x', o'y, o'z$ للمحاور oz,oy,ox على الترتيب، عندئذ فإن النقطة M تتحدد في الجملة الديكارتية الجديدة $o'x'y'z'$ على النحو التالي:

$$\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO'}$$

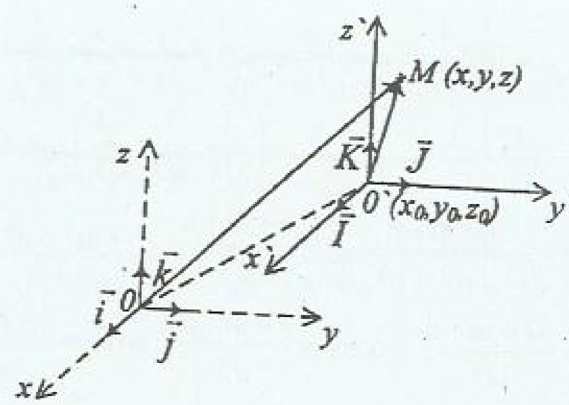
$$x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)-\left(x_o\vec{i}+y_o\vec{j}+z_o\vec{k}\right)$$

أو:

$$x'=x-x_o\ ,\quad y'=y-y_o\ ,\quad z'=z-z_o \qquad (7)$$

وهي الإحداثيات الجديدة للنقطة M في الجملة $(o'x'y'z')$ بدلالة الجملة القديمة oxyz بالعكس إن الإحداثيات القديمة بدلالة الجديدة تعطى بالعلاقات:

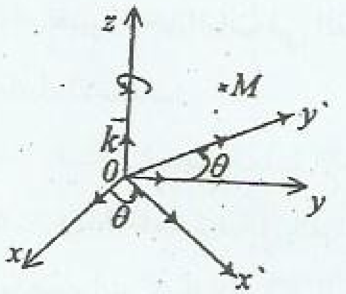
$$x=x_o+x'\ ,\ y=y_o+y'\ ,\ z=z_o+z' \qquad (8)$$



الشكل (2-8) انسحاب الجملة الإحداثية الديكارتية

2-4-2- دوران الجملة الإحداثية الديكارتية (حول أحد محاورها):

لتكن لدينا النقطة M(xyz) في الجملة الإحداثية الديكارتية (oxyz) ولنقم بتدوير هذه الجملة حول أحد محاورها (oz مثلاً) الشكل (2-9) (ولنرمز للوضع الجديد للجملة السابقة بالرمز (o′x′y′z′) بزاوية θ (الجملة الإحداثية الجديدة o′x′y′z′).



الشكل (2-9)

إن العلاقة بين إحداثيات النقطة M في كل من جملتي الإحداثيات القديمة (oxyz) والجديدة (o′x′y′z′) توضح على النحو التالي:

أ – الإحداثيات القديمة بدلالة الجديدة: إن المتجه الواصل بين نقطة الأصل O والنقطة M في الجملة (o′x′y′z′) هو:

$$\bar{r} = \overline{OM} = x'\bar{\varphi}_1 + y'\bar{\varphi}_2 + z'\bar{\varphi}_3 \qquad (9)$$

حيث $\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1$ هي متجهات الواحدة في الجملة الجديدة (o′x′y′z′) والتي لها المركبات التالية في الجملة القديمة (مساقطها على المحاور oz,oy,ox):

$$
\begin{cases}
\vec{\varphi}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0) & \text{or} \quad \vec{\varphi}_1 = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\
\vec{\varphi}_2 = -\sin\theta, \cos\theta, 0 & \text{or} \quad \vec{\varphi}_2 = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\
\vec{\varphi}_3 = (0,0,1) & \text{or} \quad \vec{\varphi}_3 = \vec{k}
\end{cases} \tag{10}
$$

بإسقاط المتجه $\overline{OM}$ على الجملة القديمة أو بـالتعويض عـن $\vec{\varphi}_i$ في العلاقـة (9) نجد أن:

$$\overline{OM} = x'\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right) + y'\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right) + z'\vec{k}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\vec{i} + \left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)\vec{j} + z'\vec{k}$$

ومن تساوي متجهين يكون:

$$
\begin{cases}
x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\
y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \\
z = z'
\end{cases} \tag{11}
$$

وهذه العلاقات تعطينا بالطبع الإحداثيات القديمة (x,y,z) للنقطـة M إذا علمنـا إحداثياتها الجديدة (x'y'z') وزاوية الدوران (الـدوران حـول oz). أمـا إذا أردنـا معرفـة الإحداثيات الجديدة (x'y'z') بدلالة زاوية الدوران والإحداثيات القديمـة فإننـا نكتـب المتجه $\overline{OM}$ في الجملة القديمة ويكون:

$$\vec{r} = \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{12}$$

وبملاحظة أن المتجهات الواحدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ للجملة (oxyz) في الجملة الجديدة هي:

$$
\begin{cases}
\vec{i} = \cos\theta\vec{\varphi}_1 - \sin\theta\vec{\varphi}_2 + 0.\vec{\varphi}_3 \\
\vec{j} = +\sin\theta\vec{\varphi}_1 + \cos\theta\vec{\varphi}_2 + 0.\vec{\varphi}_3 \\
\vec{k} = \vec{\varphi}_3
\end{cases} \tag{13}
$$

$$\vec{k} = (0,0,1)\ ,\ \vec{j} = (\sin\theta, \cos\theta, 0)\ ,\ \vec{i} = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

بـالتعويض عـن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بالعلاقـات الـسابقة في العلاقـة (12) وفـك الأقـواس والترتيب والمطابقة نجد أن:

$$x'\vec{\varphi}_1+y'\vec{\varphi}_2+z'\vec{\varphi}_3=x\left(\cos\theta\vec{\varphi}_1-\sin\theta\vec{\varphi}_2\right)+y\left(\sin\theta\vec{\varphi}_1+\cos\theta\vec{\varphi}_2\right)+z\vec{\varphi}_3$$

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=y\cos\theta-x\sin\theta\\ z'=z\end{cases}\qquad(14)$$

بآلية مشابهة نستنتج العلاقات والعلاقات المعاكسة عند الدوران حول المحور ox:

$$x=x',\ y=y'\cos\theta-z'\sin\theta, z=y'\sin\theta+z'\cos\theta\qquad(15)$$

$$x=x', y'=y\cos\theta-z\sin\theta, z'=y\sin\theta+z\cos\theta\qquad(16)$$

أما عند تدوير الجملة بزاوية θ حول المحور oy فتكون:

$$x=z'\sin\theta+x'\cos\theta, y=y',\ z=z'\cos\theta-x'\sin\theta\qquad(17)$$

$$x'=-z\sin\theta+x\cos\theta, y'=y, z'=z\cos\theta+x\sin\theta\qquad(18)$$

ملاحظة (4):

يمكن الحصول على العلاقات (14) من العلاقات (11) وذلك باستبدال كل x بـ x' و y بـ y' و θ بـ $-\theta$ وبآلية مشابهة بالنسبة للعلاقات (16) من (15) و (18) من (17)، كما ويمكن الحصول على x', y', z' (العلاقات 14 و 16 و 18 بحل الجملة الموافقة لـ 11 و 15 و 17 على الترتيب بالنسبة للمجهولين $(x', y'), (y', z'), (x', z')$ فمثلاً للحصول على العلاقات (14) نحل الجملة:

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\\ z=z'\end{cases}$$

بالنسبة إلى المجهولين x', y' حيث إنه وفق طريقة كرامر مثلاً (الأولى والثانية جملة معادلتين جبريتين بمجهولين x', y' غير متجانسة لها جذر مشترك إذا كان محدد أمثالها مغايراً للصفر).

ولدينا:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0$$

$$x'=\frac{1}{\Delta}\Delta_x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}x & -\sin\theta\\ y & \cos\theta\end{vmatrix}=x\cos\theta-y\sin\theta$$

$$y'=\frac{1}{\Delta}\Delta_y=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}\cos\theta & x\\ \sin\theta & y\end{vmatrix}=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

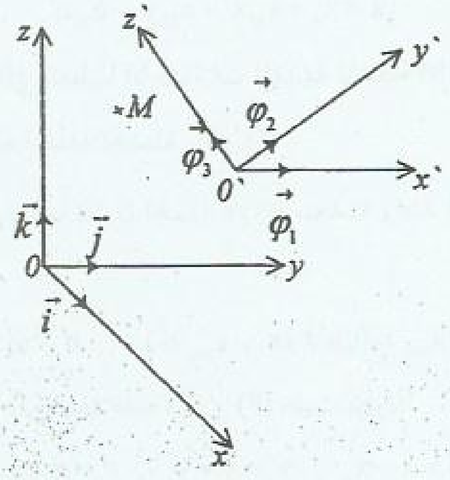
أي أن:

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=-x\cos\theta+y\sin\theta\\ z'=z\end{cases}$$

وهي العلاقات (14).

2-4-3- الانسحاب والدوران معاً (انسحاب الجملة الإحداثية مع الدوران):

لتكن لدينا الجملة $o'x'y'z'$ الناتجة عن دوران جملة المحاور oxyz بانسحاب إلى النقطة $o'(x_o,y_o,z_o)$ وبحيث يتم تدويرها (الجملة الجديدة) بزاوية θ الشكل (2-10).



الشكل (2-10)

نلاحظ أن:

$$\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M} \qquad (19)$$

حيث:

$$\begin{cases} \overline{OM} = xi + yj + zk \\ \overline{O'M} = x'\bar{\varphi}_1 + y'\bar{\varphi}_2 + z'\bar{\varphi}_3 \end{cases} \tag{20}$$

ومنه:

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + x'\bar{\varphi}_1 + y'\bar{\varphi}_2 + z'\bar{\varphi}_3 \tag{21}$$

فإذا كانت المتجهات الواحدة $\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1$ في الجملة $o'x'y'z'$ لها المركبات التالية:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} + a_{13}\bar{k} \\ \bar{\varphi}_2 &= a_{21}\bar{i} + a_{22}j + a_{23}\bar{k} \\ \bar{\varphi}_3 &= a_{31}\bar{i} + a_{32}\bar{j} + a_{33}\bar{k} \end{aligned} \tag{22}$$

في الجملة oxyz فاعتماداً على هذه العلاقات والعلاقة (21) وبعد إصلاح العلاقات الناتجة والمطابقة نجد أن:

$$\begin{cases} x = x_o + a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y = y_o + a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' \\ z = z_o + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' \end{cases} \tag{22}*$$

وهي العلاقات التي تعطينا الإحداثيات القديمة للنقطة M بعد إجراء انسحاب ودوران بآن واحد بدلالة الجملة الجديدة $o'x'y'z'$.

في حالة خاصة وعندما تكون الجملة oxyz متعامدة وعند إجراء الانسحاب دون دوران فيكون:

$$a_{nm} = 0, n \neq m \;,\; a_{nm} = 1 \;\;;\;\; n = m \tag{23}$$

وبالتالي نحصل على العلاقات (7) و (8) حيث يكون:

$$\begin{aligned} x' = x - x_o \;,\; y' = y - y_o \;,\; z' = z - z_o \\ x = x_o + x' \;,\; y = y_o + y' \;,\; z = z_o + z' \end{aligned}$$

أما عندما تكون الجملة oxyz متعامدة وعند الدوران حول المحور oz فإنه يمكن الحصول على العلاقات (14) من العلاقات (22) حيث يكون:

$$\begin{cases} a_{11}=\cos\theta \quad , a_{12}=\sin\theta \ , a_{13}=0 \\ a_{21}=-\sin\theta \ , a_{22}=\cos\theta \ , a_{23}=0 \\ a_{31}=0 \qquad , a_{32}=0 \qquad , a_{33}=1 \end{cases} \tag{24}$$

بآلية مشابهة يمكن مناقشة عملية الحصول على العلاقات (16) و (18) من العلاقات (22) حيث الجملة Oxyz والدوران على الترتيب حول oy,ox.

تمارين محلولة

التمرين (1):

أوجد الإحداثيات الأسطوانية، والكروية لكل من النقاط A_1, A_2, A_3 إن كانت معطاة ديكارتياً بالشكل: $A_1\left(1,1,\sqrt{2}\right), A_2\left(2,1,-2\right), A_3\left(2,2,0\right)$

الحل:

من العلاقات (2) لدينا:

$$\rho_1=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\theta_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}, A_1\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1\right)$$

$$\rho_2=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\ \theta_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},\ z=-2\ ,\ A_2\left(\sqrt{5},\operatorname{arctg}\frac{1}{2},-2\right)$$

$$\rho_3=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8},\ \theta_3=\operatorname{arctg}\frac{2}{2}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}, z=0, A_3\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4},0\right)$$

ثم بتطبيق العلاقات (5) نجد أن:

$$A_1: r_1=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(r_2)^2}=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

$$\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

$$A_1\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$r_2=\sqrt{4+1+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

أو:

$$\theta_2 = \text{arctg}\frac{1}{2}, \varphi_2 = \text{arctg}\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{-2} = \text{arctg}\frac{\sqrt{5}}{-2}$$

$$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \arccos\frac{-2}{\sqrt{4+1+4}} = \arccos\left(\frac{-2}{3}\right)$$

أو:

$$A_2\left(3, \text{arctg}\frac{1}{2}, \text{arctg}\frac{-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$A_3\left(3, \text{arctg}\frac{1}{2}, \arccos\frac{-2}{3}\right)$$

$$r_3 = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta_3 = \text{arctg}\frac{2}{2} = \text{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$p_3 = \text{arctg}\frac{\sqrt{4+4}}{0} = \frac{\pi}{2}\ ,\ A_3 = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (2):

أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة A_3, A_2, A_1 إذا كانت معطاة أسطوانياً بالشكل:

$$A_1\left(2, \frac{\pi}{4}, 1\right), A_2\left(3, \frac{2\pi}{3}, -2\right), A_3\left(0, \frac{\pi}{4}, -3\right)$$

الحل: لدينا:

$$x = \rho\cos\theta\ ,\ y = \sin\theta\ ,\ z = z$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ ,\ z_1 = 1 \\ y_1 = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} A_1\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$$

$$x_2 = 3\cos\frac{2\pi}{3} = 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$y_2 = 3\sin\frac{2\pi}{3} = 3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ ,\ A_2\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-2\right)$$

$$x_3 = 0\ ,\ y_3 = 0\ ,\ z_3 = -3\ ,\ A_3\left(0,0,-3\right)$$

التمرين (3):

النقاط $A\left(1,\frac{\pi}{6},0\right), B\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right), C\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ معطاة كروياً، أوجد هذه النقاط ديكارتياً.

الحل:

$$x = r\cos\theta\sin\varphi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ z = r\cos\varphi$$

$$x_1 = 1\cos\frac{\pi}{6}\sin 0 = 0\ ,\ y = 1.\sin\frac{\pi}{6}\sin 0 = 0, z = 1\cos 0 = 1, A\left(0,0,1\right)$$

$$x_2 = 3\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$y_2 = 3\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$z_2 = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ B\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_3 = 1\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} = 0\ ,\ y_3 = 1\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = 1\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ C\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

التمرين (4):

أوجد نقطة الانسحاب للجملة الديكارتية oxyz بحيث تنعدم الحدود الخطية (الحدود التي تحوي z,y,x) في المعادلة التالية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - z - 1 = 0$$

الحل:

لدينا العلاقات: $x = x' + x_o,\ y = y' + y_o,\ z = z' + z_o$

ثم التعويض في المعادلة المعطلة يكون:

$$(x'+x_o)^2 + (y'+y_o)^2 + (z'+z_o)^2 - (x+x_o) + 2(y'+y_o) - (z'+z_o) - 1 = 0$$

أو:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + (2x_o - 1)x + (2y_o + 2)y + (2z_o - 1)z + \\ & x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - x_o + 2y_o - z_o - 1 = 0 \end{aligned}$$

تنعدم الحدود الخطية عندما تنعدم أمثالها ويكون:

$$2x_o - 1 = 0\ ,\ x_o = \frac{1}{2}\ ,\ 2y_o + 2 = 0\ ,\ y_o = -1\ ,\ z_o = \frac{1}{2}$$

$$x = x' + \frac{1}{2}\ ,\ y = y' - 1\ ,\ z = z' + \frac{1}{2}$$

التمرين (5):

عيّن الزاوية θ التي يجب أن تدور بها الجملة الإحداثية الديكارتية النظامية حول المحور ox لكي تنعدم الحدود المستطيلة (الحدود التي تحوي yz,xz,xy) في المعادلة الجبرية التالية: $2x^2 + y^2 + z^2 - 3yz + x - 1 = 0$ ثم اكتب الشكل الجديد للمعادلة

الحل:

إن علاقات دوران الجملة الديكارتية oxyz حول المحور ox هي:

$$x = x'\ ,\ y = y'\cos\theta - z'\sin\theta\ ,\ z = y'\sin\theta + z'\cos\theta$$

ويكون:

$$\begin{aligned} & -3 + (y'\cos\theta - z'\sin\theta)^2 + (y'\sin\theta + z'\cos\theta)^2 \\ & -3(y'\cos\theta - z'\sin\theta).(y'\sin\theta + z'\cos\theta) + x' - 1 = 0 \end{aligned}$$

بفك الأقواس والترتيب نجد أن:

$$2x'^2+\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta-3\cos\theta\sin\theta\right)y'^2+\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta-3\sin\theta\right)z'^2$$
$$+x'-1+\left(-2\cos\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta-3\cos^2\theta+3\sin^2\theta\right)y'z'=0$$

ومنه لكي تنعدم الحدود المستطيلة (التي تحوي $y'z'$) يجب أن يكون:

$$-3\cos^2\theta+3\sin^2\theta=0\ ,\ \sin\theta=\cos\theta\ ,\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي وبما أن: $\cos\theta=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ فإن:

$$2x'^2-3\cos\theta\sin\theta y'^2-3\sin\theta\cos\theta z'^2+x'-1=0$$
$$2x'^2-3\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}y'^2-3\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}z'^2+x'-1=0$$

أو:

$$4x'^2-3y'^2-3z'^2+2x'-2=0$$

التمرين (6):

أوجد الشكل الأسطواني والشكل الكروي لكل من المعادلات التالية:

أ - $$x^2+y^2+z^2=25$$

ب - $$ax+by+cz-d=0, a,b,c,d=\text{const}$$

جـ - $$x^2+y^2+z^2=1$$

الحل:

بتعويض العلاقات (1) في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+z^2=25\ \ ,\ \rho^2+z^2=25$$

وهو الشكل الأسطواني، أما الشكل الكروي ينتج عن تعويض العلاقات (4) في المعادلة المعطاة، ويكون:

$$(r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2+(r\cos\varphi)^2=25$$
$$r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\varphi=25$$
$$r^2=\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+r^2\cos^2\varphi=25$$
$$r^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=25\Rightarrow r^2=25\ ,\quad r=5$$

وهكذا بالنسبة إلى ب، جـ ، حيث:

ب – الشكل الأسطواني: $a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta+cz=d$

وهو الشكل الكروي:

$$a(r\sin\varphi\cos\theta)+b(r\sin\varphi\sin\theta)+cr\cos\varphi=d$$

جـ – الشكل الأسطواني: $(\varphi\cos\theta)^2+(\varphi\sin\theta)^2-z^2=1, p^2-z^2=1$

الشكل الكروي: $(r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2-(r\cos\varphi)^2=1$

$$r^2\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta-r^2\cos^2\varphi=1$$
$$r^2\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-r^2\cos^2\varphi=1$$
$$r^2\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)=1$$

التمرين (7): أوجد الشكل الكروي للمعادلة:

أ – $z=\rho^2$ (معطاة أسطوانياً).

ب– $r^2\sin\varphi\cos\varphi=1$ (معطاة كروياً).

الحل:

أ – من الشكل (2-2) لدينا $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ وعليه فإن $z=x^2+y^2$.

ب – من الشكل (2-3) لدينا: $\cos\varphi=\dfrac{z}{r},\sin\varphi=\dfrac{\rho}{r}=\dfrac{1}{r}\sqrt{x^2+y^2}$

بالتعويض عن $\cos\varphi,\sin\varphi$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$r^2.\frac{z}{r}.\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}=1\quad ,\quad z\sqrt{x^2+y^2}=1$$

تمارين غير محلولة

التمرين (1):

أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة المعطاة أسطوانياً في الحالات التالية:

1) $M\left(2,\frac{\pi}{3},5\right)$ 2) $M\left(8,\frac{2\pi}{3},1\right)$ 3) $M\left(3,\frac{3\pi}{4},2\right)$

4) $M\left(10,\frac{5\pi}{4},2\right)$ 5) $M\left(7,\frac{5\pi}{4},2\right)$ 6) $M\left(2,\frac{\pi}{2},-2\right)$

7) $M\left(2,\frac{2\pi}{4},4\right)$ 8) $M\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},3\right)$ 9) $M(1,0,-3)$

الأجوبة:

1) $M\left(1,\sqrt{3},5\right)$ 2) $M\left(-4,4\sqrt{3},1\right)$ 3) $M\left(3/\sqrt{2},3/\sqrt{2},2\right)$

4) $M(-10,0,-3)$ 5) $M\left(-\frac{7}{\sqrt{2}},\frac{-7}{\sqrt{2}},2\right)$ 6) $M(1,1,3)$

7) $M\left(-1,\sqrt{3},4\right)$ 8) $M(0,2,-2)$ 9) $M(1,1,-3)$

التمرين (2):

النقطة M معطاة ديكارتياً والمطلوب أوجد إحداثياتها الأسطوانية في الحالات التالية:

1) $M(0,0,-3)$ 2) $M\left(-\frac{2}{3},\frac{3\sqrt{3}}{2},-2\right)$ 3) $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},1\right)$

4) $M(1,0,1)$ 5) $M(0,0,1)$ 6) $M(-1,1,4)$

7) $M\left(2\sqrt{3},-2,8\right)$ 8) $M\left(-2\sqrt{3},-2,1\right)$ 9) $M(1,1,2)$

الأجوبة:

1) $M\left(2,\frac{\pi}{4},1\right)$ 2) $M\left(3,\frac{2\pi}{3},-2\right)$ 3) $M\left(0,\frac{\pi}{4},-3\right)$

4) $M(1,0,1)$ 5) $M(0,\theta,1)$ 6) $M\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},4\right)$

7) $M\left(4,\frac{11\pi}{6},8\right)$ 8) $M\left(4,\frac{7\pi}{6},1\right)$ 9) $M(1,1,2)$

التمرين (3):

حول الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الديكارتية النقاط:

1) $M\left(2,0,\frac{\pi}{3}\right)$ 2) $M\left(6,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 3) $M\left(7,\frac{7\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

4) $M\left(4,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 5) $M\left(5,\frac{11\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 6) $M\left(3,\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\operatorname{ar\cos}\frac{-2}{3}\right)$

7) $M\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 8) $M\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

الأجوبة:

1) $M\left(\sqrt{3},0,1\right)$ 2) $M\left(0,3\sqrt{3},3\right)$ 3) $M\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

4) $M\left(\sqrt{3},3,-2\right)$ 5) $M\left(\frac{5\sqrt{3}}{4},\frac{-5}{4},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $M(2,2,0)$

7) $M(2,1,-2)$ 8) $M\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

التمرين (4):

حوّل الإحداثيات الديكارتية إلى الكروية النقاط:

1) $M(0,0,1)$ 2) $M\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 3) $M\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4) $M(1,1,0)$ 5) $M\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$ 6) $M\left(1,-\sqrt{3},2\right)$

7) $M\left(2,\sqrt{3},4\right)$ 8) $M\left(-\sqrt{3},-2,-4\right)$

الأجوبة:

1) $M\left(1,\frac{\pi}{6},0\right)$ 2) $M\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$ 3) $M\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

4) $M\left(\sqrt{2}m\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 5) $M\left(2,\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 6) $M\left(2\sqrt{2},\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$

7) $M\left(\sqrt{23},tg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2},\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{23}}\right)$ 8) $M\left(\sqrt{23},\pi+tg^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}},\cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{23}}\right)$

التمرين (5):

إذا كانت جملة الإحداثيات الديكارتية oxyz قد سحبت إلى النقطة O' (2,-1,4) فما هي الإحداثيات الجديدة z',y',x' للنقطة M في الحالات التالية:

1) $M_1(1,-3,6)$ 2) $M_2(1,-2,2)$ 3) $M_3(1,1,1)$

الأجوبة:

1) $M_1(-1,-3,6)$ 2) $M_2(-1,-1,2)$ 3) $M_3(-1,2,-3)$

التمرين (6):

ما هي نقطة الانسحاب (O' مركز الجملة x',y',z') التي يجب أن تنسحب إليها الجملة الديكارتية النظامية o,x,y,z لكي تحذف الحدود الخطية في كل من المعادلات التالية:

1) $x^2+2xy+x+y=2$ 2) $y^2+2xy+x+y=2$

3) $z^2+2xz+x+z=2$ 4) $z^2+2yz+y+z=2$

5) $x^2+y^2+z^2-y-x+2z=1$ 6) $x^2+y^2+z^2-z+2x-y=1$

7) $x^2+y^2+z^2-x+2y-z=1$

الأجوبة:

1) $O'\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$ 2) $O'\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$

3) $O'\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$ 4) $O'\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$

5) $O'\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 6) $O'\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

التمرين (7):

عيّن زاوية الدوران التي يجب أن تدور بها الجملة الديكارتية النظامية oxyz حول المحور المشار إليه لكي تنعدم الحدود المستطيلة في المعادلة:

(1) $2y^2+z^2+x^2+y=1$ والدوران حول المحور oy.

(2) $2z^2+x^2+y^2-3xy+z=1$ والدوران حول المحور oz.

الأجوبة: (1) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (2) $\theta=\frac{\pi}{4}$

التمرين (8):

دورت الجملة الإحداثية الديكارتية (o,x,y,z) بزاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ حول المحور ox والمطلوب: أوجد الإحداثيات الجديدة (ox',y',x') للنقطة M(1,1,2).

1) $x^2+y^2+z^2=25$ 2) $\rho=9\sin\theta$

3) $x^2+y^2-z^2=1$ 4) $z=\rho^2$

5) $r^2\sin\varphi\cos\varphi=1$ 6) $z=\rho^2\sin^2\theta$

7) $n^2+(y-3)^2+z^2=9$ 8) $x^2-y^2+z^2=1$

الأجوبة:

1) الأسطواني $\rho^2+z^2=25$، الكروي $r=5$

2) $x^2+y^2-9y=0$

3) الأسطواني $\rho^2-z^2=1$ الكروي $r^2\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)=1$

4) $z=x^2+y^2$

5) $\sqrt{x^2+y^2=1}$ .z $r^2\sin\varphi\cos\varphi=1$

6) $z=2xy$

7) $r=6\sin\varphi\cos\varphi$

8) الأسطواني: $\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+z^2=1$

الكروي: $r^2\left[\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+\cos^2\varphi\right]=1$

الفصل الثالث

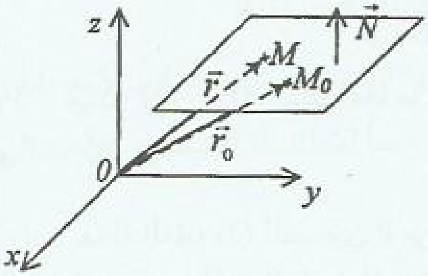
المستوي في الفضاء

3-1- تعريف المستوي ومعادلته العامة:

يُعرف المستوي في الفضاء الثلاثي الأبعاد $\Re^3$ المنسوب إلى جملة محاور إحداثية ديكارتية نظامية oxyz بأنه المحل الهندسي لمجموعة النقاط $M(x,y,z)\in\Re^3$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$\overline{MM_o} \perp \overline{N} \qquad (1)$$

حيث $\overline{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ هو متجه معطى و $M_o(x_o,y_o,z_o)$ نقطة معلومة لاتقع على المتجه $\overline{N}$ (أو لاتقع على منحاه أو حامله) الشكل (3-1).



الشكل (3-1)

إن عملية إيجاد معادلة المستوي P في هذه الحالة تتم من خلال العلاقة:

$$P\equiv\overline{M_oM}\perp\overline{N}\Rightarrow\overline{M_oM}.\overline{N}=0\Rightarrow$$

$$P\equiv\left(\overline{OM}-\overline{OM_o}\right).\overline{N}=0 \qquad (2)$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_o).\overline{N}=0$$

أو من خلال العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$$P\equiv\left[(x-x_o)\vec{i}+(y-y_o)\vec{j}+(z-z_o)\vec{k}\right].\left[A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}\right]=0$$

$$P\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$

أو:

$$P\equiv Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

حيث: $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$، والمعادلة (3) تدعى بالمعادلة العامة للمستوي P، أما المتجه $\vec{N}(A,B,C)$ فيسمى بالناظم على المستوي P.

ملاحظة (1):

1- من العلاقة (2) يمكن أن نكتب:

$$P \equiv \vec{N}\vec{r}-\vec{N}\vec{r}_0=0$$

أو:

$$P \equiv \vec{N}.\vec{r}+D=0$$

حيث $D=-\vec{N}\vec{r}_0$. لذلك عادة ما تدعى المعادلة (2) بالمعادلة المتجهية للمستوي P.

2- إن المعادلة العامة (3) للمستوي P من الوجهة الجبرية فهي معادلة جبرية خطية (من الدرجة الأولى) بالنسبة إلى المجاهيل z,y,x والتي هي بدورها إحداثيات نقطة من المستوي P وبالعكس فإن كل معادلة جبرية من الدرجة الأولى تمثل مستوياً في الفراغ $\Re^3$ لأنه بالفعل لو كانت لدينا المعادلة:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

فإن يمكن كتابتها بالشكل:

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+B(y-0)+C(z-0)=0$$

حيث إن C,B,A غير معدومة معاً (في الحالة المعاكسة A=B=C=0، المعادلة تصبح من الدرجة صفر)، والمعادلة الأخيرة ليست إلاّ الجداء السلمي للمتجهين المتعامدين:

$$\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}\ ,\ \overline{M_0M}=\left(x-\frac{-D}{A}\right)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

وهذا يوافق القول إن هناك تقابلاً واحداً بين مجموعة المستويات في الفراغ ومجموعة المعادلات من الدرجة الأولى في الفضاء $\Re^3$.

3- إذا كان الحد المطلق $D = 0$ فإن المعادلة (3) تأخذ الشكل:

$$P \equiv Ax + By + Cz = 0 \qquad (4)$$

ومن السهل التأكد من أن النقطة $O(0,0,0)$ تحقق هذه المعادلة، مما يعني أن المستوي مار من نقطة الأصل، لذلك عادة ما يسمى D بمقدار ثابت متناسب مع بعد المستوي P عن نقطة الأصل.

2-3- وضع المستوي بالنسبة إلى عناصر الجملة الإحداثية:

هناك حالات خاصة للمعادلة (3) يكون فيها المستوي P موازياً (حاوياً) لأحد المحاور الإحداثية وحالات أخرى يكون فيها P موازياً (منطبقاً) للمستوي الإحداثي o,xz,o,yz,oxy وهي:

1- إذا عوضنا في المعادلة (3) $C = 0$ فإنها تأخذ الشكل $P \equiv Ax + By + D = 0$ والناظم $\bar{N}(A,B,O) \perp oz$ وبالتالي المستوي P يوازي هذا المحور.

2- $C = 0$ و $D = 0$ إن المستوي (P) يحوي المحور oz.

3- $Ax + Cz + D = 0$ تمثل معادلة المستوي P الموازي للمحور oy.

4- $By + Cz + D = 0$ ($By + Cz = 0$) معادلة المستوي P الموازي (الحاوي) على المحور ox.

5- المعادلات:

$Ax + D = 0$ أي $(B = C = 0)$ تمثل معادلة المستوي الموازي لكل من المحورين الإحداثيين oz,oy أو المستوي الموازي للمستوي oyz.

$By + D = 0$ أي : $A = C = 0$ هي معادلة المستوي الموازي للمستوي oxz.

$Cz + D = 0$ أي: $A = B = 0$ هي معادلة المستوي الموازي للمستوي oxy.

$Ax = 0$ أو $x = 0$ معادلة المستوي oyz نفسه.

$Cz = 0$ أو $z = 0$ معادلة المستوي oxy.

3-3- الزاوية بين مستويين:

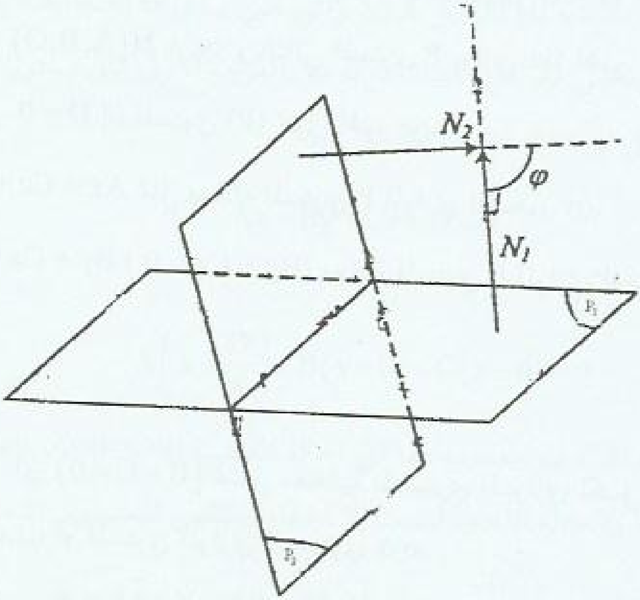
ليكن لدينا المستويان:

$$P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

تعرف الزاوية بين هـذين المستويين بأنهـا الزاويـة بـين ناظميهمـا، الشـكل (2-3).

ويكون:

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1.\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|.|\vec{N}_2|}$$



الشكل (3-2) الزاوية بين محورين

أو:

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

بحيث تؤخذ الإشارة الموجبة (+) إذا قصدنا الزاوية $\widehat{\vec{N}_1,\vec{N}_2}$ أو الإشارة السالبة (−) إذا قصدنا الزاوية $\pi-\left(\widehat{\vec{N}_1,\vec{N}_2}\right)$ أي أن الزاوية تكون حادة إذا كان $0<\cos\theta<1$ ومنفرجة إذا كان $-1<\cos\theta<0$ في حالة خاصة إذا كان $|\cos\theta|=1$ فإن الزاوية تساوي الصفر، أو π، والمستويان في هذه متوازيان $P_1 // P_2$ أي أن $\vec{N}_1 // \vec{N}_2$ وهذا بالطبع يعني الارتباط الخطي للناظمين، أي $N_1=\alpha N_2\ (\alpha\neq 0)$ والذي بدوره يكتب على الشكل:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\alpha \tag{6}$$

والعلاقة الأخيرة تمثل الشرط اللازم والكافي لتوازي مستويين في الفراغ، أما شرط انطباق المستويين فيتطلب أيضاً أن تكون $\alpha=\frac{D_1}{D_2}$ أي أن شرط الانطباق يصبح على الشكل التالي:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} \tag{7}$$

أخيراً إذا كان $\cos\theta=0$ أي $\theta=\frac{\pi}{2}$ فإن المستويين متعامدان، وهذا يوافق كون الناظمان متعامدين، أي أن شرط التعامد هو:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{8}$$

ملاحظة (2): إن أي مستويين P_1,P_2 في الفراغ $\Re^3$ إما أن يكونا متوازيين (منطبقين)، وإما أن يكونا متقاطعين (متعامدين). وفي الحالة الأخيرة فإنهما يتقاطعان بمستقيم (سنأخذ المستقيم في فصل لاحق) يسمى بالفصل المشترك لهما ومعادلته هي بالحقيقة الحل المشترك لجملة معادلتي المستويين، حيث يكون لها في هذه الحالة عدد لانهائي من الحلول التي هي نقاط الفصل المشترك لهذا المستقيم.

3-4- حالات تعيين المستوي في الفضاء:

لقد وجدنا أن المستوي في الفضاء يتعين بمتجه $\bar{N}(A,B,C)$ معطى وبمعرفة نقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ لاتقع على حامل المتجه، إضافة لذلك هناك حالات عديدة يتم وفقها تعيين المستوي في الفضاء نذكر منها:

3-4-1- المستوي يمر بنقطة معلومة ويوازي مستوياً معلوماً:

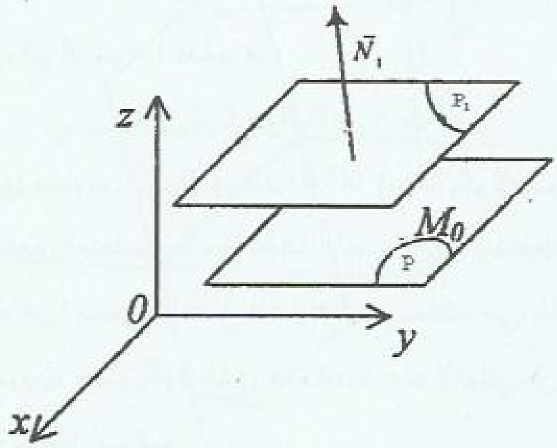
ليكن لدينا المستوي $P_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$، $M_o(x_o,y_oz_o)$ لاتقع عليه الشكل (3-3).

لإيجاد معادلة المستوي P الموازي لـ P_1 وبحيث $M_o \in P$ ، نأخذ نقطة كيفية M من الفضاء، إن شرط انتمائها إلى المستوي المطلوب P هو تحقق الشرط التالي:

$$P \equiv \overline{M_oM} \perp \bar{N} \quad \Rightarrow \quad P \equiv \overline{M_oM}.\bar{N}=0$$

أو:

$$A_1(x-x_o)+B_1(y-y_o)+C_1(z-z_o)=0$$



الشكل (3-3)

ملاحظة (3):

1) إذا كانت $M_o \in P_1$ فإن المستوي P_1 ينطبق على P.

2) إن معادلة المستوي P يمكن كتابتها بالشكل $Ax+By+Cz+D=0$ حيث $D=-(A_1x_o+B_1y_o+C_1Z_o)$ والشكل الأخير ما هو إلاّ المعادلة (3) وبالتالي يمكن إرجاع المسألة إلى مسألة إيجاد معادلة المستوي P المار بنقطة معلومة وعمودي على المتجه N_1 أو أي متجه آخر يوازيه، أي أن المستويين P أو P_1 لهما نفس الناظم أو ناظمان متوازيان.

مثال: أوجد معادلة المستوي P المار بالنقطة M(2,1,-1) والمتعامد مع المستقيم المار بالنقطتين:

$$M_1(2,4,5) \quad , \quad M_2(1,3,2)$$

الحل: إن معادلة المتجه المار بـ M_2, M_1 هي:

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$
$$=-\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

وتؤول المسألة إلى إيجاد معادلة مستوٍ يمر بنقطة معلومة ويعامد متجهاً معلوماً وهي من الشكل:

$$P\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$

وحيث إن:

$$\vec{N}(A,B,C)$$

فإن:

$$\vec{N}(-1,-1,-3)$$

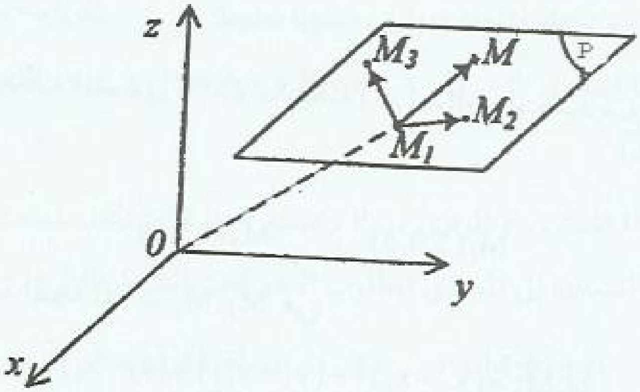
إذاً:

$$P\equiv -1(x-2)+(-1)(y-1)+(-3)(z+1)$$
$$\Rightarrow P\equiv x+y+3z=0$$

2-4-3- المستوي المار بثلاث نقاط لاتقع على استقامة واحدة:

لتكن لدينا النقاط $M_3(x_3,y_3,z_3), M_2(x_2,y_2,z_2), M_1(x_1,y_1,z_1)$ التي لاتقع على استقامة واحدة ($\overline{M_1M_2}$ لايوازي $\overline{M_1M_3}$) الشكل(3-4) عندئذ لإيجاد

معادلة المستوي (P) المار بالنقاط الثلاث السابقة، نأخذ نقطة كيفية M(x,y,z). إن شرط وقوع هذه النقطة في المستوي P هو أن تكون المتجهات الثلاثة واقعة في مستوي واحد $\overline{M_1M_3}, \overline{M_1M_4}, \overline{M_1M_2}$ مرتبطة خطياً، أي جداؤها المختلط يجب أن يكون مساوياً للصفر.



الشكل (4-3)

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = \left(\overline{M_1M} \wedge \overline{M_1M_2}\right).\left(\overline{M_1M_3}\right) = 0$$

أو:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

ثم بوضع:

$$B_1 = y_2 - y_1 \quad , \; A_2 = x_3 - x_1 \quad , \; A_1 = x_2 - x_1$$
$$C_2 = (z_3 - z_1) \; , \; C_1 = (z_2 - z_1) \; , \; B_2 = (y_3 - y_1)$$

وفك المحدد والترتيب نجد أن:

$$Ax + By + Cz = 0$$
$$A = B_1C_2 - B_2C_1 \; , \; B = C_1A_2 - A_1C_2 \; , \; C = A_1B_2 - A_2B_1$$
$$D = -\left[x_1\left(B_1C_2 - B_1C_1\right) + y_1\left(C_1A_2 - C_2A_1\right) + Z_1\left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\right]$$

ملاحظة (4):

1- يمكن إيجاد معادلة المستوي P المار بالنقاط الثلاث السابقة من خلال تنفيذ علاقة الارتباط الخطي للمتجهات الثلاثة بدلالة وسيطين α,β (أحدهما على الأقل غير معدوم) ويكون:

$$P \equiv \overline{M_1M} = \alpha\,\overline{M_1M_2} + \beta\,\overline{M_1M_3}$$

ثم بوصل النقاط الأربع إلى نقطة الأصل واعتبار نصف القطر المتجهي الممثل لها، تكتب العلاقة السابقة على الشكل:

$$\overline{OM} - \overline{OM_1} = \alpha\left(\overline{OM_2} - \overline{OM_1}\right) + \beta\left(\overline{OM_3} - \overline{OM_1}\right)$$

أو:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \alpha\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + \beta\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right) \tag{10}$$

ثم باعتبار مركبات هذه المتجهات والمطابقة نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha\left(x_2 - x_1\right) + \beta\left(x_3 - x_1\right) \\ y = y_1 + \alpha\left(y_2 - y_1\right) + \beta\left(y_3 - y_1\right) \\ z = z_1 + \alpha\left(z_2 - z_1\right) + \beta\left(z_3 - z_1\right) \end{cases} \tag{11}$$

العلاقة (9) تدعى بالمعادلة المتجهية للمستوي P، أما العلاقات (11) فهي تمثل المعادلات الوسيطية له.

2- بالحقيقة، يمكن رد مسألة إيجاد المستوي P السابق إلى الفقرة (3-1) (معادلة مستو مار من نقطة معلومة وعمودي على متجه معطى)، بأخذ الجداء الخارجي للمتجهين $\overline{M_1M_2}$، $\overline{M_1M_3}$ واعتبار أية نقطة من النقاط M_3, M_2, M_1، أي أن الناظم على المستوي المطلوب في هذه الحالة هو المتجه.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

مثال: أوجد معادلة المستوي P المار بالنقاط:

$$M_1(1,2,3)\ ,\ M_2(2,1,2)\ ,\ M_3(3,3,1)$$

الحل: نعوض في المعادلة:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(3)-(y-2)(0)+(z-3)(3)=0$$
$$P \equiv 3x+3z-12=0$$

3-4-3- المستوي القاطع للمحاور الإحداثية:

لقد وجدنا في الفقرة (3-2) أن المستوي يوازي المحور ox من أجل $A = 0$:

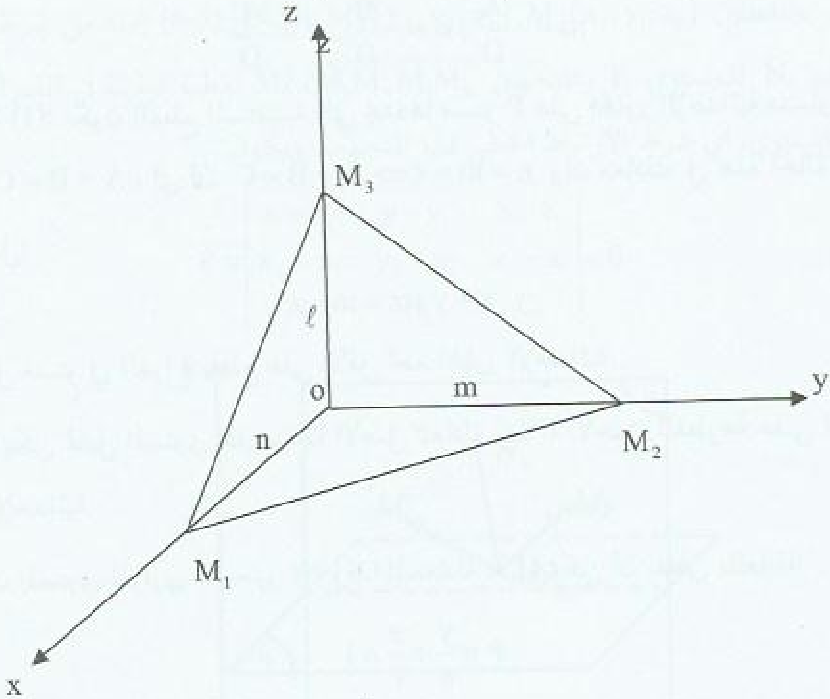
$$P \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

والمحور oy $(B=0)$ والمحور oz من أجل $C = 0$ في الحالة المعاكسة $C \neq 0, B \neq 0, A \neq 0$ فإن المستوي (P) يقطع هذه المحاور، وبالتالي يحدد على كل منها أطوالاً ℓ, n, m (oz,oy,ox على الترتيب). الشكل (3-5). وبالتالي فإن المسألة تعود إلى إيجاد المستوي P المار بالنقاط:

$$M_1(m,0,0), M_2(0,n,0), M_3(0,0,\ell)$$

والتي لاتقع على استقامة واحدة (النقاط تقع على المحاور الإحداثية).

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-m & y & z \\ -m & n & 0 \\ -m & 0 & \ell \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$



الشكل (5-3)

$$P \equiv (x-m)(n\ell) + y(0+m\ell) + z(0+mn) = 0$$

$$P \equiv n\ell.x + m\ell y + m.nz - m.n\ell = 0 \tag{14}$$

أو:

$$m, n, \ell \neq 0 \Rightarrow P \equiv \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{\ell} = 1 \tag{15}$$

إن الشكل الأخير لمعادلة المستوي هذا يسمح لنا بإيجاد أطوال القطع المستقيمة المقتطعة على المحاور الإحداثية من خلال المقارنة مع المعادلة العامة للمستوي:

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

بعد نقل المقدار D إلى الطرف الثاني والتقسيم عليه، ومـن ثـم اا ضرب بــ 1-

حيث يكون:

$$m=-\frac{A}{D}\,,\; n=-\frac{B}{D}\,,\; \ell=\frac{-C}{D} \qquad (16)$$

نتيجة (1): تكون القطع المستقيمة التي يحددها مستوٍ P على المحاور الإحداثية متساوية إذا كان: $A=B=C$ ، أي أن: $A=B=C \Leftrightarrow n=m=\ell$ وأن معادلته في هذه الحالة تأخذ الشكل:

$$x+y+z=m \qquad (17)$$

2- كل مستوٍ في الفراغ يقطع على الأقل أحد المحاور الإحداثية.

3- لايمكن تمثيل المستوي المار بنقطة الأصل بمعادلة بدلالة الأجزاء المقطوعة على المحاور الإحداثية.

4- إن المستوي الموازي للمحور ox وفقاً للمعادلة (15) يمكن أن يعطى بالمعادلة:

$$P\equiv\frac{y}{n}+\frac{z}{\ell}=1$$

أما المستوي الموازي للمحورين oy,ox فله المعادلة: $P\equiv\frac{z}{\ell}=1$ وبالمثل تعطى معادلات بقية الحالات للمستويات الموازية للمحاور الأخرى، (محور أو محورين).

مثال: أوجد معادلة المستوي P المار بالمحاور الإحداثية في النقاط التالية:

$$M_1(2,0,0)\;,\; M_2(0,-1,0)\;,\; M_3(0,0,-2)$$

الحل: إن معادلة المستوي المطلوب هي من الشكل:

$$P\equiv\frac{x}{m}+\frac{y}{n},\frac{z}{\ell}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-2}=1$$

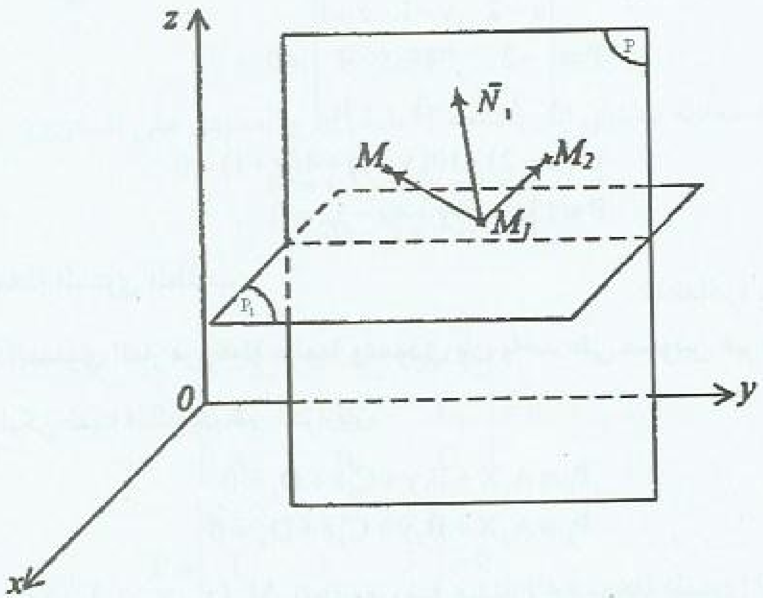
بضرب الطرفين بالعدد 2 نجد:

$$P\equiv x-2y-z-2=0$$

3-4-4- المستوي المار بنقطتين معلومتين والعمودي على مستوي معطى:

إن المستوي P العمودي على المستوي المعطى: $P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ والمار بالنقطتين $M_2(x_2, y_2, z_2), M_1(x_1, y_1, z_1)$ الشكل (6-3) يحدد من شرط وقوع الناظم $\bar{N}_1$ للمستوي P_1 والمتجهين $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M}$، (M نقطة كيفية في الفراغ). في هذا المستوي، أي شرط الارتباط الخطي لهذه المتجهات ويكون:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$



الشكل (6-3)

ملاحظة هامة: المستويات الموازية للمحاور الإحداثية:

1) معادلة المستوي الموازي للمحورين oy,ox (يوازي المستوي oxy)، معادلته $z = z_o$

2) معادلة المستوي الموازي للمحورين (oy,oz) (يوازي المستوي (oyz)) معادلته $x = x_o$.

3) معادلة المستوي الموازي للمحورين (ox,oz) (يوازي المستوي (oxz)) معادلته $y = y_o$

مثال: أوجد معادلة المستوى P المار بالنقطتين $M_1(2,1,-1), M_2(0,2,3)$ والعمودي على المستوي: $P_1 = 2x - 3y + z - 4 = 0$

الحل: المعادلة هي:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$13(x-2)+10(y-1)+4(z+1)=0$$

$$P \equiv 13x+10y+4z-32=0 \ .$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

3-4-5- المستوي المار من نقطة معلومة وعمودي بآن واحد على مستويين غير متوازيين:

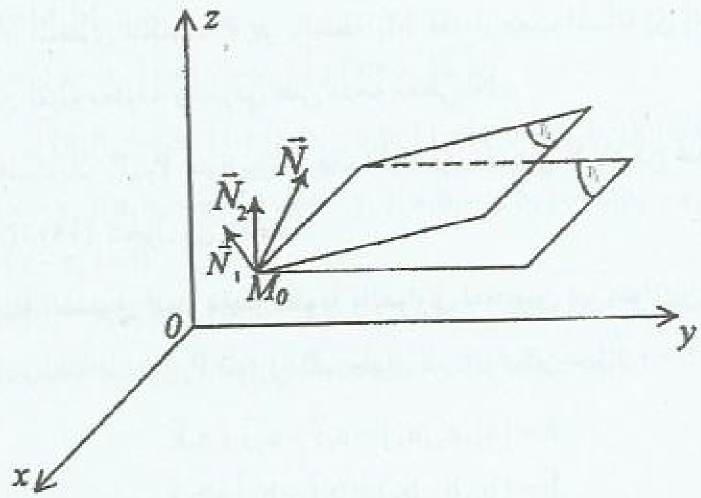
ليكن لدينا المستويان غير المتوازيين:

$$P_1 \equiv A_1X + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2X + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ولتكن $M_o(x_o, y_o, z_o)$ نقطة مفروضة عندئذ لإيجاد معادلة المستوي P المار بهذه النقطة والعمودي على كل من P_2, P_1 نأخذ نقطة كيفية M(x,y,z). الشكل (3-7)، ومن ثم نطبق شرط وقوع المتجهات $\overline{M_0M}, \overline{N_2}, \overline{N_1}$ في مستوٍ واحد أي:

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{N_1}, \overline{N_2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$



الشكل (3-7)

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M(2,1,3)$ والعمودي على المستويين:

$$P_1 \equiv x+y+3z-2=0$$
$$P_2 \equiv 4x-y+z+3=0$$

الحل: نبدل في المعادلة:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv 4(x-2)+11(y-1)+(-5)(z-3)=0$$

$$P \equiv 4x+11y-5z-4=0$$

ملاحظة (5):

1- يمكن إيجاد المستوي P بأن نجد أولاً الناظم عليه من خلال العلاقة:

$$\overline{N} = \overline{N_1} \wedge \overline{N_2}$$

وبما أن المستوي المطلوب P يمر بالنقطة M_1 فقد أرجعت المسألة إلى إيجاد معادلة مستوٍ مار من نقطة معلومة وعمودي على متجه معطى $\overline{N}$.

2- إذا كان المستويان P_2, P_1 متوازيين في هذه الحالة فإن المستوي P لايمكن تحديده حيث إن العلاقة (18) تتحول إلى مطابقة.

6-4-3- معادلة المستوي المار بنقطة معلومة والموازي لمتجهين غير متوازيين:

لإيجاد معادلة المستوي P الموازي للمتجهين غير المرتبطين خطياً:

$$\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k}$$
$$\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k}$$

والمار بالنقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ نأخذ نقطة كيفية $M(x,y,z)$ الشكل (3-8) إن شرط وقوعها على المستوي P المطلوب هو:

$$P\equiv\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & -z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (19)$$

كما ويمكن حل المسألة بطريقة أخرى وذلك بأخذ المتجه:

$$\overline{N}=\overline{a}\Lambda\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\overline{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\overline{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overline{k}$$

واعتباره الناظم على المستوي المطلوب، وبما أن المستوي هذا يجب أن يمر من النقطة المعلومة M_o فإن معادلة المستوي تستنتج من العلاقة:

$$P\equiv\overline{M_oM}.\overline{N}=0$$

أو:

$$P \equiv \overrightarrow{M_oM} \perp \vec{N}$$

$$P \equiv \left[(x-x_o)\vec{i}+(y-y_o)\vec{j}+(z-z_o)\vec{k}\right].$$

$$\left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]=0$$

$$P \equiv (x-x_o)(a_2b_3-a_3b_2)+(y-y_o)(a_3b_1-a_1b_3)+(a_1b_2-a_2b_1).$$

$$(z-z_o)=0$$

$$P \equiv (a_2b_3-a_3b_2)x+(a_3b_1-a_1b_3)y+(a_1b_2-a_2b_1)z-$$

$$x_o(a_2b_3-a_3b_2)-y_o(a_3b_1-a_1b_3)-z_o(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

أو:

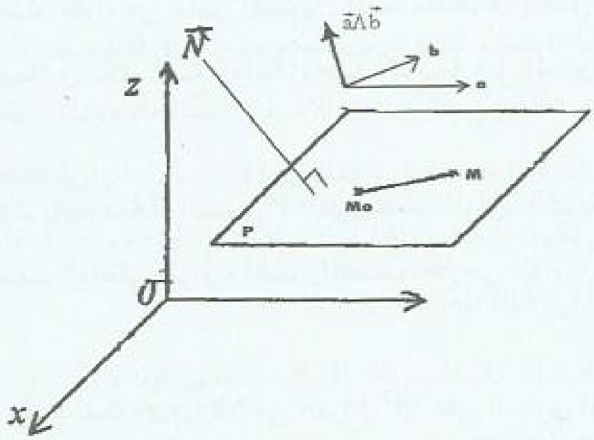
$$P \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

حيث:

$$A=a_2b_3-a_3b_2\ ,\ B=a_3b_1-a_1b_3\ ,\ C=a_1b_2-a_2b_1$$

$$D=-x_o(a_2b_3-a_3b_2)-y_o(a_3b_1-a_1b_3)-z_o(a_1b_2-a_2b_1)$$

ويمكن التأكد من أن النتيجة السابقة ليست إلاّ نتيجة فك المحدد (19).



الشكل (3-8)

مثال: اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $M(1,2,3)$ والموازي للمتجهين:

$$\vec{V}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{V}_2=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$

الحل:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$P \equiv -1(x-1)+(5)(y-2)+7(2-3)=0$$

$$P \equiv x-5y-7z+30=0$$

7-4-3- معادلة المستوي المنصف للزاوية بين مستويين:

ليكن لدينا المستويان P_2, P_1:

$$P_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

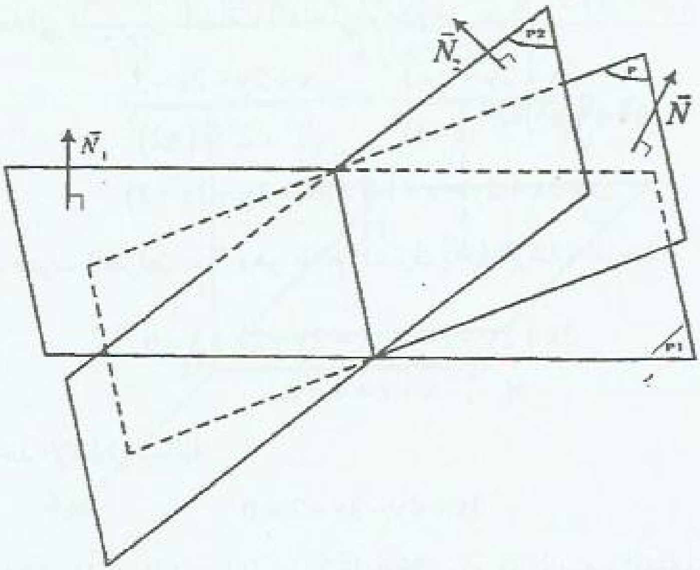
$$P_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

غير المتوازيين ($N_1 \not\parallel N_2$) أي أن المركبات A_1, B_1, C_1 لاتتناسب مع المركبات (A_2, B_2, C_2) عندئذ نقول عن هذين المستويين إنهما متقاطعان بفصل مشترك (مستقيم يقع على كل منهما) ويشكل أربع زوايا زوجية (ثنوية) كل اثنتين متقابلتين منها متساويتان.

ولنهتم الآن بإيجاد معادلة المستوي P الذي ينصف الزاوية الثنوية بينهما (نصطلح على تسمية المنصف الداخلي للزاوية الحادة والمنصف الخارجي للزاوية المنفرجة) الشكل (9-3).

إن شرط وقوع نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ $\Re^3$ على المستوي المطلوب P هو أن تكون متساوية البعد عن كل من المستويين P_2, P_1 أي أن: $P \equiv d_1 = d_2$، أو:

$$P \equiv \frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



الشكل (3-9)

والشرط السابق يكتب بالشكل:

$$P \equiv \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (20)$$

وهي معادلة المنصف للزاوية بين المستويين P_2, P_1 (المنصف الداخلي للإشارة الموجبة والمنصف الخارجي إذا أخذت الإشارة السالبة)، وهذا بالطبع يتوافق مع الاصطلاح الذي كنّا قد اعتمدناه في الفقرة (3-3) عند أخذ الزاوية الحادة والمنفرجة بين مستويين وبالتالي يكون المنصف داخلياً إذا توافقت إشارته مع الجداء السلمي للناظمين $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ وخارجياً في الحالة المعاكسة.

في حالة خاصة إذا كان المستويان P_2, P_1 متعامدين فإنه لايمكن في هذه الحالة معرفة المنصف الداخلي من الخارجي.

مثال: أوجد معادلة كل من المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 \equiv 2x+2y-z+1=0$$
$$P_2 \equiv x+2y-2z-3=0$$

الحل: إن معادلتي المستويين المنصف الداخلي والخارجي هما:

$$\frac{2x+2y-z+1}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x+2y-2z-3}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Rightarrow 2x+2y-z+1=\mp(x+2y-2z-3)$$

بعد ضرب الطرفين بـ 3 وهو المقام المشترك بأخذ الإشارة الموجبة:

$$2x+2y-z+1-x-2y+2z+3=0$$

$$x+z+4=0 \qquad (1)$$

وبأخذ الإشارة السالبة:

$$3x+4y-3z-2=0 \qquad (2)$$

المعادلتان (1) و (2) هما المستويان المنصفان ولمعرفة المنصف الداخلي أو الخارجي نجد إشارة الجداء $\bar{N}_1,\bar{N}_2$ فيكون:

$$\bar{N}_1.\bar{N}_2=2+4+2=8>0$$

إذاً الإشارة هي موجبة وعندئذ الإشارة (_) توافق المنصف الداخلي، وهي المعادلة (2) والإشارة (-) توافق المنصف الخارجي وهي المعادلة (1).

3-4-8- بُعد نقطة عن مستوٍ:

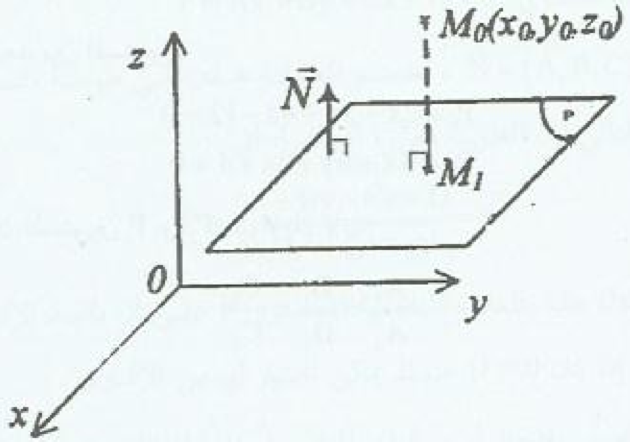
يُعرف بُعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $P\equiv Ax+By+Cz+D=0$ بأنه طول القطعة المستقيمة $\overline{M_0M_1}$ الواصلة بين M_0 وبين النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ مسقط M_0 القائم على هذا المستوي أي الشكل (3-10) أي أن: $d=\left|\overline{M_0M_1}\right|$.

وبما أن $\bar{N}//\overline{m_0M_1}$ فإن الجداء السلمي لهذين المتجهين يكون:

$$\overline{M_0M_1}.\bar{N}=\left|\overline{M_0M_1}\right|.\left|\bar{N}\right|.\cos\left(\widehat{\overline{M_0M_1}.\bar{N}}\right)=d.N.(\pm1)$$

حسبما تكون الزاوية 0 أو π وبالتالي فإن:

$$d = \frac{\left|\overline{M_o M_1} . \vec{N}\right|}{\pm N} = \frac{\left|A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) + C(z_1 - z_o)\right|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



الشكل (3-10)

وبما أن النقطة M_1 تقع على المستوي فإن:

$$d = \frac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (21)$$

ملاحظة (6):

إن $d = 0$ يعني $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$ أي أن النقطة $M_o(x_o, y_o, z_o)$ تحقق معادلة المستوي وبالتالي هي تقع فيه، من جهة أخرى في علاقة البعد فإن المقام موجب، أما البسط فقد يكون موجباً أو سالباً، لذلك أخذ بالقيمة المطلقة فإذا كان: $d_2 \neq 0, d_1 \neq 0$ البعد بين كل من النقطتين $M_2(x_2, y_2, z_2), M_1(x_1, y_1, z_1)$ عن P ولنحسب المقدارين:

$$.\lambda_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D, \lambda_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

إن إشارتي المقدارين λ_2, λ_1 معاً تدلان على وقوع النقطتين M_2, M_1 بجهة واحدة من المستوي P، إذا كانا موجبين معاً أو سالبين معاً (من نفس الإشارة) وبجهتين مختلفتين

في المستوي P إذا كانا من إشارتين مختلفتين، وهذا ما يدعى بالعلاقة المتبادلة بين موضع المستوي P والنقطتين M_2, M_1 من الفراغ.

مثال: أوجد البعد بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$P_2 \equiv 4x + 6y + 8z + 4 = 0$$

الحل: واضح أن المستويين P_1 و P_2 متوازيان لأن:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

أي أن:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{0} = \frac{4}{0} = \frac{1}{2}$$

الطريقة الأولى: نختار نقطة ما من المستوي P_1 ولتكن $M_1(0,0,3)$ بحيث تحقق M_1 معادلة المستوي P_1 (يمكن للطالب التأكد). ونجد بعد M_1 عن P_2 حيث:

$$d = \frac{|A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|4(0) + 6(0) + 8(3) + 4|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2}}$$

$$d = \frac{28}{\sqrt{116}} = \frac{28}{\sqrt{4 \times 29}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

الطريقة الثانية: نجد البعد الجبري بين نقطة الأصل وكل من المستويين P_1 و P_2:

$$\delta_1 = \frac{2(0) + 3(0 + 4(0) - 12)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{-12}{\sqrt{29}}$$

$$\delta_2 = \frac{4(0) + 6(0) + 8(0) + 4}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{4}{\sqrt{116}} = \frac{4}{\sqrt{4 \times 29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

وبما أن المستويين يقعان في جهتين مختلفتين من نقطة الأصل فيكون البعد بينهما:

$$d = |\delta_1| + |\delta_2| = \frac{12}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

3-4-9- المعادلة الناظمية (العمودية) للمستوي:

ليكن لدينا المستوي: $P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

وناظمه $\bar{N} = (A, B, C)$ ولنقسم المعادلة هذه على طويلة الناظم A,B,C) لاتنعدم معاً، وبالتالي فإن الطويلة مغايرة للصفر)، أي:

$$P \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (22)$$

ندعو المعادلة هذه بالمعادلة الناظمية للمستوي P على أن نأخذ الإشارة الموجبة عندما $D < 0$ أما إذا كان $D = 0$ عندئذ يمكن اختيار أي من الإشارتين.

من جهة أخرى نلاحظ أن مركبات الناظم في المعادلة الأخيرة هي مركبات متجه واحد $\bar{n}_o$ عن الناظم $\bar{N}$ حيث عن:

$$\bar{n}_o = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

وبما أن طويلة متجه الواحد دوماً مساوياً للواحد، أي $|\bar{n}_o| = 1$ فيمكننا القول إن المعادلة (22) تكون المعادلة الناظمية للمستوي P إذا حققت أمثال المتغيرات x,y,z فيها العلاقة التالية:

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)^2 + \left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)^2 = 1 \qquad (23)$$

ندعو المقادير:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (24)$$

بالمتغيرات القطبية للمستوي P، أما الزوايا α, β, γ فندعوها زوايا توجيه المستوي P وهي بالحقيقة الزوايا بين الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية، والعمود $\overline{OP}$ النازل من نقطة

الأصل على المستوي P حيث تعتبر موجبة وكل منها أقل أو تساوي 180° وتحقق العلاقة التالية:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (25)$$

ملاحظة(7): المعادلة $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+5=0$ ليست المعادلة الناظمية لأن الحد الثابت D موجب رغم أن:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2=1$$

أخيراً إن المقدار:

$$P=\overline{OP}=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

يُطلق عليه البعد القطبي للمستوي P "طول العمود OP النازل من نقطة الأصل O على المستوي P"، وبحيث يعتبر الاتجاه الموجب عليه هو المتجه $\overline{OP}$ "إذا كان المستوى يمر بنقطة الأصل فلاداعي لهذا الاصطلاح، ويمكن أخذ الاتجاه الموجب على العمود كيفما اتفق".

مثال: اكتب معادلة المستوي:

$$P\equiv x+2y+2z-3=0$$

بالشكل الناظمي واحسب بعد نقطة الأصل عن هذا المستوي.

الحل:

$$\bar{N}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

وبما أن $D=-3$ أي إشارتها سالبة فإننا نقسم معادلة المستوي P على $+\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ أي أن المعادلة الناظمية للمستوي P هي:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$$

ملاحظة(8): إذا كانت إشارة الحد الثابت D موجبة فإننا نقسم معادلة المستوي المراد إيجاد معادلته الناظمية على المقدار $-\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

نتيجة(2):

يمكن الاستفادة من المعادلة الناظمية للمستوي P في حساب بعد نقطة عنه وذلك بأن نعوض إحداثيات هذه النقطة في المعادلة. فإذا آلت المعادلة إلى الصفر كانت النقطة تقع على المستوي، أما إذا كانت قيمة مغايرة للصفر (موجبة أو سالبة) فإن القيمة العددية هذه تمثل بعد هذه النقطة عنه، والإشارة تدل على الجهة التي تقع بها النقطة بالنسبة إلى المستوي.

ملاحظة (9):

إن $\overrightarrow{OP}$ عمودي على المستوي P لذلك تدعى أحياناً العلاقات (24) جيوب تمام توجيه مع ملاحظة أن المقادير $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ متناسبة مع المقادير A,B,C حيث لدينا:

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\text{const}$$

لذلك نطلق على الأعداد A,B,C نسب توجيه المتجه $\overrightarrow{OP}$ في حالة خاصة يمكن اعتبار المتجه $\overrightarrow{OP}$ ناظماً على المستوي P، لذلك نستخدم أحياناً اصطلاح نسب توجيه الناظم على الأعداد A,B,C وجيوب تمام توجيه الناظم للمقادير $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ مع ضرورة تحقق العلاقة (25) في هذه الحالة.

أمثلة إضافية محلولة:

مثال :(1)

أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $M_0\,(1,1,-2)$ ويعامد المتجه $\vec{N}=(2,2,1)$.

الحل:

إن وسطاء توجيه منحى الناظم هي $(2,2,1)$ ولنفرض أن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي عندئذ تكون معادلة المستوي:

$$2(x-1)+2(y-1)+1(z+2)=0$$

ومنه:

$$2x+2y+z-2=0$$

مثال (2):

أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $M_o(1,2,3)$ ويعامد المستقيم المار من النقطتين $M_1(1,3,2)$، $M_2(2,-1,1)$.

الحل:

إن منحى ناظم المستوي المطلوب معين بالمتجه $\overline{M_1M_1}$ عندئذ وسطاء توجيه هذا المنحى هي:

$$A=2-1=1$$
$$B=-1-3=-4$$
$$C=1-2=-1$$

عندئذ بحسب العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$$P\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$

نجد:

$$+1(x-1)-4(y-2)-(z-3)=0$$

ومنه:

$$x-4y-z+10=0$$

نتيجة(3): إن طول العمود النازل من مبدأ الأصل O عن المستوي P هو:

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

مثال (3):

اكتب معادلة المستوي:

$$P \equiv x+2y+2z-6=0$$

بالشكل الناظمي واحسب بعد نقطة الأصل عن مبدأ الأصل O عن هذا المستوي نحسب طويلته الناظم $\vec{N}=(1,2,2)$ فنجد $|\vec{N}|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$.

عندئذ نقسم معادلة المستوي $P(x,y,z)$ على 3 فتصبح معادلة المستوي بالشكل الناظمي:

$$P^{*} \equiv \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0$$

وبعد نقطة الأصل O عن هذا المستوي هو $d=2$.

مثال (4):

رد المعادلة الآتية إلى الشكل الناظمي:

$$2x-y+2z+12=0$$

نلاحظ أن الحد الثابت موجب لذلك نقسم طرفي معادلة المستوي على $-|\vec{N}|$ فنحصل على الشكل الناظمي للمستوي لدينا $-|\vec{N}|=-\sqrt{4+1+4}=-3$.

عندئذ نقسم على 3- فنجد:

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-4=0$$

حيث:

$$\alpha=-\frac{2}{3} \quad , \quad \beta=\frac{1}{3} \quad , \quad \gamma=-\frac{2}{3}$$

مثال (5):

احسب بعد النقطة $M_0(2,3,1)$ عن المستوي:

$$P \equiv 2x-y+2z+3=0$$

بتطبيق الدستور (21) نجد:

$$d=\frac{|4-3+2+3|}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=2$$

مثال (6):

احسب بعد كل من النقطتين $M_2(1,-6,1), M_1(2,1,-2)$ عن المستوي:

$$P\equiv 4x-y+8z-9=0$$

وعين موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي.

الحل:

1) بعد النقطة M_1 عن المستوي P هو:

$$\delta_1=\frac{8-1-16-9}{\sqrt{16+1+64}}=\frac{-18}{9}=-2$$

2) بعد النقطة M_2 عن المستوي P هو:

$$\delta_2=\frac{4+6+8-9}{\sqrt{16+1+64}}=\frac{9}{9}=1$$

نتيجة(4):

من (3) و (2) نجد أن النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي فإذا حسبنا بعد نقطة الأصل عن هذا المستوي نجد:

$$d=\frac{-9}{9}=1$$

فالنقطة M_1 تقع مع النقطة O في الجهة السالبة والنقطة B تقع في الجهة الموجبة بالنسبة لهذا المستوي.

مثال (7):

أوجد البعد بين المستويين المتوازيين:

$$P_1\equiv x-2y+z+8=0$$
$$P_2\equiv 2x-4y+2z-12=0$$

الحل:

نختار نقطة ما من المستوي الثاني ولتكن (0,-3,0) ونحسب بعدها عن المستوي الأول بتطبيق العلاقة (21) نجد:

$$d = \frac{|0+6+0+8|}{\sqrt{6}} = \frac{14}{\sqrt{6}}$$

مثال: (8)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + 2y - z + 1 = 0$$

$$P_2 \equiv -x - 2y + 2z + 3 = 0$$

الحل:

لدينا:

$$P_1 \ \underline{\text{ناظم المستوي}} \quad \vec{N}_1 = (2,2,-1)$$

$$P_2 \ \text{ناظم المستوي} \quad \vec{N}_2 = (-1,-2,2)$$

لنأخذ الجداء $\vec{N}_1.\vec{N}_2 = -2-4-2 = -8 < 0$

إذن معادلة المنصف الداخلي للمستويين P_1, P_2 تعطى بالعلاقة بعد أخذ الإشارة (+).

$$\frac{2x+2y-z+1}{\sqrt{9}} = +\frac{-x-2y+2z+3}{\sqrt{9}}$$

ومنه:

$$2x + 2y - z + 1 = -x - 2y + 2z + 3$$

$$\boxed{3x + 4y - 3z - 2 = 0}$$

ومعادلة المنصف الخارجي للمستويين P_1, P_2 تعطى بالعلاقة بعد أخذ الإشارة (−):

$$\frac{2x+2y-z+1}{\sqrt{9}} = -\frac{(-x-2y+2z+3)}{\sqrt{9}}$$

ومنه:

$$2x+2y-z+1-x-2y+2z+3=0$$

$$\boxed{x+z+4=0}$$

ملاحظة (10):

1) في حالة تعامد المستويين P_1, P_2 يكون $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ وهذا يكافئ $\vec{N}_1 . \vec{N}_2 = 0$ والعبارة التحليلية هي $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ وهو شرط تعامد مستويين.

2) أما في حالة توازي المستويين P_1, P_2 فإن $\vec{N}_1 // \vec{N}_2$ وهذا يتحقق إذا كان:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

حيث λ ثابت التناسب.

3) أما في حالة انطباق المستويين P_1, P_2 فإن $\vec{N}_1 // \vec{N}_2$ ولهما نقطة مشتركة.

من شروط التوازي يمكن أن نكتب معادلتي المستويين المتوازيين على الشكل:

$$P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

وبما أن النقطة (x,y,z) مشتركة بين المستويين فإحداثياتهما تحقق المعادلتين السابقتين فإذا ضربنا طرفي المعادلة بـ $(-\lambda)$ وجمعناها مع الأول يكون لدينا:

$$\frac{D_1}{D_2} = \lambda \quad \text{ومنه} \quad D_1 - \lambda D_2 = 0$$

وعندئذ تكون شروط الانطباق:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

مثال (9):

عيّن الزاوية الكائنة بين المستويين الآتيين:

$$x+y+2z-1=0$$
$$y+z+2=0$$

بتطبيق العلاقة (5) نجد:

$$\cos\theta = \frac{1.0+1.1+2.1}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

مثال (10):

أوجد معادلة المستوي الموازي للمستوي: $2x-y+3z+4=0$ والذي يمر من النقطة $M_o(1,-2,-1)$.

الحل:

إن وسطاء توجيه ناظم هذا المستوي هي $(2,-1,3)$ ووسطاء توجيه ناظم المستوي الموازي له هي: $(2,-1,3)$ أو ما يتناسب معها وعندئذ تكون معادلة المستوي المطلوب.

$$2x-y+3z+D=0$$

وبما أن المستوي يمر من $A(1,-2,-1)$ فإحداثياتها تحقق هذه المعادلة، أي $2+2-3+D=0$ ومنه $D=-1$ والمعادلة المطلوبة هي:

$$2x-y+3z-1=0$$

مثال (11): برهن أن المستويين:

$$P_1 \equiv x+2y+3z-9=0$$
$$P_2 \equiv 2x+4y+6z-27=0$$

متوازيان ثم احسب البعد بينهما.

الحل:

إن وسطاء توجيه منحى ناظم المستوي الأول هي $(1,2,3)$ ووسطاء توجيه منحى ناظم المستوي الثاني هي $(2,4,6)$.

نلاحظ أن هذه الوسطاء متناسبة لأن:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

فالناظمان متوازيان، وبالتالي المستويان المفروضان متوازيان، لإيجاد البعد بين هذين المستويين نحسب بعد كل منهما عن نقطة الأصل O لذلك نرجع المعادلة P_1 الشكل الناظمي فنحصل على:

$$P_1^* \equiv \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z - \frac{9}{\sqrt{14}} = 0$$

ومن المعادلة الناظمية نجد بعد المستوي الأول عن نقطة الأصل:

$$d_1 = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

ومرة ثانية نرجع المعادلة الثانية P_2 إلى الشكل الناظمي فنحصل على:

$$P_2^* \equiv \frac{2}{2\sqrt{14}}x + \frac{4}{2\sqrt{14}}y + \frac{6}{2\sqrt{14}}z - \frac{27}{2\sqrt{14}} = 0$$

ومن المعادلة الناظمية P_2^* نجد بعد المستوي الثاني عن نقطة الأصل O هو:

$$d_2 = \frac{27}{\sqrt{56}}$$

والبعد بين المستويين هو $d = d_2 - d_1$ حيث $d_2 > d_1$

$$= \frac{27}{2\sqrt{14}} - \frac{18}{2\sqrt{14}} = \frac{9}{2\sqrt{14}}$$

ملاحظة(11):

إذا توازى مستويان وكانت جيوب تمام توجيه منحى ناظم المستوى الأول تخالف إشارة جيوب تمام توجيه منحى ناظم المستوى الثاني. فإن البعد بين المستويين في هذه الحالة يساوي مجموع طولي العمودين النازلين من نقطة الأصل على هذين المستويين.

مثال (12):

أثبت أن النقاط: $M_1(2,1,3)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(1,2,4)$ ليست على استقامة واحدة واكتب معادلة المستوى المار بالنقاط الثلاث.

الحل:

لدينا المتجهان: $\overline{M_1M_2} = (0,1,-2)$

$$\overline{M_1M_3} = (-1,1,1)$$

غير متوازيين وبالتالي النقاط M_1, M_2, M_3 ليست على استقامة واحدة.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي عندئذ تكون معادلة المستوي المار بالنقاط الثلاث M_1, M_2, M_3 هي:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نجد معادلة المستوي المطلوب وهي:

$$3x + 2y + z - 11 = 0$$

مثال(13): أوجد نقاط تقاطع المستوي:

$$P = 2x + 4y - 6z + 24 = 0$$

مع المحاور الإحداثية.

الحل:

1- المستوي P يقطع المحور ox عندما $y = z = 0$ نعوض في معادلة المستوي:

$$2x = -24 \Rightarrow x = -12$$

ونقطة التقاطع مع المحور ox هي $(-12,0,0)$.

2- المستوي P يقطع المحور oy عندما $x = z = 0$ نعوض في معادلة المستوي:

$$4y = -24 \Rightarrow y = -6$$

ونقطة التقاطع مع المحور oy هي $(0,-6,0)$.

3- المستوي P يقطع المحور oz عندما $x = y = 0$ نعوض في معادلة المستوي:

$$-6z = -24 \Rightarrow z = 4$$

ونقطة التقاطع مع المحور oz هي $(0,0,4)$.

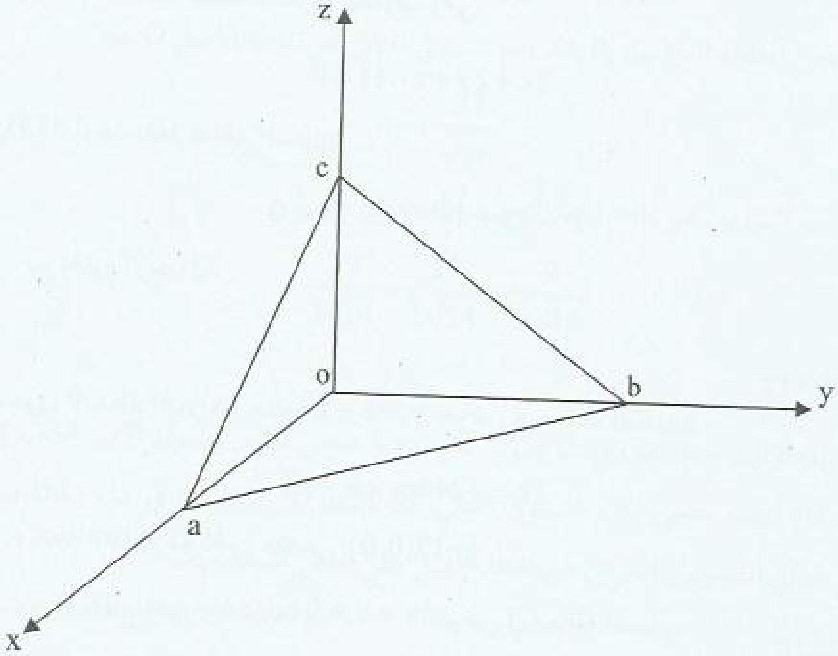
ملاحظة(12):

إذا كانت النقاط الثلاث واقعة على المحاور الإحداثية ox,oy,oz أي تمثل تقاطع المستوي المطلوب مع المحاور الإحداثية ولنفرض أنها:

$$M_3(0,0,c)\ ,\ M_2(0,b,0)\ ,\ M_1(a,0,0)$$

عندئذ تسمى الأعداد a,b,c الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية كما هو موضح بالشكل(3-11):

بتطبيق العلاقة (9) معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وتعطى بالمحددة التالية:



شكل (3-11)

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

وبحساب المحدد نجد:

$$P \equiv abc\,x + ac\,y + ab\,z = abc$$

وبتقسيم طرفي المعادلة الأخيرة على $abc \neq 0$ نجد:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (25)$$

وهي معادلة مستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية.

مثال: (14)

اكتب معادلة المستوي $P \equiv 2x + 2y + 3z - 6 = 0$

بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية ثم أوجد نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية.

الحل:

لإرجاع معادلة المستوي إلى العلاقة (25) نقسم المعادلة على 6 بالإصلاح نجد:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

وإن نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية هي:

$$M_1(3,0,0) \;,\; M_2(0,3,0) \;,\; M_3(0,0,2)$$

10-4-3- حزمة مستويات:

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان التاليان:

$$P_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

إن نقاط تقاطع المستويين تقع على مستقيم D يسمى الفصل المشترك للمستويين.

إن جميع المستويات التي تقبل المستقيم D فصلاً مشتركاً لها نسميها حزمة مستويات، ونسمي المستويين السابقين قاعدة الحزمة. وتكون معادلة الحزمة:

$$P_\lambda = P_1 + \lambda P_2 = 0 \qquad (0)$$

حيث $\lambda \in R$ عدد سلمي متحول. أو تكتب بالشكل:

$$P(\lambda) \equiv (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0$$

إن المعادلة 0 هي معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة للمتحولات x,y,z وبالتالي تمثل مستوٍ وذلك من أجل كل قيمة عددية للوسيط λ، كما أن كل نقطة من الفصل المشترك تحقق المعادلة 0 وتحقق كلاً من معادلتي المستويين وبالتالي فإن المعادلة (16) عبارة عن مستوي يمر بالفصل المشترك. كما يمكن البرهان أن كل مستو من الحزمة تكون معادلته من شكل العلاقة 0. على سبيل المثال فإن معادلة المستوي P_1 هي معادلة من الشكل () من أجل $\lambda = 0$.

مثال(1):

ليكن لدينا المستويان التاليان:

$$P_1 \equiv x - 2y - z + 4 = 0$$
$$P_2 \equiv x + y + 2z + 2 = 0$$

أوجد معادلة المستوي المار من الفصل المشترك للمستويين ويوازي المنحى $\vec{V}(1,-1,1)$.

الحل:

إن المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة المشكلة من المستويين السابقين.

لنكتب معادلة الحزمة بحسب العلاقة () نجد:

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$$
$$P_\lambda(x,y,z) \equiv (1+\lambda)x + (-2+\lambda)y + (-1+2\lambda)z + (4+2\lambda) = 0$$

إن منحى الناظم لحزمة المستويات $\vec{N}_\lambda(1+\lambda, -2+\lambda, -1+2\lambda)$ وبما أن المستوي المطلوب يوازي $\vec{V}(1,-1,1)$ وبالتالي فإن منحاه يعامد المنحى $\vec{V}(1,-1,1)$، لذلك نختار من الحزمة مستوي بحيث يكون:

$$\vec{V}(1,-1,1) \perp \vec{N}_\lambda(1+\lambda, -2+\lambda, -1+2\lambda)$$

ومنه:

$$1+\lambda+2-\lambda-1+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

وبالتالي فإن معادلة المستوي المطلوب هي:

$$P \equiv -3y+-3z+2=0$$

نتيجة(5):

إذا كان لدينا ثلاثة مستويات $P_3(x,y,z), P_2(x,y,z), P_1(x,y,z)$. فإن شرط تقاطعها في فصل مشترك واحد هو أن يكون أحد المستويات ماراً بالفصل المشترك للمستويين الآخرين، أي أن يكون أحد مستويات الحزمة وبالتالي يتحقق شرط التناسب التالي:

$$\frac{p_1+\lambda p_2}{p_3}=\frac{q_1+\lambda q_2}{q_3}=\frac{r_1+\lambda r_2}{r_3}=\frac{h_1+\lambda h_2}{h_3}$$

إن النسب الأربع تمثل ثلاث معادلات فيها مجهول واحد λ، نعينه من إحدى المعادلات ويجب أن يحقق المعادلتين الباقيتين.

مثال (2):

لدينا المستويان المتقاطعان:

$$P_1 \equiv 2x+3y-z-5=0$$
$$P_2 \equiv x-2y-4z+9$$

أوجد معادلة مستوي يمر من الفصل المشترك لهذين المستويين ويمر من النقطة $M_o(-1,1,2)$.

الحل:

لنجد حزمة المستويات التي قاعدتها المستويان P_1, P_2 لأن المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة:

$$P(\lambda) \equiv P_1+\lambda P_2=0$$
$$P(\lambda) \equiv (2+\lambda)x+(3-2\lambda)y+(-1-4\lambda)z-5+9\lambda=0$$

لنعين λ بحيث يمر المستوي P من النقطة $(-1,1,2)$ فنجد:

$$(2+\lambda)(-1)+(3-2\lambda)(1)+(-1-4\lambda)(2)-5+9\lambda=0$$

بحل هذه المعادلة نجد:

$$\boxed{\lambda = -3}$$

نعوض λ بقيمتها في معادلة الحزمة فنجد:

$$P(-3) \equiv -x + 9y + 11z - 32 = 0$$

نتيجة(6):

1- إن معادلة المستوي P بدلالة بعده القطبي μ وجيوب تمام توجيه لها الشكل التالي:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \mu = 0 \qquad (26)$$

2- إذا كانت $D < 0$ وكان $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ في معادلة المستوي:

$$(P) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

فإن المعادلة ناظمية.

نتيجة(7):

بما أن المستوي في الفراغ يمثل بمعادلة جبرية خطية في الحالة العامة بثلاثة مجاهيل (x,y,z) غير متجانسة $D \neq 0$ فإنه يمكن دراسة تقاطع المستويات من خلال إمكانية إيجاد الجذر المشترك لجملة معادلاتها فمثلاً لو كانت لدينا المستويات:

$$\begin{cases} (P_1) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (P_2) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ (P_3) \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

فإن الجملة هذه لها جذر مشترك إذا كان محدد الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (28)$$

وتوجد نقطة التقاطع أو الجذر المشترك بحل الجملة السابقة وفق الطرائق المعروفة في حل الجمل الجبرية الخطية غير المتجانسة (طريقة كرامر، غاوص، مقلوب مصفوفة...) ولنعتمد مثلاً طريقة كرامر فيكون:

$$x = \Delta^{-1}.\Delta_x = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$y = \Delta^{-1}.\Delta_y = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$z = \Delta^{-1}.\Delta_z = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix} \tag{31}$$

إذا كان $\Delta = 0$ فعندئذ لايوجد جذر مشترك للجملة السابقة، وهذا يعني أن ارتباطها الخطي، أو أن المستويات متوازية (مستويان منها على الأقل). أما في حالة تقاطعها بمستقيم D فإن لها عدداً لانهائياً من الحلول، باختصار فإن الجملة قد يكون لها جذر مشترك (المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة) أو عدد لانهائي (المستويات تتقاطع بمستقيم) أو ليس لها جذور مشتركة (حالة التوازي).

تمارين محلولة (3)

التمرين (1):

أوجد معادلة المستوي P المار بالنقطة $M_0(2,1,-1)$ والعمودي على المتجه $\vec{N}=-2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

الحل:

يفرض $M(x,y,z)$ نقطة كيفية في الفراغ فإن شرط وقوعها على المستوي المطلوب هو تحقق العلاقة:

$$\overline{M_0M}\perp\vec{N}\Rightarrow(P):\overline{M_0M}.\vec{N}=0$$

والمعادلة المتجهية هي:

$$(P)\equiv\left(\overline{OM}-\overline{OM_0}\right).\vec{N}=0\quad,\quad(\vec{r}-\vec{r}_0).\vec{N}=0$$

$$(P)\equiv\vec{r}.\vec{N}-\vec{r}_0.\vec{N}=0$$

وديكارتياً يكون:

$$(P)\equiv\left[\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)-\left(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)\right]\left(-2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\right)=0$$

$$(P)\equiv-2x+4y+3z+4-4+3=0$$

ومنه:

$$(P)\equiv 2x-4y-3z-3=0$$

وهي المعادلة العامة للمستوي المطلوب.

التمرين (2): أوجد معادلة المستوي P في الحالات التالية:

1- المستوي P يمر بالنقطة $A(1,2,1)$ يوازي المستوي: $P_1\equiv 4x-7z+6=0$.

2- المستوي المار بالنقاط $A(1,2,1),B(-2,3,-1),C(1,0,4)$.

3- المستوي P يمر بالنقطتين $B(1,2,3), A(2,1,1)$ وعمودي على المستوي $P_1 \equiv 3x-4y+z-6=0$.

4- المستوي P يمر بالنقطة $A(1,3,2)$ وعمودي على كل من المستويين:

$$(P_1) \equiv 2x+y+3z+5=0$$
$$(P_2) \equiv x+2y+z-4=0$$

5- المستوي P مار بالنقطة $A(0,-3,-1)$ ويعامد المتجه $\overline{AB}$ حيث $B(1,3,5)$.

6- المستوي P يمر بالنقطتين $B(2,3,5), A(0,1,3)$ ويوازي المحور ox.

7- المستوي P يمر بالنقطة $A(2,-3,3)$ ويوازي المستوي oxy.

8- المستوي P يمر بالمحور oz (يحويه) ويمر بالنقطة $A(3,-4,7)$.

9- المستوي P ينصف الزاوية بين المستويين:

$$(P_1) \equiv 5x-5y-2z-3=0$$
$$(P_2) \equiv x+7y-2z+1=0$$

الحل:

1- المستوي $P_1 // P$ إذاً يمكن اعتبار $\overline{N}_1$ ناظماً له وبما أنه يمر من النقطة A وبفرض $M(x,y,z)$ نقطة كيفية فإن:

$$\overline{AM} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{AM}.\overline{N}=0 \Rightarrow$$
$$(P) \equiv \left[(x-1)\overline{i}+(y+5)\overline{j}+(z-4)\overline{k}\right]\left(4\overline{i}+7\overline{j}-7\overline{k}\right)=0$$
$$(P) \equiv 4(x-1)-7(z-4)=0 \quad , \quad (P) \equiv 4x-7z=0$$

2- $M(x,y,z)$ نقطة كيفية، إن شرط وقوعها على المستوي P هو أن تحقق المتجهات: $\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AM}\right)$ العلاقة التالية:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=0\ ,\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2-1 & 3-2 & -1-1 \\ 1-1 & 0-2 & 4-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(P)\equiv(x-1)(3-4)+(y-2)(0+9)+(z-1)(+6-0)=0$$

$$(P)\equiv x+9y+6z-25=0$$

كما ويمكن إيجاد معادلة الناظم $\vec{N}$ على الشكل التالي:

$$\vec{N}=\overline{AB}\wedge\overline{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}=-\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}$$

وبما أن المستوي P يمر من A و B و C فيمكن أخذ أي منها (A مثلاً) ويكون:

$$\overline{AM}\perp\vec{N}\Rightarrow\overline{AM}.\vec{N}=0\Rightarrow$$

$$\left[(x-1)\vec{i}+(y-2)\vec{j}+(z-1)\vec{k}\right]\left(-\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}\right)$$

$$(P)\equiv -x+9y+6z=23$$

3- المستويان متعامدان $P_1\perp P$ ⇐ المستوي P يحدد بحيث يكون:

$$(P)\equiv\left(\overline{AM},\overline{AB},\vec{N}_1\right)=0\ ,\ (P)\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1-2 & 2-1 & 3-1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(P)\equiv(x-2)(1-8)+(y-1)(6+1)+(z-1)(-4-3)=0$$

$$(P)\equiv -7(x-2)+7(y-1)-7(z-1)=0$$

$$x-y+z-2=0$$

4- نلاحظ أن المستويين P_2,P_1 غير متوازيين لأن أمثال الناظمين $\vec{N}_1(2,1,3)$، $\vec{N}_2(1,2,1)$ غير متناسبة، وبالتالي معادلة المستوي P تستنتج من العلاقة:

$\left(\overline{AM},\vec{N}_1\vec{N}_2\right)=0$; $M(x,y,z)$ نقطة كيفية.

$$(P)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(P)\equiv(x-1)(1-6)+(y-3)(3-2)+(z-2)(4-1)=0$$
$$(P)\equiv-5(x-1)+(y-3)+3(z-2)=0$$
$$(P)\equiv-5x+y+3z-4=0$$

5- لدينا المتجه $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=(1-0)\vec{i}+(3+3)\vec{j}+(5+1)\vec{k}=\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$$

وبما أن $\overline{AB}\perp P$ إذاً يمكن اعتبار $\vec{N}=\overline{AB}$ فإذا كانت $M(x,y,z)$ كيفية ولدينا P يجب أن يمر بالنقطة A إذاً:

$$(P)\equiv\overline{AM}\perp\vec{N}\Rightarrow(P)\equiv\overline{AM}.\vec{N}=0\Rightarrow$$
$$(P)\equiv\left[(x-0)\vec{i}+(y+3)\vec{j}+(z+1)\vec{k}\right]\left[\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}\right]=0$$
$$(P)\equiv x+6(y+3)+6(z+1)=0$$
$$(P)\equiv x+6y+6z+24=0$$

6- لدينا: $\overline{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}+24\vec{k}=0$ والمستوي P المطلوب يوازي المحور ox وبالتالي من أجل $M(x,y,z)$ كيفية فإن:

$$(P)\equiv\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{ox}\right)=0\ ,\ (P)\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(P)\equiv x(0-0)+(y-1)(2-0)+(z-3)(-2)=0$$
$$(P)\equiv 2y-2z+4=0=0$$

7- المستوي P// المستوي oxy وإن الناظم على oxy هـو $\vec{N}_1(0,0,1)$ وبالتـالي يمكـن اعتباره ناظماً للمستوي P ويكون:

$$(P)\equiv Ax+By+Cz+D=0: D=-\left[A(2)+B(-3)+C(3)\right]$$
$$D=-(0+0+3)=-3$$

ومنه:

$$z-3=0\ ,\ z=3$$

8- إن معادلة المستوي P المار بالمحور oz وبالنقطة $M_1\left(3,-4,7\right)$ تستنتج من العلاقة:

$$(P)\equiv\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{oz}\right)=0$$

حيث إن P يمر بنقطة الأصل $M(x,y,z)$ كيفية ومنه:

$$(P)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-4x-3y=0\ \ ,\ \ (P)\equiv 4x+3y=0$$

9- نطبق العلاقة (20) فيكون:

$$(P)\equiv\frac{5x-5y-2z-3}{\sqrt{25+25+4}}=\pm\frac{x+7y-2z+1}{\sqrt{1+49+4}}\Rightarrow$$

نضرب بالمقدار $\sqrt{54}$ ومن أجل الإشارة الموجبة يكون:

$$5x-5y-2z-3=x+7y-2z+1$$

والمنصف الداخلي هو:

$$(P)\equiv 4x-12y-4=0$$

ونحصل على المنصف الخارجي بأخذ الإشارة السالبة ويكون:

$$(P_2)\equiv 5x-5y-2z-3=-x-7y+2z-1$$

$$(P_2)\equiv 6x+2y-4z-2=0$$

التمرين (3):

1- أوجد الزوايا التي يصنعها ناظم المستوي $(P)\equiv 5x+3y+4z+8=0$ مع المحاور الإحداثية.

2- أوجد الزاوية بين المستويين:

$$(P) \equiv x-\sqrt{2}y+z-2=0$$

$$(P_1) \equiv x+\sqrt{2}y-z+13=0$$

الحل:

1- لتكن α و β و γ هي الزاوية التي يصنعها الناظم $\vec{N}=(5,3,-4)$ مع المحاور الإحداثية oz,oy,ox على الترتيب، وبما أن المتجه الواحد على الناظم $\vec{N}$ يعطى بالعلاقة:

$$\vec{n}_o=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{25+9+16}}=\frac{5\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{50}}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{j}-\frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{k}$$

وبالتالي فإن:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \cos\beta=\frac{3}{5\sqrt{2}}\ ,\ \cos\gamma=\frac{-4}{5\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\alpha=45^{\circ}\quad,\quad\beta=65^{\circ}\quad,\quad\gamma=124^{\circ}$$

2- إن الزاوية θ بين المستويين P_2,P_1 يعبر عنها بالزاوية بين ناظميهما $\vec{N}_2,\vec{N}_1$، أي: $\theta=\left(\widehat{\vec{N}_1,\vec{N}_2}\right)$ وتكون:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{N}_1.\vec{N}_2|}{|\vec{N}_1|.|\vec{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\left|(1)(1)+\left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)+(1)(-1)\right|}{\sqrt{1^2\left(-\sqrt{2}\right)^2+1^2}.\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^{\circ}$$

التمرين (4):

أوجد المستوي P الموازي للمستوي $(P)\equiv 4x-2y-4z-5=0$ والذي يبعد عنه بمقدار 4 وحدات طول.

الحل:

لنكتب المعادلة الناظمية للمستوي P:

$$(P_1) \equiv \frac{4x-2y-4z-5}{\pm\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=0 \ , \ \frac{4}{6}x-\frac{2}{6}y-\frac{4}{6}z-\frac{5}{6}=0$$

من هنا نجد أن بعد هذا المستوي عن نقطة الأصل هو $d=\frac{5}{6}$، وبالتالي فإن معادلة المستوي المطلوب هي:

$$\frac{4}{6}x-\frac{2}{6}y-\frac{4}{6}z-\left(\frac{5}{6}+4\right)=0$$

أو:

$$(P_3) \equiv \frac{4}{6}x-\frac{2}{6}y-\frac{4}{6}z-\left(\frac{5}{6}-4\right)=0$$

$$(P_3) \equiv 4x-2y-4z+19=0$$

التمرين (5): أوجد المعادلة الناظمية للمستوي:

-1 $$(P_1) \equiv -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}-10=0$$

-2 $$(P_1) \equiv 4x+\sqrt{11}y+3z+150=0$$

ثم احسب d_2, d_1 بعد نقطة الأصل عن كل منهما. ما هي الزوايا التي يصنعها (P_1) مع المحاور الإحداثية؟

الحل:

-1 بما أن : $0>D=-10$ وأن: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$ إذاً المستوي (P_1) معطى بمعادلة ناظمية ثم إن بعد نقطة الأصل عنه يساوي 10 إضافة إلى أن:

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \cos\beta=\frac{1}{2} \ , \ \cos\gamma=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\alpha=135^\circ \quad , \quad \beta=60^\circ \quad , \quad \gamma=60^\circ$$

2- المستوي غير معطى بالمعادلة الناظمية لسببين على الأقل، حيث إن $0 < D = 150$ وإن الأمثال $A = 4$, $B = -\frac{\sqrt{4}}{6}$, $C = -\frac{1}{2}$ ولإيجاد المعادلة هذه ما علينا إلاّ الضرب بالمقدار: $-\frac{1}{6} = \frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ويكون: $\frac{4x+\sqrt{11}y+3z+150}{-\sqrt{36}} = 0$

$$(P_2) \equiv \frac{4x+\sqrt{11}y+3z+150}{-\sqrt{16+11+9}}$$

$$(P_2) \equiv -\frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{11}}{6}y - \frac{1}{2}z - 25 = 0$$

ملاحظة :

إذا كان $D \leq 0$ نضرب طرفي معادلة المستوي بالمقدار $+\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$، أما إذا كان $D > 0$ فإننا نضرب طرفيها بـ $\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

التمرين (6):

1- أوجد بعد النقطة $M(0,1,1)$ عن المستوي $(P) \equiv \sqrt{23}x - 27y - 3z + 73 = 0$.

2- بين وضع المستويين:

$$\begin{cases} (P_1) \equiv x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ (P_2) \equiv 2x - 4y + 4z - 30 = 0 \end{cases}$$

ثم احسب المسافة بينهما.

الحل:

1- نكتب المعادلة الناظمية للمستوي ثم نعوض إحداثيات النقطة المعطة فيها ويكون:

$$(P) \equiv -\frac{\sqrt{23}}{9}x + \frac{7}{9}y + \frac{3}{9}z - \frac{73}{9} = 0 \ , \ d = \left| -\frac{\sqrt{23}}{9}.0 + \frac{7}{9}.1 \frac{3}{9}.1 - \frac{73}{9} \right| = 7$$

2- لدينا $\vec{N}_1(1,-2,2)$, $\vec{N}_2(2,-4,4)$ المركبات متناسبة، وبالتالي فإن $\vec{N}_2 // \vec{N}_1$، أي: $P_2 // P_1$ ، ولحساب البعد بين هذين المستويين نأخذ نقطة من أحدهما مثلاً $M_1(1,2,0) \in P_1$ ثم نعوض إحداثياتها في المعادلة النظامية للثاني، ويكون:

$$(P_2) \equiv \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0 \;,\; d = \left| \frac{1}{3}.1 - \frac{2}{3}.2 + \frac{2}{3}.0 - 1 \right| = 4$$

تمارين غير محلولة

التمرين (1): أوجد معادلة المستوي P في الحالات التالية:

1- المستوي P مار من النقطة $M_1(2,3,5)$ وعمودي على المتجه $\vec{N}(4,3,2)$.

2- المستوي P مار من النقطة $M_1(2,3,-1)$ ويوازي المستوي: $(P) \equiv 5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

3- المستوي P مار بالنقاط $M_3(0,3,-5), M_2(2,0,-5), M_1(2,3,0)$.

4- المستوي P مار بالنقطة $M(5,4,3)$ ويحدد قطعاً مستقيمة متساوية على المحاور الإحداثية.

5- المستوي P يمر بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv x + y + 5z - 1 = 0 \ , \ P_2 \equiv 2x + 3y - z + 2 = 0$$

6- المستوي P يمر بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv x + 3y + 5z - 3 = 0 \ , \ P_2 \equiv x - y - 2z + 7 = 0$$

ويوازي المحور oy.

7- المستوي P مار بالنقطتين $M_2(2,-1,4), M_1(3,2,1)$ وعمودي على المستوي:

$$P_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$$

8- المستوي P مار بالنقطة $M_1(3,-1,5)$ وعمودي على كل من المستويين:

$$P_1 \equiv 3x - 2y + 2z + 7 = 0 \ , \ P_2 \equiv 5x - 4y + 3z + 1 = 0$$

9- المستوي P يصنع زاوية $\theta = 60^\circ$ مع المستوي oxy ويمر الفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv \left(1 + \sqrt{2}\right)x + 2y + 2z - 4 = 0 \ , \ P_2 \equiv x + y + z + 1 = 0$$

10- المستوي P عمودي على المستوي: $P_1 \equiv x+2y+5z-1=0$ ويمر بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_2 \equiv 2x-y-12z-3=0 \ , \ P_2 \equiv 3x+y-7z-2=0$$

11- المستوي P مار عبر مركز الإحداثيات وبالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1 \ , \ P_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

12- المستوي P مار بالنقطة $M_1(0,2,1)$ ويوازي المتجهين:

$$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \quad , \quad \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

الأجوبة:

1) $4x+3y+2z=27$, 2) $5x-3y+2z+1=0$
3) $15x+10y-6z=60$, 4) $x+y+z=12$
5) $5x+14y-74z+31=0$, 6) $4x--z+18=0$
7) $11x-7y-2z=21$, 8) $2x+y-2z=15$
9) $\sqrt{2}x+y+z=5$, 10) $4x+3y-2z=0$
11) $(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_1-B_2D_2)y+(C_1D_2-D_1C_2)z=0$
12) $x-y+2=0$

التمرين (2): أوجد بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي P في الحالات التالية:

1) $P \equiv 4x+\sqrt{11}y+3z+150=0$
2) $P \equiv 4x-2y-4z+7=0$
3) $P \equiv 15x+16y-12z-100=0$
4) $\sqrt{2}x+y-z+32=0$

الأجوبة:

$$1)\ d=25 \ , \ 2)\ d=\frac{7}{6} \ , \ 3)\ d=4 \ , \ 4)\ d=16$$

التمرين (3): أوجد بعد النقطة M عن المستوي P إذا كان:

1) $P \equiv \sqrt{23}x - 7y - 3z + 73 = 0 \quad , \; M(0,1,1)$

2) $P \equiv 2x + 2y - z = 11 \quad , \; M(1,2,4)$

3) $P \equiv 18x - 6y + 9z + 18 = 0 \quad , \; M(7,0,-7)$

4) $P \equiv \sqrt{3}y + z + 20 = 0 \quad , \; M\left(\sqrt{5}, \sqrt{12}, 2\right)$

5) $M(0,1,-3)$ والمستوي P يمر بالنقاط الثلاث التالية:

$$M_1(3,1,-5) \; , \; M_2(8,3,3) \; , \; M_3(-2,-1,4) \; .$$

الأجوبة: $1)\; d = 7 \; , \; 2)\; d = 3 \; , \; 3)\; d = \dfrac{11}{3} \; , \; 4) d = 14 \; , \; 5)\; d = 61\sqrt{29}$

التمرين (4): احسب المسافة بين كلٍ من المستويين المتوازيين التاليين:

1) $P_1 \equiv 3x - 6y - 2z + 35 = 0 \; , \; P_2 \equiv 6x - 12y - 4z - 5 = 0$

2) $P_1 \equiv 5x + 2y - 3z = 5 \; , \; P_2 \equiv 10x + 4y - 6z + 5 = 0$

3) $P_1 \equiv 7x - y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} = 0 \; , \; P_2 \equiv 7\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z - 6 = 0$

4) $P_1 \equiv x - 2y + 2z - 3 = 0 \; , \; P_2 \equiv 2x - 4y + 4z - 30 = 0$

5) $P_1 \equiv 4X + 3Y - 5Z - 8 = 0 \; , \; P_2 \equiv 4X + 3Y - 5Z - 12 = 0$

الأجوبة:

$$d_1 = \frac{75}{14} \; , \; d_2 = \frac{15}{76} \times \sqrt{38} \; , \; d_3 = 0 \; , \; d_4 = 4 \; , \; d_5 = 2\sqrt{2}$$

التمرين (5): أوجد الزاوية θ بين المستويين:

$$1) \begin{cases} x - 4y - 4z + 1 = 0 \\ x + 20y + 7z = 0 \end{cases} \quad , \quad 2) \begin{cases} 6x + 3y - 2z = 7 \\ x + 2y + 6z = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8x + 4y + z = 0 \\ 2x - 2y + z + 13 = 0 \end{cases} \quad , \quad 4) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - z + 5 = 5 \end{cases}$$

المستوي oxy والمستوي المار بالنقاط: $M_1(a,-a,0) \; , \; M_2(0,0,0), \; M_3(a,a,a)$

الأجوبة: $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 \approx 70^\circ, \theta_4 = 60^\circ, \theta_5 = 35^\circ.15$

الزاوية بين المستوي $x + y - 2z = 0$ والمستوي $z = 0$ هي 0.

التمرين (6): بيّن وضع المستويين (متقاطعين، متعامدين، متوازيين) التاليين:

$$1)\begin{cases}2x+3y+4z=12\\6x+9y+12z=12\end{cases} \quad , \quad 2)\begin{cases}3x+4y-z+1=0\\x'-2y-5z+3=0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}2x+3y-4z=0\\2x+y+z=13\end{cases} \quad , \quad 4)\begin{cases}10x-12y+6z=240\\\dfrac{x}{24}-\dfrac{y}{20}+\dfrac{z}{40}=1\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}2x-y+z=3\\x+y-z=-9\end{cases} \quad , \quad 6)\begin{cases}3x-2y+7z=4\\-2x+4y+2z=16\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}-4x+4y-6z=6\\2x-2y+3z=-3\end{cases}$$

الأجوبة:

1) متوازيان   2) متعامدان

3) متقاطعان وغير متعامدين   4) منطبقان

5) متعامدان   6) متعامدان   7) متوازيان

التمرين (7): حدد قيمة الثابت a لكي يتعامد المستويان P_2, P_1 وقيمتي كل من c,b لكي يتوازيا في الحالات التالية:

$$1)\begin{cases}3x+ay+4z=5\\4x+3y+4z+2=12\end{cases} \quad , \quad 2)\begin{cases}3x+4y+az=6\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}ax+4y+3z=4\\3y-4z+3=0\end{cases} \quad , \quad 4)\begin{cases}3x+by+4z=3\\4x-3y+cz+4=0\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}3x+by+4z=2\\4x+cz+5=0\end{cases} \quad , \quad 6)\begin{cases}3x+y+bz=1\\6x+2y+10z+c=0\end{cases}$$

الأجوبة:

$$1)\ a=\frac{28}{3} \quad , \quad 2)\ a=0 \quad , \quad 3)\ \forall a\in\Re$$

$$4)\ b=-\frac{9}{4} \quad , \quad c=\frac{16}{3} \quad , \quad 5)\ b=0\ ,\ c=\frac{16}{3}$$

$$6)\ b=5\ ,\ \forall c\in\Re$$

التمرين (8): اكتب المعادلة الناظمية للمستوي P في الحالات التالية:

$$1)\ 3x-6y+2z+21=0 \quad , \quad 2)\ 5x+12y+26=0$$

$$3)\ 2z+13=0 \quad , \quad 4)\ \sqrt{2}x-y-z+20=0$$

الأجوبة:

$$1)\ -\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z=3\ ,\quad 2)\ -\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y=2$$

$$3)\ -z-\frac{13}{2}=0 \quad , \quad 4)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=10$$

التمرين (9): أوجد نقطة تقاطع المستويات P_2,P_1 فيما يلي:

$$1)\ \begin{cases}2x-y+3z=9\\ x+2y+2z=3\\ 3x+y-4z+6=0\end{cases} \quad , \quad 2)\ \begin{cases}x-y+z=6\\ 2x+y+z=3\\ x+y+2z=5\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}2x-y+z=3\\ 3x+y-z=2\\ x+2y+z=4\end{cases} \quad , \quad 4)\ \begin{cases}x-y+z=-2\\ 2x+y-2z=6\\ x+2y+3z=2\end{cases}$$

الأجوبة:

$$1)\ M_1(1,-1,2) \quad , \quad 2)\ M_2(1,-2,3)$$

$$3)\ M_3(1,-1,-2) \quad , \quad 4)\ M_4(1,2,-1)$$

التمرين (10): ما هي جيوب تمام توجيه الناظم $\vec{N}$ (أو الزوايا γ و β و α) للمستوي P وما بعده عن نقطة الأصل إذا كان:

$$1)\ P\equiv x+\sqrt{2}y+z=10 \quad , \quad 2)\ x+y=6 \quad , \quad 3)\ 2x+1=0$$

الأجوبة:

$$1)\ \alpha=60^{\circ} \quad , \quad \beta=45^{\circ} \quad , \quad \delta=60^{\circ} \quad , \quad d=5$$

$$2)\ \alpha=\delta=45^{\circ} \quad , \quad \beta=90^{\circ} \quad , \quad d=3\sqrt{2}$$

$$3)\ \alpha=180^{\circ} \quad , \quad \beta=90^{\circ} \quad , \quad \delta=90^{\circ} \quad , \quad d=\frac{1}{2}$$

التمرين (11): بيِّن أنه إذا كانت النقاط

$$M_3(x_3,y_3,z_3),M_2(x_2,y_2,z_2),M_1(x_1,y_1,z_1)$$

لاتقع على استقامة واحدة فإن معادلة المستوي P المار بها تعطى بالمحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

التمرين (12): بيِّن أن شرط تقاطع ثلاثة مستويات $P_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ هو تحقق الشرط التالي:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

الفصل الرابع
المستقيم في الفضاء

4-1- تعريف المستقيم ومعادلاته:

لقد وجدنا في الفصل السابق أن المستوي P قد عرّف في فضاء ثلاثي الأبعاد بمعادلة جبرية خطية غير متجانسة من الشكل $(P) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

وقلنا إنه المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي تحقق المعادلة السابقة.

ليكن لدينا الآن معادلتان جبريتان خطيتان:

$$D:\begin{cases} P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

بحيث إن الأمثال C_1, B_1, A_1 لاتتناسب مع الأمثال C_2, B_2, A_2 أي:

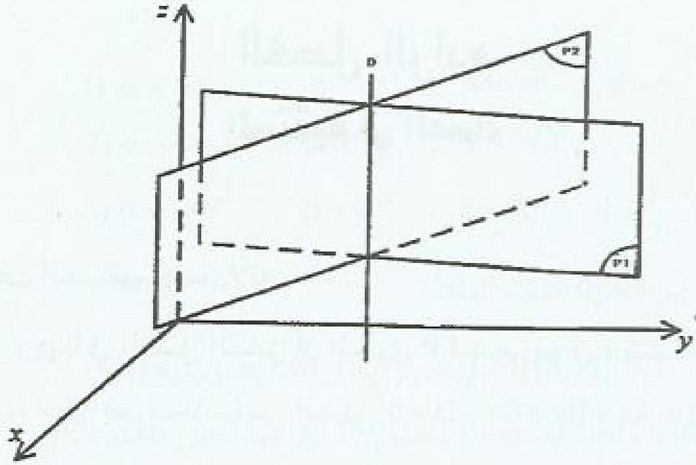
$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

عندئذ ندعو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ $\Re^3$ المنسوب لجملة محاور إحداثية قائمة نظامية oxyz الشكل (4-1) بالمستقيم D الممثل بالمعادلتين (1)، كما ويطلق على المتجه $\bar{V}$ الناتج عن الجداء الخارجي للناظمين $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ أمثال توجيه المستقيم D أي:

$$\bar{V} = \bar{N}_1 \wedge \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$= (B_1C_2 - B_2C_1)\,\bar{i} + (C_1A_2 - C_2A_1)\,\bar{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\,\bar{k} \qquad (2)$$

ثم بوضع: $a = B_1C_2 - B_2C_1,\ b = C_1A_2 - C_2A_1\ ,\ c = A_1B_2 - A_2B_1$



الشكل (4-1)

فإن المتجه $\vec{V}$ يكتب بالشكل المختصر التالي:

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \tag{3}$$

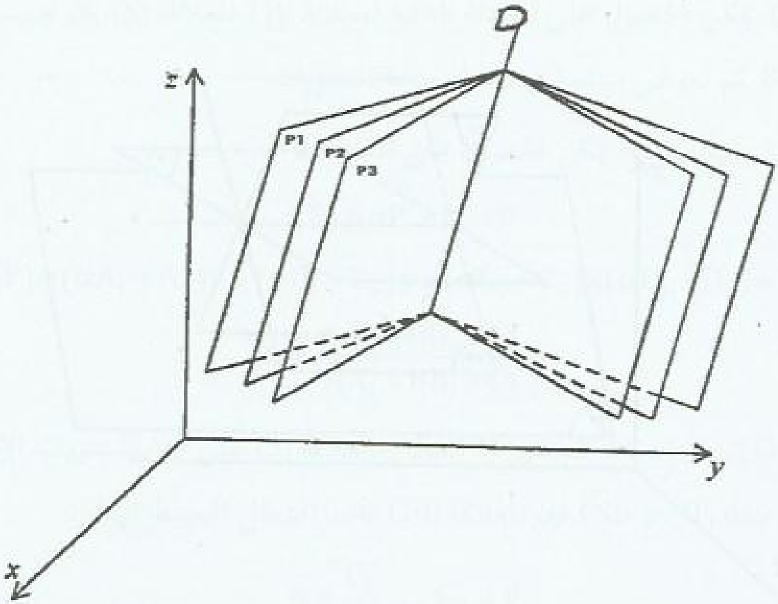
نتيجة (1): المستقيم D ضمن الشروط السابقة: $(C_1 \neq \alpha C_2, B_1 \neq \alpha B_2, A_1 \neq \alpha A_2)$ هو جميع النقاط التي تقع على كل من المستويين P_2, P_1 (عددها لانهائي).

نتيجة (2): إن المتجه $\vec{V}$ موجه المستقيم D هو متجه عمودي على كل من ناظمي المستويين P_2, P_1 والمستقيم D الممثل بالمعادلتين (1) يدعى بالفصل المشترك للمستويين P_2, P_1. وبالحقيقة فإنه إضافة لهذين المستويين فهناك عدد لانهائي من المستويات التي تشترك معهما في المستقيم D الشكل (4-2)، مجموعة المستويات هذه (بما فيها P_2, P_1) نطلق عليها اسم حزمة المستويات المارّة بـ (D)، فإذا كان λ وسيط ما :

$$P \equiv P_1 + \lambda P_2 \tag{4}$$

ونخلص إلى القول إن المستقيم D يتعين في الفراغ.

أما بنقطة معلومة ومنحى معلوم أو بمعرفة نقطتين يمر منهما هذا المستقيم أو بتقاطع مستويين P_1 و P_2 أو أكثر بحيث يكون هذا المستقيم هو الفصل المشترك لها.



الشكل (2-4)

2-4- مسقط مستقيم على مستوٍ:

لإيجاد المسقط للمستقيم D المعطى بالمعادلتين:

$$D:\begin{cases} P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

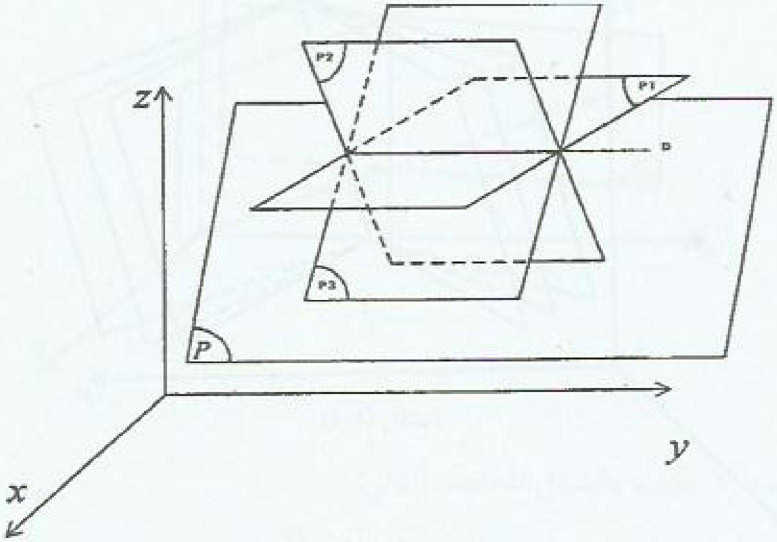
على المستوي:

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6}$$

نجد أولاً معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك D الشكل (3-4).

ثم نأخذ من بين جميع مستويات هذه الحزمة المستوي P_3 العمودي على المستوي P (أي نحدد الوسيط بتطبيق شرط التعامد $P_3 \perp P$ والمستقيم 'D يتحدد بالمعادلتين التاليتين:

$$D \equiv \begin{cases} P(x,y,z) = 0 \\ P_3(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{7}$$



الشكل (3-4)

بالحقيقة إن معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم L المراد إسقاطه على المستوي P هي:

$$(P) \equiv P_1 + \beta P_2 = 0 \qquad (8)$$

وبعد التعويض والإصلاح نجد أن:

$$(P) \equiv (A_1 + \beta A_2)x + (B_1 + \beta B_2)y + (C_1 + \beta C_2)z + (D_1 + \beta D_2) = 0 \qquad (9)$$

من بين جميع مستويات الحزمة هذه نختار المستوي P_3 العمودي على المستوي P، ومن تطبيق شرط التعامد هذا يمكننا تحديد الوسيط β ويكون:

$$\beta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{AA_2 + BB_2 + CC_2} \qquad (10)$$

بعد أن أوجدنا الوسيط β نعوض قيمته في معادلة الحزمة فنحصل على المستوي P_3 ومعادلة المسقط 'D تعطى بدلالتها وبدلالة معادلة المستوي P.

نتيجة (3): يمكن الحصول على المعادلة الثانية (معادلة P_3) للعلاقة (5) بأن نحسب أولاً الوسيط β ثم نعوض مباشرة في معادلة حزمة المستويات.

نتيجة (4): بآلية مشابهة يمكن الحصول على المعادلات:

$$(P) \equiv \alpha P_1 + P_2 = 0 \quad (11)$$

$$(P) \equiv (\alpha A_1 + A_2)x + (\alpha B_1 + B_2)y + (\alpha C_1 + C_2)z(\alpha D_1 + D_2) = 0 \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{AA_2 + BB_2 + CC_2}{AA_1 + BB_1 + CC_1} \quad (13)$$

ملاحظة (1): عند إسقاط المستقيم D المعطى بالعلاقة (5) على أحد المستويات الإحداثية (المستوي oxy , z= 0 مثلاً) فإن العلاقة (10) تأخذ الشكل البسيط التالي:

$$\alpha = \frac{C_1}{C_2}\ , \quad C_2 \neq 0 \quad (14)$$

ومعادلة المستوي P_3 تؤول إلى الشكل:

$$P_3(x,y,z):(A_1C_2 - C_1A_2)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y + (C_2D_1 - C_1D_2) = 0 \quad (15)$$

بآلية مشابهة نجد أن العلاقتين (12) و (13) تختصران إلى الشكل:

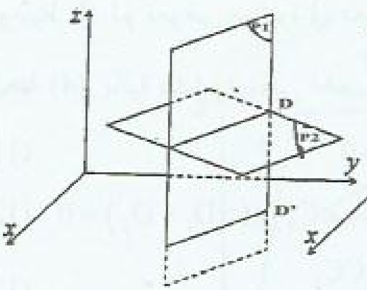
$$\alpha = -\frac{C_2}{C_1}\ , \quad C_1 \neq 0 \quad (16)$$

$$(P_3) \equiv (\alpha A_1 + A_2)x + (\alpha B_1 + B_2)y + (\alpha D_1 + D_2) = 0$$

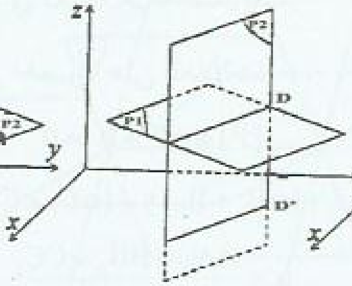
لذلك إذا كان المستوي P_1 عمودياً على المستوي oxy أي $C_1 = 0$ وكان $C_2 \neq 0$ الشكل (4-4)، فإنه يمكن أخذ معادلته مع معادلة المستوي oxy لتحديد المسقط 'D وهذا يتضح من خلال العلاقتين (14) و (15) حيث إن $\beta = 0$ في هذه الحالة.

بالعكس إذا كان $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ أي المستوي P_2 عمودياً على المستوي oxy، الشكل (4-5) فإن المسقط D على المستوي oxy يتحدد تماماً بمعادلة هذا المستوي والمستوي P_2 (هنا $\alpha = 0$).

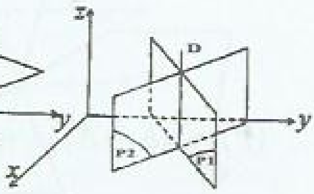
أخيراً إذا كان كل من المستويين عمودياً على المستوي oxy (الشكل (4-6)).



الشكل (4-4)



الشكل (4-5)



الشكل (4-6)

أي $C_2 = C_1 = 0$ عندئذ فإن المستقيم D يكون عمودياً عليه أيضاً، وبالتالي فإن مسقط D في هذه الحالة ليس إلاّ النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ حيث إن: $y_1, x_1, z_1 = 0$ والحالات الخاصة المتعلقة بذلك.

نتيجة (5): إن عملية إسقاط المستقيم D الممثل بالعلاقة (5) على أحد المستويات الإحداثية (المستوي $z = 0$ مثلاً) تتلخص في التخلص من الإحداثي z في كلتا المعادلتين، وهكذا بالنسبة لعملية الإسقاط على المستوي oxz (حذف y منها) أو حذف x عند الإسقاط على المستوي oyz.

4-3- وضع مستقيم ومستوٍ في الفراغ:

1- في حالة المستقيم معين بتقاطع مستويين:

ليكن لدينا المستقيمD:

$$D \equiv \begin{cases} P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

والمستوي P:

$$P: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (18)$$

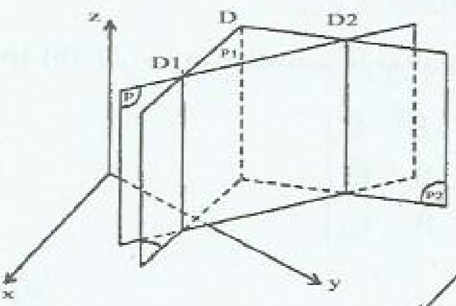
لدراسة وضع المستقيم D بالنسبة إلى المستوي P تدرس إمكانية حل جملة المعادلات الواردة في العلاقتين (17) و (18) ونحن أمام الاحتمالات التالية:

1- لايوجد أي جذر مشترك لجملة المعادلات الثلاث السابقة، أي أن محدد الأمثال فيها مساوٍ للصفر أي:

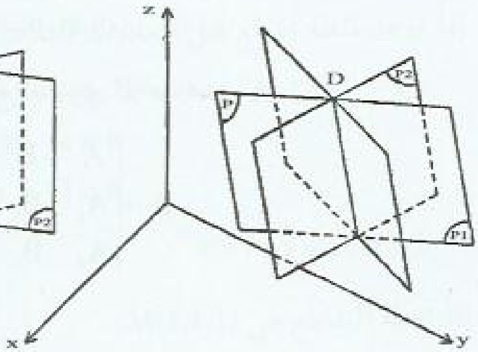
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

وهذا يعني أن المستقيم D يوازي المستوي P، الشكل (4-7).

بكلام آخر فإن المستوي P يقطع كلاً من المستويين P_2, P_1 بمستقيمين D_2, D_1 بحيث $D_1 // D\ ,\ D_2 // D$.



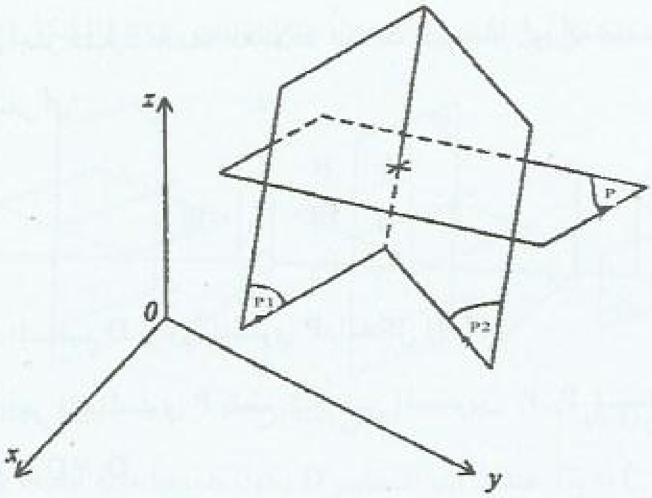
الشكل (4-7)



الشكل (4-8)

2- يوجد لجملة المعادلات هذه عدد لانهائي من الحلول، عندئذ فإن المستوي P يحوي المستقيم D، وبالتالي فإن المستويات P و P_1 و P_2 تنتمي لنفس الحزمة من المستويات المشتركة بالفصل المشترك D، الشكل (4-8).

3- يوجد جذر وحيد لجملة المعادلات، أي المستويات الثلاثة لها نقطة مشتركة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ إحداثياتها هي ناتج الحل المشترك للجملة (لاحظ أن محدد الأمثال هذا مغاير للصفر) وبالتالي فإن المستوي P والمستقيم D يشتركان بنقطة واحدة M_1، الشكل (4-9).



الشكل (9-4)

نتيجة (6): لدراسة وضع المستقيم D مع المستوي P نجد محدد الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

ويكون:

1- $\Delta \neq 0$ للجملة جذر مشترك و D و P يتقاطعان بنقطة واحدة، الشكل (4-9).

2- $\Delta = 0$ فإن المتجهات $\bar{N}_2, \bar{N}_1, \bar{N}$ تقع في مستوٍ واحد، وهنا نحن أمام أحد احتمالين، **الأول:** D يقع في المستوي P وبالتالي يشتركان بعدد لانهائي من النقاط والمستويات الثلاثة تشترك به بفصل مشترك.

أما الاحتمال الثاني: وهو عدم اشتراك D و P بأية نقطة ويكون P//D.

مثال: (1) ادرس تقاطع المستوي:

$$P \equiv 2x + 3y + 3z - 8 = 0$$

مع المستقيم:

$$D \equiv \begin{cases} P_1 \equiv x+3y-4=0 \\ P_2 \equiv 2y+z-3=0 \end{cases}$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3)-3(1)+3(2)=9 \neq 0$$

إذاً توجد نقطة تقاطع بحل المعادلات الثلاث السابقة:

$$2x+3y+3z-8=0$$
$$x+3y-4=0$$
$$2y+z-3=0$$

نجد: $z=1\ ,\ y=1\ ,\ x=1$

إذاً نقطة التقاطع هي $M(1,1,1)$.

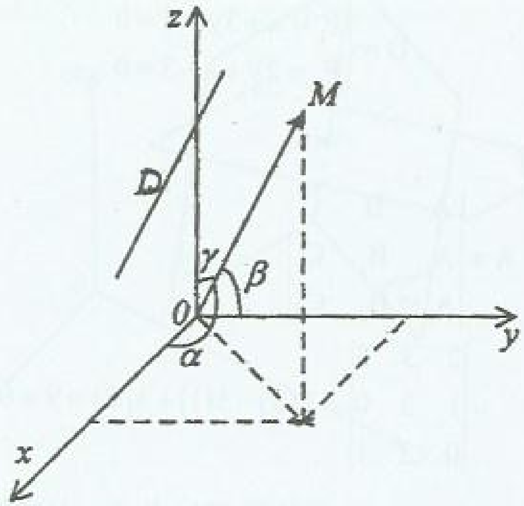
4-4- جيوب تمام ونسب توجيه مستقيم:

تتمايز المستقيمات في الفراغ $\Re^3$ المنسوب إلى جملة محاور إحداثية نظامية أحدها عن الآخر بالزوايا α و β و γ التي يصنعها هذا المستقيم (أو أي مستقيم يوازيه) مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية oz,oy,ox على التوالي، الشكل(4-10).

لكن وبما أن المستقيم في الفراغ يعطى كتقاطع مستويين P_1 و P_2 فإن موجه المتجه $\vec{V}$ يعبر عنه بدلالة الناظمين $\vec{N}_2,\vec{N}_1$ كجداء خارجي (العلاقة (2)).

أو: $\vec{V}=\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$

$$\vec{V}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$



الشكل (10-4)

وبالتالي فإنه يمكن القول إننا نميز بين مستقيم D وآخر من خلال الموجه الموافق لكلٍ منهما. ولنر الآن ما هي العلاقة بين الزوايا α و β و γ والموجه $\vec{V}$ لأجل ذلك نأخذ متجه الواحدة $\vec{V}_o$ على الموجه $\vec{V}$. ويكون:

$$\vec{V}_o = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

أو:

$$\vec{V}_o = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\vec{k} \qquad (19)$$

فإذا رمزنا بـ $\cos\gamma, \cos\beta, \cos\alpha$ لمركبات $\vec{V}_o$ السابق فإنه يكتب لها الشكل:

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} \qquad (20)$$

ومن الملاحظ أن مركبات هذا المتجه ترتبط بالعلاقة:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (21)$$

تدعو العلاقات:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (22)$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

بجيوب تمام توجيه المستقيم D وهي بالطبع النسب المثلثية للزوايا α و β و γ التي يصنعها هذا المستقيم مع المحاور الإحداثية، من جهة أخرى إذا وجدت ثلاثة أعداد L,n,m متناسبة مع جيوب التمام هذه، أي:

$$\frac{\cos\alpha}{m} = \frac{\cos\beta}{n} = \frac{\cos\gamma}{L} = k = \text{const} \qquad (23)$$

فإن هذه الأعداد L,n,m ندعوها نسب توجيه المستقيم D . أما المقدار k فيدعى عامل التناسب ويكون:

$$\cos\alpha = km\ ,\ \cos\beta = kn\ ,\ \cos\gamma = kl \qquad (24)$$

وبتربيع هذه العلاقات والجمع طرفاً لطرف نجد أن:

$$k^2 = \frac{1}{m^2+n^2+L^2}\ ,\ k = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+L^2}} \qquad (25)$$

وبالتالي فإن علاقات جيوب التمام تأخذ الصيغ:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+L^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+L^2}} \qquad (26)$$
$$\cos\gamma = \frac{L}{\sqrt{m^2+n^2+L^2}}$$

نتيجة (7): من العلاقات السابقة يتضح أنه إذا كان المقام مساوياً للواحد الصحيح، أي إذا كان:

$$\sqrt{m^2+n^2+l^2} = 1 \quad \text{أو} \quad m^2+n^2+l^2 = 1$$

فإن $\cos\gamma = l$, $\cos\beta = n$, $\cos\alpha = m$. وبالتالي لكي تشكل ثلاثة أعداد l,n,m جيوب تماما توجيه مستقيم D يجب أن تتحقق العلاقة التالية:

$$m^2 + n^2 + l^2 = 1 \tag{27}$$

4-5- الزاوية بين مستقيمين:

ليكن لدينا المستقيمان:

$$D_1 : \begin{cases} P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

موجهه D_1 هو: $\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$.

$$D_2 : \begin{cases} P_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ P_4 \equiv A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

موجهه D_2 هو: $\vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

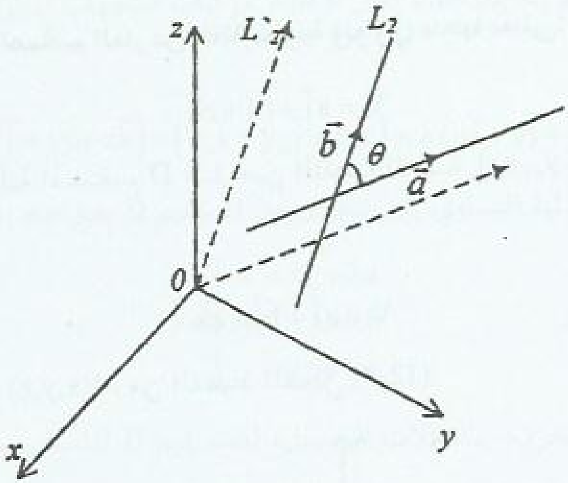
عندئذ فإن الزاوية θ بين المستقيمين D_2, D_1 الشكل (4-11) تعطى بالعلاقة التالية:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \cos\left(\widehat{D_1, D_2}\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \tag{28}$$

أما إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ معطيين بدلالة جيوب تمام التوجيه للمستقيمين D_2, D_1 الموافقين لهما فإن الزاوية θ تعرف من خلال العلاقة:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_2 + \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

حيث $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ هي الزوايا التي يصنعها كل من المستقيمين D_2, D_1 على الترتيب مع المحاور الإحداثية oz,oy,ox.



الشكل (4-11)

مثال: أوجد قيمة الزاوية الحادة φ بين المستقيمين:

$$D_1 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-5}{1} = \frac{7-6}{1}$$

$$D_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

الحل:

$$\cos\varphi = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|0(2)+1(1)+1(2)\right|}{\sqrt{0+1+1}.\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

4-6- حالات تعيين المستقيم في الفضاء:

بالإضافة إلى إعطاء المستقيم في الفضاء كتقاطع مستويين P_1 و P_2 العلاقة (1) فإن هناك حالات عديدة يمكن فيها إيجاد معادلة المستقيم D نذكر منها:

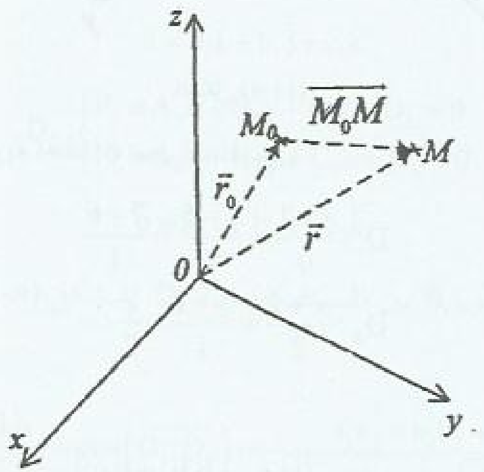
4-6-1- معادلات المستقيم المار من نقطة معلومة ويوازي متجهاً معطى:

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

لإيجاد معادلـة المستقيم D المـار مـن النقطـة المعطـة $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ المـوازي للمتجه:

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

نأخذ نقطة كيفية M(x,y,z) من الفضاء. الشكل (4-12).



الشكل (4-12)

إن شرط وقوعها على المستقيم المطلوب هو تحقق الشرط التالي:

$$D : \overline{M_0M} \,//\, \vec{V}$$

ومن شرط توازي متجهين نجد أن:

وسيط ما $$D : \overline{M_0M} = \lambda\vec{V} \Rightarrow \lambda \neq 0$$

$$D \equiv \vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\,\vec{V} \qquad (29)$$

حيث $\overline{OM} = \vec{r}$, $\overline{OM_0} = \vec{r}_0$ هما نصف القطر بـين المتجهين الواصـلين بـين نقطة الأصل وكل مـن النقطـتين M_0, M. نـدعو العلاقـة الـسابقة بالمعادلـة المتجهيـة

للمستقيم D ثم إنه إذا أخذنا بعين الاعتبار مركبات المتجهات المكونة للعلاقة السابقة فإن:

$$D \equiv \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)-\left(x_o\vec{i}+y_o\vec{j}+z_o\vec{k}\right)=\lambda\left(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right)$$

ومن تعريف عملية التساوي بين متجهين فإن المستقيم D يعبر عنه بالمعادلات التالية:

$$D \equiv \begin{cases} x = x_o + \lambda a \\ y = y_o + \lambda b \\ z = z_o + \lambda c \end{cases} \qquad (30)$$

وهذه ما تعرف بالمعادلات الوسيطية للمستقيم D (المستقيم وسيطياً) العلاقات الأخيرة (30) يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c} \qquad (31)$$

وهذه بدورها تدعى المعادلات الديكارتية أو التناظرية للمستقيم D (المستقيم في الصيغة التناظرية).

مثال (2): أوجد نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلاته:

$$D \equiv \frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$$

مع المستوي:

$$P \equiv 2x+3y+3z-8=0$$

الحل: المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي:

$$\begin{aligned} x &= 3\lambda-5 \\ y &= -\lambda+3 \\ z &= 2\lambda-3 \end{aligned}$$

بالتعويض في معادلة المستوي P نجد أن:

$$2(3\lambda-5)+3(-\lambda+3)+3(2\lambda-3)-8=0$$
$$9\lambda-18=0 \Rightarrow \lambda=2$$

بالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد:

$$x = 1 \ , \ y = 1 \ , \ z = 1$$

ونقطة التقاطع هي (1,1,1-).

مثال (3): أوجد نقطة تقاطع المستوي:

$$P \equiv 3x + 2y - 4z - 7 = 0$$

مع المستقيم:

$$D \equiv \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

الحل: المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي:

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda + 1 \\ y &= -\lambda + 3 \\ z &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

بالتعويض في معادلة المستوي:

$$3(2\lambda+1) + 2(-\lambda+3) - 4(\lambda-1) - 7 = 0$$
$$\Rightarrow 0.\lambda + 6 = 0 \Rightarrow 0.\lambda = -6$$

وهذه المعادلة مستحيلة لذلك فالمستقيم D لايقطع أبداً المستوي P.

مثال (4): أوجد نقطة تقاطع المستوي:

$$P \equiv 3x + 2y - 4z - 13 = 0$$

مع المستقيم الذي معادلاته:

$$D \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} = \lambda$$

الحل: المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي:

$$x = 2\lambda + 1$$
$$y = -\lambda + 3$$
$$z = \lambda - 1$$

بالتعويض في معادلة المستوي P نجد:

$$3(2\lambda+1)+2(-\lambda+3)-4(\lambda-1)-13=0$$
$$\Rightarrow 0\lambda = 0$$

وهذا يعني أن للمعادلة الأخيرة عدداً لانهائياً من الحلول، لذلك فالمستقيم D يقع في المستوي P.

نتيجة (8): إن لمعادلتي المستقيم D أشكال عدة هي: " الشكل الديكارتي، تقاطع مستويين، الشكل المتجهي، الوسيطي، التناظري".

نتيجة (9): إذا كان لدينا مستوٍ P :

$$P: Ax + By + Cz + D = 0$$

ومستقيم D معطى وسيطياً بالمعادلات (30) فإنه بتعويض هذه الأخيرة في معادلة المستوي نجد أن:

$$A(x_o + a\lambda) + B(y_o + b\lambda) + C(z_o + c\lambda) + D = 0$$

أو :

$$(aA + bB + cC)\lambda + Ax_o + By_o$$
$$+ Cz_o + D = 0$$

نلاحظ أن جميع المقادير في هذه العلاقة معروفة ماعدا الوسيط λ، وبالتالي بحل هذه المعادلة بالنسبة إليها (إذا كان لها حل طبعاً) ونكون أمام أحد الاحتمالات التالية:

1- للمعادلة السابقة جذر وحيد (قيمة وحدية للوسيط λ) عندئذ العلاقات (30) تعطينا نقطة تقاطع المستقيم D مع المستوي P.

2- للمعادلة عدد لانهائي من الحلول (للوسيط عدد لانهائي من القيم)، أي أن المستقيم D يقع في المستوي P.

3- ليس للمعادلة أي جذر (لايمكن تحديد الوسيط λ)وبالتالي فإن المستقيم D يوازي المستوي P وما ذكر أعلاه بالطبع ليس إلاّ دراسة وضع المستقيم D بالنسبة إلى المستوي P في الفراغ.

مثال(5): اكتب المعادلات الديكارتية ثم المعادلات الوسيطية للمستقيم D المار بالنقطة $M(1,-1,2)$ والموازي للمتجه $\vec{V}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ وعيّن نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوي oxy.

الحل:

1- المعادلات اليكارتية للمستقيم D هي من الشكل:

$$\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$$

بالتعويض حيث: $\vec{V}(a,b,c)$

$$D\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}$$

2- المعادلات الوسيطية للمستقيم D:

نجعل المعادلات الديكارتية مساوية للوسيط λ:

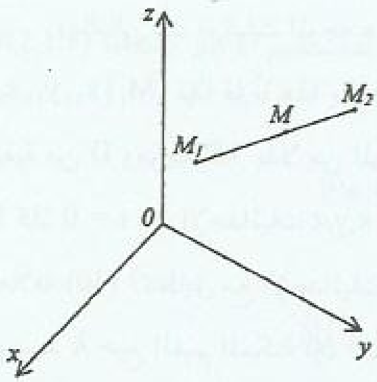
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}=\lambda$$

ومنه تكون المعادلات الوسيطية لـ D هي:

$$D:\begin{cases}x=2\lambda+1\\y=-3\lambda-1\\z=\lambda-2\end{cases}$$

3- عندما يقطع المستقيم D المستوي oxy يكون $z = 0 \Leftarrow$ من المعادلات الوسيطية نجد أن: $\lambda = 2 \Leftarrow x = 5, y = -7$ اذافان نقطة التقاطع هي $(5, -7, 0)$.

4-6-2- معادلات مستقيم ما يمر من نقطتين معلومتين:



الشكل (4-13)

بفرض أن:

$$M_2(x_2, y_2, z_2), M_1(x_1, y_1, z_1)$$

نقطتان معلومتان في الفراغ، ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية منه. الشكل (4-13).

إن شرط وقوع هذه النقطة على المستقيم D المار بالنقطتين M_2, M_1 هو الارتباط الخطي للمتجهين $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ أي:

$$D / \overline{M_1M} = t\,\overline{M_1M_2} \qquad (32)$$

ثم بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية نجد أن للمستقيم D المعادلات التالية:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (33)$$

وهي المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر بنقطتين.

ملاحظة (2): يمكن الوصول إلى المعادلات الوسيطية للمستقيم D من خلال العلاقة (32) بإسقاطها على المحاور الإحداثية ويكون:

$$D \equiv \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\lambda \end{cases} \qquad (34)$$

ثم باعتماد الرموز التالية:

$$a = x_2 - x_1 \ , \ b = y_2 - y_1 \ , \ c = z_2 - z_1 \tag{35}$$

نجد أن:

$$x = x_1 + \lambda a \ , \ y = y_1 + \lambda b \ , \ z = z_1 + \lambda c$$

وبالتالي فإن مركبات الموجه هنا هي العلاقات (34) والنقطة المعلومة هي النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$. فإذا قارنّا هذا بالعلاقة (30) فإنه يمكن القول إنه بإمكاننا اختيار نقطة كيفية من D وموجه $k\vec{a}$ بدلاً من الموجه $\vec{a}$ نفسه $(0 \neq k = const)$، ومن الطبيعي أنه إذا كان $t = 0$ فإن الإحداثيات x,y,z للنقطة M تتطابق مع الإحداثيات للنقطة M_0 في العلاقة (30) (تتطابق مع الإحداثيات للنقطة M_1 في العلاقة (34))، وأنه عندما يأخذ الوسيط λ جميع القيم الممكنة فإن النقطة M تدخل عليه لتمسح كامل نقاطه مع ملاحظة أن القيم الموجبة والسالبة لهذا الوسيط توافق النقاط التي تقع على يمين ويسار النقطة M_0.

مثال: (1) اكتب المعادلات الديكارتية (التناظرية) والمعادلات الوسيطية للمستقيم D المار بالنقطتين $M_1(1,2,3), M_2(2,-1,0)$.

الحل:

1) المعادلات الديكارتية: نبدل في المعادلات:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{-1 - 2} = \frac{z - 3}{0 - 3}$$

$$D \equiv \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 3}{-3}$$

وهي المعادلات الديكارتية (التناظرية).

2) المعادلات الوسيطية: نجعل المعادلات الديكارتية مساوية لوسيط λ ومنه فإن:

$$D \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -3\lambda + 2 \\ z = -3\lambda + 3 \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية.

مثال: (2) اكتب المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم D المار بالنقطة M(2,1,1) والعمودي على المستوي:

$$P \equiv 3x - 2y + z - 1 = 0$$

الحل: إن الناظم $\vec{N}$ على المستوي P هو:

$$\vec{N}(A,B,C) = \vec{N}(3,-2,1)$$

نبدل في المعادلات:

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C}$$

$$D \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

والمعادلات الوسيطية هي:

$$x = 3\lambda + 2$$
$$y = -2\lambda + 1$$
$$z = \lambda + 1$$

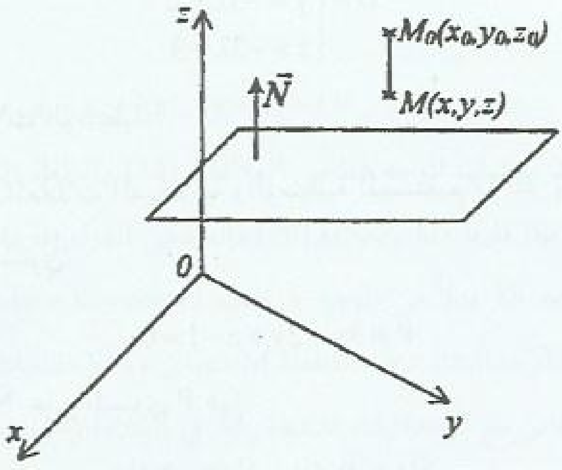
6-4-3- معادلات المستقيم المار بنقطة معلومة وعمودي على مستوٍ معطى:

إن عملية إيجاد معادلة المستقيم D المار بالنقطة $M_o(x_o, y_o, z_o)$ والعمودي على المستوي:

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

وبحيث إن M_o لاتقع على هذا المستوي. الشكل (4-14) ترد إلى عملية إيجاد المستقيم المار من نقطة معلومة ومتجه معطى، حيث إنه يمكن اعتبار الناظم $\vec{N}$ على المستوي P بمثابة الموجه $\vec{a}$ للمستقيم D ويكون:

$$D: \overrightarrow{M_oM} // \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{M_oM} = \lambda.\vec{N}$$



الشكل (14-4)

والمستقيم يعطى بالعلاقات:

$$\frac{x-x_o}{A} = \frac{y-y_o}{B} = \frac{z-z_o}{C} \qquad (36)$$

مثال (1): عيّن أمثال توجيه منحى المستقيم D المعين بالمستويين:

$$D: \begin{cases} P_1 \equiv x+y+z+8=0 \\ P_2 \equiv 2x+y+12=0 \end{cases}$$

الحل: إن أمثال توجيه المستقيم D هي مركبات المتجه:

$$\vec{V} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$$

حيث $\vec{N}_2, \vec{N}_1$ المتجهان الناظمان على المستويين P_1 و P_2 على الترتيب، أي أن:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

وبذلك فإن أمثال توجيه المستقيم D هي:

$$\vec{V}(-1,2,-1)$$

مثال (2): أوجد المعادلات الديكارتية للمستقيم D المحدد بالمستويين:

$$D:\begin{cases}P_1 \equiv x-y+2z-5=0\\ P_2 \equiv 3x+5y-4z-1=0\end{cases}$$

الحل: أمثال توجيه منحى هذا المستقيم هي مركبات المتجه:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & -4\end{vmatrix}=$$

$$\vec{V}=-6\vec{i}+10\vec{j}+8\vec{k}$$

إذاً أمثال التوجيه هي $(-3,5,4)$.

إذا اخترنا نقطة من المستقيم D فاصلتها $x = 1$ على سبيل المثال وتعويضها في معادلتي المستقيم D نحصل على:

$$-y+2z-4=0$$
$$5y-4z+2=0$$

بحل المعادلتين الأخيرتين نجد أن $z=3, y=2$ إذاً فإن المستقيم D يمر بالنقطة $M(1,2,3)$ وأمثال توجيهه هي $(-3,5,4)$ وتكون معادلاته الديكارتية:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{4}$$

مثال (3): أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$D:\begin{cases}P_1 \equiv x-y+2z-3=1\\ P_2 \equiv 2x-y+z+2=0\end{cases}$$

الحل: بجعل أحد المجاهيل وليكن y وسيطاً أي $y=\lambda$ فإننا نحصل على المعادلة:

$$D:\begin{cases}P_1 \equiv x-\lambda+2z-3=1\\ P_2 = 2x-\lambda+z+2=0\end{cases}$$

بحل هاتين المعادلتين:

$$x+2z=4+\lambda$$
$$2x+z=\lambda-2$$

بحل المعادلتين حلاً مشتركاً نحصل على أن:

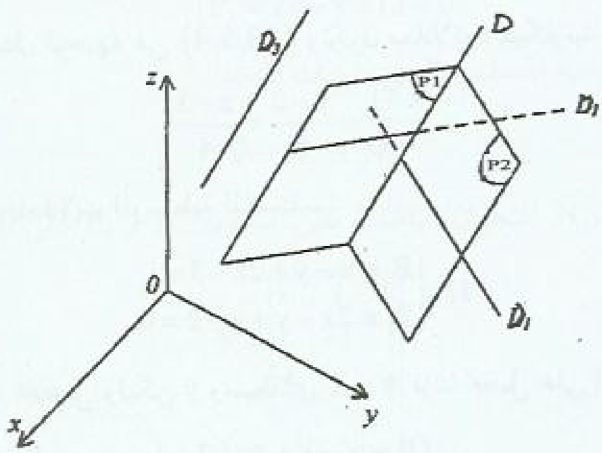
$$x=\frac{1}{3}\lambda-\frac{8}{3}$$
$$z=\frac{1}{3}\lambda+\frac{10}{3}$$

وتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي:

$$x=\frac{1}{3}\lambda-\frac{8}{3}$$
$$y=\lambda$$
$$z=\frac{1}{3}\lambda+\frac{10}{3}$$

4-6-4- معادلات مستقيم يقطع مستقيمين مفروضين ويوازي ثالثاً:

ليكن لدينا المستقيمات D_3, D_2, D_1. إن عملية إيجاد معادلة المستقيم D القاطع لكلٍ من المستقيمين D_2, D_1 والموازي للمستقيم D_3 تتلخص على النحو التالي:



الشكل (4-15)

المستقيم D يشكل مع المستقيم D_1 مستوياً P_1 كما وأنه يشكل مستوياً P_2 مع المستقيم D_2، وبالتالي فإن المستقيم المطلوب D يعطى بدلالة المستويين P_2, P_1 وعملياً فإننا نوجد أولاً معادلة الحزمة التي تمر من المستقيم D_1 ونختار من مستوياتها المستوي P_1 ونختار منها المستوي P_2 الموازي للمستقيم D_3 والمستقيم D يعبر عنه بمعادلتي المستويين P_2, P_1 الشكل (4-15).

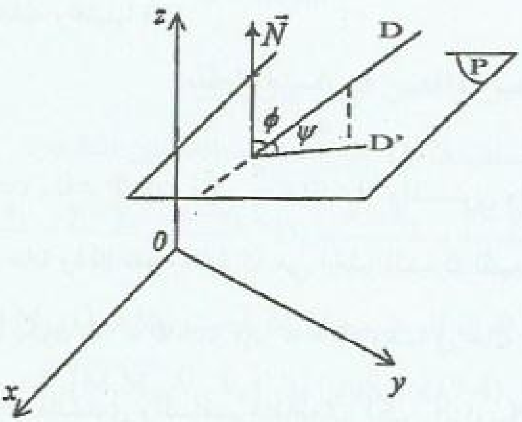
4-7- الزاوية بين مستقيم ومستوٍ:

ليكن لدينا المستقيم D الذي موجهه المتجه $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ والمستوي:

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

تعرف الزاوية بين المستقيم D والمستوي P بأنها الزاوية ψ بين المستقيم D والمسقط 'D، لهذا المستقيم على المستوي P الشكل (4-16)، فإذا رمزنا للزاوية بين D والناظم N للمستوي P بـ Φ فإن:

$$\vec{N}.\vec{V} = |\vec{N}|.|\vec{a}|.\cos\left(\widehat{\vec{N},\vec{V}}\right) = |\vec{N}|.|\vec{V}|.\cos(\Phi)$$



الشكل (4-16)

لكن الزاويتين Φ و ψ ترتبطان بالعلاقة:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \Psi \Rightarrow \cos\Phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Psi\right) = \sin\Psi$$

وبالتالي يكون:

$$\cos\Phi = \frac{|\vec{N}.\vec{V}|}{|\vec{N}|.|\vec{V}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{37}$$

أو:

$$\sin\Psi = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{38}$$

نتيجة (10): من العلاقات السابقة (العلاقة (37) مثلاً) يمكن دراسة وضع المستقيم D والمستوي P ونحن أمام الاحتمالات التالية:

1- إذا كان $\cos\Phi = 0$ أي $\Phi = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \vec{V} \perp \vec{N}$ وبالتالي فإن $D // P$ ونعبر عن ذلك:

$$a.A + bB + cC = 0 \tag{39}$$

وهو شرط توازي مستقيم مع مستوٍ.

2- إذا كان $\cos\phi = 1$ أي $\Phi = 0$ حيث $\psi = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \vec{N} // \vec{V}$ وبالتالي المستقيم والمستوي متعامدان، وتحليلياً فإن:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \tag{40}$$

3- إذا كان $\cos\Phi \neq 1$, $\cos\Phi \neq 0$ فإن $0 < \Phi < \frac{\pi}{2}$ والمستوي والمستقيم متقاطعان، والزاوية بينهما حادة ولهما نقطة مشتركة هي الجذر المشترك للمعادلات التي تمثلهما.

ملاحظة (3): عندما يكون $\cos\Phi = -1$ فإن $\Phi = \pi$ وهما في حالة توازي أيضاً، أما إذا كان $-1 < \cos\Phi < 0$ فالمستوي والمستقيم متقاطعان، لكن الزاوية $\frac{\pi}{2} < \Phi < \pi$ وهي زاوية منفرجة.

أخيراً نشير إلى أن حالة وقوع المستقيم D في المستوي P هي حالة خاصة من التوازي، ومع أن الحالة الأخيرة تفيد بعدم وجود نقاط مشتركة بين D و P إلاّ أن حال الانطباق تدل على وجود عدد لانهائي من النقاط المشتركة بينهما، وهي بالحقيقة جميع نقاط المستقيم D نفسه.

مثال: أوجد الزاوية φ بين المستقيم:

$$D \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{0}$$

والمستوي:

$$P \equiv 2x + y - 2z + 8 = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|2(4)+(-3)(1)+0(-2)|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(0)^2}.\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{25}.\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{3}$$

8-4- تقاطع مستقيمين واقعين في مستوٍ واحد:

ليكن لدينا المستقيمان D_2, D_1 الممثلان بالمعادلتين التاليتين:

$$D_1 \equiv \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}\ ,\ D_2 \equiv \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

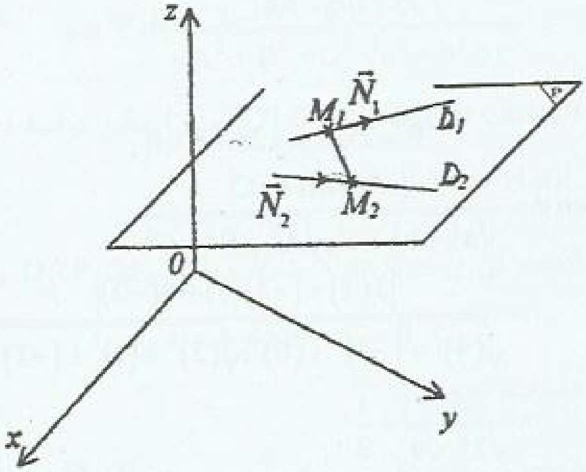
الواقعان في المستوي P. إن المستقيم M_1M_2 (حيث $D_2 \ni M_2, D_1 \ni M_1$) يقع أيضاً في هذا المستوي، الشكل (4-17)، وبالتالي فإن $\left(\overline{M_1M_2}, \bar{V}_1, \bar{V}_2\right)$، أو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

وهو الشرط اللازم والكافي لوقوع المستقيمين D_2, D_1 في مستوٍ واحد، وفي هذه الحالة فإنهما:

1- متوازيان إذا كان: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

2- إذا لم تكن مركبات موجهيهما متناسبة، أي لم تتحقق العلاقة السابقة فهما متقاطعان بنقطة هي الجذر المشترك لمعادلات المستقيمين D_2, D_1.



الشكل (17-4)

ملاحظة (4): إذا كان المستقيمان D_2, D_1 كل منهما معطى كتقاطع مستويين:

$$D_1 \equiv \begin{cases} P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 \equiv \begin{cases} P_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ P_4 : A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

فإن شرط وقوعهما في مستوٍ واحد هو:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

وفي حال تقاطعهما فإن نقطة التقاطع هذه نوجدها بحل جملة المعـادلات الـسابقة، وبالحقيقة هنا لدينا أربع معادلات بثلاثة مجاهيل لذلك عادة ما نأخذ ثلاثاً منها والنتيجـة تكون محققة للمعادلة الرابعة حتماً.

مثال (1): بين فيما إذا كان المستقيمان:

$$D_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

$$D_2 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$$

يقعان في مستوٍ واحد ثم أوجد نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين.

الحل: نبدل في المعادلة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1-0 & 1-0 & -1-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

إذاً D_2, D_1 يقعان في مستو واحد.

وبما أن أمثال توجيه منحى المستقيم D_1 لاتتناسب مع أمثال توجيه منحى المستقيم D_2 فالمستقيمان غير متوازيين، أي متقاطعان.

بحل المعادلات الأربع:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} \quad , \quad \frac{x}{1} = \frac{z}{3}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{z+1}{4}$$

نحصل على أن $x = 1$ و $y = 2$ و $z = 3$

إذاً نقطة التقاطع هي $M(1,2,3)$.

مثال (2): أثبت أن المستقيمين:

$$D_1 \equiv \begin{cases} P_1 \equiv 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ P_2 \equiv 3x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 \equiv \begin{cases} P_3 \equiv x + y + z - 3 = 0 \\ P_4 \equiv y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

يقعان في مستوٍ واحد ثم عين نقطة تقاطعهما:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

إذاً المستقيمان يقعان في مستوٍ واحد. لإيجاد نقطة تقاطعهما نحل ثلاث معادلات من المعادلات الأربع السابقة حلاً مشتركاً وسنجد بسهولة أن هذا الحل يحقق المعادلة الرابعة، حيث نجد من المعادلات:

$$2x + y - 2z + 2 = 0$$
$$3x - 2z + 1 = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

أن $z = 2, y = 0, x = 1$

أي أن المستقيمين D_2, D_1 يتقاطعان في النقطة $M(1,0,2)$.

مثال (3): أثبت أن المستقيمين:

$$D_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

$$D_2 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{12}$$

يقعان في مستوٍ واحد، أوجد معادلة هذا المستوي ثم أجد نقطة التقاطع.

الحل: شرط الوقوع في مستوٍ واحد:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون معادلة المستوي المار بإحدى النقطتين (2,-1,3)، (2,0,3) والموازي لمنحى المتجه $\bar{V} = \bar{N}_1 \wedge \bar{N}_2$ هي:

$$P = \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$40(x-2) - O(y+1) - 10(z-3) = 0$$

$$40x - 10z - 50 = 0$$

$$P \equiv 4x - z - 5 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

لإيجاد نقطة التقاطع نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم الأول:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4} = \lambda$$

$$x = \lambda + 2$$

$$y = 3\lambda - 1 \ , \ z = 4\lambda + 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات الوسيطية للمستقيم D_2:

$$x = 3\lambda + 2 \ , \ y = -\lambda \ , \ z = 12\lambda + 3$$

ومنه:

$$3\lambda+2=\lambda+2 \Rightarrow \boxed{\lambda=0}$$

وتكون نقطة التقاطع: $M(2,-1,3)$

4-9- بُعد نقطة عن مستقيم:

لحساب بعد النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ عن المستقيم:

$$D \equiv x = x_o + a\lambda \;\;,\;\; y = y_o + b\lambda \;\;,\;\; z = z_o + c\lambda$$

فإننا نسقط هذه النقطة إسقاطاً قائماً عليه، الشكل (4-18)، فإذا كانت النقطة M_2 هي مسقط M_1 على D فإن:

$$d = \left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|$$

ويتم حسابه دون اللجوء لمعرفة إحداثيات المسقط M_2 وذلك بتنفيذ الجداء الخارجي:

$$\left|\overrightarrow{M_oM_2} \wedge \overrightarrow{M_oM_1}\right| = \left|\overrightarrow{M_oM_2}\right| . \left|\overrightarrow{M_oM_1}\right| \sin\theta$$

ومن الرسم نلاحظ أن:

$$d = \left|\overrightarrow{M_oM_1}\right| \sin\theta \qquad (41)$$

إذاً:

$$\left|\overrightarrow{M_oM_2} \wedge \overrightarrow{M_oM_1}\right| = \left|\overrightarrow{M_oM_2}\right| d$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_oM_2} \wedge \overrightarrow{M_oM_1}\right|}{\left|\overrightarrow{M_oM_2}\right|}$$

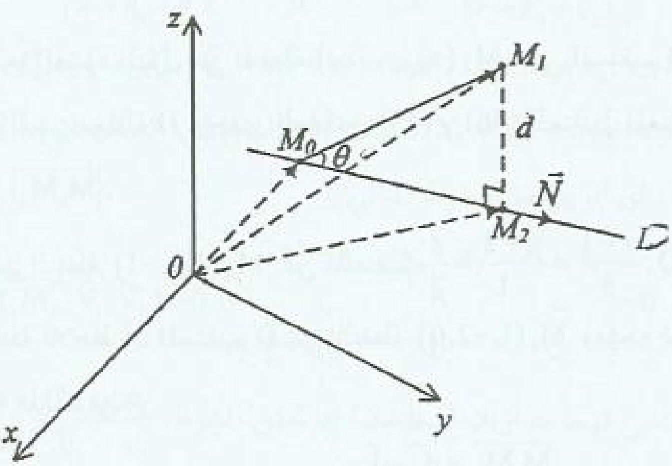
وحيث إن $\vec{V}$ هو موجه المستقيم، وإن النتيجة لاتتأثر باختيار أية نقطة من نقاط المستقيم D بدلاً من M_o فإن العلاقة السابقة يمكن أن تكتب على الشكل التالي:

$$d = \frac{1}{\left|\vec{V}\right|} \cdot \left|\vec{V} \wedge \overline{M_0 M_1}\right| \tag{42}$$

نتيجة (11): عندما تقع النقطة على المستقيم D فإن $d = 0$ وهذا ما تؤكده العلاقة (41) حيث إن $\theta = 0$.

ملاحظة (5): لنصل النقاط M, M_1, M_0 (نقطة كيفية من D) إلى نقطة الأصل عندئذ فإن معادلة المستوي P المار من النقطة M_1 والعمودي على المستقيم D هي:

$$(P_1) \equiv \vec{V}.\overline{MM_2} = 0 \ , \ \ \vec{V}\left(\overline{OM} - \overline{OM_1}\right) = 0$$



الشكل (4-18)

أو:

$$(P_1) \equiv \vec{V}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) = 0 \tag{43}$$

أما المستوي P المار من النقطة M_1 والحاوي على المستقيم D فتكون:

$$(P_2) \equiv \left(\overline{M_1M}\,\overline{M_0M_1}, \vec{V}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(P_2) \equiv \left[\left(\vec{r} - \vec{r}_1\right), \left(r_1 - r_0\right), \vec{V}\right] = 0 \tag{44}$$

وبالحقيقة إن تقاطع المستويين السابقين يعطينا المعادلة المتجهية للعمود $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|$ النازل من النقطة m_1 على المستقيم D، وبالإسقاط على المحاور الإحداثية نحصل على المعادلتين:

$$(P_1)\equiv a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

$$(P_1)\equiv ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0 \tag{45}$$

$$(P_2)\equiv\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_o-x_1 & y_o-y_1 & z_o-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0 \tag{46}$$

اللتان تمثلان معاً العمود النازل من النقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$ على المستقيم D بحل جملة المعادلات المكونة من معادلة D وإحدى المعادلتين (45) و (46) الممثلتين للعمود ومن ثم نحسب الطول $\left|\overline{M_1M_2}\right|$.

مثال: أوجد بعد النقطة $M_o(1,2,-1)$ عن المستقيم $D:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

الحل: من المعادلة نلاحظ أن المستقيم D يمر بالنقطة $M_1(1,-2,0)$ ومتجه توجيه منحاه $\vec{V}(3,-1,2)$، كذلك فإن:

$$\overline{M_1M_o}=4\vec{j}-\vec{k}$$

$$\overline{M_1M_o}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=7\vec{i}-3\vec{j}-12\vec{k}$$

$$\left|\overline{M_1M_o}\wedge\vec{V}\right|=\sqrt{(7)^2+(-3)^2+(-12)^2}$$

$$=\sqrt{49+9+144}=\sqrt{202}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{|\vec{V}|}\left|\overline{M_1M_o}\wedge\vec{V}\right|$$

$$d = \sqrt{\frac{202}{14}} = \sqrt{\frac{101}{7}}$$

10-4- وضع مستقيمين في الفضاء:

ليكن لدينا المستقيمان:

$$D_1 \equiv \begin{cases} x = x_o + a_1\lambda \\ y = y_o + b_1\lambda \\ z = z_o + c_1\lambda \end{cases} \quad , \quad D_2 \equiv \begin{cases} x = x'_o + a_2\lambda \\ y = y'_o + b_2\lambda \\ z = z'_o + c_2\lambda \end{cases}$$

$D_2 \ni M'_o(x'_o, y'_o, c'_o)$ موجهه $\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $D_1 \ni M_o(x_o, y_o, z_o)$

وموجهه $\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ الشكل (19-4) فهذان المستقيمان إما أنهما واقعان في مستوٍ واحد، أي أن يتحقق الشرط التالي:

$$\left(\overline{M_oM'_o}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0, \Delta = \begin{vmatrix} x'_o - x_o & y'_o - y_o & z'_o - z_o \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي فهما متوازيان (منطبقان) إذا تحقق الشرط $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ أو متقاطعان في حال عدم تحققه (ناقشنا ذلك في الفقرة 8-4).

أو غير واقعين في مستوٍ واحد: $\left(\overline{M_oM'_o}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \Delta \neq 0$ يسميان عندئذ بالمستقيمين المتخالفين. ومن المفيد دوماً حساب أقصر بُعد بينهما في هذه الحالة، وهذا يتم على النحو التالي:

إن D_2, D_1 لايقعان في مستوٍ واحد $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \overline{M_1M_2}\right) \neq 0$ أي أن D_2 لاتوازي D_1، نجد المستوي P_2 المار بالمستقيم D_2 والموازي للمستقيم D_1 وليكن D'_1 مسقط D_1 على P_2 والذي بدوره يقطع D_2 بنقطة M_2 مثلاً ننشئ من هذه النقطة عموداً على المستوي P_2 فيقطع هذا العمود المستقيم D_1 في نقطة M_1 وبالتالي فإن طول العمود $\overline{M_1M_2}$ هو أقصر بُعد بين هذين المستقيمين، وهذا يتم إثباته بملاحظة أنه إذا

أخذنا أي مستقيم BA (B نقطة كيفية على A, D'_1 نقطة تقاطع العمود المقام من B على المستوي P_2 مع D) فإن $\overline{AB} = \overline{M_1M_2}$، أما إذا كانت $B \ni D_2$ (ومختلفة عن M_2) فإن العمود المقام منها على P_2 لن يقطع D_1 (في الحالة المعاكسة فإن $D_2 // D_1$).

ملاحظة (6): إن معادلة المستوي P_2 المار بالمستقيم D_2 والموازي للمستقيم D_1 ((D_1 لاتوازي D_2)) يمكن إيجادها كما يلي:

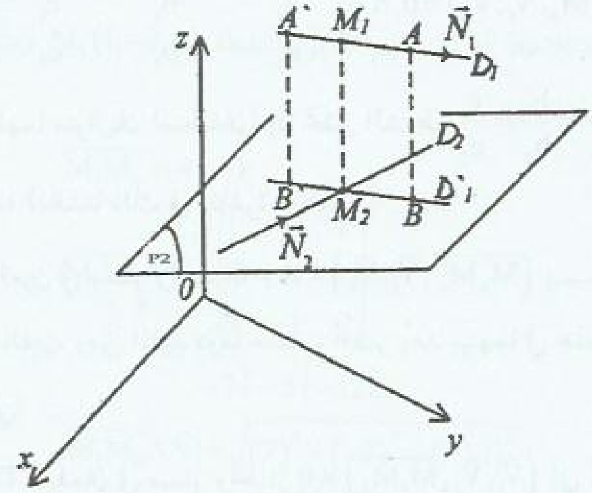
بفرض $M(x,y,z) \in \Re^3$ إن $M \in P$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$(P) \equiv \left(\overrightarrow{MM_1}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(P) \equiv \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(P) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_2 = b_1c_2 - c_1b_2 \ , \ B_2 = c_1a_2 - c_2a_1 \ , \ C_2 = a_1b_2 - a_2b_1$$



الشكل (4-19)

حيث إن:

$$D_2 = -\left[x_1(b_1c_2 - c_1b_2) + y_1(c_1a_2 - c_2a_1) + z_1(a_1b_2 - a_2b_1)\right]$$

ملاحظة (7): إن البعد $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|$ يساوي طول العمود النازل من أية نقطة منه على المستقيم D_1 وذلك لأن $D_1 // D_1'$ أي أن: $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=AB=A'B'$

وبالتالي فإنه بعد الحصول على المستوي P_2 يمكننا اختيار أية نقطة من D_1 وحساب بعدها عن المستوي P_2 ويكون هذا البعد مساوياً لطول أقصر بعد بين D_2, D_1.

ملاحظة (8): بعد الحصول على المستوي P_2 يمكننا اختيار نقطة ما (M_1 مثلاً) على D وبالتالي إيجاد معادلة العمود M_1M_2 النازل منها على المستوي P_2 (معادلة مستقيم مار من نقطة معلومة M_1 وعمودي على مستوٍ معطى P_2).

حيث إنه بالفعل إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة كيفية في الفراغ فإن شرط وقوعها على M_1M_2 هو:

$$M_1M // \bar{N} \Rightarrow \frac{x-x_1}{A_2}=\frac{y-y_1}{B_2}=\frac{z-z_1}{C_2}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة البعد: $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|$.

نتيجة (12): يمكن إيجاد أقصر بعد بين المستقيمين D_2, D_1 انطلاقاً من إيجاد المستوي P_1 المار من D_1 والموازي لـ D_2 ثم حساب المسافة بينه وبين أية نقطة على D_2.

نتيجة (13):

1- إذا كان المستقيمان D_2, D_1 متخالفين فإنه يمكن حساب طول أقصر بعد بنيهما من خلال إنشاء متوازي المستطيلات الذي أبعاده الأطوال، الشكل (4-20):

$$\left|\vec{V}_2\right| \ , \left|\vec{V}_1\right| \ , \ \left|\overline{M_oM_o'}\right|$$

وبما أن القيمة:

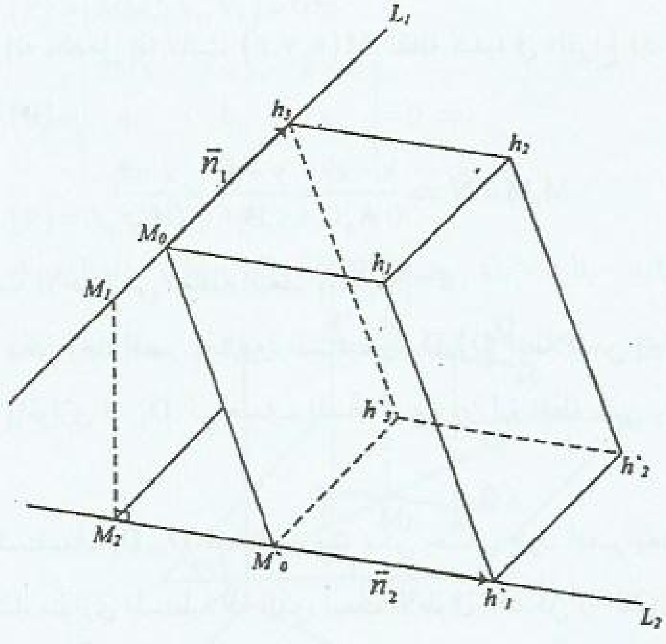
$$\left|\overline{M_o'h_1'} \wedge \overline{M_o'h_3'}\right|=\left|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1\right|$$

تمثل مساحة متوازي الأضلاع $M_o'h_1'h_2'h_3'$ والذي بدوره هو قاعدة في متوازي المستطيلات وبملاحظة أن المقدار $\left|\left(\overline{M_oM_o'}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right)\right|$ يمثل الحجم ومن علاقة حجم متوازي ومساحة قاعدته وارتفاعه نجد أن:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_oM'_o}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right)\right|}{\left|\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2\right|}$$

2- إذا كان D_2, D_1 متقاطعين فإن أقصر بعد بينهما $d = 0$ وهذا يوافق كون الارتفاع مساوياً للصفر وذلك لانعدام البعد الثالث لمتوازي المستطيلات السابق.

3- إذا كان $D_1 // D_2$ فإن المسألة تعود إلى الفقرة (4-9) حساب بعد نقطة من D_1 (M_o مثلاً) عن المستقيم D_2 أو طبعاً حساب بعد نقطة من D_2 (M'_o مثلاً) عن D_1 الشكل (4-21) وبحسب العلاقة _(47) فإن:

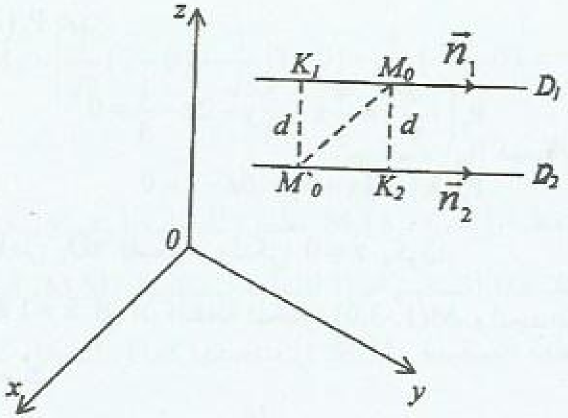


الشكل (4-20)

$$d = \left|\overrightarrow{M_ok_2}\right| = \frac{1}{\left|\vec{V}_2\right|} \ , \ \left|\vec{V}_2 \Lambda \overrightarrow{M'_oM_o}\right|$$

أو:

$$d = \left|\overrightarrow{M'_ok_1}\right| = \frac{1}{\left|\vec{V}_1\right|} \ , \ \left|\vec{V}_1 \Lambda \overrightarrow{M_oM'_o}\right| \qquad (47)$$



الشكل (21-4)

مثال (1): احسب أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_2 \equiv \begin{cases} P_1 \equiv 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ P_2 \equiv x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_1 \equiv \begin{cases} P_3 \equiv x + y - z + 2 = 0 \\ P_4 \equiv x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

الحل: نمرر حزمة مستويات من المستقيم D_2 معادلتها:

$$P_5(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$$
$$= (2+\lambda)x + (1-\lambda)y - 2z + 2\lambda + 1 = 0$$

ويكون منحى المستقيم D_1 هو $V_1 = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$P_5(\lambda) \setminus\setminus D_1 \Leftrightarrow \vec{N}_5(\lambda) . \vec{V}_1 = 0$$

حيث $\vec{N}_5$ المتجه الناظم على حزمة مستويات تمر من المستقيم D_2

$$\Rightarrow (2+\lambda)(1) - 2(1-\lambda) - (2)(-1) = 0$$

$$2 + \lambda - 2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{3}$$

بالتعويض في $P_5(\lambda)$ نجد:

$$P_5\left(\frac{-2}{3}\right)\equiv\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}y-2z-\frac{1}{3}=0$$

$$P_5(\lambda)=4x+5y-6z-1=0$$

وإذا اخترنا من zD_1 بقيمة ما ولتكن $z=0$ يكون:

$x=1$ & $y=-3$ أي أن النقطة المختارة M(1,-3,0)، ولنجد بعد النقطة M عن المستوي $P_5(\lambda)$ حيث:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|4-15-1|}{\sqrt{16+25+36}}$$

$$d=\frac{12}{\sqrt{77}}$$

مثال (2): احسب العمود المشترك بين المستقيمين:

$$D_1\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$$

$$D_2\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$$

الحل: إن أمثال توجيه منحى المستقيم D_1 هي (3,-5,2) وأمثال توجيه منحى المستقيم D_2 هي (2,-3,1)، فتكون أمثال توجيه منحى العمود المشترك عليهما هو:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -5 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

وتكون جيوب تمام توجيه منحى هذا العمود المشترك هي:

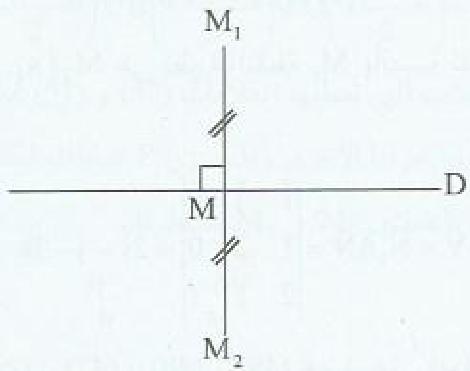
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبما أن المستقيم D_1 يمر بالنقطة M_1 (2,1,-2) والمستقيم D_2 يمر بالنقطة $M_2(0,0,0)$ ويكون طول العمود المشترك للمستقيمين D_2,D_1 هو:

$$\overline{M_1M_2} = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(2-0)+\frac{1}{\sqrt{3}}(1-0)+\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-0)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

11-4- التناظر بالنسبة إلى مستقيم:

تكون النقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة للنقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ بالنسبة إلى المستقيم D إذا كان هذا المستقيم محوراً للقطعة المستقيمة M_1M_2، أي إذا كان المستقيم D يتعامد مع القطعة المستقيمة M_1M_2 في منتصفها كما في الشكل :(22-4)



الشكل (22-4)

وإذا كان المستقيم D محدداً بالمستويين:

$$P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

وبالتالي فإن منحى هذا المستقيم معلوم وهو $\vec{V}(a,b,c)$ وبما أن $\vec{V} \perp \overline{M_1M_2}$ فإن:

$$\vec{V}.\overline{M_1M_2} = a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \qquad (48)$$

وبما أن منتصف M_1M_2 تقع على المستقيم D وهي M فإحداثياتها تحقق معادلتي المستويين P_1 و P_2، أي أن:

$$P_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right) \equiv 0 \qquad (49)$$

$$P_2\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)\equiv 0 \qquad (50)$$

نستخدم المعادلات الثلاث (48) و (49) و (50) لإيجاد نظيرة نقطة بالنسبة لمستوي أو نظير مستوي أو نظير مستقيم بالنسبة لمستقيم.

مثال: أوجد نظيرة النقطة $M_1(1,2,-4)$ بالنسبة للمستقيم المحدد بالمستويين:

$$D\equiv\begin{cases}P_1\equiv x+2y-1=0\\ P_2\equiv 2x+y+z-4=0\end{cases}$$

الحل: بفرض $M_2(x_2,y_2,z_2)$ هي نظيرة النقطة M_1 بالنسبة للمستقيم D ولنجد أولاً منحى المستقيم D:

$$\vec{V}=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

باستخدام العلاقات (47) و (48) و (49) نحصل على العلاقات:

$$2(x_2-1)-1(y_2-2)-3(z_2+4)=0$$
$$\frac{1+x_2}{2}+2\frac{2+y_2}{2}-1=0$$
$$2\frac{1+x_2}{2}+2\frac{2+y_2}{2}+\frac{-4+z_2}{2}-4=0$$

بحل المعادلات الثلاث نجد أن نظيرة M_1 هي النقطة M_2 حيث:

$$M_2\left(\frac{-33}{23},\frac{-18}{23},\frac{-240}{23}\right)$$

12-4- التناظر بالنسبة إلى مستوٍ:

نقول عن النقطتين $M_2(x_2,y_2,z_2),M_1(x_1,y_1,z_1)$ إنهما متناظرتان بالنسبة إلى المستوي: $P\equiv Ax+By+Cz+D=0$

إذا كان المستوي P يتعامد مع القطعة المستقيمة M_1M_2 في منتصفها.

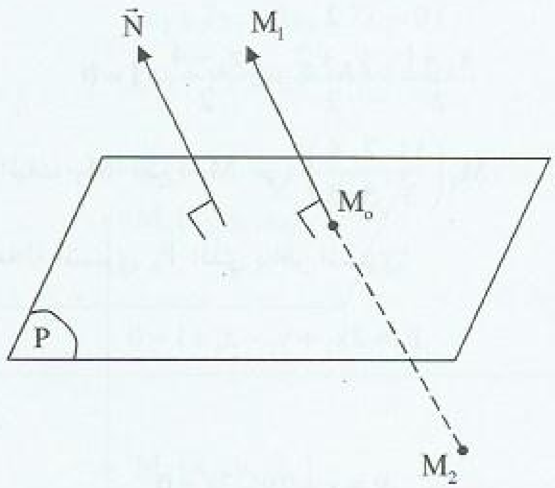
بما أن المستوي P يعامد القطعة المستقيمة M_1M_2 عندئذ وبفرض $\vec{N}$ المتجه الناظم على P. كما في الشكل (4-23) عندئذ فإن $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{N}$ أي أن:

$$\frac{x_1-x_2}{A}=\frac{y_1-y_2}{B}=\frac{z_1-z_2}{C} \qquad (51)$$

والنقطة M_o هي منتصف القطعة المستقيمة M_1M_2 فهي تحقق معادلة المستوي P، أي أن:

$$A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+B\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+C\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+D=0 \qquad (52)$$

إن المعادلات الثلاث التي تعطيها العلاقات (52) و (51) تمكننا من إيجاد إحدى النقطتين M_1 أو M_2 إذا عرفنا الأخرى والمستوي P كذلك تمكننا من إيجاد معادلة المستوي P إذا عرفنا أن النقطتين M_1 و M_2 متناظرتان.



الشكل (4-23)

مثال (1): أوجد نظير النقطة $M_1(1,2,-4)$ بالنسبة للمستوي:

$$P \equiv x-y+2z+1=0$$

الحل: بفرض $M_2(x_2,y_2,z_2)$ هي نظيرة النقطة M_1 بالنسبة للمستوي P.

إن أمثال توجيه منحى الناظم $\vec{N}$ على المستوي P هي $\vec{N}(1,-1,2)$، وبالتالي فإن أمثال توجيه منحى المستقيم المار بالنقطتين M_1 و M_2 المار من M_1 و M_2 هي:

$$\frac{x_2-1}{1}=\frac{y_2-2}{-1}=\frac{z_2+4}{2}$$

كذلك إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M_2 تقع في المستوي P فهي تحقق معادلته:

$$\frac{x_2+1}{2}-\frac{y_2+2}{2}+\frac{z_2-4}{2}+1=0$$

بحل المعادلات الثلاث:

$$\frac{x_2-1}{1}=\frac{y_2-2}{-1}$$

$$\frac{x_2-1}{1}=\frac{z_2+4}{2}$$

$$\frac{x_2+1}{2}-\frac{y_2+2}{2}+2\frac{z_2-4}{2}+1=0$$

نجد أن إحداثيات M_2 نظيرة M_1 هي: $M_2\left(\frac{11}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

مثال (2): أوجد معادلة المستوي P_2 الذي يناظر المستوي:

$$P_1 \equiv 2x_1+y_1-z_1+1=0$$

بالنسبة للمستوي:

$$P \equiv x+2y-3z=0$$

الحل:

لتكن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطة من المستوي P_2 وهي نظيرة النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ من المستوي P_1 عندها فإن أمثال توجيه منحى المستقيم المار من M_1 و M_2 هي نفس مركبات المتجه $\vec{N}$ الناظمي على المستوي P وتكون معادلات المستقيم المار من M_1M_2 هي:

$$\frac{x_1 - x_2}{1} = \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{z_1 - z_2}{-3} = \lambda \qquad (1)$$

كذلك $M_o \in P$ وهي منتصف M_1M_2 إذاً هي تحقق معادلة المستوي P:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + 2\frac{y_1 + y_2}{2} - 3\frac{z_1 + z_2}{2} = 0 \qquad (2)$$

كذلك لدينا بالفرض:

$$2x_1 + y_1 - z_1 + 1 = 0 \qquad (3)$$

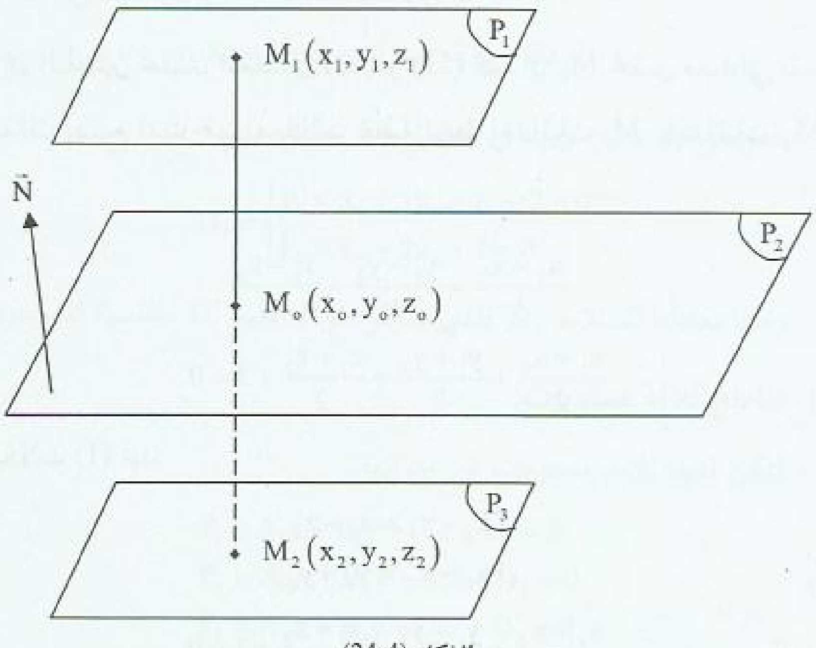
من المعادلات (1) نجد:

$$x_1 = \lambda + x_2$$
$$y_1 = 2\lambda + y_2 \quad , \quad z_1 = -3\lambda + z_2$$

بالتبديل في المعادلتين (2) و (3) نجد:

$$x_2 + 2y_2 - 3z_2 + 7\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$2x_2 + y_2 - z_2 + 7\lambda + 1 = 0 \qquad (5)$$



الشكل (4-24)

من المعادلة (4) نوجد 7λ بدلالة x_2 و y_2 و z_2 ونعوضـها في المعادلـة (5) أي أن:

$$7\lambda = -x_2 - 2y_2 + 3z_2$$
$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 - z_2 + (-x_2 - 2y_2 + 3z_2) + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv x_2 - y_2 + 2z_2 + 1 = 0$$

وهي معادلة المستوي P_2 الذي يناظر المستوي P_1 بالنسبة للمستوي P.

مثال (3): أوجد معادلتي المستقيم D_2 الذي يتناظر مع المستقيم:

$$D_1 \equiv \begin{cases} P_1 \equiv \lambda - y + z = 0 \\ P_2 \equiv x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

بالنسبة للمستوي:

$$P \equiv x + y + z + 3 = 0$$

الحل: لنأخذ النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ من المستقيم D_1 ولتكن $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرة النقطة M من المستقيم D_2 بالنسبة للمستوي P.

إن النقطتين تحققان المعادلتين (52) و (51) كما أن M_1 تحقق معادلتي المستقيم D_1 وبذلك يصبح لدينا خمس معادلات خطية تربط إحداثيات M_1 بإحداثيات M_2.

وهي:

$$\frac{x_1 - x_2}{1} = \frac{y_1 - y_2}{1} = \frac{z_1 - z_2}{1} \qquad (1)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2} + 3 = 0 \qquad (2)$$

من المعادلات (1) نجد:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = z_1 - z_2 \\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (3)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2} + 3 = 0 \qquad (4)$$

بتعويض M_1 في معادلتي D_1 نحصل على:

$$x_1 - y_1 + z_1 = 0 \qquad (5)$$

$$x_1 + 2y_1 - 1 = 0 \qquad (6)$$

والمعادلات الخمس الأخيرة تعطينا معادلتي المستقيم D_2 الذي يتناظر مع المستقيم D_1 بالنسبة للمستوي P.

من المعادلات (3) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + x_2 - y_2 \\ z_1 &= y_1 + z_2 - y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$y_1 = -2 + \frac{1}{3}\left(-2x_2 + y_2 - 2z_2\right)$$

بالتعويض في المعادلتين (7) نجد:

$$z_1 = -2 + \frac{1}{3}\left(-2x_2 - y_2 - z_2\right)$$

$$x_1 = --2 + \frac{1}{3}\left(x_2 - 2y_2 - 2z_2\right)$$

بتعويض x_1 و y_1 و z_1 في معادلتي D_1 نحصل على:

$$D_2 \equiv \begin{cases} P_3 \equiv x_2 - 5y_2 + z_2 - 2 = 0 \\ P_4 \equiv x_2 + 2z_2 + 7 = 0 \end{cases}$$

وهما معادلتا المستقيم D_2 الذي يتناظر مع المستقيم D_1 بالنسبة للمستوي P.

13-4- تقاطع ثلاثة مستويات:

لتكن لدينا ثلاث مستويات غير متوازية:

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ P_3 &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned} \qquad (53)$$

وهنا نميز الحالات الثلاث التالية:

4-13-1- المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة واحدة:

حيث إن المبستقيم الناتج من تقاطع المستويين P_2, P_1 يقطع المستوي الثالث P_3 في نقطة.

إن المعادلات الديكارتية للمستقيم الناتج عن تقاطع المستويين P_2, P_1 هي:

$$\frac{x-x_1}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{y-y_1}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{z-z_1}{A_1B_2-A_2B_1} \tag{54}$$

حيث إن:

$$x_1=\frac{B_1D_2-b_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1} \;,\; y_2=\frac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1} \tag{55}$$

وذلك المستقيم يوازي المستوي P_3، أي أن:

$$A_3\left(B_1C_2-B_2C_1\right)+B_3\left(C_1A_2-C_2A_1\right)+C_3\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\neq 0$$

أو بشكل آخر:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0 \tag{56}$$

والعلاقة (56) تعطي شرط تقاطع ثلاث مستويات في نقطة.

4-13-2- تقاطع ثلاثة مستوياتة في مستقيم:

إذا كانت المستويات الثلاث مشتركة في مستقيم مثل M_1M_2 فإن المستقيم من العلاقة (54) يكون موازياً للمستوي الأخير وبالتالي أي نقطة من المستقيم يجب أن تقع على ذلك المستوي، أي أن:

$$A_3\left(B_1C_2-A_2C_1\right)+B_3\left(C_1A_2-C_2A_1\right)+C_3\left(A_1B_1-A_2B_1\right)=0 \tag{57}$$

وهو شرط التوازي. كذلك فإن:

$$A_3x_1 + B_3y_1 + C_3O + D_3 = 0 \qquad (58)$$

والعلاقة (57) تكتب على الشكل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

كما أن العلاقة (58) يمكن كتابتها على الشكل:

$$A_3\left(\frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\right) + B_3\left(\frac{A_2D_1 - A_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\right) + D_3 = 0$$

أو على الصورة:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0$$

لذلك فإن شرط تقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم واحد هو أن يتحقق:

$$\Delta' = 0 \quad \text{و} \quad \Delta = 0$$

3-13-4- ثلاثة مستويات تشكل هرم مثلثي:

في هذه الحالة يكون المستقيم (56) موازياً للمستقيم (55) ولايوجد تقاطع بين المستقيم (56) والمستوي الأخير P_3.

أي أن: $\Delta = 0$ و $\Delta' \neq 0$ وهما شرط أن تشكل المستويات الثلاث تشكل هرماً مثلثياً.

نتيجة (14):

1- إذا كان $\Delta' \neq 0$ فإن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة نحصل عليها من حل المعادلات الثلاث للمستويات.

2- إذا كان $\Delta = 0$ و $\Delta' \neq 0$ فإن المستويات الثلاثة تشكل هرماً مثلثياً.

3- إذا كانت $\Delta = 0$ و $\Delta' = 0$ فالمستويات الثلاثة تتقاطع في مستقيم.

ويمكن الحصول على أحرف الهرم المثلثي بأخذ كل مستويين ببعضهما بعضاً.

مثال: برهن أن المستويات الثلاثة:

$$P_1 \equiv 12x - 15y + 16z - 28 = 0$$
$$P_2 \equiv 6x + 6y - 7z - 8 = 0$$
$$P_3 \equiv 3x + 35y - 39z + 12 = 0$$

تتقاطع في فصل مشترك. ثم برهن أن تقاطع المستقيم:

$$D: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

مع المستوي P_3 متساوي البعد عن المستويين P_1 و P_2.

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -15 & 16 \\ 6 & 6 & -7 \\ 3 & 35 & -39 \end{vmatrix} = 0 \ \& \ \Delta' = \begin{vmatrix} 12 & 15 & -28 \\ 6 & 6 & -8 \\ 3 & 35 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

إذاً المستويات الثلاثة تتقاطع في فصل مشترك واحد.

من معادلات المستقيم نجد:

$$x = 3\lambda + 1 \ , \ y = -2\lambda \ , \ z = \lambda + 3$$

ولنأخذ النقطة $M(3\lambda+1, -2\lambda, \lambda+3)$ من المستقيم D ونقاطع المستقيم D في تلك النقطة مع المستوي P_3 فهي تحققه:

$$3(3\lambda+1) + 35(-2\lambda) - 39(\lambda+3) + 12 = 0$$

ومنه $\lambda = -1 \Leftarrow$ تكون نقطة التقاطع $M(-2,2,2)$، وبعد هذه النقطة عن المستوي الأول P_1 هو:

$$d_1 = \frac{|-24-30+32-28|}{\sqrt{(12)^2+(15)^2+(16)^2}} = \frac{50}{\sqrt{625}} = 2$$

وبعد النقطة $M(-2,2,2)$ عن المستوي الثاني P_2 هو:

$$d_2 = \frac{|-12+12-14-8|}{\sqrt{(6)^2+(6)^2+(7)^2}} = \frac{22}{\sqrt{121}} = \frac{22}{11} = 2$$

أي أن تقاطع المستقيم D مع المستوي P_3 وهو النقطة $M(-2,2,2)$ هي متساوية البعد عن كل من المستويين P_1 و P_2.

تمارين محلولة (4)

التمرين (1): أوجد معادلة المستقيم D في الحالات التالية:

D -1 يمر من النقطة $M_0(1,-1,-3)$ ويوازي المتجه $\vec{u}=(2,-3,4)$.

D -2 يمر من النقطة $M_0(1,-1,-3)$ ويوازي المستقيم $D|\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{5}$.

D -3 يمر من النقطة $M_0(1,-1,-3)$ ويوازي المحاور الإحداثية.

الحل:

1) بفرض $M \in \Re^3$ كيفية إن شرط وقوعها على المستقيم D هو:

$$\overline{M_0M} /\!/ \vec{u} \Rightarrow \overline{M_0M}=\lambda\vec{u} \Rightarrow$$

$$(x-x_0)\vec{i}(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}=\lambda\left(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right)\Rightarrow$$

$$D|x=1+2\lambda \;,\; y=-1-3\lambda \;,\; z=-3+4\lambda$$

وسيطياً تناظرياً $D|\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$

2) $D_1 /\!/ D$ يمكن اعتبار موجه D_1 موجهاً للمستقيم D ويكون:

$$\overline{M_0M} /\!/ \vec{V}_1 \Rightarrow (x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z+3)\vec{k}=\lambda\left(3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow D\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+5\lambda \end{cases} \quad ; \quad D|\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{5}$$

3) $\overline{ox} /\!/ D$ وإن موجه المحور $\overline{ox}$ هو المتجه $\vec{V}=(1,0,0)$ وعليه فإن:

$$D|\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{0}$$

$$\Leftarrow M_0 \in D \quad , \quad \vec{V}=(1,0,0) \;,\; \overline{oy} /\!/ D$$

$$D|\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{0}$$

$$\vec{V}=(0,0,1)\ ,\ M_0 \in D\ ,\ \overrightarrow{oz}//D$$

$$D\left|\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{1}\right.$$

التمرين (2): أوجد معادلة المستقيم D في الحالات التالية:

1- D يمر بالنقطتين $M_1(-4,1,-3)$, $M_2(-5,0,3)$.

2- D يمر بالنقطة $M_0(2,-3,4)$ وعمودي على كل من المستقيمين:

$$D_1\left\{\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}\right.\ ,\quad D_2\left\{\frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}\right.$$

3- يمر بالنقطة $M_0(-2,0,-1)$ وعمودي على المستوي $2x+3y-z+7=0$.

4- D يقطع المستقيمين:

$$D_1\begin{cases}x-y-z+1=0\\x-2y+z-2=0\end{cases}\quad ,\quad D_2\begin{cases}2x+y+2z+2=0\\x-y+z+3=0\end{cases}$$

$$D_3\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{3}\right.$$

والموازي للمستقيم.

الحل:

1) إن المعادلة العامة لمستقيم يمر من نقطتين معلومتين (البند 4-6-2) هي:

$$D\left|\left\{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right.\right.\Rightarrow D\left\{\frac{x+4}{-5+4}=\frac{y-1}{0-1}=\frac{z+3}{3+3}\right.\Rightarrow$$

$$D\left|\left\{\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}\right.\right.$$

2) لتكن a,b,c هي مركبات موجه المستقيم المطلوب عندئذ فإن معادلته هي:

$$D\left\{\frac{x-2}{a}=\frac{y+3}{b}=\frac{z-4}{c}\right.\qquad D\ni M_0(2,-3,4)$$

نحدد المركبات a,b,c بحيث يكون D عمودياً على D_2, D_1 ومن شرط تعامد مستقيمين نجد:

$$D \perp D_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$
$$D \perp D_2 \Rightarrow aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0$$

بالتعويض عن المقادير $a_2, b_2, c_2 \ \& \ a_1, b_1, c_1$ نحصل على جملة المعادلتين الجبريتين التاليتين:

$$a - b + c = 0$$

$$2a + b + 3c = 0$$

باعتبار c مقدار اختياري نجد أن للمعادلة الجذر المشترك:

$$a = -\frac{4}{3}c \quad , \quad b = -\frac{c}{3} \quad , \quad c = c$$

وتصبح معادلة المستقيم D على النحو التالي:

$$D\frac{x-2}{-\frac{4c}{3}} = \frac{y+3}{-\frac{c}{3}} = \frac{z-4}{c} \quad , \quad c \neq 0 \ \Rightarrow$$

$$D\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-3}$$

3- إن المستقيم D المطلوب عمودي على المستوي المعطى أي $D \perp P \Rightarrow \vec{V} // \vec{N}$.

الناظم على المستوي وموجه المستقيم المطلوب، وبالتالي من أجل قيمة للوسيط $\alpha = 1$ يمكن اعتبار الناظم $\vec{N}$ هو الموجه $\vec{V}$ (كما ويمكن اعتبار أي متجه آخر موافق لقيمة أخرى للوسيط موجهاً للمستقيم)، أي:

$$\vec{V} = \alpha\vec{N} \Rightarrow a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \alpha\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right), \ \alpha = 1$$
$$\vec{V} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad M_0 \in D$$

معادلة مستقيم مار من نقطة معلومة ويوازي متجهاً معطى وبالتالي فإن:

$$D\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \Rightarrow D\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 0+3t \\ z = -1-t \end{cases}$$

أو:

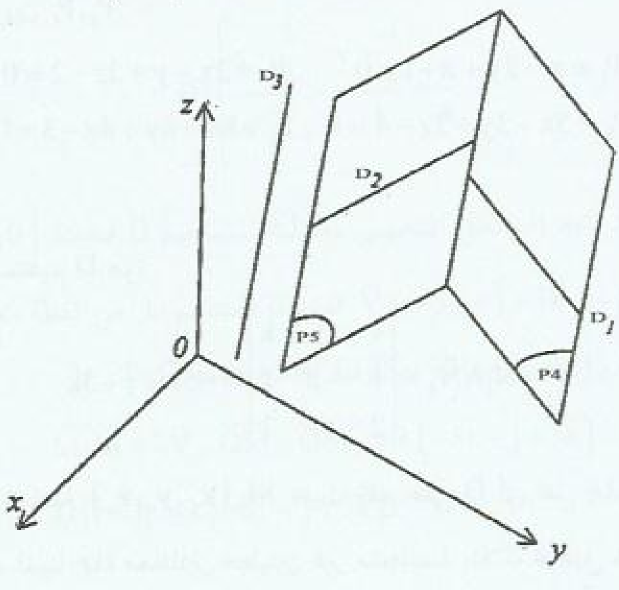
$$D\left\{\frac{x+2}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+1}{-1}\right.$$

4- إن المستقيم المطلوب هو الفصل المشترك لمستويين P_4 يمر من D_1 و P_5 يمر من D_2 بحيث إن كلاً منهما يوازي المستقيم D_3، الشكل (4-25) ، لذلك نوجد أولاً حزمة المستويات (P) المارة بالمستقيم D_1 ويكون:

$$(P) \equiv P_1 + \alpha P_2 = 0$$
$$(P) \equiv (x-y-z+1) + \alpha(x-2y+z-2) = 0$$
$$(P) \equiv (1+\alpha)x + (-1-2\alpha)y + (-1+\alpha)z + (1-2\alpha) = 0$$

نختار من مجموعة المستويات هذه المستوي P_4 الموازي للمستقيم D_3، أي:

$$P_4 // D_3 \Rightarrow \bar{N}_4 \perp \bar{V}_3 \Rightarrow \bar{N}_4 . \bar{V}_3 = 0$$



الشكل (4-25)

وبالتالي نعين قيمة الوسيط α بحيث يكون:

$$(1+\alpha).(1)+(-1-2\alpha)(-2)+(-1+\alpha)(3)=0\ ,\ 8\alpha=0\ ,\ \alpha=0$$

ومن معادلة الحزمة من أجل $\alpha=0$ نجد أن: $P_4=x-y-z+1=0$

وبشكل مشابه فإن معادلة حزمة المستويات المارة من D_2، قيمة الوسيط، المستوي P_5 هي على التوالي:

$$(P)\equiv(2x+y+2z+2)+\alpha(x-y+z+3)=0$$

$$(P)\equiv(2+\alpha)x+(1-\alpha)y+(2+\alpha)z+(2+3\alpha)=0$$

$$\alpha_5 // D_3\ ,\ \vec{N}_5\perp\vec{n}_3\Rightarrow\vec{N}_5.\vec{n}_3=0\ ,\ d=-1$$

$$(P_5)\equiv x+2y+z-1=0$$

والمستقيم المطلوب D يعطى كتقاطع للمستويين P_5,P_4 أي :

$$D|\begin{cases}x-y-z+1=0\\x+2y+z-1=0\end{cases}.$$

التمرين (3): أوجد الشكل التناظري، الوسيطي، المتجهي للمستقيم D المعطى كفصل مشترك للمستويين P_2,P_1:

-1 $P_1\equiv x-2y+z+1=0\quad ,\ P_2\equiv 2x-y+3z-2=0$

-2 $P_2\equiv 5x-3y+2z-4=0\ ,\ P_2\equiv 8x-6y+4z-3=0$

الحل:

1) إن موجه المستقيم D هو:

$$\vec{V}=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -2 & 1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

ونوجد النقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ بحيث تقع على D أي نحل جملة المعادلتين لـ P_2,P_1، وحيث لدينا جملة معادلتين خطيتين غير متجانسة بثلاثة مجاهيل z,y,x لذلك عادة

ما نعطي لأحد هذه المجاهيل قيمة اختيارية ثم نجد وفقها قيمتي المجهولين الآخرين، فمثلاً من أجل $z = 0$ لدينا:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y+1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=0$$

نضرب الثانية بالعدد 2- ونجمع طرفاً لطرف فيكون $x=\frac{5}{3}$ ، نكرر العملية بضرب المعادلة الأولى بالعدد 2- ونجمع فيكون $y=\frac{4}{3}$ والنقطة $M_o(x_o, y_o, z_o)$ هي: $M_o\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},0\right)$، وبالتالي فإن المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي:

$$D\begin{cases} x = x_o + a\lambda \\ y = y_o + b\lambda \\ z = z_o + c\lambda \end{cases} \Rightarrow D\begin{cases} x = \frac{5}{3}-5\lambda \\ y = \frac{4}{3}-\lambda \\ z = 0+3\lambda \end{cases}$$

وتكون المعادلات التناظرية على الشكل:

$$D \left| \begin{cases} \dfrac{x-\frac{5}{3}}{-5} = \dfrac{y-\frac{4}{3}}{-1} = \dfrac{z}{3} \end{cases}\right.$$

أخيراً عند إيجاد الشكل المتجهي لمعادلة المستقيم D لدينا: $M_o\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},0\right)$ و $M(x,y,z)$ الموجه $\vec{V} = -5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ (معادلة مستقيم مار من نقطة معلومة ويوازي متجهاً مفروضاً)، وفي جملة إحداثية ديكارتية نظامية قائمة يكون:

$$\overline{M_oM} = \lambda\vec{V} \ , \ \overline{OM} - \overline{OM_o} = \lambda\left(-5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$D \,|\, \vec{r} - \vec{r}_o = \lambda\left(-5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$D \mid \vec{r} = \vec{r}_o + \lambda\left(-5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$D \mid \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \left(x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}\right) + \lambda\left(-5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$D \mid x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(\frac{5}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} + 0\vec{k}\right) + \lambda\left(-5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

2) بآلية مشابهة لدينا:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

من أجل $z = 0$ لدينا:

$$\left.\begin{matrix} 5x - 3y - 4 = 0 \\ 8x - 6y - 3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad , \quad M_o\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{6}, 0\right)$$

الشكل الوسيطي لمعادلة المستقيم:

$$D \mid \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + 0\,\lambda \\ y = \dfrac{17}{6} - 4\lambda \\ z = 0 - 6\lambda \end{cases}$$

والشكل التناظري:

$$D \mid \left\{ \frac{x - \frac{5}{2}}{0} = \frac{y - \frac{17}{6}}{-4} = \frac{z}{-6} \right.$$

الشكل المتجهي:

$$D \mid x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{17}{6}\vec{j} + 0\vec{k}\right) + t\left(0\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}\right)$$

ملاحظة (9): في المثال السابق ثانياً وعند إيجاد النقطة M_0 لايمكن أن نبدأ بإعطاء $x_0 = 0$ (كقيمة اختيارية لأحد المجاهيل) لأنه في هذه الحالة نحصل على جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} -3y + 2z = 4 \\ -6y + 4z = 3 \end{cases}$$

وهاتان المعادلتان ليس لهما جذر مشترك لأن محدد الأمثال $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$، من جهة أخرى يلاحظ أيضاً أن القيمة $x = \frac{5}{2}$ نحصل عليها دوماً مثلاً من أجل $z = 0, \pm 1, \ldots$ وبالتالي فإن المستقيم السابق واقع في هذا المستوي $\left(x = \frac{5}{2}\right)$.

التمرين (4): ادرس وضع المستقيم D والمستوي P في الحالات التالية:

-1 $D \left| \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - 3z - 5 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P \equiv 2x - y - 2x - 8 = 0$

-2 $D \left| \begin{cases} x - 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P \equiv x + y + z = 1$

-3 $D \left| \begin{cases} 3x - 2y - 24 = 0 \\ 3x - z + 4 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P \equiv 6x + 15y - 10z + 31 = 0$

الحل:

1) نوجد موجه المستقيم D:

$$\vec{V} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

ولدينا:

$$\vec{V}.\vec{N} = \left(-\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}\right).\left(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right) = -2 - 4 + 6 = 0$$

بما أن $\vec{V} \perp \vec{N}$ فإن $D // P$ ولكن D لايقع في المستوي P لعدم وجود نقاط مشتركة بين D و P.

$$\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$$ (2

ومنه:

$$\vec{V}.\vec{N}=\left(\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}\right).\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=4-4=0$$

إذاً $\vec{n}\perp\vec{N}$ وبالتالي فالمستوي P والمستقيم D متوازيان.

$$\vec{V}=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$ (3

$$\vec{V}.\vec{N}=\left(-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}\right).\left(6\vec{i}+15\vec{j}-10\vec{k}\right)=-117\neq 0$$

$\vec{V}$ غير عمودي على $\vec{N}$، وبما أن مركباتهما غير متناسبة فهما غير متوازيين، وبالتالي إن D لايوازي ولايعامد P، والمستقيم والمستوي متقاطعان.

ملاحظة (10):

1- في أولاً نلاحظ أن:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=1-4+3=0$$

أي ليس لجملة المعادلات الثلاث جذر مشترك، إضافة لذلك أنه إذا أخذنا الجملة المكونة من معادلة المستوي P والمعادلة الأولى للمستقيم D أي المستقيم:

$$D_1\left|\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-2z-8=0 \end{cases}\right. ,\quad \vec{V}_1=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1=-\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$$

ثم بأخذ معادلة P والمعادلة الثانية لـ D:

$$D_2 \left| \begin{cases} x-2y-3z-5=0 \\ 2x-y-2z-8=0 \end{cases} \right. \quad , \quad \vec{V}_2 = \vec{N}_2 \Lambda \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

لوجدنا كل مستويين من مجموعة المستويات الواردة في أولاً متقاطعان بفصل مشترك D_2, D_1, D على الترتيب، وبما أن متجهات هذه المستقيمات هي متجهات مرتبطة خطياً، فهذه المستقيمات متوازية، مع أنه لايوجد مستوي يوازي مستوياً آخر بين مستويات هذه الجملة. ويتأكد هذا من خلال محاولة حلّنا للجملة السابقة، فبحذف z من معادلتي D ثم حذفه من معادلته الأولى ومعادلة المستوي نحصل على جملة المعادلتين المتناقضتين التاليتين:

$$4x + y = 8 \quad , \quad 4x + y = 10$$

وهذا يدل على عدم إمكانية حل الجملة السابقة، أي ليس لها أية نقاط مشتركة وبالتالي $P//D$ ولايقع فيه.

2) في ثانياً إن المستقيم $P//D$ لكنه يقع فيه، لأنه وفق أعلاه وعند حذف z من المعادلات الثلاث نحصل دوماً على معادلة وحيدة هي $4x + y - 8 = 0$ والتي لها عدد لانهائي من الحلول وبالتالي لجملة المعادلات الثلاث السابقة عدد لانهائي من الحلول، مما يفسر وقوع D في المستوي P.

3) في ثالثاً إن لجملة المعادلات الثلاث جذر مشترك لأن محدد الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & 15 & -10 \end{vmatrix} = 3(0+15) - 2(-6+30) - 2(45+0) = -93 \neq 0$$

والمستويات الثلاثة تتلاقى في نقطة واحدة.

التمرين (5): بيّن وضع المستقيمين D_2, D_1 (متقاطعان، متعامدان، متوازيان، منطبقان، متخالفان) ثم أوجد أقصر بُعد بينهما في حال التخالف في الحالات التالية:

-1 $$D_1 \left| \begin{cases} 3x-12z+7=0 \\ x+y-3z-1=0 \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \begin{cases} 4x-y+z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \right.$$

-2 $$D_1 \left| \frac{x+3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z-7}{-2} \right. \quad , \quad D_2 \left| \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{\sqrt{6}} \right.$$

-3 $$D_1 \left| \frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+16}{-13} \right. \quad , \quad D_2 \left| \frac{x+1}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z+2}{2} \right.$$

-4 $$D_1 \left| \begin{cases} x=2+2t \\ y=4+3t \\ z=4+t \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \begin{cases} 2x+y-5=0 \\ 3y-2z+9=0 \end{cases} \right.$$

-5 $$D_1 \left| \begin{cases} 2x-3y+8=0 \\ 4x-2y-2z+1=0 \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \left\{ \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4} \right. \right.$$

الحل:

1) نحسب موجه كل من D_2, D_1 ويكون:

$$\vec{V}_1 = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

وإنهما لايقعان في مستوٍ واحد لأن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -12 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} - & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[1+3(-1-4-4)-7(-2-4-12)\right]$$

$$= 0+108+126 = 224 \neq 0$$

وبالتالي فهما متخالفان، ولنحسب أقصر بُعد بينهما: لأجل ذلك نوجد حزمة المستويات المارّة بالمستقيم D_1 ويكون:

$$(P) \equiv P_1 + \alpha P_2 = 0 \,,\, (3x - 12z + 7) + \alpha(x + y - 3z - 1) = 0$$
$$(P) \equiv (3 + \alpha)x + \alpha y + (-12 - 3\alpha)z + (7 - \alpha) = 0$$

من بين مستويات الحزمة هذه نوجد المستوي P الموازي للمستقيم D_2 أي بحيث يكون:

$$\vec{V}_2.\vec{N} = 0 \Rightarrow -2(3 + \alpha) - 4\alpha + 4(-12 - 3\alpha) = 0$$
$$-18\alpha - 54 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$$

والمستوي المطلوب هو:

$$P_3 \equiv (3 - 3)x - 3y + (-12 + 9)z + (7 + 3) = 0$$
$$P_3 \equiv -3y - 3z + 11 = 0$$
$$P_3 \equiv y + z - \frac{11}{3} = 0$$

لنجد الآن نقطة كيفية من D_2 ولنحسب بُعدها عن المستوي P_3 وبالتالي فإن:

$$z = 0 \Rightarrow y = -1 \,,\, x = -\frac{1}{4} \,,\; M_2\left(-\frac{1}{4}, -1, 0\right)$$

ويكون:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow d = \frac{\left|-1 + 0 - \frac{11}{3}\right|}{\sqrt{1 + 1}}$$
$$d = -\frac{14}{\sqrt{2}}$$

ملاحظة (11): إن المستقيمين D_2, D_1 متخالفان لكن الزاوية بينهما هي:

" بيّن D_1 مثلاً و $D_3, D_2 // D_3$ يقطع D_1 "

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|12(-2) - 3(-4) + 3.4|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + 3^2}.\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = 0$$

أي: $\theta = 90^\circ$.

2) المستقيمان D_2, D_1 يقعان في مستوٍ واحد لأن:

$$\vec{V}_1 = -\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - 2\vec{k} \quad , \quad \vec{V}_2 = \sqrt{3}\,\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j} + \sqrt{6}\,\vec{k}$$

$$M\left(3\sqrt{2}, 0, 7\right) \in D_1 \qquad , \qquad M_2\left(0, -1, 1\right) \in D_2$$

والمتجهات $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \overline{M_1M_2}$ تقع في مستوٍ واحد حيث إن:

$$\left(\overline{M_1M_2}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \begin{vmatrix} -3\sqrt{2} & -1 & -6 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$$

$$= -3\sqrt{2}\left(\sqrt{12} + 2\sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{12} + 2\sqrt{3}\right) - 6\left(-\sqrt{6} - \sqrt{6}\right)$$

$$= -12\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 0$$

كمـا أن $D_2 // D_1$ لأن مركبـات المـتجهين غـير متناسـبة: $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq \frac{-2}{\sqrt{3}}$

وبالتالي فالمستقيمان D_2, D_1 متقاطعان بزاوية:

$$\cos\theta = \frac{\left|-\sqrt{6} + \sqrt{6} - 2\sqrt{6}\right|}{\sqrt{2+2+4}\,.\sqrt{3+3+6}} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}.2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ$$

3) لدينا:

$$\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 13\vec{k} \quad , \quad M_1\left(-2, -5, -16\right) \in D_1$$

$$\vec{V}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad M_2\left(-2, -4 -2\right) \in D_2$$

$$\overline{M_1M_2} = \left(-1+2\right)i + \left(-4+5\right)j + \left(-2+16\right)k = i + j + 14k$$

$$\left(\overline{M_1M_2}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 2 & 4 & -13 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \left(8+65\right) + \left(-39-4\right) + 14\left(10-12\right) = 0$$

المستقيمان D_2, D_1 يقعان في مستوٍ واحد وهما إما متوازيان أو متقاطعان، نلاحظ

أن: $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{5} \neq \frac{-13}{2}$ وهما غير متوازيين، وبالتالي هما متقاطعان، وبما أن:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2.3 + 4.5 + (-13)(2) = 0$$

فالمستقيمان متعامدان.

4) $\vec{V}_1 = (2,3,1) \quad , \quad M_1(2,4,4) \in D_1$

$$\vec{V}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} \ , \ M_2(2,1,6)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

5)

$$\vec{V}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k} \quad , \ M_1(0,18,-17)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \qquad , \ M_2(4,2,8) \in D_2$$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \begin{vmatrix} 4 & -16 & -9 \\ -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(12-12) - 16(-1+4) - 9(6-6) = 0$$

المستقيمان D_2, D_1 يقعان في مستوٍ واحد وبما أن: $\frac{-2}{1} = \frac{6}{-3} = \frac{-4}{2} = -2$ فهما

متوازيان.

التمرين (6): أوجد معادلة مسقط المستقيم D على المستوي:

$$D \left| \begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 4y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P_3 \equiv 5x + 2y + 2z - 7 = 0$$

الحل:

حزمة المستويات المارة بالمستقيم D هي:

$$(P)\equiv P_1+\alpha P_2=0\ ,\ (P):3x-2y-z+4+\alpha(x-4y-3z-2)=0$$
$$(P)\equiv(3+\alpha)x+(-2-4\alpha)y+(-1-3\alpha)z+(4-2\alpha)=0$$

من بين جميع مستويات الحزمة هذه نجد المستوي P_4 العمودي على المستوي P_3 أي نحدد الوسيط α من الشرط:

$$\vec{N}.\vec{N}_3=0\Rightarrow$$
$$(P_4)\equiv5(3+\alpha)+2(-2-4\alpha)+2(-1-3\alpha)=0\ ,\ \alpha=1$$
$$(P_4)\equiv4x-6y-4z+2=0$$

والمستقيم D' مرتسم المستقيم D على المستوي P يعطى بالمعادلتين:

$$D'\left|\begin{cases}5x+2y+2z-7=0\\4x-6y-4z+2=0\end{cases}\right.$$

التمرين (7): أوجد بُعد النقطة $M_1(x,y,z)$ عن المستقيم D وإحداثيات موقع العمود النازل منها على هذا المستقيم في الحالتين التاليتين:

-1 $D\,|\,x=-1+t\ ,\ y=2t\ ,\ z=1-t\ ,\ M_1(1,2,3)$

-2 $D\left|\begin{cases}2x+4z-3=0\\4x-2z+2=0\end{cases}\right.\quad,\quad M_1(2,1,3)$

الحل:

1) لدينا موجه المستقيم هو المتجه $D\ni M_o(-1,0,1)\ ,\ \vec{V}=(1,2,-1)$ بتطبيق العلاقة (46) نجد أن:

$$d=\frac{1}{|\vec{V}|}.\left|\overline{M_oM_1}\Lambda\vec{V}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+2^2+1}}\begin{vmatrix}i&j&k\\2&2&2\\1&2&-1\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|-6i+4j+2k|=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{36+16+4}=\sqrt{\frac{28}{3}}$$

لإيجاد إحداثيات موقع العمود نوجد أولاً المستوي P المار من النقطة M والعمودي على المستقيم D ويكون:

$$M(x,y,z),\ \vec{N}(1,2,-1),\ M_1(1,2,3), \vec{V}=\vec{N} \Leftarrow D \perp P$$
$$(P) \equiv \overline{M_1M}.\vec{N}=0 \Rightarrow (P): 1(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0$$
$$(P) \equiv x+2y-z-2=0$$

نعوض معادلات المستقيم D في المعادلة السابقة (حل مشترك لجملة المعادلات هذه) فيكون:

$$(-1+t)+2(2t)-(1-t)-2=0,\ t=\frac{2}{3}$$

بعد إيجاد قيمة الوسط نبدل هذه القيمة في معادلات المستقيم فنحصل على النقطة: $M'_1\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ المسقط القائم للنقطة M_1 على المستقيم D.

2) يمكن اتباع نفس الأسلوب المتبع في أولاً، لكننا نلاحظ أن المستويين P_2,P_1 متعامدان حيث إن:

$$\vec{N}_1=(2,0,4)\ \ ,\ \ \vec{N}_2=(4,0,-2)$$

وعليه فإن:

$$\vec{N}_1.\vec{N}_2=8+0-8=0\ ,\ P_1 \perp P_2$$

وبملاحظة أن البعد d هو القطر في المثلث القائم الشكل (4-23)، $M_1M''_1M'_1$ يكون: $\delta^2=\delta_1^2+\delta_2^2$ حيث δ_2,δ_1 هو بعد النقطة m_1 عن كل من P_2,P_1 على الترتيب ويكون:

$$\delta_1=\frac{|2.2+4.1-3|}{\sqrt{4+16}}=\frac{5}{\sqrt{20}}$$
$$\delta_2=\frac{|4.2+2.1+2|}{\sqrt{20}}=\frac{\delta}{\sqrt{20}}$$
$$\delta=\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}=\sqrt{\frac{25}{20}+\frac{64}{20}}=\sqrt{\frac{89}{20}}$$

التمرين (8): حدد قيمة الوسيط λ لكي يتقاطع المستقيمان:

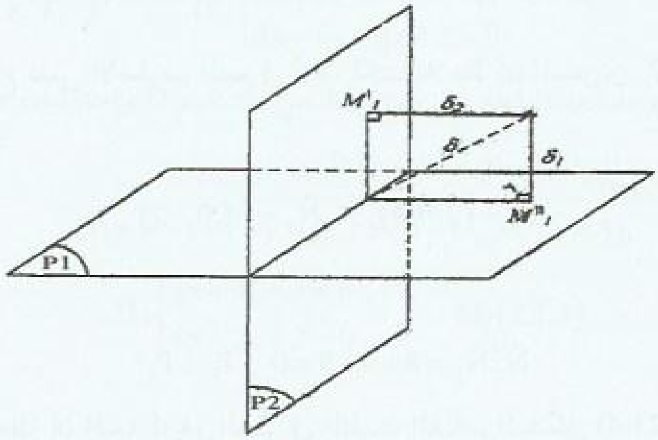
$$D_1 \left| \frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} \right. \quad , \quad D_2 \left| \frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-7}{2} \right.$$

أوجد إحداثيات نقطة التقاطع، ثم أوجد معادلة المستوي المشكل منهما.

الحل:

إن شرط تقاطع المستقيمين D_2, D_1 هو وقوعهما في مستوٍ واحد وألاّ يكونا متوازيين ومنه:

$$M_1(-2,0,1) \in D_1 \quad , \quad M_2(3,1,7) \in D_2$$



الشكل (26-4)

$$\left(\overline{M_1M_2}, \vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ \alpha & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ell = 3$$

بما أن $D_2 // D_1$ واقعان في مستوٍ واحد فهما متقاطعان، ونجد إحداثيات نقطة تقاطعهما بالحل المشترك لجملة المعادلات الممثلة ومنه:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4} \quad , \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

جملة أربع معادلات بثلاثة مجاهيل، بحل ثلاثاً منها فإن الرابعة محققة دوماً، وتكون إحداثيات نقطة التقاطع: $M'(0,-3,5)$.

لإيجاد معادلة المستوي P المشكل منهما، نوجد الناظم عليه $\vec{N}$ من خلال العلاقة:

$$\vec{N}=\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-22\vec{i}+8\vec{j}+17\vec{k}$$

وبما أن المستوي المطلوب يمر من نقطة التقاطع $M'(0,-3,5)$ فإن معادلته هي:

$$(P):\overrightarrow{M'M}.\vec{N}=0$$

$$(P):(x-0)(-22)+(y+3)(8)+(z-5)(17)=0$$

$$(P):-22x+8y+17z-61=0$$

التمرين (9): أوجد طول أقصر بُعد بين المستقيمين:

$$D_1\,|\,\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}\ ,\ D_2\,|\,\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$$

الحل: لدينا: $\vec{V}_1=(2,2,1)\ ,\ \vec{n}_2=(2,2,1)\ ,\ \vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow D_1 // D_2$

وبالتالي بتطبيق العلاقة (51) نجد أن:

$$d=\frac{1}{|\vec{V}_1|}.\left|\overline{M_oM'_o}\Lambda\vec{V}_1\right|=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{183}}{3}=\sqrt{2}$$

تمارين غير محلولة (4)

التمرين (1): أوجد معادلة المستقيم D في الحالات التالية:

1- D يمر بالنقطة $M_o(-1,2-3)$ ويعامد المستقيم $D: x=2\ ,\ y-z=1$

2- D مار بالنقطة $M_o(1,1,1)$ وعمودي على كل من المتجهين:

$$\vec{a}_1=(2,3,1)\ ,\ \vec{a}_2=(3,1,2)$$

3- D مار بالنقطة $M_o(1,-2,3)$ ويصنع زاوية 45° و 60° مع المحورين الإحداثيين oy,ox على الترتيب.

4- D يوازي المستويين $P_1\equiv 3x+12y-3z-5=0\ ,\ P_2\equiv 3x-4y+9z+7=0$ ويتقاطع مع المستقيمين:

$$D_1 \mid \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}\ ,\ D_2 \mid \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

5- D يمر من النقطة $M_o(5,-1,-3)$ ويوازي المستقيم:

$$D \mid \begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$$

6- D يقع في المستوي $z=0$ ويمر من نقطة الأصل وعمودي على المستقيم:

$$D_1 \mid 2x-y=2 \quad , \quad y+2z=-2$$

7- D يمر بالنقطة $M_o(0,2,1)$ ويصنع نفس الزاوية مع كل من المتجهات:

$$\vec{a}=(1,2,2)\ ,\ \vec{b}=(0,3,0)\ ,\ \vec{c}=(0,0,3)$$

8- D يمر بالنقطة $M_o(2,0,-1)$ وعمودي على المستوي: $2x+3y-z+7=0$.

9- D يمر من النقطة $M_o(0,-1,8)$ ويقطع كلاً من المستقيمين:

$$D_1 \mid \frac{x-2}{5}=\frac{y}{0}=\frac{z-9}{1} \quad , \quad D_2 \mid \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{10}=\frac{z-9}{-1}$$

10- المستقيم D يوازي المستويين:

$$P_1 \equiv 3x+12y-3z-5=0 \quad , \quad P_2 \equiv 3x-4y+9z+7=0$$

ويقطع كلاً من المستقيمين $D_1 \mid \vec{r}_1=(-5+2t)\vec{i}+(3-4t)\vec{j}+(-1+3t)\vec{k}$

$$D_2 \mid \vec{r}_2=(3-2t)\vec{i}+(1+3t)\vec{j}+(2+4t)\vec{k}$$

11- D عمودي على المستويين: $P \equiv 3x-y-4z-24=0$ ويقطع كلاً من المستقيمين:

$$D_1 \mid \vec{r}_1=\vec{i}-3\vec{j}+\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)t$$

$$D_2 \mid x=4-2t \ , \ y=3t \ , \ z=-3+8t$$

12- D يمر بالنقطة $M_o(1,0,17)$ ويوازي المستوي $P:3x-y+2z=15$ ويقطع المستقيم $D_1 \mid \vec{r}_1=(1+4t)\vec{i}+(3+2t)\vec{j}+t\vec{k}$.

13- D يمر بالنقطة $M_o(2,3,1)$ ويقطع المستقيم $D \mid \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

14- D يمر بالنقطتين $M_1(1,0,-3)$, $M_2(3,-1,0)$.

15- D يمر بالنقطتين $M_1(3,-1,2)$, $M_2(2,1,1)$

الأجوبة:

1) $y+z+1=0$

2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$

3) $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$

4) $\frac{x+3}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-4}$

5) $\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$

6) $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$

7) $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{0}$

8) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$

9) $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{2}$

10) $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{-4}$

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{-4}$ (11 $\quad$ $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$ (12

$\vec{r}=(2+3t)i+(3+3t)j+(1-t)k$ (13 $\quad$ $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ (14

$x=2+t\ ,\ y=1-2t\ ,\ z=1+t$ (15

التمرين (2): أوجد الشكل التناظري لمعادلات المستقيم D إذا كان:

$D\left|\begin{cases}x+y-z+2=0\\3x-1=0\end{cases}\right.$ (1 $\quad$ $D\left|\begin{cases}2x-3=0\\y+5=0\end{cases}\right.$ (2

$D\left|\begin{cases}x-y+2z=0\\2x+3y-z=0\end{cases}\right.$ (3 $\quad$ $D\left|\begin{cases}3x+5y-6=0\\x-2y+3=0\end{cases}\right.$ (4

$D\left|\begin{cases}y+2z=0\\3y-z=0\end{cases}\right.$ (5 $\quad$ $D\left|\begin{cases}3x+5y-6=0\\x-2y+3=0\end{cases}\right.$ (6

$D\left|\begin{cases}5x+y+z=0\\3x+3y-2z+5=0\end{cases}\right.$ (7

الأجوبة:

$\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$ (1 $\quad$ $\frac{x-\frac{3}{2}}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z}{2}$ (2

$-x=y=z$ (3 $\quad$ $\frac{x+\frac{3}{11}}{0}=\frac{y-\frac{15}{11}}{0}=\frac{z}{11}$ (4

$\frac{x}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ (5 $\quad$ $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$ (6

$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$ (7 $\quad$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ (8

التمرين (3): احسب الزاوية بين المستقيمين D_2, D_1 في الحالات التالية:

$D_2\left|\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}\right.\ ,\ D_1\left|\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}\right.$ (1

$$D_1 \left| \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 6t \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases} \right. \quad (2$$

$$D_1 \left| \begin{cases} 3x - 4y + 3z + 1 = 0 \\ x - 6y - 6z + 2 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{cases} \right. \quad (3$$

$$D_1 \left| \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -3 + t \end{cases} \right. \quad , \quad D_2 \left| \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = 3 - t \end{cases} \right. \quad (4$$

الأجوبة:

$\theta = 60^\circ$ (1 $\qquad$ $\theta = 90^\circ$ (2

$\theta \approx 79^\circ$ (3 $\qquad$ $\theta = 135^\circ$ (4

التمرين (4): أوجد الزاوية بين المستقيم D والمستوي P:

$$D \left| \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 3x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P \equiv 2x + y + z - 4 = 0 \quad (1$$

$$D : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{0} \quad , \quad P \equiv 3x - y + z + 2 = 0 \quad (2$$

$$D \mid x = 7 + 5t\ ,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t \quad , P \equiv 3x - y + 2z - 5 = 0 \quad (3$$

$$D \left| \begin{cases} 7x - 5y + 5z - 11 = 0 \\ x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases} \right. \quad , \quad P \equiv 6x - 3y - 6z + 13 = 0 \quad (4$$

الأجوبة:

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (1 $\qquad$ $\theta = 30^\circ$ (2

$\theta \approx 65^\circ$ (3 $\qquad$ $\theta = 0$ (4

التمرين (5): بين المستقيمين اللذين يقعان في مستوٍ واحد في الحالات التالية:

$$D_1 \left| \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \right. \ , \ D_2 \left| \frac{x+49}{48} = \frac{y+37}{37} = \frac{z}{4} \right. \quad (1$$

2) $D_1 \mid \dfrac{x-10}{11}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{-13} \quad , \quad D_2 \mid \begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1 \\ z=4-t \end{cases}$

3) $D_1 \mid \begin{cases} 2x-3z+2=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases} \quad , \quad D_2 \mid \begin{cases} x-12z+49=0 \\ 4y-37z+148=0 \end{cases}$

4) $D_1 \mid \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-5z+7 \end{cases} \quad , \quad D_2 \mid \begin{cases} y=2x-5 \\ z=7x+2 \end{cases}$

الأجوبة:

1) لايقعان في مستوٍ واحد   2) يقعان في مستوٍ واحد.

3) يقعان في مستوٍ واحد   4) لايقعان في مستوٍ واحد.

التمرين (6): بين وضع المستقيم D والمستوي P في الحالات التالية:

" يطلب إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع هذه".

1) $D \mid \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \quad , \quad P \equiv 4x+y+z+13=0$

2) $D \mid \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-t \\ z=-4t \end{cases} \quad , \quad P \equiv x+2y-z+1=0$

3) $D \mid \begin{cases} 3x-2y+z+1=0 \\ 4x-3y+4z=0 \end{cases}$

4) $D \mid 5(x-1)=5(y+2)=-3z \quad , \quad P \equiv 7x-2y+3z=1$

5) $D \mid 6x=4(y-1)=3(z-1) \quad ; \quad P \equiv x-y+z=3$

6) $D \mid \begin{cases} 6x+3y-2z-2t=0 \\ 6x+y+2z-31=0 \end{cases} \quad ; \quad P \equiv 2x-6y-3z=91$

الأجوبة:

1) متقاطعان $\theta=45^\circ$ و $M(-3,-4,3)$ 2) متقاطعان $\theta=5^\circ$

3) متوازيان

4) متوازيان

5) متقاطعان $M(2,1,5)$

6) متقاطعان (متعامدان) $M(8,-11,-3)$

التمرين (7): أوجد معادلة مسقط المستقيم D على المستوي P في الحالات التالية:

1) $P \equiv 2x-y-3z+6=0 \quad ; \quad D \left| \dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-7} \right.$

2) $P \equiv 2x+2y-z-5=0 \quad ; \quad D \left| \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2} \right.$

3) على المستويات الإحداثية: $D \left| \begin{cases} 3x-2y-z-2=0 \\ x+4y-5z-10=0 \end{cases} \right.$

الأجوبة:

1) $D' \left| \begin{cases} 5x+13y-z+8=0 \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases} \right.$

2) $D' \left| \begin{cases} 3x+2y-z-5=0 \\ x-8y-13z+9=0 \end{cases} \right.$

3) $D' \left| \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0} \right. , \; D' : \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{1} , \; D' \left| x=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1} \right.$

الفصل الخامس

السطوح والمنحنيات في الفضاء

5-1- تعريف السطح ومعادلته:

السطح بالتعريف هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفضاء $\Re^3$ المحققة لمعادلة جبرية من الشكل:

$$(S): F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

بحيث $M(x,y,z)\in(S)$ تحقق المعادلة (1) ، أما إذا كانت $M(x,y,z)\notin S$ فإن إحداثياتها لاتحقق العلاقة (1)، المعادلة (1) تدعى المعادلة الديكارتية للسطح S، من جهة أخرى ولو نظرياً يمكن حل المعادلة (1) بالنسبة إلى أحد المتحولات (z مثلاً) أي يمكن كتابتها على النحو:

$$z:f(x,y) \qquad (2)$$

ثم بوضع $z=\partial$ وسيط، فإن مجموعة النقاط $M(x,y,\partial)$ تشكل منحنياً واقعاً في المستوي xoy (أو مستو آخر يوزيه) وبالتالي فإن المعادلة:

$$(C): F(x,y,\partial)=0 \qquad (3)$$

تمثل منحنٍ في المستوي xoy (أو المستويات الموازية له) وإذا أخذ الوسيط جميع القيم الممكنة ضمن المجال $]-\infty+\infty[$ فإن المنحني السابق (C) يؤلف لنا السطح (S) في المعادلة (1).

في بعض الأحيان قد تكون المتحولات z,y,x متعلقة بوسيطين v,u أي:

$$x=x(u,v)\ ,\quad y=y(u,v)\quad ,\quad z=z(u,v) \qquad (4)$$

وإذا وصلنا النقطة الكيفية M(x,y,z) إلى نقطة الأصل في جملة محاور إحداثية قائمة نظامية الشكل (5-1)، فإن العلاقات السابقة يمكن التعبير عنها متجهياً بالشكل:

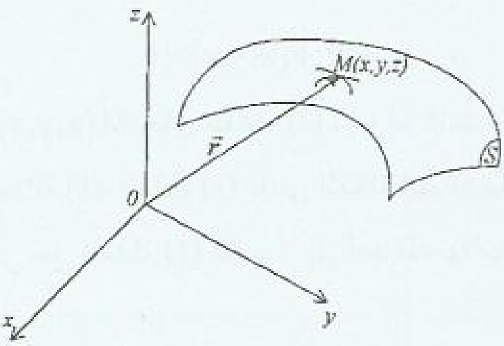
$$\overline{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

أو:

$$\vec{r} = x(u,v)\,\vec{i} + y(x,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k} \qquad (5)$$

$\vec{r}$: نصف القطر المتجهي الواصل بين النقطة M ونقطة الأصل.

العلاقات (4) تعطينا ما يسمى المعادلات الوسيطية للسطح (S)، أما العلاقات (5) فتعطينا المعادلة المتجهية الوسيطية للسطح (S).



الشكل (5-1)

والجدير بالذكر أنه دوماً يمكن الانتقال من شكل لمعادلة السطح إلى شكل آخر، فمثلاً للانتقال من الشكل الوسيطي إلى الشكل الديكارتي يكفي التخلص من الوسيطين v,u في معادلتين من العلاقات (4) ومن ثم تعويض النتيجة في العلاقة الثالثة للوصول إلى العلاقة:

$$F(x,y,z) = 0$$

بالعكس أثناء الانتقال من الديكارتية إلى الوسيطية فيمكن أن نضع مثلاً $x = u, y = v$ بمتجهات الواحدة k,j,I على الترتيب، والجمع طرفاً إلى طرف للوصول للعلاقة:

$$\vec{r} = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k} \qquad (5)$$

5-2- معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح في نقطة منه:

ليكن لدينا السطح (S) المعطى ديكارتياً بالشكل:

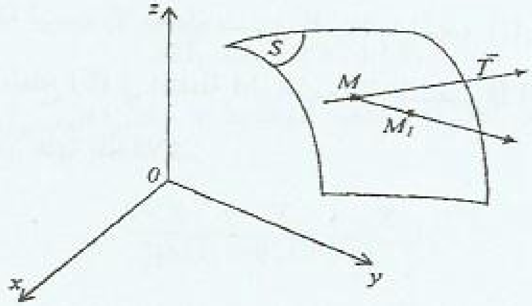
$$(S): F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة منه $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ نقطة عليه قريبة جداً من M، عندئذ فإن المتجه:

$$\overrightarrow{MM_1}=\Delta x\,\vec{i}+\Delta y\,\vec{j}+\Delta z\,\vec{k}$$

لاحظ الشكل (5-2) ومن أجل $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0$ فإنه:

$$\lim \overrightarrow{MM_1}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$$



الشكل (5-2)

الطرف الأيسر في العلاقة السابقة يصطلح على تسميته بمعادلة المماس MT للمنحني $\overrightarrow{MM_1}$ في النقطة M أي:

$$\vec{T}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k} \tag{6}$$

وإذا قارنا العلاقة السابقة بما يعرف بالتفاضل التام للعلاقة (1) أي العلاقة:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0 \tag{7}$$

فإنه يمكن أن ينظر إلى الأخيرة وكأنها الجداء الداخلي لمتجهين متعامدين، الأول منهما هو المتجه $\vec{T}$ والثاني يسمى موجه الناظم $\vec{N}$ على السطح (S)، أي:

$$\vec{N}=F'_x i+F'_y j+F'_z \vec{k} \tag{8}$$

فإذا كانت $M(X,Y,Z)$ نقطة دارجة على السطح وبملاحظة أن:

$$dx \approx \Delta x = X - x, dy \approx \Delta y = Y - y, dz \approx \Delta z = Z - z$$

فإن علاقة الجداء الداخلي السابقة للعلاقة (7) تكتب بالصيغة:

$$(S) \equiv F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0$$

وبوضع:

$$C = F'_z \quad , \quad B = F'_y \quad , \quad A = F'_x \tag{9}$$

ويكون:

$$(P): A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \tag{10}$$

وهذه بالحقيقة ليست إلاّ معادلة مستوٍ P ناظمه المتجه $\vec{N} = (A,B,C)$ ويدعى بالمستوي المماس للسطح (S) في النقطة M، أما معادلة المستقيم D الناظم على السطح S في النقطة M فيعبر عنها بالمعادلات:

$$\frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z} \tag{11}$$

فإذا كانت $(x,y,z) = (x_o, y_o, z_o)$ فإن العلاقتين السابقتين تأخذان الشكل:

$$(P) \equiv A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 \tag{12}$$

$$D_1 \mid \frac{x - x_o}{F'_x} = \frac{y - y_o}{F'_y} = \frac{z - z_o}{F'_z} \tag{13}$$

إذا كان السطح (S) معطى وسيطياً أي:

$$(S): x = x(u,v) \ , \ y = y(u,v) \ , \ z = z(u,v)$$

فإنه من أجل تغيير Δu للوسيط u بين النقطتين: $M(x,y,z)$ و $M_1(x + \Delta x + y + \Delta y, z + \Delta z)$ وعندما $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ من أجل $\Delta u \to 0$ يمكننا الوصول إلى معادلة المماس في النقطة M_1، أي العلاقة:

$$\overline{M_1T} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \tag{14}$$

وبملاحظة أن:

$$dx = x'_u du \quad , \quad dy = y'_u du \quad , \quad dz = z'_u du$$

أو:

$$\frac{dx}{x'_u} = du \quad , \quad \frac{dy}{y'_u} = du \quad , \quad \frac{dz}{z'_u} = du$$

أي:

$$\frac{dx}{x'_u} = \frac{dy}{y'_u} = \frac{dz}{z'_u} = du$$

يمكننا كتابة معادلة التماس على الشكل:

$$\overrightarrow{MT_1} = x'_u\,\vec{i} + y'_u\,\vec{j} + z'_u\,\vec{k} \tag{15}$$

بشكل مشابه من أجل تغير صغير للوسيط v يمكننا الوصول إلى علاقة من الشكل:

$$\overrightarrow{MT_2} = x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_y\vec{k} \tag{16}$$

وعندئذ فإن ناظم المستوي المماس للسطح S في نقطة M(x,y,z) يمكن اعتباره الجداء الخارجي للمتجهين السابقين، أي:

$$\vec{N} = \overrightarrow{MT_1} \wedge \overrightarrow{MT_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \tag{17}$$

حيث إن:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \;,\; B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_u \end{vmatrix} \;,\; C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \tag{18}$$

نحصل على معادلتي المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح S على النحو التالي:

$$(P) \equiv A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

حيث $M_1(X,Y,Z)$ نقطة دارجة على السطح (S).

$$(D)\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}$$

ثم بوضع x_o, y_o, z_o بدلاً من x,y,z ($M_o(x_o, y_o, z_o)$ نقطة معطاة)، z,y,x بدلاً من Z,Y,X نكتب المعادلتين السابقتين بالشكل المألوف:

$$(P)\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0 \qquad (19)$$

$$(D)\frac{x-x_o}{A}=\frac{y-y_o}{B}=\frac{z-z_o}{C} \qquad (20)$$

مثال (1): ليكن السطح:

$$(S)=xy^2+z^2x-2yz=0$$

1- أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلات الناظم على هذا السطح في النقطة $M_o(1,1,1)$.

2- اكتب معادلات المستويات المماسية لهذا السطح والموازية للمستوي $x=0$.

الحل:

1) إن أمثال توجيه الناظم في أي نقطة (x,y,z).

$$F'_x=y^2+z^2$$
$$F'_y=2yx-2z$$
$$F'_z=2xz-2y$$

وفي النقطة $M_o(1,1,1)$ يكون:

$$F'_{x_o}=2 \quad , \quad F'_{y_o}=0 \quad , \quad F'_{z_o}=0$$

ومعادلة المستوي المماس هي:

$$P\equiv F'_{x_o}(x-x_o)+F'_{y_o}(y-y_o)+F'_{z_o}(z-z_o)=0$$

بالتعويض:

$$P \equiv 2(x-1)+O(y-1)+O(z-1)=0$$

ومنه:

$$P \equiv x=1$$

ومعادلات الناظم هي:

$$\frac{x-x_o}{F'_{x_o}}=\frac{y-y_o}{F'_{y_o}}=\frac{z-z_o}{F'_{z_o}}$$

بالتعويض:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$$

وهي معادلات الناظم عند النقطة $M_o\,(1,1,1)$.

2) لنجد أمثال توجيه الناظم على المستويات المطلوبة بالشكل التالي في النقطة $M(x,y,z)$ من السطح التي تكون فيها: F'_x, F'_y, F'_z متناسبة مع أمثال التوجيه هذه. أي في النقاط التي تحقق:

$$\frac{F'_x}{1}=\frac{F'_y}{0}=\frac{F'_z}{0}$$

بالتعويض:

$$\frac{y^2-z^2}{1}=\frac{2yx-2z}{0}=\frac{2xz-2y}{0}$$

ومنه:

$$xy-z=0$$
$$xz-z=0$$

وبما أن النقاط $M(x,y,z)$ تقع على السطح (S) فهي تحقق معادلة السطح بالإضافة إلى المعادلتين الأخيرتين. بحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على:

$$x=\mp 1 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=0$$

إذاً يوجد مستويان يحققان الشرط المطلوب وهما: $x = 1$ و $x = -1$.

مثال (2): ليكن (S) سطحاً معيناً بالمعادلات الوسيطية:

$$x = t\sin a \quad , \quad y = t.\cos a \ , \ z = t$$

أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم عندما:

$$t = 2 \quad , \quad a = \frac{\pi}{3}$$

الحل: من أجل $t = 2 \ , \ a = \frac{\pi}{3}$ نجد أن:

$$x_\circ = \sqrt{3} \quad , \quad y_\circ = 1 \quad , \quad z_\circ = 2$$

ونجد كذلك:

$$x'_t = \sin a = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y'_t = \cos a = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$z'_t = 1$$

كذلك فإن:

$$x'_a = t\cos a = 1$$
$$y'_a = -t\sin a = -\sqrt{3}$$
$$z'_a = 0$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_t & y'_t & z'_t \\ x'_a & y'_a & z'_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

ومعادلة المستوي المماس هي:

$$\alpha(x - x_\circ) + \beta(y - y_\circ) + \gamma(z - z_\circ) = 0$$

$$\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)+\left(y-1\right)-2\left(z-z_{o}\right)=0$$

وهي معادلة المستوي المماس.

أما معادلة المستقيم الناظم فهي:

$$\frac{x-x_{o}}{A}=\frac{y-y_{o}}{B}=\frac{z-z_{o}}{C}$$

حيث $\vec{N}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ بالتعويض:

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

3-5- السطح المتجانس وبعض خواصه:

إن تعريف السطح المتجانس يعتمد على تعريف التابع المتجانس، وبما أن السطح (S) في الفراغ يعطى ديكارتياً بمعادلة من الشكل (1) فلنذكر بتعريف التابع المتجانس ونقول: التابع $F(x,y,z)$ متجانس بالنسبة لوسائطه x,y,z من الدرجة m إذا وجد $t \neq 0$ بحيث تتحقق المتطابقة التالية:

$$F\left(tx,ty,tz\right)=t^{m}F\left(x,y,z\right) \qquad (21)$$

نقول إن السطح (S) المعطى بالعلاقة (1) أنه سطح متجانس من الدرجة m إذا كان التابع في الطرف الأيسر لمعادلته تابعاً متجانساً من الدرجة m.

إن أهم خاصة يتمتع بها السطح المتجانس S هي تحقيقه لما يسمى بمتطابقة أولر:

$$F'_{x}.x+F'_{y}.y+F'_{z}.z=mF\left(x,y,z\right) \qquad (22)$$

بالفعل إن إثبات هذه الخاصة يتم بالاستفادة من تجانس السطح وباشتقاق علاقة التجانس بالنسبة إلى الوسيط t ومن ثم التعويض بالقيمة $t=1$ نحصل على المطلوب.

إضافة إلى الخاصة السابقة فإن السطح المتجانس يمر دوماً من نقطة الأصل أي:

$$F\left(0,0,0\right)=0$$

وهذه الخاصة تنتج بسهولة من علاقة التجانس:

$$F(tx,ty,tz)=t^m F(x,y,z)$$

من أجل $t=0$ حيث يكون $F(0,0,0,)=0$.

نتيجة (1): إن كل سطح متجانس هو سطح مخروطي ويتم برهان ذلك بأخذ نقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)\in S$ فإن نصف القطر المتجهي $\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ يمكن اعتباره متجهاً موجهاً للمستقيم OM_1 المولد للسطح S فإذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة كيفية فإن: $\overrightarrow{OM_1}$

$$\overrightarrow{OM}=t\,\overrightarrow{OM_1}$$

أو:

$$x=0+tx_1\ ,\ y=0+ty_1\ ,\ z=0+tz_1$$

ومن علاقة التجانس:

$$F(tx_1,ty_1,tz_1)=t^m F(x_1,y_1,z_1)$$

وبملاحظة أن $F(x_1,y_1,z_1)$ لأن $M_1\in S$ نجد أن: $F(x,y,z)=0\ ,\ \forall t$، أي أن $\forall t\ M(x,y,z)\in S$ والمستقيم $\overrightarrow{OM_1}$ ما هو إلاّ مولد السطح (S) المار من النقطة 0 وبالتالي هو سطح مخروطي ذروته (رأسه) مبدأ الإحداثيات 0.

نتيجة (2): إذا كان السطح S متجانساً من الدرجة m فإن مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى تمثل سطوحاً متجانسة من الدرجة $m-1$.

بالفعل إذا كان S متجانساً من الدرجة m فإن: $F(tx,ty,tz)=t^m F(x,y,z)$،

وعليه فإن الاشتقاق بالنسبة لـ x مثلاً نجد أن:

$$t.F'_x(tx,,ty,tz)=t^m.F'(x,y,z),\ t\neq 0 \Rightarrow$$
$$F'_x(tx,ty,tz)=t^{m-1}F'(x,y,z)$$

وهكذا بالنسبة إلى كل من z,y والمشتقات من مراتب عليا.

4-5- المستوي المماس للسطح المتجانس في نقطة منه:

إذا كان السطح (S) متجانساً من الدرجة m وكانت $M_o(x_o,y_o,z_o)\in S$ فإن: $F(x_o,y_o,z_o)=0$.

وبما أن معادلة المستوي المماس لسطح ما في نقطة منه تعطى بالعلاقة:

$$(X-x)F'_x+(Y-y)F'_y+(Z-z)F'_z=0$$

فإنه من أجل النقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ للسطح المتجانس (S) فإن:

$$xF'_{x_o}+yF'_{y_o}+zF'_{z_o}-(x_oF'_{x_o},y_oF'_{y_o},z_oF'_{z_o})=0$$

أو ((S) متجانس من الدرجة m ، $M_o\in S$):

$$xF'_{x_o}+yF'_{y_o}+zF'_{z_o}-mF(x_o,y_o,z_o)=0$$

وبما أن $M_o\in S$ أي: $F(x_o,y_o,z_o)=0$ فإن:

$$xF'_{x_o}+yF'_{y_o}+zF'_{z_o}=0$$

وهذه ليست إلاّ معادلة المستوي المماس (P) للسطح المتجانس (S) في النقطة المعلومة $M_o(x_o,y_o,z_o)$.

نتيجة (3): إن المستوي المماس (P) للسطح المتجانس (S) في نقطة معلومة M_o يمس هذا السطح بعدد لانهائي من النقاط تقع على المستقيم OM_o.

مثال: أوجد المستوي المماس للسطح:

$$(S)=4x^3-y^2z=0$$

في النقطة M(1,2,1).

الحل:

$$F'_x=12x^2 \quad , \quad F'_y=-2yz \quad , \quad F'_z=-y^2$$

$$F'_{x_o}=12(1)=12$$

$$F'_{y_o}=-2(2)(1)=-4$$

$$F'_{z_o}=-(2^2)=-4$$

بالتبديل في معادلة المستوي المماس P للسطح (S) المتجانس:

$$P \equiv xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + zF'_{z_0} = 0$$

ومنه:

$$P \equiv 3x - y - z = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب وهذا المستوي يمر من النقطة $M_0\,(1,2,1)$ ومن مركز الإحداثيات 0 ويمس السطح (S) في كل نقاط المستقيم OM_0.

5-5- السطوح الدورانية:

ليكن لدينا المنحني (C) في المستوي P وليكن D مستقيماً ثابتاً عندئذ فإن السطح الناتج عن دوران المنحني (C) حول المستقيم D ندعوه بالسطح الدوراني (S).

فإذا كان المنحني (C) واقعاً في المستوي xoy أي له المعادلة:

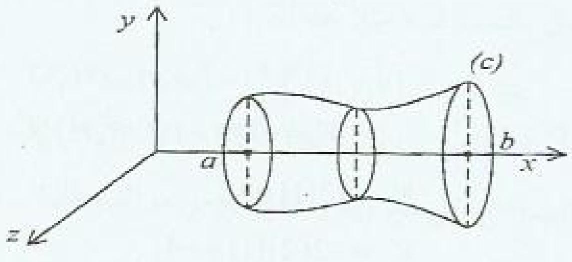
$$y = f(x) \quad , \quad x \in (a,b) \tag{23}$$

ولنفرض أن الدوران يتم حول المحور ox الشكل (5-3) مثلاً، عندئذ فإن كل نقطة $M(x,y,z)$ من المنحني C ترسم دائرة مركزها على المحور ox ونصف قطرها $r = f(x)$ وبالتالي فإن أية نقطة $M \in S$ لأجلها تتحقق العلاقة:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)| \tag{24}$$

أو:

$$(S): y^2 + z^2 = |f(x)|^2 \quad , \quad x \in (a,b)$$



الشكل (5-3)

يمكن ملاحظة أن العلاقة الأخيرة هذه يمكن الوصول إليها عن طريق تربيع طرفي العلاقة (23) والاستعاضة فيها عن كل y^2 بالمقدار $y^2 + z^2$.

في حالة خاصة إذا كان للمنحني (C) المعادلة:

$$y^2 = f(x) \tag{25}$$

عندئذ مباشرة نعوض عن y^2 بالمقدار $y^2 + z^2$.

بآلية مشابهة نحصل على معادلة السطح الدوراني الناتج عن منحنٍ (C) واقع في المستوي xoz ,(yoz) والدوران حول أحد المحاور الإحداثية ox,oz (oz أو oy).

والسطوح الدورانية قد تكون ناقصية، زائدية، مكافئية ... وذلـك يعـود إلى شـكل المنحني (C) المعطى، ولنعرض بعضها:

1- السطح الدوراني الناقصي (مجسم القطع الناقص):

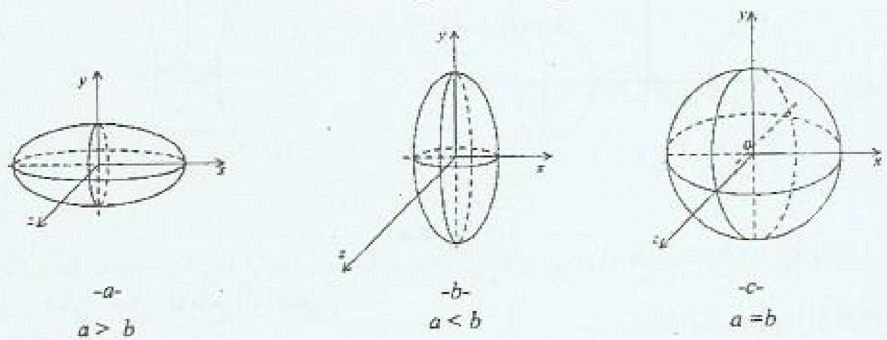
إذا كان المنحني (C) الواقع في المستوي xoy والذي يقوم بالدوران حول المحور ox هو قطع ناقصي، أي له المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{26}$$

فإننا نوجد معادلة السطح الناتج عن الـدوران بإبـدال كـل مـن y^2 و $z^2 + y^2$ ويكون:

$$(S): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{27}$$

الشكل (4-5,a,b,c) يوضح هذا السطح عندما $a > b$, $\alpha < b$ $b = a$.



-a- $a > b$ -b- $a < b$ -c- $a = b$

الشكل (4-5)

مثال: عيّن السطح الذي تمثله المعادلة:

$$12x^2+4y^2+3z^2-36=0$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة على الصورة: (بعد التقسيم على 36).

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{12}=1$$

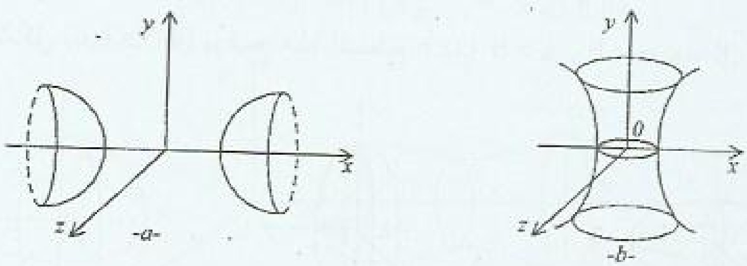
$$\frac{(x-o)}{\left(\sqrt{3}\right)}+\frac{(y-o)^2}{(3)^2}+\frac{(z-o)^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

وهذه المعادلة تمثل سطحاً دورانياً ناقصياً (مجسم قطع ناقص) مركزه مبدأ الإحداثيات (0,0,0) وأنصاف محاوره:

$$a=\sqrt{3}\quad,\quad b=3\quad,\quad c=\sqrt{12}$$

2- السطح الدوراني الزائدي (مجسم القطع الزائد):

إذا كان المنحني (C) قطعاً زائدياً والدوران حول محوره الحقيقي، فإننا نحصل على مايسمى بالسطح الدوراني الزائدي ذي الطيتين الشكل (5-5,a)، ونحصل على السطح الدوراني ذي الطية الواحدة الشكل (5-5,b)، عندما يكون دوران المنحني حول المحور الوهمي.



الشكل (5-5)

فمن أجل القطع الزائدي:

$$(C)\equiv\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (27^*)$$

الواقع في المستوي xoy للوصول لمعادلة السطح في الشكل (5-5,a) يكفي التبديل عن كل y^2 بـ z^2+y^2 ويكون:

$$(S) \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2+y^2}{b^2} = 1 \qquad (28)$$

أما معادلة السطح ذي الطية الواحدة فللوصول إليه نبدل كل x^2 بـ x^2+z^2 ويكون:

$$(S) \equiv \frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (29)$$

مثال(1): عيّن نوع السطح الذي معادلته:

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0$$

الحل: بالتقسيم على 16- نحصل على المعادلة:

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

وهي معادلة سطح دوراني زائدي وحيد النوع محوره ox ومركزه مبدأ الإحداثيات وأنصاف محاوره:

$$a = 4 \ , \ b = c = 2$$

مثال (2): عيّن نوع السطح الذي تمثله المعادلة:

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0$$

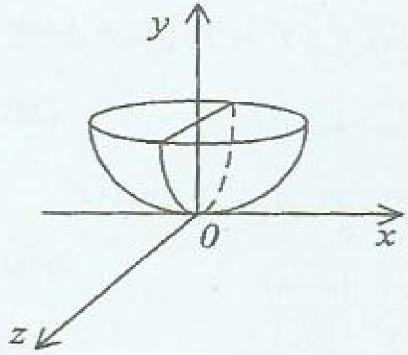
الحل: بالتقسيم على 30 نجد:

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{15} = 1$$

وهي معادلة سطح دوراني زائدي (مجسم قطع زائد) ذي فرعين مركزه النقطة (0,0,0) وأنصاف محاوره:

$$a = \sqrt{10} \quad , \quad b = \sqrt{6} \quad , \quad c = \sqrt{15}$$

3- السطح الدوراني المكافئ (مجسم القطع المكافئ):



الشكل (5-6)

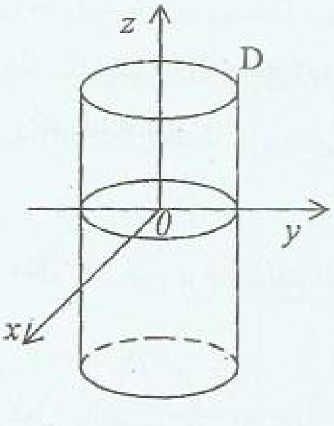
هو السطح الناتج عن دوران قطع مكافئ حول محور تناظره الشكل (5-6)، فإذا كان لدينا القطع المكافئ:

$$x^2 = 2py \quad (30)$$

في المستوي xoy, $p = const$ فإنه لإيجاد معادلة السطح الناتج عن دورانه حول محور تناظره (المحور oy هنا) يكفي أن نبدل كل x^2 بـ $x^2 + z^2$ ويكون:

$$(S): x^2 + z^2 = 2py \quad (31)$$

4- السطح الدوراني الأسطواني (الأسطوانة):



الشكل (5-7)

السطح الدوراني الأسطواني هو سطح دوراني ناتج عن دوران مستقيم D معطى حول أحد المحاور الإحداثية (مثلاً المحور oz) الشكل (5-7)، فإذا كان المستقيم له المعادلة:

$$D | y = a \;, \quad a = const \quad (32)$$

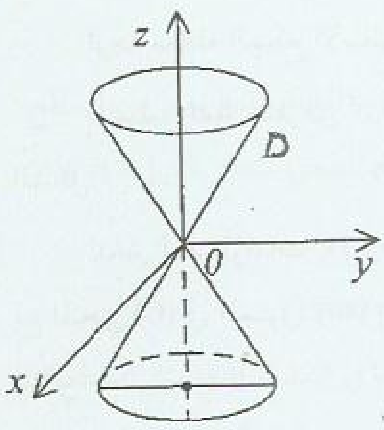
والدوران حول المحور oz عندئذ فإن:

$$(S): x^2 + y^2 = a^2 \quad (33)$$

5- السطح الدوراني المخروطي (المخروط):

السطح الدوراني الناتج عن دوران مستقيم D مار من نقطة الأصل "غير منطبق على أحد المحاور الإحداثية" حول أحد المحاور الإحداثية (oz مثلاً)، يدعى بالسطح الدوراني المخروطي الشكل (5-8)، فإذا كان للمستقيم D المعادلة:

$$D|y = kz \quad , \quad k = const \neq 0 \qquad (34)$$



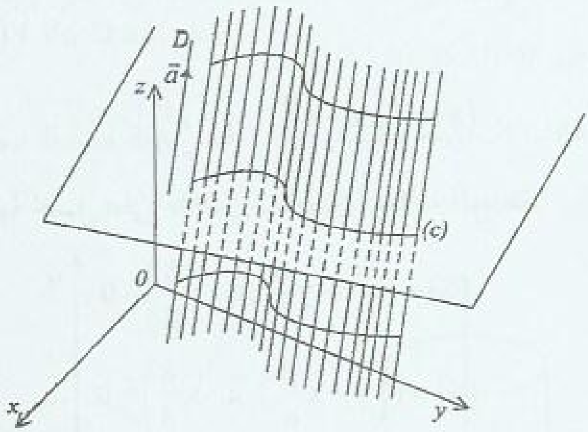
الشكل (5-8)

5-6- السطوح الأسطوانية:

ليكن لدينا المنحني (C) والمستقيم D موجهه المتجه $\bar{a} = (\alpha, \beta, \delta)$, $\delta \neq 0$ ولنفرض أنه من كل نقاط المنحني (C) يمر مستقيم D_i يوازي المتجه $\bar{a}$ الشكل (5-9)، عندئذ ندعو السطح المشكل من مجموعة المستقيمات D_i بالسطح الأسطواني، نطلق على المنحني (C) اسم دليل السطح، أما المستقيم D "أو أحد موازياته" فندعوه مولد السطح.

أي أنه واقع في المستوي yoz والدوران حول oz فإنه يمثل بالمعادلة:

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2 \qquad (35)$$



الشكل (5-9)

- إذا كان المنحني شكلاً هندسياً من الأشكال الشهيرة في المستوي ((قطع ناقص، قطع زائد مكافئ...))، فإن السطح (S) يسمى بالسطح الأسطواني "الناقصي، الزائدي، المكافئ...".

نوجد معادلة السطح الأسطواني على الشكل التالي:

للتسهيل فقط سنفرض أن المنحني (C) واقع في المستوي xoy أي يمثل المعادلة من الشكل:

$$(C) \equiv F(x,y) = 0$$

لنختر أحد المولدات D_i ولتكن $N_i(x_1, y_1, z_1)$ هي نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المنحني (C) في المستوي xoy، إن أية نقطة $M(x,y,z) \in D_i$ تتحقق لأجلها العلاقة التالية:

$$\overline{MN} // \bar{a} \quad , \quad \overline{MN} = t\bar{a}$$

ومنه:

$$(S) \equiv x_1 - x = t\alpha \quad , \quad y_1 - y = t\beta \quad , \quad 0 = z = t\delta$$

بحل العلاقات هذه بالنسبة إلى الوسطاء t, y_1, x_1 نجد أن:

$$t = -\frac{z}{\delta} \; , \; x_1 = x - z\frac{\alpha}{\delta} \; , \; y_1 = y - z\frac{\beta}{\delta}$$

ولدينا $F(x,y) = 0$ لأن $N \in C$ إذاً:

$$(S) \equiv F\left(x - z\frac{\alpha}{\delta} \; , \; y - z\frac{\beta}{\delta}\right) = 0 \qquad (36)$$

بآلية مشابهة نحصل على علاقتين مشابهتين للعلاقة السابقة:

$$(S) \equiv F\left(x - y\frac{\alpha}{\beta}, z - y\frac{\delta}{\beta}\right) = 0 \qquad (37)$$

$$(S) \equiv F\left(y - x\frac{\beta}{\alpha}, \; z - x\frac{\delta}{\delta}\right) = 0 \qquad (38)$$

عندما يكون الدليل (C) واقعاً في المستوي yoz,xoz على الترتيب.

نتيجة (4): إذا كان المنحني (C) واقعاً في المستوي xoy والمولد موازٍ للمحور oz فإن المعادلة:

$$F(x, y) = 0$$

في المستوي xoy تعبر عن المنحني (C) ذاته، أما في الفضاء فإنها تعبر عن السطح الأسطواني الذي دليله (C) ومولداته مستقيمات موازية للمحور (oz)، بالمثل فإن كلاً من المعادلتين:

$$F(y,z) = 0 \qquad\qquad F(x,z) = 0$$

تعبر في المستوي xoz (yoz) عن المنحني (C)، أما في الفضاء فإنها تمثل السطح ذا الدليل (C) والمولدات موازية للمحور oy (ox).

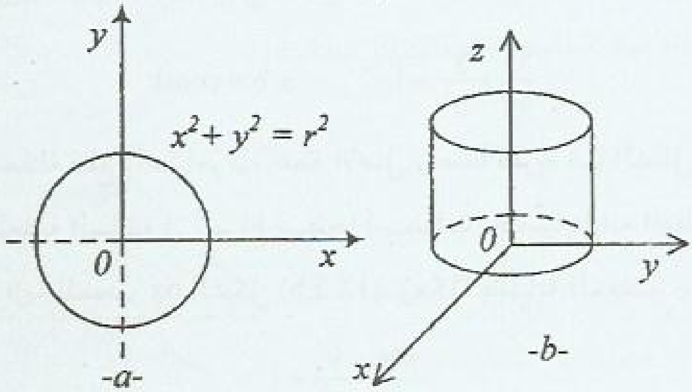
حالات خاصة شهيرة:

1- المعادلة:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad r \neq 0$$

تمثل دائرة في المستوي xoy مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $r > 0$ الشكل $(10-5,a)$ وفي ذات الوقت هي معادلة السطح الأسطواني الذي دليله هذه الدائرة ومولده مواز للمحور oz الشكل (10-5,b).

نتيجة (5): في المعادلة السابقة إذا كان $r = 0$ فهي محققة فقط من أجل النقطة $0(0,0,0)$ وبالتالي السطح أو الدائرة تؤولان إلى نقطة الأصل.

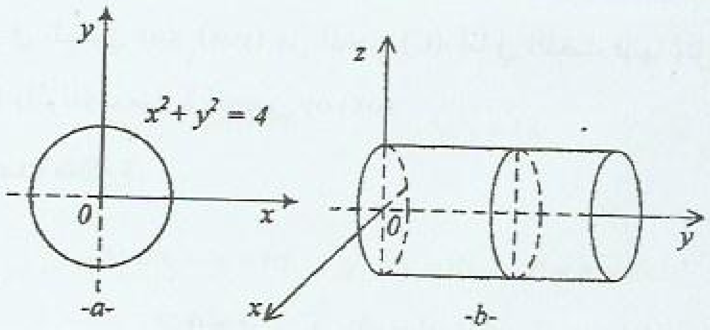


الشكل (10-5)

2- المعادلة:

$$x^2 + z^2 = 4$$

في المستوي oxz تتحقق فقط من أجل نقاط محيط دائرة مركزها النقطة (0,0) ونصف قطرها r = 2 الشكل (11-5,a)، بينما في الفراغ فإن المعادلة تمثل سطحاً أسطوانياً دليله الدائرة هذه ومولداته موازية للمحور oy الشكل (11-5,b).



الشكل (11-5)

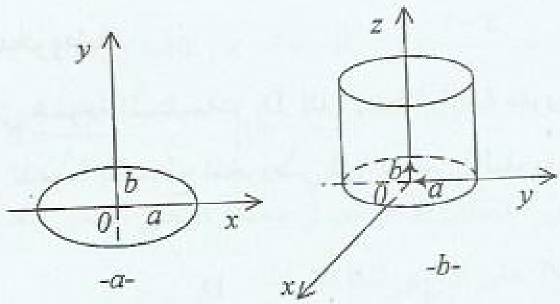
وهكذا بالنسبة إلى المعادلة $y^2+z^2=9$ دائرة في المستوي yoz وسطح أسطواني في الفراغ له الدليل $x^2+z^2=9$ والمولدات مستقيمات موازية للمحور ox، بينما المعادلة $y^2+z^2+9=0$ بالحقيقة لاتمثل أي شكل هندسي مستوٍ أو فراغاً وذلك لعدم وجود نقاط حقيقية تحققها.

3- المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad a, b = \text{const}$$

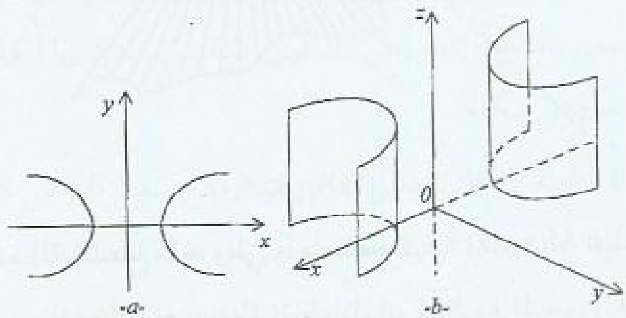
هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ونصفا قطريه b,a الشكل (12-5,a) بينما تمثل المعادلة السابقة في الفراغ سطحاً أسطوانياً ناقصياً دليله القطع الناقص ومولداته موازية للمحور oz الشكل (12-5,b)، وهكذا بالنسبة للمعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



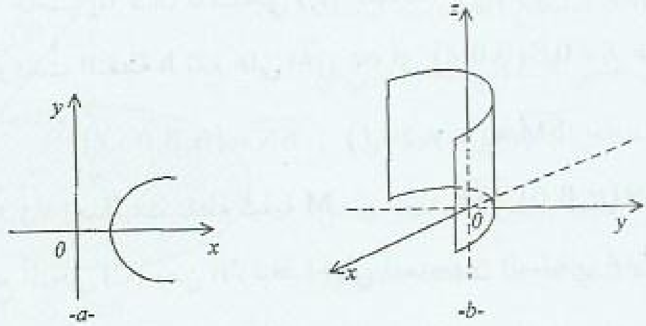
الشكل (12-5)

هي قطع زائد والفرعان في المستوي xoy الشكل (13-5,a) وفراغياً هي سطح أسطواني ذو الطبقتين بمولد مواز للمحور oz الشكل (13-5,b).



الشكل (13-5)

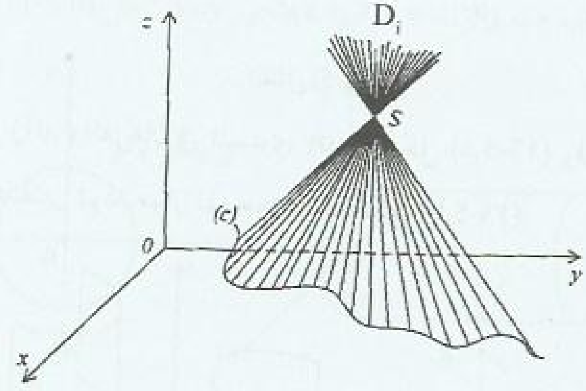
أخيراً المعادلة $y^2 = 2px$ تعبر في المستوي xoy عن قطع مكافئ الشكل (14-5,a) ، وهي ذاتها تعبر عن سطح أسطواني مكافئ في الفراغ دليله القطع المكافئ السابق ومولداته موازية للمحور oz الشكل (14-5,b).



الشكل (14-5)

5-7- السطوح المخروطية:

المحل الهندسي لمجموعة المستقيمات D_i المارة بنقطة ثابتة مفروضة S والقاطعة لمنحني (C) معطى، ندعوها بالسطح المخروطي ذي الرأس (الذروة S) والدليل (C) الشكل (5-15).



الشكل (5-15)

ونوجد معادلة السطح المخروطي بأخذ نقطة كيفية M(x,y,z) مختلفة عن النقطة N فإذا كانت $N(x_1, y_1, z_1)$ هي نقطة تقاطع المولد $\overline{SM}$ مع المنحني (C) فإن:

$$(S): \overline{SM} // \overline{SN}$$

$$(S): \overline{SM} = t\,\overline{SN}$$

$t \neq 0$ وسيط ما.

في حالة خاصة إذا كان للمنحني (C) المعادلة: $(C): F(x, y) = 0$، أي يقع في المستوي xoy وكانت النقطة h تقع على المحور oz أي $S(0,0,\ell)$ $\ell \neq 0$، عندئذ فإن:

$$\overline{SM} = (x, y, z - \ell) \quad , \quad \overline{SN} = (\alpha, \beta, 0 - \ell)$$

حيث z,y,x إحداثيات نقطة كيفية M من المولد $\overline{SM}$، $N(\alpha, \beta, 0)$ نقطة تقاطع المولد $\overline{SM}$ مع المنحني (C) ومن الارتباط الخطي للمتجهين السابقين نجد أن:

$$x = t\alpha \ , \ y = t\beta \ , \ z - \ell = -t\ell \ , \ t = \frac{\ell - z}{\ell} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\ell x}{\ell - z} \qquad , \qquad \beta = \frac{\ell y}{\ell - z}$$

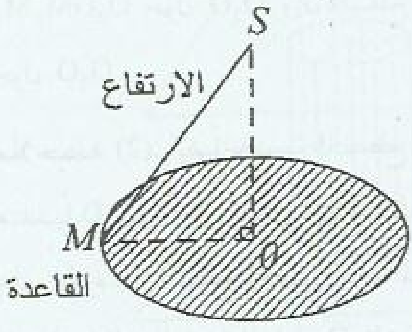
ثم بتعويض القيمتين الأخيرتين في معادلة المنحني آخذين بعين الاعتبار وقوع النقطة $N(\alpha,\beta,0)$ على المنحني (C) نجد أن:

$$(S): F\left(\frac{\ell x}{\ell - z}, \frac{\ell y}{\ell - z}\right) = 0 \tag{39}$$

إذا كان المنحني (C) "دليل السطح المخروطي" شكلاً هندسياً شهيراً "دائرة، قطع ناقص، زائد، مكافئ..." في المستوي P فإن السطح المخروطي (S) ذا الدليل (C) والرأس S $(S \in P)$ يسمى بالسطح المخروطي الدائري، الناقصي، الزائدي، المكافئ... (تضاف إلى تسميته صفة تعبر عن شكله).

وفي حالة خاصة إذا كان الدليل (C) دائرة وكان مسقط الرأس S عليها يقع في مركز هذه الدائرة، فإننا ندعو السطح المخروطي في هذه الدائرة بالسطح المخروطي الدائري القائم، وندعو الدليل في هذه الحالة بقاعدة السطح، أما البعد بين النقطة S والمركز O أي الطول $\overline{OS}$ بارتفاع السطح المخروطي الشكل (16-5).

وهنا يمكن اعتبار السطح المخروطي متولداً عن دوران المثلث القائم الزاوية $S\hat{O}M$ حول الضلع القائمة SO، حيث يعطينا وتره SM السطح المطلوب، لذلك عادة ما يطلق على السطح المخروطي في هذه الحالة بالسطح المخروطي الدوراني.

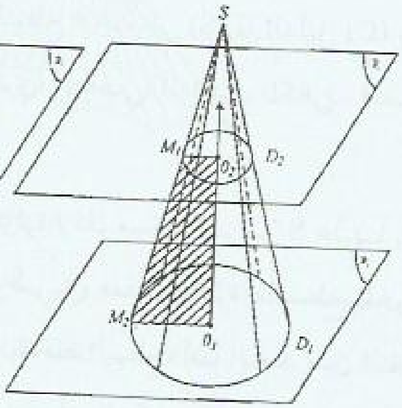


الشكل (16-5)

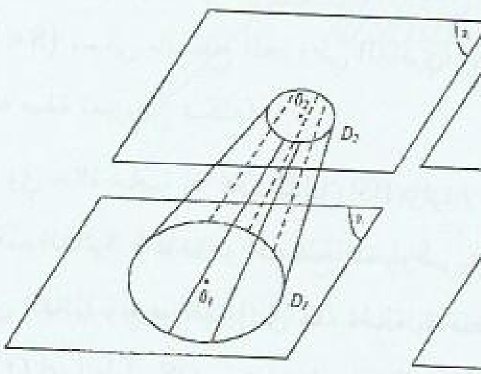
أما إذا أخذنا بعين الاعتبار كامل الشكل المتولد عن دوران المثلث المذكور (نقاط السطح والنقاط التي داخله)، فإننا

أمام ما يسمى بالمخروط الدوراني ذي القاعدة D والرأس S.

ملاحظة (1): إذا كان لدينا المخروط الدوراني ذو القاعدة D_1 الواقعة في مستوٍ P_1 ورأسه $S \in \sigma_1$ وقطعناه بمستوٍ $P_1 // P_2$ عندئذ فإن جزء المخروط الدوراني المحصور بين المستويين P_1, P_2 "القاعدة السفلى D_1 والقاعدة العليا D_2 ندعوه بمقطع المخروط (الشكل 5-17)، وفي حالة خاصة إذا كان المخروط دورانياً قائماً فإن المقطع يدعى بالمقطع المخروطي القائم" الارتفاع عندئذ هو البعد O_1O_2 بين مركز الدائرتين D_2, D_1 الممثلين للقاعدتين السفلى والعليا، الشكل (5-17).



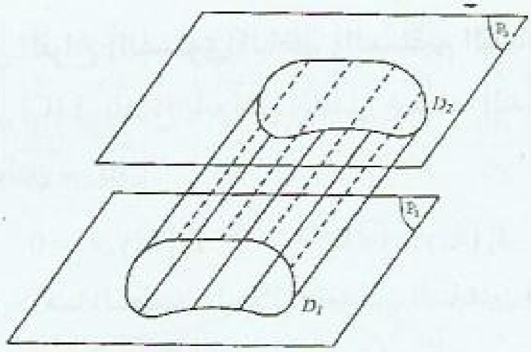
الشكل (5-17)



الشكل (5-18)

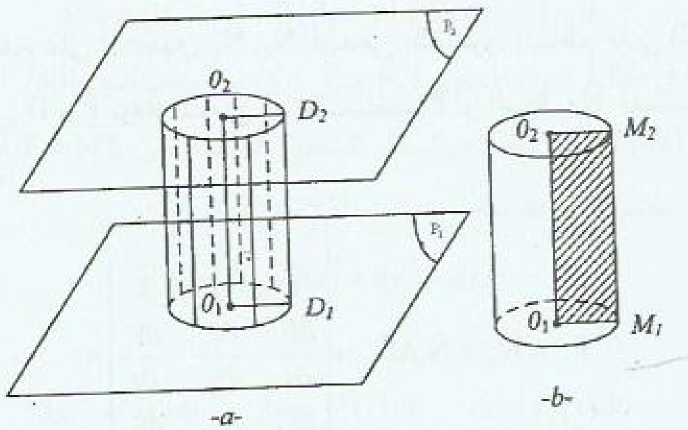
وعندئذ يمكن ملاحظة أن المقطع المخروطي القائم ينتج عن دوران شبه المنحرف $O_2OM_2M_1$ حول O_2O وإن السطح الجانبي للمقطع يتولد عن دوران الحرف M_2M_1 حول O_2O.

ملاحظة (2): أيضاً بالنسبة للسطح الأسطواني إذا كان المنحني (C) يحصر شكلاً هندسياً D شهيراً في المستوي P_1، وقطعنا هذا السطح بمستوٍ آخر $P_2 // P_1$ فإننا نطلق على الجزء من السطح المحصور بين المستويين P_2, P_1 المقطع الأسطواني ذي القاعدة السفلى D_1 والقاعدة العليا D_2 الشكل (5-19).



الشكل (5-19)

وفي حالة خاصة إذا كان D_1 عبارة عن دائرة وكان مولد السطح المستقيم D عمودياً عليها (على المستوي P_1) فإن الشكل D_2 هو دائرة أيضاً واقعة في المستوي P_2 ويكون مسقط مركزها O_2 على المستوي P_1 منطبقاً على O_1 مركز الدائرة D_1 الشكل (20-5,a)، والمقطع في هذه الحالة يسمى أسطوانة دائرية قائمة قاعدتها السفلى D_1 وقاعدتها العليا D_2 وارتفاعها هو العمود O_1O_2 (أو أي عمود آخر بين المستويين "P_2, P_1"، مع ملاحظة أن الأسطوانة القائمة في هذه الحالة يمكن اعتبارها متولدة عن دوران المستطيل $O_1O_2M_2M_1$ حول الضلع O_1O_2، إن السطح المتولد عن M_2M_1 هو السطح الجانبي للأسطوانة ويقال عن الارتفاع O_1O_2 محور الأسطوانة الدائرية القائمة الشكل (20-5,b).



الشكل (5-20)

8-5- المنحني في الفراغ (المستوي الناظم والمستقيم المماس):

يعرف المنحني (C) في الفراغ بأنه المحل الهندسي لمجموعة النقاط M(x,y,z) التي تحقق بأن واحد معادلتين جبريتين:

$$F_1(x,y,z)=0 \quad , \quad F_2(x,y,z)=0$$

فإذا كان S_2, S_1 هما السطحان الممثلان بالمعادلتين السابقتين فإننا نقول إن المنحني (C) معطى كتقاطع لهما، ونكتب ذلك اختصاراً بالشكل:

$$(C)\equiv\begin{cases}(S_1)\equiv F_1(x,y,z)=0\\(S_2)\equiv F_2(x,y,z)=0\end{cases} \tag{40}$$

كما ويمكن التعبير عن (C) بأشكال مختلفة لأنه قد يكون هناك سطح ثالث أو أكثر يشترك مع $(S_1),(S_2)$ بالفصل المشترك هذا إضافة إلى إمكانية التعبير عن هذا المنحني متجهياً ووسيطياً من خلال وصل النقطة الكيفية $M(x,y,z)\in(C)$ ومن أجل وسيط مناسب t بمبدأ الإحداثيات 0(0,0,0) حيث يكون:

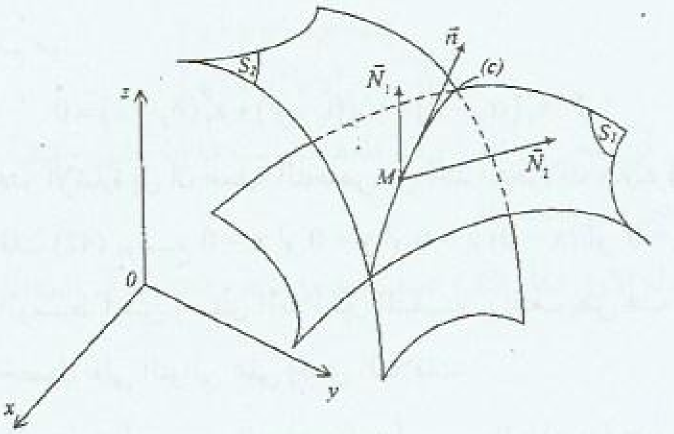
$$\begin{aligned}&(C)\equiv\vec{r}=\overline{OM}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\\&(C)\equiv x=x(t)\,,\; y=y(t)\,,\; z=z(t)\,,\; t_o\le t\le T\end{aligned} \tag{41}$$

يدعى المستقيم $\overline{MT}=D$ العمودي على منحيي الناظمين $\vec{N}_2,\vec{N}_1$ للسطحين z,y الشكل (5-21) في النقطة M بالمستقيم المماس للمنحني (C) في هذه النقطة، أما المستوي P المقام على المتجهين $\vec{N}_2,\vec{N}_1$ فيدعى بالمستوي الناظم على (C)، ونوجد معادلة كلٍّ من D و P بإيجاد المنحى $\vec{n}$ للمستقيم D أو الناظم $\vec{N}$ للمستوي P من خلال العلاقة:

$$\vec{n}_L=\vec{N}_\sigma=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial F_1}{\partial x}&\frac{\partial F_1}{\partial y}&\frac{\partial F_1}{\partial z}\\\frac{\partial F_2}{\partial x}&\frac{\partial F_2}{\partial y}&\frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}= \tag{42}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{N} : A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \tag{43}$$



الشكل (5-21)

فإذا كانت $M_1(\alpha_1,\beta_1,\delta_1)$ نقطة دارجة على D، $M_2(\alpha_2,\beta_2,\delta_2)$ نقطة دارجة على P يكون على التوالي:

$$D \,|\, \frac{\alpha_1 - x}{A} = \frac{\beta_1 - y}{B} = \frac{\delta_1 - z}{C} \tag{44}$$

$$P \equiv A(\alpha_2 - x) + B(\beta_2 - y) + C(\delta_2 - z) = 0 \tag{45}$$

هذا في حالة كون المنحني (C) يمثل ديكارتياً بالمعادلتين (40)، أما إذا أعطى بالعلاقات (42) فيمكن إيجاد مركبات المنحني $\vec{n}$ للمماس $L = \overline{MT}$ أو المنحني $\vec{N}$ للمستوي الناظم σ بأخذ تفاضل هاتين العلاقتين ويكون:

$$\vec{n}_L = \vec{N}_\sigma = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \tag{46}$$

حيث إن:

$$dx = x'_t(t)\,dt \quad , \quad dy = y'_t(t)\,dt \quad , \quad dz = z'_t(t)\,dt \tag{47}$$

$$\frac{dx}{x'_t(t)}=\frac{dy}{y'_t(t)}=\frac{dz}{z'_t(t)}=dt \quad (48)$$

وبالتالي فإن معادلة المستقيم المماس L هي:

$$D|\overline{MT}:\frac{\alpha_1-x}{x'_t(t)}=\frac{\beta_1-y}{y'_t(t)}=\frac{\delta_1-z}{z'_t(t)} \quad (49)$$

والمستوي الناظم هو:

$$P:x'_t(\alpha_2-x)+y'_t(\beta_2-y)+z'_t(\delta_2-z)=0 \quad (50)$$

أخيراً تجدر الإشارة إلى أن عملية التخلص من أحد التحولات z,y,x في العلاقتين (40) أو العلاقات (42) بوضع $x=0$ أو $y=0$ أو $z=0$ $(x=0)$ أو $y=0$ أو $z=0$ أو $z=0$ ومن ثم إيجاد الوسيط t من إحدى العلاقتين المتبقيتين والتعويض عنه في العلاقة الأخرى) أي الحصول على التوالي على إحدى العلاقات:

$$(C_1):\begin{cases}\varphi_1(y,z)=0\\ x=0\end{cases},\ (C):\begin{cases}\varphi_2(x,z)=0\\ y=0\end{cases},\ (C_3):\begin{cases}\varphi_3(x,y)=y\\ z=0\end{cases} \quad (51)$$

هذه العملية تدعى بعملية إسقاط المنحني (C) على المستويات الإحداثية xoy,xoz,yoz على الترتيب.

ملاحظة (3): بما أن عملية تمثيل معادلة جبرية من الشكل (40) لسطح فراغي تشترط تحقيق النقاط M(x,y,z) لهذه المعادلة، وبالتالي كون هذه المعادلة لها جذور حقيقية فإنه إذا لم توجد لها مثل هذه الجذور فهذا يعني استحالة تمثيلها لسطح فراغي، مثلاً المعادلة $x^2+y^2+z^2=0$ لها جذور واحدة $x=y=z=0$ محققة فقط في نقطة الأصل، وبالتالي هي تمثل النقطة 0(0,0,0) فقط، بينما المعادلة $x^2+y^2+z^2+1=0$ ليس لها أية جذور حقيقية وهي لاتعبر عن سطح أو حتى أي شكل فراغي.

مما سبق نستنتج أن كل سطح فراغي يمثل معادلة جبرية واحدة على الأقل، بينما العكس غير صحيح، فإنه ليست كل معادلة جبرية $F(x,y,z)=0$ تعبر عن سطح في

الفراغ، وهذا أيضاً ينطبق على المنحني (C) وعلى جُملة المعادلتين (40)، فكل منحن في الفراغ يعبر عنه بجملة واحدة على الأقل من الشكل (40) لكن ليست كل جملة تمثل منحنىً في الفراغ "قد لايكون لإحدى المعادلتين جذور حقيقي أو قد لايكون للمعادلتين معاً أية جذور مشتركة" مثلاً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ x^2+y^2+z^2+1=0 \end{cases} \quad (52)$$

لاتمثل أي منحنٍ في الفراغ لأن المعادلة ليست لها أية جذور حقيقية حتى ليست لجملة المعادلتين جذور مشتركة.

فالمعادلة الأولى تمثل الكرة نصف قطرها معدوم (نقطة)، أما المعادلة الثانية فتمثل كرة وهمية.

تمارين محلولة (5)

التمرين (1):

بيّن أن السطح المعطى بالمعادلة:

$$F(x,y,z)=\alpha\left(a_1x+b_1y+c_1z+d_1\right)^2+\beta\left(\alpha_2x+b_2y+c_2z+d_2\right)^2=0$$

حيث $\alpha.\beta<0$ يعبر عن مستويين، ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه α و β لكي يتعامد هذان المستويان؟.

الحل:

إذا وضعنا:

$$u=a_1x+b_1y+c_1z+d_1$$
$$v=a_2x+b_2y+c_2z+d_1$$

فإن العلاقة تكتب على الشكل:

$$\alpha u^2+\beta v^2=0\ ,\ \ u^2+\frac{\beta}{\alpha}v^2=0\ ,\ \ u^2-\delta v^2=0$$

$$\alpha.\beta<0\qquad ,\ \ \frac{\beta}{\alpha}<0\Rightarrow-\frac{\beta}{\alpha}>0\ ,\ \ \delta=-\frac{\beta}{\alpha}$$

ومنه بالتحليل وفق المتطابقات الشهيرة نجد أن:

$$\left(u-\sqrt{\delta}v\right)\left(u+\sqrt{\delta}.v\right)=0\Rightarrow$$

$$u-\sqrt{\delta}=0\ ,\left(a_1-\sqrt{\delta}a_2\right)x+\left(b_1-\sqrt{\delta}b_2\right)y+\left(c_1-\sqrt{\delta}c_2\right)+\left(d_1-\sqrt{\delta}d_2\right)=0$$

$$P_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

وبآلية مشابهة نجد أن:

$$P_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

من أجل $u+\sqrt{\delta}.v=0$ حيث إن:

$$A_1=a_1-\sqrt{\delta}a_2,\; B_1=b_1-\sqrt{\delta}b_2\;,\; C_1=c_1-\sqrt{\delta}c_2,$$
$$D_1=d_1-\sqrt{\delta}d_2$$
$$A_2=a_1+\sqrt{\delta}a_2,\; B_2=b_1+\sqrt{\delta}b_2\;,\; C_2=c_1+\sqrt{\delta}c_2,$$
$$D_2=d_1+\sqrt{\delta}d_2$$

لكي يتعامد المستويان P_2, P_1 يجب أن يتعامد الناظمان ومنه:

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \vec{N}_1.\vec{N}_2=0$$

بتطبيق هذا الشرط نجد أن:

$$\left(a_1-\sqrt{\delta}a_2\right)\left(a_1+\sqrt{\delta}a_2\right)+\left(b_1-\sqrt{\delta}b_2\right)\left(b_1+\sqrt{\delta}b_2\right)+$$
$$+\left(c_1-\sqrt{\delta}c_2\right).\left(c_1+\sqrt{\delta}c_2\right)=0 \Rightarrow$$
$$+\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)-\delta\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)=0$$
$$|\vec{N}_1|^2-\delta|\vec{N}_2|^2=0 \Rightarrow \alpha|\vec{N}_2|^2=\beta|\vec{N}_2|^2$$

التمرين (2): حدد السطح الفراغي الذي تمثله المعادلات الوسيطية:

$$x=a\cos\alpha\cos\beta \quad , \quad y=b\cos\alpha\sin\beta \;\; , \;\; z=c\sin\alpha$$
$$0\neq a,b,c=\text{const}$$

β, α: وسيطان.

الحل:

$$\frac{x}{a}=\cos\alpha\cos\beta \;\; , \;\; \frac{y}{b}=\cos\alpha\sin\beta \;\; , \frac{z}{c}=\sin\alpha$$

بتربيع هذه العلاقات والجمع طرفاً لطرف نجد أن:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha$$
$$=\cos^2\alpha\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

وهي معادلة مجسم قطع ناقصي ثلاثي المحاور a,b,c .

التمرين (3): أوجد المستوي المماس والمستقيم الناظم على السطح:

$$(S): x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=3$$

في النقطة $M_o(1,2,3)$.

الحل:

نوجد أولاً مركبات $\vec{N}$ على المستوي المماس " $\vec{n}$ موجه المستقيم الناظم" وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$\vec{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i}=\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k$$

$$\vec{N}=2xi+\frac{y}{2}j+\frac{2}{9}zk$$

$$\vec{N}=2(1)i+\frac{1}{2}.(2)j+\frac{2}{9}(3)\bar{k} \qquad \vec{N}(M_o)$$

$$\vec{N}=2i+j+\frac{2}{3}\bar{k}\Rightarrow P\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)C(z-z_o)=0$$

ومعادلة المستوي المماس للسطح S هي:

$$P\equiv 2(x-1)+(y-2)+\frac{2}{3}(z-3)=0$$

$$P\equiv 2x+y+\frac{2}{3}x-6=0$$

ومعادلة المستقيم الناظم على السطح هي:

$$D|\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{\frac{2}{3}} \quad , \quad D|\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$$

التمرين (4): أوجد الفصل المشترك "المستقيم D" للمستويين المماسين للسطحين:

$$(S_2): xy+yz+xz=3 \quad , \quad (S_1): x^2yz=1$$

إذا كان هذان السطحان يتلاقيان في النقطة $M_o(1,1,1)$

الحل:

. نلاحظ أن النقطة $M_o \in S_1, M_o \in S_2$ ولدينا:

$$\vec{N}_1 = 2xyz\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$$
$$\vec{N}_1(M_o) = 2i + j + \vec{k}$$

وبنفس الآلية:

$$\vec{N}_2 = (y+z)\,\vec{i} + (x+z)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$
$$\vec{N}(M_o) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

ولنجد المتجه $\vec{V}$ موجه الفصل المشترك D:

$$\vec{V} = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

وبالتالي فإن:

$$D \,|\, \frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c} \Rightarrow D \,|\, \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

التمرين (5): ليكن لدينا السطح (S) المعرّف بالتابع:

$$(S): F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 - 4y^2z^2 = 0$$

والمطلوب:

1- ادرس تجانس السطح السابق ثم بيّن أنه يكتب بالشكل $t^4F(x,y,z)$.

2- أثبت أن:

$$F(x,y,z) \equiv x^4F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \equiv y^4F\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right) \equiv z^4F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$$

3- بيّن أن:

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = 4F(x,y,z)$$

4- أوجد المستوي المماس والمستقيم الناظم لهذا السطح عند النقطة $M_o(1,1,1)$.

الحل:

-1

$$F(tx,ty,tz) \equiv t^m F(x,y,z)?$$
$$(tx)^4 + (ty)^4 + (tz)^4 + (tx)(ty)^3 - 4(ty)^2(tz)^2 \equiv$$
$$\equiv t^4\left(x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 - 4y^2z^2\right) \equiv t^4 F(x,y,z)$$

التابع متجانس من الدرجة الرابعة، وبالتالي السطح (S) متجانس من الدرجة الرابعة.

2- نخرج z_4, y_4, x_4 على الترتيب فنجد أن "يكافئ وضع $\frac{1}{t} = x, y, z$ ".

$$x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 - 4y^2z^2 \equiv x^4\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{z}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^2\right]$$
$$F(x,y,z) \equiv x^4 F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

بنفس الآلية:

$$F(x,y,z) \equiv y^4 F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$F(x,y,z) \equiv x^4 F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = y^4 F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = z^4 F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

3- نشتق جزئياً بالنسبة إلى z,y,x ويكون:

$$F'_x = 4x^3 + y^3 \ , \ F'_4 = 4y^3 + 3xy^2 - 8yz^2 \ , \ F'_z = 4z^3 - 8y^2 z$$

نضرب F'_x بـ x ، و F'_y بـ z ونجمع طرفاً إلى طرف فيكون:

$$x\left(4x^3+y^3\right)+y\left(4y^3+3xy^2-8yz^2\right)+z\left(4z^3-8y^2z\right)=$$
$$=4x^4+xy^3+4y^3+4y^3+3xy^3-8y^2z^2+4z^4-8y^2z^2$$
$$xF'_x+yF'_y+zF'_z=4\left(x^4+y^4+z^4\right)+4xy^3-16y^2z^2$$
$$=4\left(x^4+y^4+z^4+xy^3-4y^2z^2\right)$$
$$=4F(x,y,z)$$

4- نوجد مركبات الناظم $\vec{N}$ على المستوي المماس P المطلوب:

$$\vec{N}=F'_x i+F'_y j+F'_z k \Rightarrow$$
$$\vec{N}=\left(3x^3+y^3\right)\vec{i}+\left(4y^3+3xy^2-8yz^2\right)\vec{j}+\left(4z^3-8y^2z\right)\vec{k}$$
$$\vec{N}(M_o)=(3+1)\vec{i}+(4+3-8)\vec{j}+(4-8)\vec{k}$$
$$\vec{N}=4\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$$

نعوض في المعادلة العامة للمستوي:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0 \quad , \quad M_o(1,1,1)$$
$$4(x-1)-(y-1)-4(z-1)=0$$
$$P \equiv 4x-y-4z+1=0$$

لإيجاد المستقيم الناظم على السطح (S) لدينا موجه المستقيم D هو:

$$\vec{n}(M_o)=\vec{N}(M_o) \Rightarrow$$
$$D \,|\, \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-4}$$

التمرين (6):

أوجد المعادلات الوسيطية، الديكارتية للمنحني المعطى بدلالة نصف القطر المتجهي:

$$\vec{r}(M)=(\lambda-3)(\lambda+3)i+(\lambda-2)j+2\lambda^2k$$

ثم أوجد معادلتي المستقيم المماس والمستوي الناظم في نقطة منه ثم في النقطة $M_o(-8,-1,2)$.

الحل: المعادلات الوسيطية:

$$x=(\lambda-3)(\lambda+3)=\lambda^2-9$$
$$y=\lambda-2$$
$$z=2\lambda^2$$

المعادلات الديكارتية: لإيجادها نحذف الوسيط t من المعادلات الثلاث السابقة ويكون:

$$y=\lambda-2 \Rightarrow \lambda=y+2$$

ومنه بالتعويض في المعادلتين الأولى والثانية نجد أن:

$$x=(y+2)^2-9\ ,\ x=y^2+4y-5$$
$$z=2(y+2)^2 \Rightarrow z=2y^2+8y+8$$

من أجل $M(x_o,y_o,z) \ni (C)$ نقطة لدينا:

$$D|\frac{x-x_o}{x'_{0t}}=\frac{y-y_o}{y'_{ot}}=\frac{z-z_o}{z'_{ot}}$$

$$D|\frac{x-x_o}{2t}\bigg|_{M_o}=\frac{y-y_o}{1}=\frac{z-z_o}{2}$$

من أجل $M_o(-8,-1,2)$ لدينا: $x=t^2-9 \Rightarrow -8=t^2-9 \Rightarrow t^2=1, t=\pm1$

ومن المعادلة الثانية: $y=\lambda-2 \Rightarrow -1=\lambda-2 \Rightarrow \lambda=1$

أيضاً $z=2\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2=\dfrac{2}{2}=1\ ,\ \lambda=\pm1 \Leftarrow 2\lambda^2$

وبالتالي نأخذ القيمة $\lambda=1$ لأنها مشتركة ونهمل القيمة $\lambda=-1$ ويكون المستقيم المماس للمنحني هو:

$$D|\frac{x+8}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$$

أما المستوي المماس في النقطة $M_o(-8,-1,2)$ فهو:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$2(x+8)+1(y+1)+2(z-2)=0$$
$$P \equiv 2x+y+2z+13=0$$

التمرين (7): أوجد السطح الدوراني الناتج عن دوران:

1- القطع الناقص ذو المحورين $b=6, a=4$ ومركزه نقطة الأصل حول محوره الصغير المنطبق على المحور الإحداثي ox.

2- القطع الزائد ذو المحاور $b=4, a=3$ حول محوره المنطبق على المحور الإحداثي oy إذا كان مركزه نقطة الأصل.

3- القطع المكافئ $y^2=2x$ حول المحور ox.

4- المستقيم $y=3$ الواقع في المستوي xoy حول المحور ox.

5- المستقيم $z=0, 2x=3y$ حول المحور ox.

الحل:

$$(C): \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

1- لدينا القطع الناقص $(C): \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ نبدل كل y^2 بـ y^2+z^2 ويكون:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow (S): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$$

السطح الزائدي الدوراني.

2- معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ والدوران حول المحور oy نبدل كل x^2 بـ x^2+z^2 ويكون $(S): \frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1, (S): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ السطح الزائدي الدوراني.

3- الدوران حول المحور ox نبدل كل y^2 بـ y^2+z^2 ويكون: $y^2+z^2=2x$ السطح المكافئي الدوراني.

4- المستقيم $y=3$ في المستوي xoy والدوران حول المحور ox:

$$y^2=3^2 \Rightarrow y^2+z^2=3^2$$

وهو عبارة عن سطح أسطواني دوراني، أي هنا أسطوانة دائرية محورها المحور ox لانهائية.

5- المستقيم $z=0, 2x=3y$ والدوران حول المحور ox ولدينا:

$$y^2+z^2=\left(f(x)\right)^2 \ , \ x\in[a,b] \Rightarrow 9y^2=4x^2 \Rightarrow 9\left(y^2+z^2\right)=4x^2$$

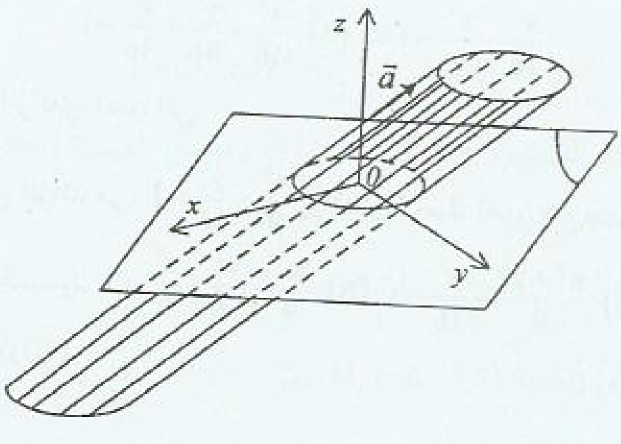
التمرين (8): أوجد معادلة السطح الأسطواني الذي دليله في المستوي xoy هو الدائرة $x^2+y^2=4$ ومولده يوازي المتجه $\bar{a}=(0,1,1)$. الشكل (5-22).

الحل: لدينا:

$$F(x,y)=x^2+y^2-4 \ , \ \alpha=0 \ , \beta=1 \ , \delta=1$$

$$y^2=F(x) \Rightarrow \left(x-z.\frac{0}{1}\right)^2+\left(y-z.\frac{1}{1}\right)^2-4=0$$

$$(S): x^2+(y-z)^2-4=0$$



الشكل (5-22)

التمرين (9): أوجد معادلة السطح المخروطي ذي الرأس في النقطة $C>0, M_o(0,0,0)$ والذي دليله القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

الحل:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{c-z}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{c-z}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(z-c)^2}{c^2}$$

التمرين (10): اكتب معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المنحني حول المحور Δ الموجود بجانبه في الحالات التالية:

$$1)\ (C):\begin{cases}x^2+z^2=R^3\\ y=0, \Delta: oz\end{cases} \quad , \quad 2)\ (C):\begin{cases}b^2x^2+a^2y^2\\ z=0\ ,\ \Delta: oy\end{cases}$$

$$3)\ (C):\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\ ,\ ox\end{cases} \quad , \quad 4)\ (C):\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\ ,\ \Delta: oz\end{cases}$$

$$5)\ (C):\begin{cases}y^2=2px\\ z=0\ ,\ \Delta: ox\end{cases} \quad , \quad 6)\ (C):\begin{cases}y=kz, k=\text{const}\\ x=0\ ,\ \Delta: oz\end{cases}$$

$$7)\ (C):\begin{cases}x+z=1\\ y=0\ ,\ \Delta: oz\end{cases} \quad , \quad 8)\ (C):\begin{cases}x^2+(y-b)^2=a, |b|>|a|\\ z=0\ ,\ \Delta: oy\end{cases}$$

الحل:

1- دائرة تدور حول المحور oz وواقعة في المستوي xoy لذلك نبدل كل x بـ $\sqrt{x^2+y^2}$ في معادلة المنحني ويكون:

$$(S): x^2+y^2+z^2=R^2$$

معادلة كرة متمركزة في نقطة الأصل ونصف قطرها R.

2- الدوران حول المحور oy والمولد عبارة عن قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ في المستوي xoy لذلك نعوض عن كل x بـ $\sqrt{x^2+z^2}$ والمعادلة المطلوبة هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$

وهي معادلة مجسم القطع الناقص الدوراني ذي المحور oy.

3- المولد هو قطع زائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع في المستوي xoy والدوران حول المحور ox، وعليه فإن باستبدال كل y^2 بـ y^2+z^2 نحصل على مجسم القطع الزائد الدوراني ذي الطيتين $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

4- بإبدال كل y^2 بـ x^2+y^2 نحصل على مجسم القطع الزائد الدوراني ذي الطية الواحدة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{x^2}=1$.

5- قطع مكافئ $y^2=2px$ واقع في المستوي xoy والدوران حول ox نبدل كل y^2 بـ y^2+z^2 ويكون: $y^2+z^2=2px$. وهو مجسم القطع المكافئ الدوراني.

6- مستقيم $y=kz$ مار من نقطة الأصل $(k=0)$ وواقع في المستوي yoz والدوران حول oz، نبدل كل y بـ $\sqrt{y^2+x^2}$ ونحصل على المخروط الدوراني:

$$\sqrt{x^2+y^2}kz \quad , \quad x^2+y^2=k^2z^2$$

وهي معادلة مخروط دوراني رأسه النقطة M(0,0,1).

8- دائرة $x^2+(y-b)^2=a^2$ مركزها النقطة $M_1(0,b)$ ونصف قطرها $R=a$ واقعة في المستوي xoy والدوران حول ox لذلك نستبدل كل y^2 بـ y^2+z^2 ويكون:

$$x^2+(y-b)^2=a^2$$
$$x^2+y^2-2by+b^2-a^2=0$$
$$x^2+y^2+b^2-a^2=2by$$
$$\left(x^2+y^2+b^2-a^2\right)^2=4b^2\left(y^2+z^2\right)$$

التمرين (11): أوجد ديكارتياً معادلة السطح المخروي الذي ذروته نقطة الأصل وبحيث:

$$x=2\cos t \quad , \quad y=3\sin t \quad , \quad z=4$$

الحل: $\frac{x}{2}=\cos t \quad , \quad \frac{y}{3}=\sin t$

ومنه: $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1-1=0$$

التمرين (12): ما السطح الفراغي الذي تحدده كل من المعادلات التالية:

$$1)\quad x^2+y^2=25 \quad , \quad 2)\quad x^2+y^2+z^2=25$$

$$4)\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \quad , \quad 3)\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$5)\quad y^2=6x$$

الحل:

1- سطح أسطواني دائري محوره منطبق على المحور oz ونصف قطر قاعدته $R = 5$.

2- سطح كروي مركزه النقطة $0(0,0,0)$ مبدأ الإحداثيات ونصف القطر $R = 5$.

3- سطح أسطواني ناقصي بمتحولات موازية للمحور oz.

4- سطح أسطواني زائدي بمولدات موازية للمحور oz.

5- سطح أسطواني مكافئ.

تمارين غير محلولة (5)

التمرين (1): ادرس تجانس كلٍ من السطوح التالية، ثم أوجد المستوي المماس P والمستقيم الناظم D في النقطة M_o المعطاة بجانبه:

أ- $M_o(1,1,2) \quad , \quad (S): y^2 + xy + z^3 - 4 = 0$

ب - $M_o(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \;, \; (S): x = r\cos t, y = r\sin t, z = r$

ج - $M_o(1,0,2) \;, \; (S): x^4 + y^4 + z^2 + x^2z^2 + y^3x$

د - $M_o(2,1,1) \;, \; (S): y^3 + z^3 - 2xz + 2 = 0$

هـ- $M_o(1,1,1) \;, \; (S): x^3 + z^3 + xz^2 + x^2y$

الأجوبة:

أ - غير متجانس :

$$P \equiv x + 4y + 12z - 29 = 0$$

$$D | 12(x-1) = 3(y-1) = (z-2)$$

ب - $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0$ تجانس من الدرجة 2 $m = 2$:

$$P \equiv x + y - \sqrt{2}z = 0 \;, \; D | \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z-2}{-2}$$

جـ - متجانس، $P \equiv x + 3z - 7 = 0 \;:\; m = 4$

$$D | \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{3}$$

د - غير متجانس:

$$P \equiv 3y - 4z + 39 = 0$$

$$D | \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

هـ - متجانس $m = 3$:

$$P \equiv 6x + 4y + 5z - 15 = 0$$

$$D \mid \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{5}$$

التمرين (2): أوجد السطح الدوراني (S) الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور Δ أو المستقيم L المشار إليه بجانبه:

-1 $\quad (C): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$ ، المحور $\Delta : oy$

2- القطع الناقص $a = 6$, $b = 4$ ورأسه النقطة O(0,0,0) والدوران حول محوره الكبير المنطبق على المحور oz.

3- القطع الزائد الذي نصف محوريه $a = 8$, $b= 6$ ومركزه نقطة الأصل والدوران حول محوره الحقيقي المنطبق على المحور ox.

4- القطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ حول المحور oz.

5- القطع المكافئ $y^2 = 6z$ والدوران حول المحور oz.

6- المستقيم $x - 3 = 0$ والدوران حول المحور oz.

7- المستقيم $3x = 2y, z = 0$ والدوران حول المحور ox.

الأجوبة:

$$1)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad , \quad 2)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

$$3)\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{36} = 1 \quad , \quad 4)\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$5)\ x^2 + y^2 = 6z \quad , \quad 6)\ x^2 + y^2 = 9$$

$$7)\ 9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0$$

التمرين (3): اكتب معادلة السطح المخروطي الذي رأسه النقطة M_o ودليله المنحني (C) في الحالات التالية:

$$1)\ M_o(0,0,0)\ ,\quad (C):\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=R \end{cases}$$

$$2)\ m_o(0,0,h)\ ,\quad (C):\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x=0 \end{cases}$$

$$3)\ m_o(0,0,0)\ ,\quad (C):\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

الأجوبة:

$$x^2+y^2=z^2 \quad , \quad x^2+y^2-z^2=0$$

$$h^2\left(x^2+y^2\right)=a^2\left(z-h\right)^2$$

التمرين (4): أوجد معادلة السطح الأسطواني (S) الذي مولداته موازية للمتجه $\vec{v}$ في الحالات:

-1 $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ ن والدليل $(C):\begin{cases} y^2=4x \\ z=0 \end{cases}$

-2 $\vec{v}=(5,3,2)$ ، والدليل $(C):\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$

-3 $\vec{v}=(1,1,0)$ ، والدليل $(C):\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=0 \end{cases}$

الأجوبة:

$$1)\ (S):9y^2+4z^2-12yz-36x+12x=0$$

$$2)\ (S):4x^2+4y^2+34z^2-20xz-12yz-100=0$$

$$3)\ \frac{(x-z)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

الفصل السادس

السطوح الجبرية ورتبها

6-1- السطح الجبري ومعادلته:

كل سطح في الفضاء يمثل بمعادلة جبرية من الدرجة (الرتبة) الثانية، بالنسبة إلى المتحولات x,y,z ندعوه سطحاً جبرياً من الدرجة الثانية، وهكذا السطوح من بقية الرتب.

إن التشكل العام للمعادلة الجبرية من الدرجة الثانية بثلاثة مجاهيل x,y,z هو:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \equiv\ & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ & +2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

حيث $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_1, a_2, a_o = \text{const}$

- الحدود الثلاثة الأولى تحوي z^2, y^2, x^2 تسمى بالحدود المربعة.
- الحدود الثلاثة التالية التي تحوي xz,xz,xy ندعوها الحدود المستطيلة.
- ويطلق اسم الحدود الخطية على الحدود التي تحوي z,y,x، أما الحد الأخير a_o الذي لايحوي أياً من المتحولات فيسمى بالحد المطلق أو الحر، وبالتالي عادة ما تكتب المعادلة (1) تبعاً لترتيب درجة حدودها على الشكل:

$$F(x,y,z) = F_2(x,y,z) + F_1(x,y,z) + F_o = 0 \tag{2}$$

حيث إن:

$$F_2(x,y,z) = a_4x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

وهو تابع متجانس من الدرجة الثانية.

$F_1(x,y,z) = 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$ تابع متجانس من الدرجة الأولى.

$F_o = a_o$ وهو تابع متجانس من الدرجة صفر.

من جهة أخرى إذا أجرينا انسحاب محاور إحداثية للمتحولات z,y,x من الشكل:

$$x = x_o + x' \ , \ y = y_o + y' \ , \ z = z_o + z' \qquad (3)$$

حيث z_o, y_o, x_o عبارة عن ثوابت يطلب إيجادها.

فإن المعادلة السابقة تأخذ الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} F(x_o + x', y_o + y', z_o + z') &= a_{11}(x_o + x')^2 + a_{22}(y_o + y')^2 + \\ & a_{33}(z_o + z') + 2a_{12}(x_o + x')(y_o + y') + 2a_{13}(x_o + x')(z_o + z') + \\ & 2a_1(x_o + x') + 2a_2(y_o + y') + 2a_3(z_o + z') + a_o = 0 \end{aligned}$$

ثم بإصلاح العلاقة هذه وجعل أمثال الحدود الخطية فيها أمثالاً لـ (z', y', x') مساوية للصفر، نحصل على جملة المعادلات الجبرية التالية:

$$\begin{cases} 2a_{11}x_o + 2a_{12}y_o + 2a_{13}z_o + 2a_1 = 0 \\ 2a_{12}x_o + 2a_{22}y_o + 2a_{23}z_o + 2a_2 = 0 \\ 2a_{13}x_o + 2a_{23}y_o + 2a_{33}z_o + 2a_3 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

وهذه ليست إلاّ جملة معادلات جبرية (ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل) خطية بالنسبة إلى المجاهيل z_o, y_o, x_o غير متجانسة (a_3, a_2, a_1 لاتنعدم معاً) محدد الأمثال فيها هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

كما ويمكن النظر إلى الجملة الجبرية هذه كثلاثة مستويات في الفراغ ممثلة بمعادلات الجملة، وبالتالي كأننا ندرس وضع هذه المستويات في الفراغ ونحن أمام الاحتمالات التالية:

1- المستويات الثلاثة متقاطعة بنقطة وحيدة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ أي لجملة المعادلات (4) جذر مشترك $\Delta \neq 0$ تدعى النقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ في هذه الحالة مركز تناظر المسطح (S).

2- المستويات الثلاثة تتقاطع بعدد لانهائي من النقاط بمستقيم D هو فصلها المشترك عندئذ نقول إن للسطح (S) محور تناظر.

3- المستويات الثلاثة لاتتقاطع، إذاً هي متوازية أو متقاطعة بمستقيمات متوازية أي لايوجد محور تناظر أو مركز تناظر.

4- المستويات الثلاثة منطبقة، عندئذ نقول إن للسطح مستوي تناظر.

ملاحظة (1):

1- إن التحويل السابق يوافق عملية انسحاب لجملة المحور الإحداثية إلى النقطة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ كما أنه إذا كانت $x_o = y_o = z_o = 0$. فإن السطح له مركز تناظري النقطة $0(0,0,0)$ في المبدأ.

2- يمكن الوصول إلى علاقات الجملة (4) بالاشتقاق الجزئي للعلاقة (1) بالنسبة إلى x,y,z ومن ثم التعويض عن المتحولات بـ x_o, y_o, z_o. والجدير بالملاحظة أنه إذا كانت أمثال الحدود المربعة والحدود المستطيلة كلها معدومة فإن المعادلة (1) تختزل إلى الشكل البسيط التالي:

$$2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0$$

أو:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

وهذه ليست إلاّ معادلة جبرية خطية بالنسبة إلى المتحولات z,y,x. فقد رأينا أنها تمثل مستوياً في الفراغ.

هناك حالات خاصة عديدة للمعادلة (1) تعود لتعريف أشكال وسطوح شهيرة في الفراغ نذكر منها.

6-2- السطح الكروي "الكرة":

تعرف الكرة في الفضاء بأنها المحل الهندسي لمجموعة $M(x,y,z)$ التي تبعد بعداً واحداً (R)- يدعى نصف قطر الكرة – عن نقطة ثابتة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ (تدعى مركز الكرة)، الشكل (6-1) وحسب دستور البعد بين نقطتين فإنها تمثل بالمعادلة التالية:

$$S(x,y,z):(S)\equiv(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2 \qquad (6)$$

وبفك الأقواس والترتيب نجد أن:

$$S(x,y,z):(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x_ox$$
$$-2y_oy-2z_oz+\left(x_o^2+y_o^2+z_o^2\right)-R^2=0$$

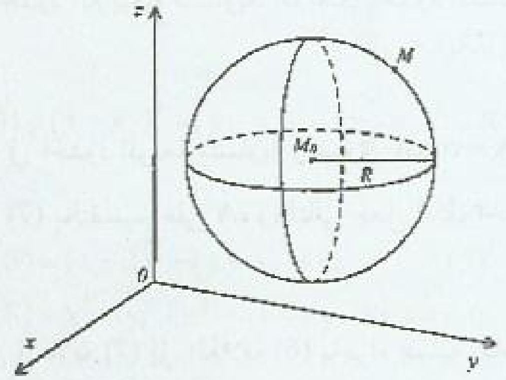
أو:

$$S(x,y,z):(S)\equiv x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0 \qquad (7)$$

وذلك بوضع:

$$a_1=-x_o \ ,\ a_2=-y_o \ ,\ a_3=-z_o$$

حيث إن $a_o=+\left(x_o^2+y_o^2+z_o^2-R^2\right)$



الشكل (6-1)

نسمي المعادلة (7) بمعادلة كرة (S) مركزها $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ونصف قطرها:

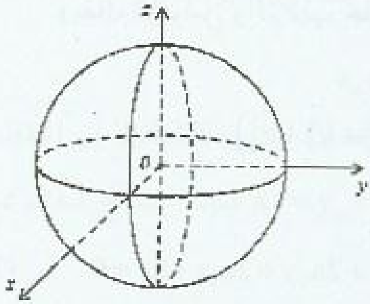
$$R = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - a_o}$$

أو تسمى معادلة كرة (S) مركزها $M_o(-a_1, -a_2, -a_3)$ ونصف قطرها:

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_o}$$

وفي حالة خاصة وعندما $x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = 0$ فإن المعادلتين (6) و (7) تأخذان الشكل البسيط التالي:

$$(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (8)$$



الشكل (6-2)

التي تمثل كرة نصف قطرها R ومتمركزة في نقطة الأصل 0(0,0,0) كما هو في الشكل (6-2).

إن معادلة الكرة (S) التي نصف قطرها R ومركزها النقطة $M_o(x_o, y_o, z_o)$ تنتج عن العلاقة (1) من أجل:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \\ a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \end{cases}$$

أي أن أمثال الحدود التربيعية متساوية، أما أمثال الحدود المستطيلة فهي معدومة.

ملاحظة (2):

1- إذا كانت الأمثال في الحدود المربعة متساوية وتساوي $0 \neq A = const$ عندئذ يمكن ردها إلى الشكل (7) بالتقسيم على A، وبالتالي جعل أمثال الحدود المربعة مساوية للواحد.

2- يمكن الانتقال من العلاقة (7) إلى العلاقة (6) بإجراء عملية إتمام إلى مربع كامل لكل من الحدود المتعلقة بـ z,y,x كل منها على حدة.

3- يمكن التعبير عن المعادلة (8) وسيطياً بدلالة الإحداثيات الكروية (انظر بحث الجمل الإحداثية في الفراغ)، بالشكل:

$$(9)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ x = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

حيث إن: $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

والعلاقات (9) تمثل معادلة كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r \geq 0$، أما في الحالة الأعم وعندما يكون مركز الكرة مغايراً لمبدأ الإحداثيات أي لها مثلاً المركز $M_o(a_1, a_2, a_3)$، فإن المعادلات الوسيطية للكرة في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$(10)\quad \begin{cases} x - a_1 = r\cos\theta\sin\varphi \\ y - a_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ z - a_3 = r\cos\varphi \end{cases}$$

وبالفعل فإنه لو ربّعنا العلاقات (9) والعلاقات (10) وجمعنا النتيجة طرفاً لطرف، وطبقنا العلاقة المثلثية الشهيرة: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ مرتين متتاليتين لحصلنا على المعادلة (8) "المعادلة 17".

مثال(1): أوجد معادلة الكرة (S) التي مركزها $M_o(2, -3, 4)$ ونصف قطرها $R = 5$.

الحل: المعادلة العامة للكرة هي:

$$(S) \equiv (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

بالتعويض:

$$(S) \equiv (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = (5)^2$$

$$(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 4 = 0$$

مثـــال (2): أوجـد معادلـة الكـرة (S) الـتي مركزهـا $M_o(2,-2,3)$ وتمـر بالنقطـة $M_1(76,-3,5)$.

الحل: لنجد نصف قطر الكرة R وهو البعد بين مركزها وأي نقطة من الكرة.

$$R^2=(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o)^2+(z_1-z_o)^2$$
$$=(7-2)^2+(-3+2)^2+(5-3)^2=30$$

بالتعويض في معادلة الكرة:

$$(S)\equiv(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2$$
$$(S)\equiv(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=30$$
$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z=13$$

مثال (3): جِدْ مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$$(S)\equiv 2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y-2z+3=0$$

الحل: بجعل أمثال الحدود المربعة مساوية الواحد (نقسم على 2) نجد أن:

$$(S)=x^2+y^2+z^2-x+2y-z+\frac{3}{2}=0$$

بالمقارنة مع المعادلة العامة للكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x_ox-2y_oy-2z_oz+a_o=0$$

نجد أن:

$$z_o=\frac{1}{2}\quad,\quad y_o=-1\quad,\quad x_o=\frac{1}{2}\ ,\ a_o=\frac{3}{2}$$

إذاً مركز الكرة هو $M_o\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ ونصف القطر:

$$R=\sqrt{x_o^2+y_o^2+z_o^2-a_o}$$
$$R=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}=0$$

إذاً نصف القطر يساوي الصفر.

والكرة هنا تمثل نقطة هي مركز هذه الكرة.

مثال (4): أوجد مركز ونصف قطر الكرة:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z - 2 = 0$$

الحل: بالإتمام إلى مربع كامل لـ x و y و z نجد:

$$S \equiv \left(x^2 - 4x + z^2\right) + \left(y^2 - 2y + (1)^2\right) + \left(z^2 - 6z + (3)^2\right)$$
$$-\left((2)^2 + (1)^2 + (3)^2\right) - 2 = 0$$

$$S \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16$$

إذاً مركز الكرة هو $M_o(2,1,3)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{16} = 4$.

6-2-1- الوضع النسبي لكرة مع مستقيم في الفضاء:

ليكن لدينا المستقيم:

$$D \mid \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

والكرة $(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a_o = 0$.

لدراسة وضع المستقيم D والكرة (S) نقوم بحل جملة المعادلات الممثلة لهما، أي نعوض العلاقات:

$$x = x_o + at \quad , \quad y = y_o + bt \quad , \quad z = z_o + ct$$

في معادلة الكرة فيكون:

$$(x_o + at)^2 + (y_o + bt)^2 + (z_o + ct)^2 - 2a_1(x_o + at) -$$
$$-2a_2(y_o + b_t) - 2a_3(z_o + ct) + a_o = 0$$

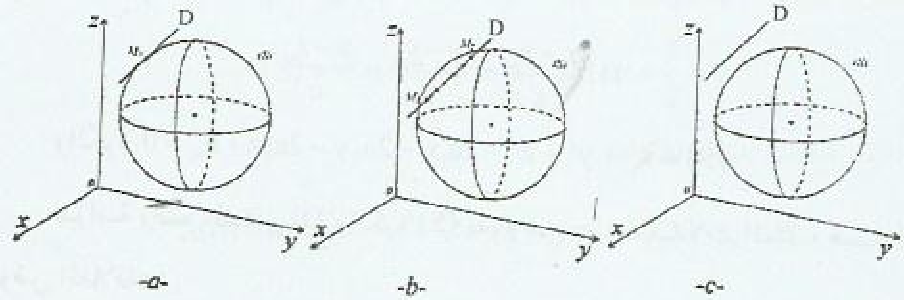
وبعد الإصلاح والترتيب نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة إلى الوسيط t.

$$\alpha t^2 + \beta t + \delta = 0$$

حيث إن:

$$\alpha = a^2 + b^2 + c^2$$
$$\beta = 2\left(ax_o + by_o + cz_o - a_1a - a_2b - a_3c\right)$$
$$\delta = x_o^2 + y_o^2 - 2a_1x_o - 2a_2y_o - 2a_3z_o + a_o$$

والمعادلة السابقة قد يكون لها جذر مكرر $t_1 = t_2$، وبالتالي لجملة معادلات المستقيم D والكرة (S) جذر مشترك $M\left(x_o + at_1, y_o + bt_1, z_o + ct_1\right)$ والمستقيم D يمس الكرة (S) في هذه النقطة الشكل (3-6,a) "طبعاً هذا يوافق كون $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\delta = 0$"، أما إذا كان $\Delta > 0$ فإن $t_1 \neq t_2$ والمستقيم D والكرة (S) يشتركان بنقطتين M_2, M_1، أي أن D يقطع الكرة (S) الشكل (6-3,b) إذا كان $\Delta < 0$ فلاتوجد قيم حقيقية للوسيط، لاتتحقق المعادلة وبالتالي المستقيم D والكرة (S) لايشتركان بأية نقطة الشكل (3-6,c).



الشكل (3-6)

أما إذا كان المستقيم معيناً بمعادلتي مستويين متقاطعين مثل:

$$P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

فإننا نحل جملة المعادلتين السابقتين مع معادلة الكرة:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + a_o = 0$$

لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x و y و z وعندئذ يكون المستقيم قاطعاً أو مماساً أو خارجاً عن الكرة حسبما يكون المميز Δ للمعادلة من الدرجة الثانية موجباً أو صفراً أو سالباً على الترتيب.

ويمكن رد هذه الحالة إلى سابقتها وذلك بتحويل معادلتي المستقيم إلى الشكل الوسيطي.

مثال (1): بيّن أن المستقيم المعين بالمعادلات الوسيطية:

$$x=5+4\lambda \quad , \quad y=1-\lambda \quad , \quad z=1-\lambda$$

يمس الكرة: $(S)\equiv x^2+y^2+z^2=9$

الحل: بتعويض x,y,z الوسيطية في معادلة الكرة S:

$$(5+4\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(1-\lambda)^2=9$$
$$18\lambda^2+36\lambda+18=0$$

أو: $\lambda^2+2\lambda+1=0$

ومنه: $\lambda=-1 \Leftarrow (\lambda+1)^2=0$

وهو جذر مضاعف، أي أن المستقيم يمس الكرة في نقطة لإيجادها نبدل $\lambda=-1$ في معادلات المستقيم الوسيطية: أي أن إحداثيات نقطة التماس هي: $M_0(1,2,2)$.

مثال (2): ادرس وضع المستقيم المعين بالمستويين:

$$P_1\equiv 2x-y+2z-12=0$$
$$P_2\equiv 2x-4y-z+6=0$$

بالنسبة للكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z=0$$

الحل: من معادلتي المستقيم نحسب x و y بدلالة z فنجد:

$$x=9-\frac{3}{2}z \quad , \quad y=6-z$$

بالتعويض في معادلة الكرة نجد:

$$z^2-8z+16=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بحلها بالنسبة لـ z نجد أن لها جذراً مضاعفاً هو $z=4$ أي أن المستقيم يمس الكرة بالتعويض في x و y نجد أن نقطة التماس هي: $M_o(3,2,4)$.

6-2-2- الوضع النسبي لكرة مع مستوي في الفضاء:

لدراسة وضع المستوي: $(\sigma: Ax+By+Cz+D=0)$ والكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2a_2y-2a_3z-a_o=0$$

عادة ما نحسب البعد d بين مركز الكرة $M_o(x_o,y_o,z_o)$ والمستوي (P)، أي:

$$d=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ونحن أمام الاحتمالات الثلاثة التالية:

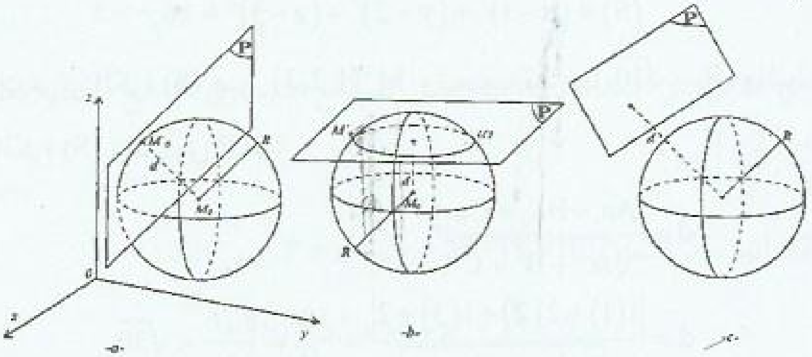
1- $d=R$ المستوي P يمس الكرة (S) في نقطة $M'_o(x'_o,y'_o,z'_o)$ الشكل (4-6,a) حيث نوجد إحداثيات نقطة التماس هذه من خلال إيجاد معادلة المستقيم $\overline{M_oM'_o}$ باعتبار موجهه $\vec{a}$ هو الناظم على المستوي في هذه النقطة، ويمر من النقطة M_o ويكون:

$$\overline{M'_oM_o}=\begin{cases}x=a_1+A\lambda\\ y=a_2+B\lambda\\ z=a_3+C\lambda\end{cases}$$

وبما أن $M'_o\in P$ وبالتالي من خلال تعويض العلاقات الأخيرة في معادلة المستوي، يمكننا تحديد قيمة الوسيط t، وبالتالي إيجاد (x'_o,y'_o,z'_o).

2- إذا كان $d < R$ فإن المستوي P يقطع الكرة (S) بدائرة (c) نصف قطرها $r=\sqrt{R^2-d^2}$ الشكل (4-6,b) ونوجد إحداثيات مركزها النقطة $M'_o\left(x'_o, y'_o, z'_o\right)$ بآلية مشابهة لما ورد في أولاً.

3- إذا كان $d > R$ فالمستوي والكرة منفصلان تماماً، ولاتوجد بينهما نقاط مشتركة. الشكل (4-6,c).



الشكل (4-6)

في حالة خاصة إذا $d = 0$ (مركز الكرة $M_o \in P$ فإن $r = R$ والمستوي P يقطع الكرة دائرة عظمى تدعى الدائرة الأساسية.

في حالة التماس بين الكرة (S) ومستوٍ P فإنه يمكن إيجاد معادلة المستوي هذا من خلال إيجاد معادلة مستوٍ مار بنقطة معلومة $M\left(x'_o, y'_o, z'_o\right)$ (نقطة التماس) والعمود M'_oM_o على المستوي P (نصف القطر عمودي على أي مستقيم مماس في دائرة في نقطة منها) حيث نعتبر $\vec{N}=\overline{M'_oM_o}$ ويكون:

$$P \equiv \overline{MM'_o} \perp \overline{M'_oM_o}\ ,\ MM'_o . M'_oM_o = 0$$
$$P \equiv \left(x-x'_o\right)\left(a_1-x'_o\right)+\left(y-y'_o\right)\left(a_2-y'_o\right)+\left(z-z'_o\right)\left(a_3-z'_o\right)=0$$

بالفك وإضافة المقدار $\pm\left(a_1x'_o+a_2y'_o+a_3z'_o+a_o\right)$ فإن العلاقة السابقة تأخذ الصيغة التالية:

$$P \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

حيث إن:

$$a = a_1 - x'_o \quad , \quad B = a_2 - y'_o \quad , \quad C = a_3 - z'_o$$
$$D = a_1 x'_o + a_2 y'_o + a_3 z'_o + a_o \quad ; \quad a_o = \text{const}$$

مثال (1): عين وضع المستوي:

$$P \equiv x + 2y + z + 2 = 0$$

بالنسبة للكرة.

$$(S) \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 30$$

الحل: إن مركز الكرة (S) هـو: $M_o(1,2,3)$ ونـصف قطرهـا $R = \sqrt{30}$، والبعـد بـين مركز الكرة (S) والمستوي P هو:

$$d = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$d = \frac{|1(1) + 2(2) + 1(3) + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} < \sqrt{30}$$

أي أن المستوي يقطع الكرة في دائرة نصف قطرها:

$$r^2 = R^2 - d^2 = 30 - \frac{50}{3} = \frac{40}{3}$$
$$r = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$$

لتعيين مركزها توجد معادلة المستقيم المار من مركز الكرة والعمودي على المستوي P وهي:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} = \lambda$$

ومنه:

$$x = \lambda + 1 \quad , \quad y = 2\lambda + 2 \quad , \quad z = \lambda + 3$$

وبما أن مركز الدائرة يقع في المستوي P إذاً يحقق معادلته.

$$\lambda+1+2(2\lambda+2)+(\lambda+3)+2=0$$

$$6\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-5}{3}$$

إذاً بالتبدل في x,y,z نجد أن مركز الدائرة هو:

$$x=\frac{-5}{3}+1=\frac{-2}{3}\ \ ,\ \ y=2\left(\frac{-5}{3}\right)+2=\frac{-10}{3}+\frac{6}{3}=\frac{-4}{3}$$

$$z=\frac{-5}{3}+3=\frac{4}{3}$$

أي أن مركز الدائرة الناتجة عن تقاطع المستوي P مع الكرة (S) هو $M_1\left(\frac{-2}{3},\frac{-4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

مثال (2): أثبت أن المستوي $P\equiv x+2y+2z+15=0$ يمس الكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-25=0$$

ثم عين إحداثيات نقطة التماس.

الحل: إن مركز الكرة (S) هو $M_0(0,0,0)$ ونصف قطرها: $R=\sqrt{25}=5$.

البعد بين مركز الكرة والمستوي هو:

$$d=\frac{|15|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{15}{3}=5=R$$

إذاً المستوي يمس الكرة. معادلة المستقيم الواصل بين مركز الكرة والعمودي على المستوي P هي:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}=\lambda \Rightarrow x=\lambda, y=2\lambda, z=2\lambda$$

بالتعويض في معادلة المستوي P نجد أن:

$$\lambda+2(2\lambda)+2(2\lambda)+15=0$$

$$9\lambda+15=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-5}{3}$$

بالتعويض في x,y,z نجد أن إحداثيات نقطة التماس هي:

$$.M_1\left(\frac{-5}{3},\frac{-10}{3},\frac{-10}{3}\right)$$

مثال (3): عيّن معادلة المستوي q الذي يمس الكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}x+y-2z+1=0$$

ويوازي المستوي $P\equiv 2x+3y=0$

الحل: إن أمثال توجيه ناظم المستوي المطلوب q هي: (2,3,0) وبالتالي معادلة المستوي q هي:

$$2x+3y+K=0$$

وبما أن مركز الكرة S هو $M_o\left(\frac{3}{4},\frac{-1}{2},1\right)$ وبعده عن المستوي q هو:

$$d=\frac{\left|\frac{3}{4}(2)+\frac{1}{2}(3)+K\right|}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}}=\frac{K}{\sqrt{13}}$$

لكن نصف قطر الكرة (S) هو: $R=\sqrt{\frac{13}{16}}$

وكون المستوي q يمس الكرة (S) فإن:

$$\frac{K}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{13}{16}}\Rightarrow K^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2\Rightarrow K=\mp\frac{13}{4}$$

إذاً يوجد مستويان:

$$q_2\equiv 2x+3y-\frac{13}{4}\quad,\quad q_1\equiv 2x+3y+\frac{13}{4}$$

6-2-3- حالات تعيين الكرة:

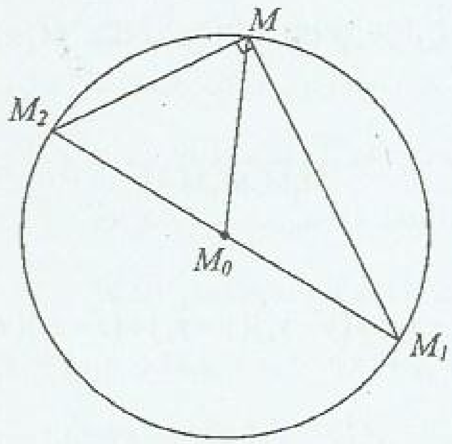
لقد وجدنا أنه إذا أعطينا مركز الكرة $M_o\left(x_o,y_o,z_o\right)$ ولنحدد الكرة $S(x,y,z)$ التي نصف قطرها $R=\overline{M_1M_2}$ لأجل ذلك نأخذ نقطة كيفية في الفراغ

$M(x,y,z)$ الشكل (5-6). إن شرط وقوع النقطة M على محيط دائرة قطرها $\overline{M_1M_2}$ هو أن تكون الزاوية $\widehat{M_1MM_2}=\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{M_1M_2}\perp\overrightarrow{M_2M}$ ومنه:

$$\overrightarrow{M_1M}.\overrightarrow{M_2M}=0\Rightarrow$$
$$\left[(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}\right].\left[(x-x_2)\vec{i}+(y-y_2)\vec{j}+(z-z_2)\vec{k}\right]$$
$$=0\Rightarrow S(x,y,z):(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

وبفك الأقواس والترتيب نجد أن:

$$S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-$$
$$(y_1+y_2)y-(z_1-z_2)z+(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=0$$
$$S(x,y,z):x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0$$



الشكل (5-6)

حيث إن:

$$2a_1=-(x_1+x_2),2a_2=-(y_1+y_2),2a_3=-(z_1+z_2)$$
$$a_o=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

نتيجة (1):

أ – يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم $M_1\hat{M}M_2$ مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين:

$$\overline{M_1M}^2 + \overline{M_2M}^2 = \overline{M_1M_2}^2$$

والوصول على نفس النتيجة.

ب – يمكن حساب إحداثيات M_o (منتصف قطعة مستقيمة) بدلالة إحداثيات M_2, M_1 وتطبيق إحدى العلاقات التالية:

$$\overline{M_oM} = \overline{M_oM_1}\ ,\ \overline{M_oM} = \overline{M_oM_2}\ , \overline{M_oM} = \frac{1}{2}\overline{M_1M_2}$$

للحصول على نفس المعادلة أيضاً.

مثال: أوجد معادلة الكرة التي قطرها يمر بالنقطتين:

$$M_1(1,2,3) \quad , \quad M_2(1,-2,4)$$

الحل: إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة ما من الكرة (S) فإن الزاوية $\widehat{M_1MM_2}$ قائمة ومنه فإن:

$$\overline{M_1M}.\overline{M_2M} = 0$$

أي أن:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

بالتعويض:

$$(x-1)(x-1)+(y-2)(y+2)+(z-3)(z-4)=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-4+z^2-7z+12=0$$

وتكون معادلة الكرة هي: $(S) \equiv x^2+y^2+z^2-2x-7z+9=0$

ثانياً – معادلة كرة تمر من أربع نقاط:

إذا كانت لدينا النقاط $i=1,2,3,4, M_i(x_i,y_i,z_i)$ لإيجاد معادلة الكرة المارة بالنقاط الأربع السابقة، نعوّض عن إحداثيات كل من النقاط M_i في المعادلة العامة للكرة (7) ويكون:

$$M_i \in (S) \Rightarrow S(x_i, y_i, z_i) = 0$$

أي نحصل على جملة معادلات جبرية، أربع معادلات بأربعة مجاهيل هي: a_1, a_2, a_3, a_o خطية غير متجانسة، ونكون أمام الاحتمالات الثلاثة التالية:

1- لجملة المعادلات:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2a_1x_1 + 2a_2y_1 + 2a_3z_1 + a_o = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 2a_1x_2 + 2a_2y_2 + 2a_3z_2 + a_o = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + 2a_1x_3 + 2a_2y_3 + 2a_3z_3 + a_o = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + 2a_1x_4 + 2a_2y_4 + 2a_3z_4 + a_o = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

جذر وحيد، عندئذ نحصل على a_1, a_2, a_3, a_o وبالتالي نحصل على معادلة الكرة المطلوبة.

2- الجملة السابقة ليس لها جذر مشترك، وبالتالي لاتوجد كرة تمر بالنقاط الأربع السابقة، مما يعني وقوعها في مستوٍ واحد ودون أن تقع جميعها على دائرة واحدة.

3- للجملة عدد غير منته من الحلول، فالنقاط الأربع تقع على محيط دائرة واحدة، وبالتالي يمر من هذه النقاط عدد غير منته من الكرات.

ملاحظة (1): إن المعادلات (11) يمكن كتابتها على الشكل:

$$\begin{aligned} 2a_1x_1 + 2a_2y_1 + 2a_3z_1 + a_o &= -\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) \\ 2a_1x_2 + 2a_2y_2 + 2a_3z_2 + a_o &= -\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) \\ 2a_1x_3 + 2a_2y_3 + 2a_3z_3 + a_o &= -\left(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2\right) \\ 2a_1x_4 + 2a_2y_4 + 2a_3z_4 + a_o &= -\left(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2\right) \end{aligned}$$

وهذه المعادلات الأخيرة يمكن حلها باستخدام طريقة كرامر حيث إن شرط وجود الحل هو أن يكون معين الأمثال Δ غير معدوم، أي أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ملاحظة (2): إذا لم يكن لجملة المعادلات السابقة حل فالنقاط الأربع تقع في مستو واحد.

مثال (1): هل النقاط $M_1(0,0,0)$, $M_2(0,1,-1)$

$M_3(-1,2,0)$, $M_4(1,2,3)$

تقع على سطح كرة عين معادلة الكرة إن وجدت.

الحل:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

إذاً النقاط الأربع تقع على سطح كرة.

لإيجاد معادلة هذه الكرة والتي هي من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2x+2a_3x+a_o=0$$

ولنجد a_1,a_2,a_3,d حيث:

$$a_1\frac{\Delta a_1}{\Delta}=\frac{-15}{7}$$

$$a_2=\frac{\Delta a_2}{\Delta}=\frac{-25}{7}$$

$$a_3=\frac{\Delta a_3}{\Delta}=\frac{-11}{7} \quad , \quad a_o=0$$

وتكون معادلة الكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-\frac{30}{7}x-\frac{50}{7}y-\frac{22}{7}z=0$$

والتي مركزها $M_o\left(\frac{15}{7},\frac{25}{7},\frac{11}{7}\right)$ ونصف قطرها:

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_o}$$

$$R = \sqrt{\frac{971}{147}}$$

مثال (2): أوجد معادلة الكرة (S) المارة بالنقاط

$$M_1(0,0,0), M_2(1,0,0), M_3(0,2,1), M_4\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

الحل: بالتعويض في العلاقة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

إذاً النقاط الأربعة تقع في مستوٍ واحد ولاتقع على سطح كرة فلا تمر منها كرة.

مثال (3): أوجد معادلة الكرة (S) المارة بالنقاط:

$$M_1(1,1,1), M_2(1,2,1), M_3(1,1,2), M_4(2,1,1)$$

الحل: إذا عوضنا في المحدد D نجد أن $\Delta \neq 0$ وبالتالي النقاط ليست واقعة في مستوٍ واحد، إذا عوضنا النقاط الأربع في المعادلة العامة للكرة:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_o + 3 = 0 \\ 2a_2 + 4a_2 + 2a_3 + a_o + 6 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_o + 6 = 0 \\ 4a_1 + 2a_1 + 2a_3 + a_o + 6 = 0 \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات بطريقة كرامر، أو أي طريقة أخرى نجد أن:

$$a_1 = \frac{-3}{2},\ a_2 = \frac{-3}{2},\ a_3 = \frac{-3}{2},\ a_o = 6$$

ويكون مركز الكرة هو: $M_o\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها:

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-6}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وتكون معادلة الكرة هي:

$$(S)=x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$$

مثال (4): أوجد معادلة الكرة التي تمر بالنقاط:

$$M_1(0,0,0),M_2(3,0,0),M_3(1,1,1),M_4(2,1,1)$$

الحل: بالتعويض في المعادلات (11) نجد أن:

$$a_o=0 \qquad (1)$$

$$6a_1+a_o+9=0 \qquad (2)$$

$$2a_1+2a_2+2a_3+a_o+3=0 \qquad (3)$$

$$4a_1+2a_2+2a_3+a_o+6=0 \qquad (4)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد أن $a_1=-\frac{3}{2}$ بالتعويض في (3) و (4) نجد أن:

$$2a_2+2a_3=0$$

$$2a_2+2a_3=0$$

وهذه الجملة لها عدد غير منته من الحلول لأن a_2 و a_3 لايمكن تعيينهما بشكل تام، بل بينهما العلاقة $a_2=-a_3$ وبالتالي يمر من النقاط الأربع مجموعة غير منتهية من الكرات معادلاتها:

$$x^2+y^2+z^2-3x+2a_2y-2a_3z=0$$

حيث a_2 و a_3 تأخذ قيماً مختلفة.

6-2-4- قوة نقطة بالنسبة إلى الكرة:

ليكن لدينا السطح الكروي

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0$$

ولتكن $M_o(x_o,y_o,z_o)$ نقطة خارجه، ولننشئ منها مستقيماً D موجهه $\vec{n}=(a,b,c)$ بحيث يقطع السطح (S) بنقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$، الشكل (6-6)، ولنأخذ نقطة M(x,y,z) دارجة على D أي:

$$\lambda:M(x=x_o+a\lambda\ ,\ y=y_o+b\lambda\ ,\ z=z_o+c\lambda)$$

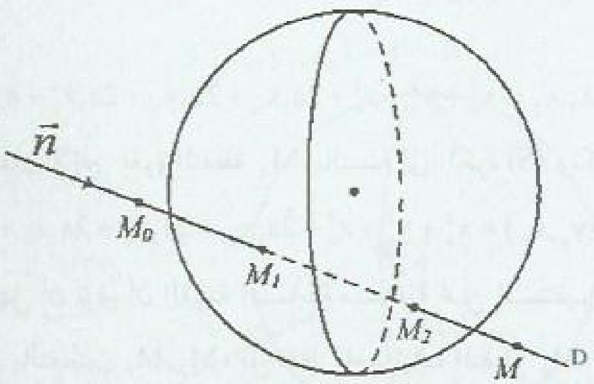
وسيط ما.

إن طول أية قطعة مستقيمة $\overline{M_oM}$ يكتب بالشكل:

$$\overline{M_oM}=\left|\overline{M_oM}\right|=\left|\lambda\vec{e}\right|\ ,\quad \overline{M_oM}=\lambda$$

حيث $\vec{e}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ هو متجه الواحدة على $\vec{n}$ وبالتالي فإنه يعبر عن الطول $\overline{M_oM}$ بدلالة قيم الوسيط t، ومن أجل النقطتين M_2,M_1 يكون:

$$\lambda_1=\overline{M_oM_1}\ ,\quad \lambda_2=\overline{M_oM_2}$$



الشكل (6-6)

بشكل عام وعندما تكون النقطة M على السطح (S) (M ∋ D أيضاً) فإنها تحقق معادلتيهما، أي:

$$S(x_o,y_o,z_o)=(x_o+a\lambda)^2+(y_o+b\lambda)^2+(z_o+c\lambda)^2+$$
$$+2a_1(x_o+a\lambda)+2a_2(y_o+b\lambda)+2a_3(z_o+c\lambda)+a_o=0$$

أو:

$$S(x_o,y_o,z_o)\equiv(a^2+b^2+c^2)\lambda^2++2(ax_o+by_o+cz_o+a_1a+a_2b+a_3c)\lambda+$$
$$+(x_o^2+y_o^2+z_o^2+2a_1x_o+2a_2y_o+2a_3z_o+a_3)=0$$

$$\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\delta=0 \qquad (12)$$

حيث:

$$\alpha=a^2+b^2+c^2$$
$$\beta=2(ax_o+by_o+cz_o+a_1a+a_2b+a_3c)$$
$$\delta=x_o^2+y_o^2+z_o^2+a_o$$

والمعادلة (12) ليست إلاّ معادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة إلى الوسيط λ ولها جذران λ_2,λ_1 مختلفان على الأكثر وبالتالي فإن جداءهما يساوي الحد المطلق في العلاقة (12) أي:

$$\lambda_1.\lambda_2=x_o^2+y_o^2+z_o^2+2a_1x_o+2a_2y_o+2a_3z_o+a_o \qquad (13)$$

يدعى المقدار الأخير بقوة النقطة M_o بالنسبة إلى الكرة (S) ونكتب:

$$S^*(x_o,y_o,z_o)\equiv x_o^2+y_o^2+z_o^2+2a_1x_o=2a_2y_o+2a_3z_o+a_o=0 \qquad (14)$$

ومن السهل أن نرى أن القيمة السابقة مستقلة عن المستقيم D ومتجهه $\bar{n}$، وبالتالي لاتتعلق بالنقطتين M_2,M_1، بل فقط بإحداثيات النقطة M_o، وهنا نستنتج أنه إذا أردنا حساب قوة نقطة بالنسبة إلى كرة، فيكفي أن نعوض إحداثياتها في معادلة الكرة، وإضافة إلى ذلك إذا كان الجذران λ_2,λ_1 متساويين، فإن القاطع $D=\overline{M_1M_2}$ يؤول إلى

التماس $\overline{M_oM_1}$ المرسوم من النقطة M_o "لأن M_2 تنطبق على M_1 في هـذه الحالـة" وهذا يقودنا إلى نتيجة ثانية هي أن:

مربع طول المماس المرسوم من نقطة M_o خارج الكرة إلى نقطة M_1 على سطحها يساوي قوة هذه النقطة M_o بالنسبة إلى الكرة (S) الشكل (7-6)، أي:

$$S^*(x_o, y_o, z_o) = \overline{M_oM_1}^2 \quad (15)$$

اعتماداً على ما سبق، وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن:

$$\overline{AM_o}^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2$$

$$\overline{AM_1}^2 = R^2$$

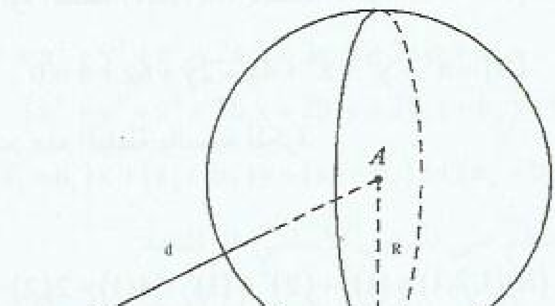
$$\overline{M_oM_1}^2 = S^*(x_o, y_o, z_o)$$

فإنه من علاقة فيثاغورث في المثلث القائم $A\hat{M_1}M$ "نصف قطر الدائرة عمودي على أي مماس فيها" فإن:

$$\overline{M_oM_1}^2 = \overline{AM_o}^2 - \overline{AM_1}^2$$

وبالتالي فإن قوة النقطة M_o بالنسبة إلى الكرة (S) تعطى بدلالـة نـصف قطر الكرة، وبعد النقطة M_o عن مركزها في علاقة من الشكل:

$$S^*(x_o, y_o, z_o) = d^2 - R^2 \quad (16)$$



الشكل (7-6)

والعلاقة الأخيرة بدورها توضح لنا الاحتمالات التالية:

1- إذا كانت القوة موجبة، أي $d^2 - R^2 > 0$ عندئذ فإن $d > R$، وبالتالي فإن بعد النقطة M_0 عن المركز A أكبر من نصف القطر، والنقطة M_0 تقع خارج الكرة (S).

2- إذا كانت القوة سالبة فإن $d^2 - R^2 < 0$ أو $d < R$ والنقطة M_0 تقع داخل الكرة (S).

3- القوة معدومة أي $d^2 = R^2$ أو $d = R$ والنقطة M تقع على سطح الكرة.

4- إذا كان $d = 0$ فإن $S^*(x_0, y_0, z_0) = -R^2$ وهذه بالحقيقة تمثل قوة النقطة $A(a_1, a_2, a_3)$ مركز الكرة بالنسبة إلى الكرة نفسها.

مثال (1): احسب قوة النقطة $M(1,1,1)$ بالنسبة للكرة:

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$$

الحل: بتعويض النقطة M في معادلة الكرة نجد أن:

$$S(1,1,1) = (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 - 2(1) - 2(1) - 3 = -4 < 0$$

إذاً القوة سالبة والنقطة تقع داخل الكرة.

مثال (2): احسب قوة النقطة $M(1,2,1)$ بالنسبة للكرة:

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 4 = 0$$

وما هو وضع هذه النقطة بالنسبة للكرة.

الحل:

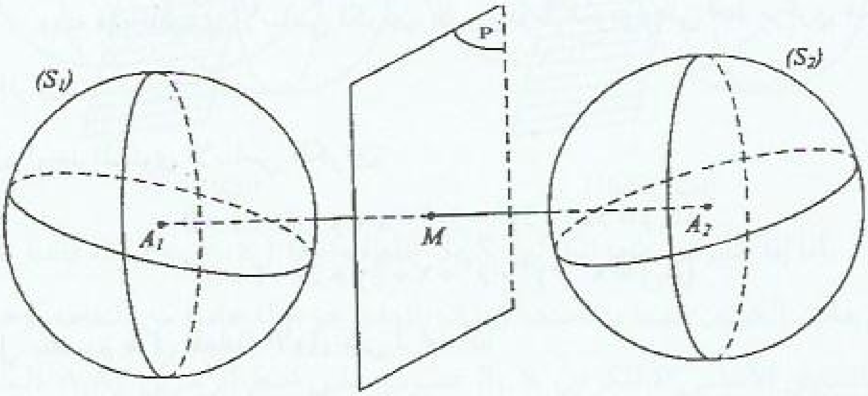
$$(S)(1,2,1) \equiv (1)^2 + (2)^2 + (1)^2 - 4(1) - 2(2) + 6(1) + 4 = 16 > 0$$

وبما أن القوة موجبة فإن النقطة M تقع خارج الكرة S.

(5-2-6) المستوى الأساسي لكرتين:

إن أحد أهم المفاهيم المتعلقة بقوة نقطة بالنسبة إلى كرة، هو مفهوم المستوي الأساسي لكرتين والذي يعرف بأنه المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ المتساوية القوة بالنسبة إلى كرتين مفروضتين S_2, S_1 نصفا قطريهما $R_2 R_1$ ومركزاهما $A_2(b_1, b_2, b_3), A_1(a_1, a_2, a_3)$ الشكل (6-8)، ولإيجاد معادلة المستوي هذا تنطلق من الشرط:

$$P \equiv S_1^*(x, y, z) = S_2^*(x, y, z) \qquad (17)$$



الشكل (6-8)

النقطة الكيفية $M(x, y, z) \in P$ إذا تحققت العلاقة (17) ومن معادلتي الكرتين بعد الاختزال والترتيب نجد أن:

$$P \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o - \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + b_o\right) = 0$$

$$P \equiv (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)y + (a_3 - b_3)z + (a_o - b_o) = 0 \qquad (18)$$

حيث إن الناظم على المستوي الأساسي هو المتجه:

$$\vec{N} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k} \qquad (19)$$

وهو نفسه موجه المستقيم A_2A_1 الواصل بين مركزي الكرتين S_2,S_1 لأنه بالفعل إذا كانت النقطتان A_2,A_1 معروفتين وحسب معادلة مستقيم مار من نقطتين يكون:

$$\overline{A_2A_1} = D \equiv \frac{x-b_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_2}{a_2-b_2} = \frac{z-b_3}{a_3-b_3}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{n} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3) \qquad (20)$$

ومنه فإن المستوي الأساسي لكرتين S_2,S_1 دوماً عمودي على خط مركزي هاتين الدائرتين.

مثال: أوجد المستوي الأساسي للكرتين:

$$(S_1) \equiv 3x^2+3y^2+3z^2-x+y+4z+1=0$$
$$(S_2) \equiv x^2+y^2+z^2+x+2y+2z-1=0$$

الحل: بتقسيم طرفي المعادلة الأولى على 3 نجد أن:

$$(S_1) \equiv x^2+y^2+z^2-\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}=0$$

ومعادلة المستوي الأساسي للكرتين (S_1) و (S_2) تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}=$$
$$x^2+y^2+z^2+x+2y+2z-1$$

ومعادلة المستوي الأساسي المطلوب هي:

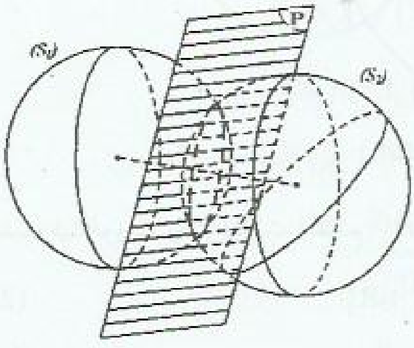
$$P \equiv 4x+5y+2z-4=0$$

(6-2-6) تقاطع كرتين، تماس كرتين، تعامد كرتين:

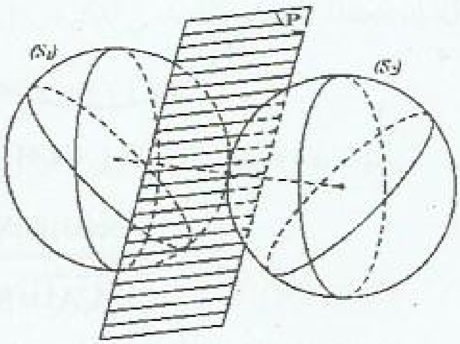
بالاعتماد على مفهوم المستوي الأساسي لكرتين وعلى قوة نقطة بالنسبة إلى كرة، يمكن دراسة تقاطع، تماس وتعامد كرتين مفروضتين في الفضاء.

عندما تتقاطع كرتان في الفراغ فإنهما تشتركان بدائرة (c) تقع في مستويهما الأساسي الشكل (6-9)، وهي تتحدد تماماً من خلال إحدى جملتي المعادلات:

$$(c):\begin{cases} P \equiv S_1^* - S_2^* = 0 \\ S_1^*(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad , \quad (c):\begin{cases} P \equiv S_1^* - S_2^* = 0 \\ S_2^*(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{21}$$



الشكل (6-9)



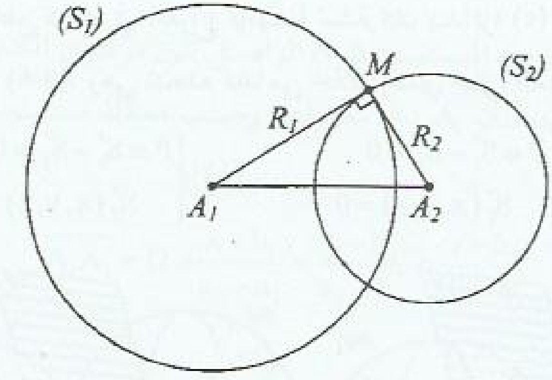
الشكل (6-10)

أما إذا اشترك سطحا الكرتين S_2, S_1 بنقطة واحدة $M_1(x_1, y_1, z_1)$، فإننا نقول عن هاتين الكرتين إنهما متماستان، وبما أن التماس هو حالة خاصة من التقاطع، وحيث إن المستوي الأساسي P للكرتين S_2, S_1 عمودي على خط المركزين A_1A_2 الشكل (6-10) فإن معادلة المستوي P "نقطة التماس $M_1 \in P$ لأنها متساوية القوة عن S_2, S_1 وخط المركزين هو ناظمه فيها" هي:

$$P \equiv (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)y + (a_3 - b_3)z = 0$$

وهي نفسها معادلة المستوي المماس لكل من الكرتين S_2, S_1 في حالة أخرى فإنه إذا كانت الكرتان S_2, S_1 متقاطعتين وتعامد نصفا قطريهما R_2, R_1 الماران من إحدى نقاط التقاطع M الشكل (6-11) نقول عن هاتين الكرتين في هذه الحالة إنهما متعامدتان (طبعاً هذا يكافئ كون المستويان المماسان لهما في هذه النقطة متعامدين) كما ويمكن إيجاد العلاقة التي تعطينا شرط التعامد كما يلي:

$$R_1 \perp R_2$$



الشكل (6-11)

حسب فيثاغورث ومن المثلث القائم $A_1\hat{M}A_2$ لدينا:

$$\overline{A_1A_2^2} = R_1^2 + R_2^2 \qquad (22)$$

أي أن:

$$S_1^*(b_1, b_2, b_3) = R_1^2$$
$$S_2^*(a_1, a_2, a_3) = R_2^2$$

أي أن قوة المركز A_1 بالنسبة إلى الكرة S_2 تساوي R_1^2 ، وقوة المركز A_2 بالنسبة إلى الكرة S_1 تساوي R_2^2 إذا عوضنا A_2, A_1 بدلالة الإحداثيات في العلاقة (22) يكون:

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = R_1^2 + R_2^2$$

أو:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = R_1^2 + R_2^2$$

أو:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \frac{a_o + b_o}{2} \qquad (23)$$

وهو شرط تعامد كرتين، حيث إن:

$$a_o = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - R_1^2 \qquad (24)$$

$$b_o = \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - R_2^2 \qquad (25)$$

مثال (1): ادرس تقاطع الكرتين:

$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$(S_2) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 2 = 0$$

الحل: إن معادلة المستوي الأساسي للكرتين (S_1) و (S_2) :

$$(S_1) - (S_2) \equiv 2x - y + 1 = 0$$

ويكون بعد مركز الكرة الأولى وهو $(0,0,0)$ عن المستوي الأساسي:

$$d = \frac{|0(2) + 0(-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (1)^2 + (0)^2}}$$

ونصف قطر الكرة الأولى (S_1) هو $R_1 = 1$.

وبما أن $d < R_1$ إذاً المستوي الأساسي يقطع هذه الكرة وعليه فإن الكرتين متقاطعتان.

مثال (2): عيّن الوضع النسبي للكرتين:

$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$
$$(S_2) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 6 = 0$$

الحل: معادلة المستوي للكرتين (S_1) و (S_2) هي:

$$P \equiv x + z - 2 = 0$$

ويكون بعد مركز الكرة الأولى (S_1) وهو $R(0,0,0)$ عن المستوي P هو:

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ونصف قطر الكرة (S_1) هو $\sqrt{2}$ ومنه $R = d$ أي أن الكرتين متماستان.

مثال (3): بين فيما إذا كانت الكرتان:

$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4 = 0$$
$$(S_2) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

متعامدتين.

الحل: مركز الكرة الأولى $C_1(a_1, a_2, a_3) = (-1, 0, 0)$

مركز الكرة الثانية $C_2(b_1, b_2, b_3) = (1, 1, -1)$

لكن:

$$a_o = -4, b_o = 2$$

ولدينا:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = -1$$

كذلك:
$$\frac{a_o + b_o}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$$

إذاً شرط التعامد محقق، أي أن:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \frac{a_o + b_o}{2}$$

مثال (4): ليكن لدينا الكرات الثلاث:

$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$
$$(S_2) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8 + 5 = 0$$
$$(S_3) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 6 = 0$$

ادرس تقاطع الكرات $(S_1), (S_2), (S_3)$.

الحل:

1) المستوي الأساسي للكرتين $(S_1), (S_2)$ هو:

$$P_1 \equiv 8y - 9 = 0$$

وهـذا المـستوي P_1 يقطـع الكـرة S_1 بـدائرة نـصف قطرهـا $\frac{\sqrt{47}}{8}$ ومركزهـا $\left(0,\frac{7}{8},0\right)$ ومركزها $\left(0,\frac{7}{8},0\right)$ لايمكن للطالب التأكد من ذلك.

الكرتان (S_1) و (S_2) متقاطعتان في دائرة.

2) المستوي الأساسي للكرتين (S_1) و (S_2) هو:

$$P_2 \equiv x+z-2=0$$

والبعد بـين مركـز (S_1) والمـستوي P_2 يـساوي $\sqrt{2}$ ونـصف قطـر (S_1) هـو $R_1=\sqrt{2}$.

الكرتان $(S_1),(S_3)$ متماستان في النقطة $(1,0,1)$.

3) المستوي الأساسي للكرتين (S_1) و (S_2)هو:

$$P_3 \equiv 8x-8y+8z-7=0$$

والبعد بين مركز الكرة (S_1) وهو $C_2(0,2,0)$ والمستوي P_3 أكبر مـن نـصف قطر الكرة (S_2) "أثبت ذلك".

فالكرتان (S_2) و (S_3) لاتتقاطعان.

ملاحظة (3): لتكن لدينا الكرة S_1 والمستوي P فإن مجموعة الكرات (S_i) التي لكـل منها مع S_1 مستوٍ أساسي هو المستوي P نفسه تدعى بحزمة الكـرات المحـددة بـالكرة S_1 وبالمستوي P وتكون:

$$(S_i): S_1+\lambda P=0 \qquad (26)$$

حيث:

$$S_1(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0$$
$$P\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

كما ويمكن كتابة معادلة الحزمة بمعرفة كرتين منها على الشكل:

$$(S_i): S_1 + \lambda S_2 = 0 \qquad (27)$$

إن حزمة الكرات هذه جميعها تشترك بدائرة واحدة (c) تدعى الدائرة الثابتة للحزمة وتقع في المستوي الأساسي P ، وإن مراكز كرات الحزمة تقع على المستقيم العمودي على المستوي P والمقام من مركز الكرة S_1.

ملاحظة (4): إذا كان لدينا ثلاث كرات S_1, S_2, S_3 مراكزها لاتقع على استقامة واحدة، وبفرض P_1 هو المستوي الأساسي للكرتين S_1, S_2، و P_1 هو المستوي الأساسي للكرتين S_2, S_3 عندئذ يتقاطع المستويان بفصل مشترك D يسمى المحور الأساسي للكرات S_1, S_2, S_3 وإن معادلته تعطى بالعلاقة التالية:

$$D \left\{ \begin{array}{l} P_1 : S_1^* - S_2^* = 0 \\ P_2 : S_2^* - S_3^* = 0 \end{array} \right. \qquad (28)$$

بآلية مشابهة إذا كان لدينا أربع كرات S_1, S_2, S_3, S_4 مراكزها الأربعة A_1, A_2, A_3, A_4 لاتقع على استقامة واحدة إذا كان D_1, D_2 المحور الأساسي لكل من مجموعة الكرات S_1, S_2, S_3 ومجموعة الكرات S_2, S_3, S_4 فإن D_1, D_2 يتقاطعان بنقطة تدعى المراكز الأساسية للكرات الأربع، وهذا يكافئ أن المستويات الأساسية للكرات الأربع مأخوذة مثنى مثنى تتقاطع في نقطة واحدة هي ذاتها المركز الأساسي السابق.

(7-2-6) المستوي المماس لكرة:

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة ما من الكرة (S).

$$(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ومعادلة المستقيم D المار بالنقطة M_1 هي:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} = \lambda \qquad (29)$$

فإذا قطع هذا المستقيم الكرة في نقطة ثابتة مثل M والتي إحداثياتها:

$$M(x, y, z) = (x_1 + \lambda A, y_1 + \lambda B, z_1 + \lambda C)$$

وبما أن M تقع على الكرة (S) فإن:

$$(x_1+\lambda A)^2+(y_1+\lambda B)^2+(z_1+\lambda C)^2=R^2$$

ومنه: بفك الأقواس وباعتبار أن:

$$x_1^2+y_1^2+c_1^2=R^2$$

لأن M_1 تقع على الكرة (S).

كذلك فإن $A^2+B^2+C^2=1$ ومنه:

$$\lambda^2+2\lambda(Ax_1+By_1+Cz_1)=0$$

فإذا كان المستقيم مماساً للكرة فإن قيم $\lambda=0$ ، لذلك:

$$Ax_1+By_1+Cz_1=0 \qquad (30)$$

والعلاقة الأخيرة هي شرط كون المستقيم D مماس للكرة S.

بحذف قيم A و B و C من العلاقات (29) و (30) نحصل على:

$$xx_1+yy_1+zz_1=0 \qquad (31)$$

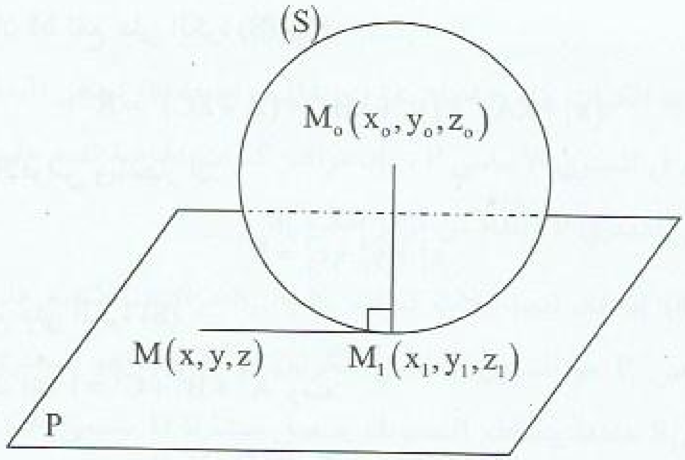
وهو المستوي المماس المعين من جميع المستقيمات المماسة.

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد معادلة المستوي P المماس للكرة.

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0$$

في النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ فإذا كان $M_o(x_o,y_o,z_o)$ مركز الكرة (S) وباعتبار $M(x,y,z)$ بنقطة من المستوي P "لاحظ الشكل 6-12"، يكون:

$$\overline{M_1M}.\overline{M_oM_1}=0$$



الشكل (12-6)

بالإسقاط على المحاور الإحداثية:

$$(x-x_1)(x_1-x_o)+(y-y_1)(y_1-y_o)+(z-z_o)(z_1-z_o)=0$$

$$\Rightarrow xx_1+yy_1+zz_1-x_o(x-x_1)-y_o(y-y_o)-z_o(z-z_1)$$
$$-\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)=0$$

لكن $M_1 \in (S)$ إذاً:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-2x_ox_1-2y_oy_1-2z_oz_1+a_o=0$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين طرفاً لطرف نحصل على:

$$xx_1+yy_1+zz_1+x_o(x+x_1)+y_o(y+y_1)+z_o(z+z_1)+a_o=0$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة المستوي المماس للكرة:

$$(S)=x^2+y^2+z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_o=0$$

عند النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ وهي تنتج عن معادلة الكرة (S) باستبدال كل x^2 بـ xx_1 وكل y^2 بـ yy_1 وكل z^2 بـ zz_1، وكل x بـ $\frac{x+x_1}{2}$، وكل y بـ $\frac{y+y_1}{2}$، وكل z بـ $\frac{z+z_1}{2}$ ... وهكذا نحصل بسهولة على معادلة المستوي المماس للكرة (S) في النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

مثال: اكتب معادلة المستوي المماس للكرة:

$$(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z + 3 = 0$$

عند النقطة $M_1(2,1,0)$.

الحل: نبدل في معادلة الكرة (S).

كل x^2 بـ $xx_1 = 2x$ وكل y^2 بـ $yy_1 = y$

وكل z^2 بـ $zz_1 = 0$،

وكل x بـ $\frac{x+x_1}{2} = \frac{x+2}{2}$ وكل y بـ $\frac{y+y_1}{2} = \frac{y+1}{2}$

وكل z بـ $\frac{z+z_1}{2} = \frac{z}{2}$

ومنه المعادلة هي:

$$P \equiv 2x - 2y - z - 2 = 0$$

وهي معادلة المستوي المماس للكرة.

3-6- المخروط الموجه والمخروط المقارب للسطح:

إن المعادلة (1):

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

تمثل المعادلة العامة لسطح (S) من الدرجة الثانية، فإذا أخذنا المشتقات الجزئية للمعادلة السابقة وأوجدنا الجذور المشتركة (فيما لو وجدت) لجملة المعادلات:

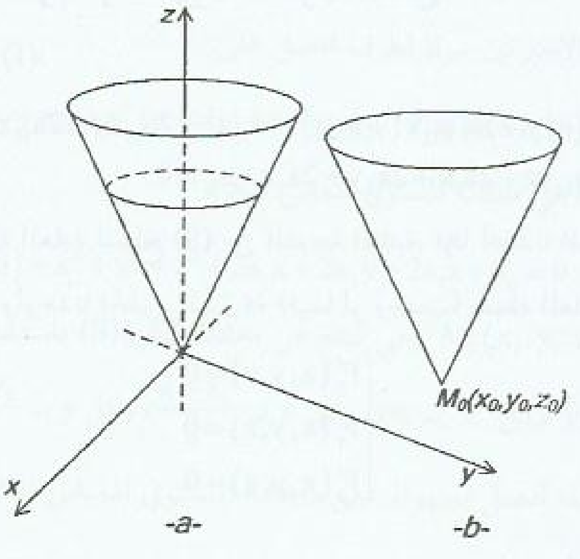
$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0 \\ F'_y(x,y,z) = 0 \\ F'_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

فإننا ندعو النقاط الموافقة لهذه الجذور $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right)$ ندعوها مراكز تناظر السطح (S) .

من جهة أخرى ومن أجل القيم الكبيرة جداً لـ x,y,z أي عندما $\left(x, y, z \rightarrow \infty\right)$ يمكن إهمال الحد المطلق a_o والحدود من الدرجة الأولى $2a_1x, 2a_2y, 2a_3z$ مقارنة بحدود الدرجة الثانية وكتابة المعادلة (1) بالشكل البسيط التالي:

$$F_1\left(x, y, z\right) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (33)$$

كل سطح يمثل بمعادلة من الشكل السابق يدعى بالمخروط الموجه للسطح (S)، ومن الواضح أن المعادلة (33) حدودها جميعها من الدرجة الثانية، وإن مبدأ إحداثيات النقطة (0,0,0)0 محققة لها دوماً (مركز تناظر للمخروط الموجه)، لذلك فإن المخروط الموجه هو سطح متجانس دوماً، يمر من نقطة الأصل (النقطة 0) التي تدعى ذروته أو رأسه الشكل (13-6,a)، فإذا كانت مراكز تناظره هي نفسها مراكز تناظر السطح (S) فإنه يسمى بالمخروط المقارب للسطح (S) الشكل (13-6,b)، وبالتالي فالمخروط المقارب هو مخروط موجه ذروته تقع في مركز تناظر السطح.



الشكل (13-6)

مثال (1) أوجد معادلة الكرة S_1 التي مركزها (3,-1,2) ومماسة للمستوي oyz، ثم أوجد معادلة الكرة S_2 التي مركزها (3,6,-4) وتمس المستوي:

$$P \equiv 2x - 2y - z - 10 = 0$$

الحل:

إن نصف قطر الكرة هو 3 (لأن x = 3) لذلك:

$$(S_1) \equiv (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3^2$$
$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

وهي معادلة الكرة المماسة للمستوي oyz.

إن البعد بين مركز الكرة (S) والمستوي P

$$d = \frac{|2(3) - 2(6) - 1(4) + 10|}{\sqrt{4+4+1}} = 4$$

وهو نصف قطرة الكرة S_2.

لذلك فمعادلة الكرة S_2 المطلوبة هي:

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 8z + 45 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة.

مثال (2): لتكن لدينا الدائرة C التي مركزها $M_0\,(0,3,0)$ ونصف قطرها $r = 1$ ولتكن (S) كرة مركزها $M_1\,(0,0,2)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{2}$.

- أوجد معادلة الكرة (S1) التي تمر من C وتتعامد مع (S).
- أوجد معادلات الكرات (S2) التي تمر من C وتمس (S).

الحل:

1) معادلة الدائرة كتقاطع للكرة:

$$x^2+(y-3)^2+z^2=1$$

مع المستوي $z=0$ فتكون معادلات حزمة الكرات المارة من الدائرة C هي:

$$S(\lambda)=x^2+y^2+z^2-6y-2\lambda z+8=0$$

حيث إن:

$$S(\lambda)=S_1+\lambda S_2$$

أما معادلة الكرة (S) فهي:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4z+2=0$$

حيث إن شرط تعامد $S(\lambda)$ مع S تعطي $\lambda=\frac{5}{2}$ وتكون معادلة الكرة (S1) هي:

$$(S_1)=S\left(\frac{5}{2}\right)\equiv x^2+y^2+z^2-6y-5z+8=0$$

لإيجاد الكرات (S2) التي تمر من C وتمس (S) تكتب معادلة المستوي الأمامي لـ S و $S(\lambda)$ المماس للكرة S فإن معادلته:

$$\lambda=\frac{10\mp\sqrt{54}}{2}\Rightarrow 2\lambda=10\mp\sqrt{54}$$

بالتعويض في $S(\lambda)$ نجد:

$$x^2+y^2+z^2-6y-\left(10\mp\sqrt{54}\right)z+8=0$$

وهما الكرتان المماستان لـ S.

4-6- مجسمات القطوع:

بإجراء عدد من التحويلات (دوران، انسحاب ...) يمكن حذف الحدود الخطية والحدود المستطيلة وكتابة المعادلة (1) على النحو المختصر التالي:

$$F(x,y,z)=A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+A_0 \qquad (34)$$

أي الاكتفاء بالحدود المربعة والحد الثابت، وتعبر بالمعادلة الأخيرة بالحقيقة عن مجسمات قطوع مخروطية نميز بعضها عن بعض وفقاً للأمثال $i = 0,1,2,3, A_i$ الداخلة في المعادلة ونكون أمام الحالات التالية:

1- مجسم القطع الناقص:

وهذا يوافق كون الأمثال A_1, A_2, A_3 موجبة معاً (سالبة معاً) والحد الثابت A_o سالب (موجب) وبحيث $i = 0,1,2,3, A_i \neq 0$ وعندئذ يفضل كتابة المعادلة على النحو التالي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (35)$$

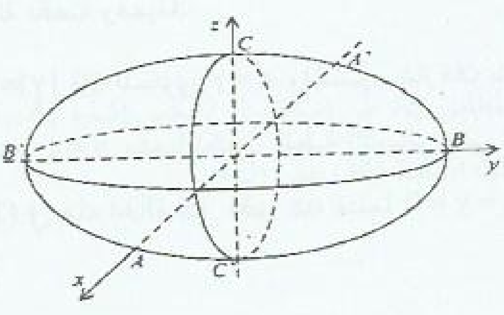
حيث إن:

$$a^2 = \frac{A_1}{A_o} \quad , \quad b^2 = \frac{A_2}{A_o} \quad , \quad c^2 = \frac{A_1}{A_o} \qquad (36)$$

نسمي الأطوال c,b,a أنصاف أقطار لمجسم القطع الناقص هذا، وهي في هذه الحالة منطبقة على المحاور الإحداثية ومتلاقية في النقطة 0 وإذا كانت $a > b > c$ فيدعى المجسم مجسم القطع الناقص ذا المحاور الثلاثة (a المحور الكبير، b المتوسط، c الصغير) النقاط:

$$A(a,0,0), A'(-a,0,0), B(0,b,0), B'(0,-b,0)$$
$$C(0,0,c), C'(0,0,-c)$$

برؤوس المجسم. الشكل (14-6).



الشكل (14-6)

إن تقاطع مجسم القطع الناقص مع المستويات الإحداثية (مستويات موازية لها) هي قطوع ناقصية (من هنا أتت تسميته بمجسم القطع الناقص) لها المعادلات التالية:

أ – مع المستوي $z=\gamma$:

$$(C):\begin{cases} z=\gamma \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{\gamma^2}{c^2} \end{cases} \tag{37}$$

ب – مع المستوي $y=\beta$:

$$(C):\begin{cases} y=\beta \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{\beta^2}{b^2} \end{cases} \tag{38}$$

ج – مع المستوي $x=\alpha$:

$$(C):\begin{cases} x=\alpha \\ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{\alpha^2}{a^2} \end{cases} \tag{39}$$

حيث إنه في الحالة (أ) مثلاً فإن القطع الناقص "عندما $|\gamma|<c$" يقع في المستوي xoy بنصفي قطرين $a\left(1-\dfrac{\gamma^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, b\left(1-\dfrac{\gamma^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ومركز يقع على المحور oz، أما عندما $|\gamma|>c$ فإنه لاوجود لمثل هذا القطع الناقص، وبالتالي لاتوجد نقاط مشتركة بين مستوي $z=\gamma$ والجسم في هذه الحالة، أي أن المعادلة (37) لاتمثل بالحقيقة أي شكل هندسي (يمكن أن تمثل أسطوانة ناقصة وهمية).

أخيراً عندما $|\gamma|=c$ فإن المستوي $z=\gamma$ والجسم يشتركان بنقطة تدعى نقطة التماس $C(0,0,c)$ عندما $\gamma=c$ بينما تكون نقطة التماس هي $C'(0,0,c)$ عندما $\gamma=-c$ والمعادلة (37) في هذه الحالة تمثل المحور oz عندما $x=y=0$ وتناقش الحالتان ب – ج بنفس الآلية.

نتيجة (2):

1- إذا كانت أنصاف الأقطار متساوية، أي $a = b = c$ فالمجسم في هذه الحالة يؤول إلى كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطر $R = a$.

2- إذا تساوى فقط اثنان من المقادير a,b,c فنعود إلى المجسم الناقص الدوراني.

3- إذا كانت الأمثال A_i $i = 0,1,2,3$ كلها موجبة معاً (سالبة معاً) عندئذ فإن المعادلة (34) تصبح على الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (40)$$

وهي تعبر عن معادلة مجسم قطع ناقص وهمي لأنه لاتوجد نقاط حقيقية تحققها.

2- مجسم القطع الزائد:

بفرض أن الأعداد $i = 0,1,2,3, A_i \neq 0$ وأن A_2, A_1 من إشارة واحدة مخالفة لإشارة A_3 عندئذ:

أ – إذا كان A_3 من إشارة A_2, A_1 فإن المعادلة (34) تأخذ الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (41)$$

$$a^2 = +\frac{A_o}{A_1} \ , \quad b^2 = \frac{A_o}{A_2} \ , \quad c^2 = -\frac{A_o}{A_3}$$

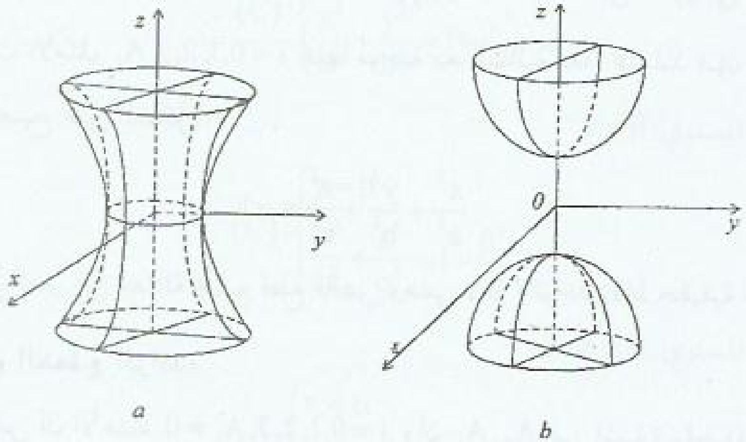
وهي بالحقيقة تعبر عما يسمى مجسم القطع الزائد ذي الطية الواحدة الشكل $(15-6,a)$.

ب – إذا كان الحد المطابق A_o من إشارة A_3 (عكس إشارة A_2, A_1 عندئذ وبالتقسيم على A_o نكتب المعادلة (34) على النحو:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$a^2=-\frac{A_o}{A_1}\ ,\ b^2=-\frac{A_o}{A_2}\ ,\ c^2=-\frac{A_o}{A_3} \qquad (42)$$

والتي تمثل ما يعرف بمجسم القطع الزائد ذي الطيتين الشكل (15-6,b).



الشكل (15-6)

ولندرس الآن تقاطع الجسم الزائدي مع المستويات الإحداثية (مستويات موازية لها) ولنبدأ أولاً بالجسم (41) ذي الطية الواحدة:

إن مقطع هذا الجسم مع المستوي $yoz\ ((x=0))\ ,xoz\ ((y=0))$ عبارة عن القطع الزائد:

مع المستوي yoz ، $z=0$ ، $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

مع المستوي xoz ، $y=0$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

وهو يبدو كأنبوبة لانهائية ممطوطة باتجاه المحور oz الشكل (15-6,a)، أما مقطع هذا الجسم مع المستوي $z=h$ فهو القطع الناقص:

$$(C):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h\end{cases} \quad \text{أو} \quad \frac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \qquad (43)$$

في حالة خاصة عندما $a = b$ يكون المقطع دائرة وعندما $z = 0$ أي $h = 0$ نحصل على القطع الناقص:

$$(C):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0\end{cases} \qquad (44)$$

نتيجة (3): في المعادلة (41) إذا كان $a = b$ فإنها تؤول إلى الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (45)$$

وهو ما يعرف بمجسم القطع الزائد ذي الطية الواحدة الدوراني بالنسبة إلى مجسم القطع الزائد ذي الطيتين فإن تقاطعه مع المستويات الإحداثية يتم كما يلي: تقاطعه مع المستوي xoz هو القطع الزائد:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad , \quad y=0$$

ومع المستوي yoz القطع الزائد:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad x=0$$

أما التقاطع مع المستوي xoy $(z = h)$ مع مستويات موازية للمستوي xoy فيكون:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \qquad (46)$$

فإذا كانت $|h|<c$ فلاتوجد نقاط تقاطع بين المستوي xoy والمجسم القطعي الزائدي ذي الطيتين (المقدار في الطرف الأيمن للعلاقة (43) سالب، بينما المقدار في

الطرف الأيسر موجب)، بينما إذا كان $|h|=c$ أو $h=\pm c$ فإن المستويات $z=h$ تمس الجسم في النقطتين $C(0,0,c)$ من أجل $h=c$ والنقطة $C(0,0,c)$ من أجل $h=-c$.

أخيراً عندما $|h|>c$ فإن تقاطع المستويات $z=h$ مع العلاقة (42) هو القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1 \tag{47}$$

نتيجة (4): في المعادلة (42) وعندما $a=b$ يكون:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{48}$$

وهذا ما يعرف بالجسم الزائدي ذي الطيتين الدوراني.

مثال(1): عين السطح الذي تمثله المعادلة:

$$12x^2+4y^2+3z^2-36=0$$

الحل: هذه المعادلة يمكن أن تكتب على الشكل:

$$\frac{(x-0)^2}{3}+\frac{(y-0)^2}{9}+\frac{(z-0)^2}{12}=1$$

وهي تمثل مجسم قطع ناقص مركزه المبدأ وأنصاف محاوره:

$$a=\sqrt{3}\ ,\ b=3\ \ ,\ c=\sqrt{12}$$

مثال (2): عين نوع السطح الذي معادلته:

$$x^2-4y^2-4z^2+16=0$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}-\frac{x^2}{10}=1$$

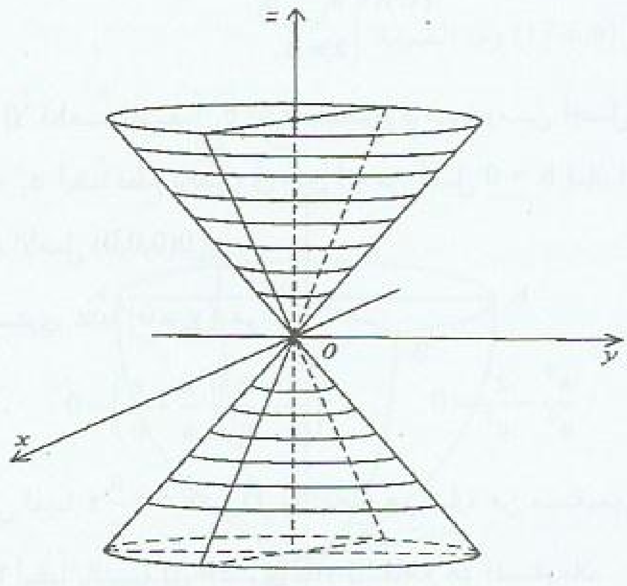
وهي معادلة مجسم قطع زائد وحيد الفرع محوره ox، ومركزه المبدأ وأنصاف محاوره $a = 4, c = b = 2$.

3- المخروط من الرتبة الثانية:

إذا كانت الأمثال في المعادلة (34) بحيث $A_0 = 0$, $A_1, A_2, A_3 \neq 0$ فهنا نميز حالتين:

أ – أحد الأمثال (A_3 مثلاً) مخالف بالإشارة للعددين الآخرين (A_1, A_2) أي تأخذ المعادلة (34) الصيغة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (49)$$



الشكل (16-6)

ب – إذا كانت A_1, A_2, A_3 جميعها من إشارة واحدة والمعادلات (34) تكون على الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (50)$$

وهي حالة مخروط تخيلي مولد من مستقيمات تخيلية مارّة من نقطة واحدة هي نقطة الأصل 0.

التقاطع مع المستويات الإحداثية (أو مستويات موازية لها).

الحالة أ : من أجل التقاطع مثلاً مع المستوي $z=h$ فإن المعادلة (49) تصبح على الشكل:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \quad , \quad a_1^2=\frac{a^2h^2}{c^2} \quad , \quad b_1^2=\frac{b^2h^2}{c^2}$$

والمنحني:

$$(C):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\\ z=h\end{cases} \tag{51}$$

ليس إلاّ قطعاً ناقصاً $a_1=b_1$ يصبح دائرة ومن أجل $h = c$ فإن $a_1^2=a^2, b_1^2=b^2$ أيضاً قطع ناقص، في حين أنه من أجل $h=0$ فإن القطع الناقص يؤول إلى نقطة الأصل $0(0,0,0)$.

التقاطع مع المستوي $xoz\,(y=0)$ هو:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad , \quad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0$$

وبالتالي لدينا $D_{1,2}: x=\pm\dfrac{a}{c}z$ والتقاطع هو عبارة عن مستقيمين يمران من نقطة الأصل وهكذا أيضاً بالنسبة إلى المستوي yoz فالتقاطع هو المستقيمان:

$$y=\pm\frac{b}{c}z \tag{52}$$

أيضاً إن التقاطع مع المستوي $y = hx$ (المار بالمحور oz) هو مستقيمان:

$$D_1: y=hx, x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}}+\frac{z}{c}=0$$

$$D_2 : y = h, x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}} - \frac{z}{c} = 0 \qquad (53)$$

4- المجسم القطعي المكافئ:

يستنتج من المعادلة (1) بعد كتابتها بالشكل:

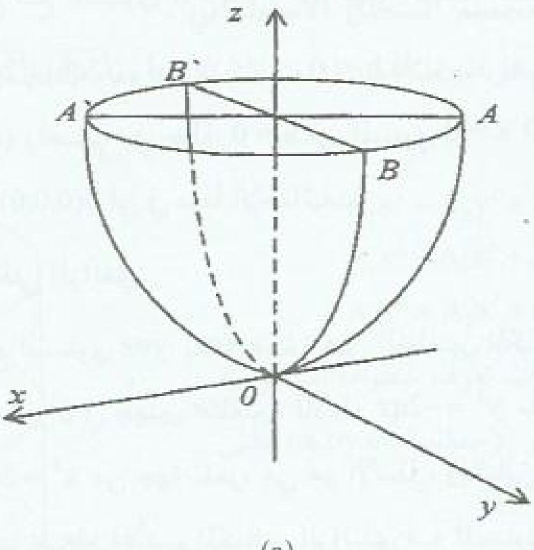
$$A_1x^2 + A_2y^2 = 2B_1z \;\;,\;\; A_1A_2 \;\;,\;\; B_1 \neq 0 \qquad (54)$$

أو بالشكل:

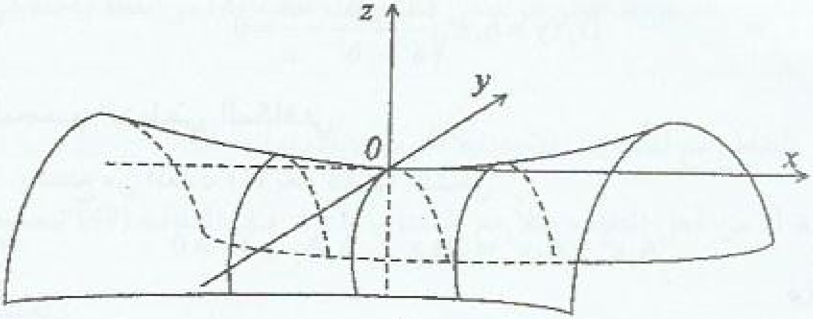
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \;\;,\quad p,q>0 \qquad (55)$$

عندما $A_1.A_1 > 0$ والمعادلة (55) تمثل في هذه الحالة مجسم القطع المكافئ الناقصي الشكل (17-6,a)، أما إذا كان $A_1.A_2 < 0$ فالمعادلة تمثل مجسماً قطعياً مكافئاً زائدياً الشكل (17-6,b) ولها الصيغة:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \;\;,\quad p,q>0 \qquad (56)$$



(a)



(b)

الشكل (6-17)

التقاطع مع المستويات الإحداثية:

أ – الجسم المكافئي الناقصي:

إن مقاطع مجسم القطع المكافئي الناقص مع المستويين yoz, xoz هما قطعان مكافئان لهما المعادلة: $y^2 = 2qz\ ,\ x^2 = 2pz$ كل منهما مقعر إلى الأعلى.

أما التقاطع مع المستوي $z = h$, $h > 0$ فهو القطع الناقص: $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h$ نصفا محوريه $\sqrt{2qh}, \sqrt{2ph}$، أما إذا كانت $h < 0$ فلاتوجد نقاط تقاطع بين هذه المستويات $(z = h)$ والجسم، وفي حالة $h = 0$ فإن المستوي $z = 0$ (المستوي xoy) يمس الجسم في النقطة $0(0,0,0)$ أي في مبدأ الإحداثيات.

ب – الجسم المكافئي الزائدي:

التقاطع مع المستوي xoz, yoz عبارة عن القطعين المكافئين: $y^2 = -2qz$ و $x^2 = 2p$ وهما مقعران في جهتين مختلفتين، فالأول $y^2 = -2qz$ مقعر إلى الأعلى بينما القطع الثاني $x^2 = 2pz$ من جهة تقعره هي نحو الأسفل، وبالتالي يأخذ الجسم شكل سرج الدابة، أما تقاطع الجسم المكافئي الزائدي مع المستوي $xoy(z=0)$ فهو المستقيمان $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0$ بالنسبة إلى تقاطع هذا الجسم مع مستويات توازي المستويات الإحداثية $z = \gamma, y = \beta, x = a$ فهي على الترتيب:

$$(C):\begin{cases}\dfrac{a^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=z\\ x=a\end{cases}\qquad (57)$$

$$(C):\begin{cases}\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{\beta^2}{2q}=z\\ y=\beta\end{cases}\qquad (58)$$

$$(C):\left\{\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=\gamma\right.\qquad (59)$$

فبالنسبة للمعادلة (57) فإن القطع المكافئي الممثل بها مفتوح إلى الأسفل، ومتناظر بالنسبة إلى المستوي xoz ومحور 0 المحور oz ووسيطه q.

أما القطع المكافئي الممثل بالمعادلة (58) فالتقعر إلى الأعلى في حين أن المعادلة (59) تمثل قطوعاً زائدية بمحاور موازية للمحور ox، من أجل $\gamma > 0$، وموازية للمحور oy من أجل $\gamma < 0$.

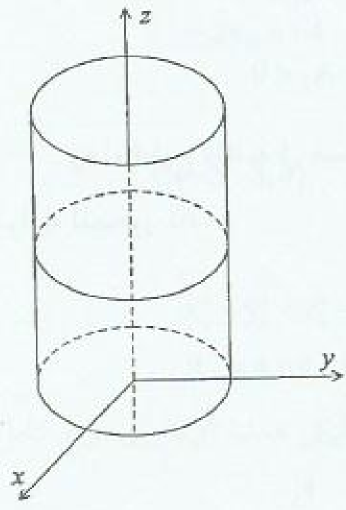
5- الأسطوانة "مجسم السطح الأسطواني":

هذه الحالة توافق غياب أحد المتحولات z,y,x من المعادلة (34)، أي لها أحد الأشكال التالية:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_o=0$$
$$A_1x^2+A_3z^2+A_o=0$$
$$A_2y^2+A_3z^2+A_o=0$$

وهذه المعادلات تعرف سطوحاً أسطوانية بمولد يوازي المحاور الإحداثية ox,oy,oz على الترتيب الشكل (6-18).

سنقتصر على الحالة $A_o > 0$ ومن أجل المعادلة الأولى من المعادلات الثلاث الأخيرة لدينا:



الشكل (6-18)

أ – إذا كان:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_o = 0 : A_1, A_2 > 0$$

تكتب على الشكل:

$$\frac{x^2}{\frac{-A_o}{A_1}} + \frac{y^2}{\frac{-A_o}{A_2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

تمثل أسطوانة تخيلية.

ب – $A_1, A_2 < 0$ فإن:

$$\frac{x^2}{\frac{-A_o}{A_1}} + \frac{y^2}{\frac{-A_o}{A_2}} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وهذه المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً في المستوي xoy، أما في الفراغ فهي تمثل سطحاً أسطوانياً مولداته موازية للمحور oz.

ج – $A_1.A_2 < 0$ فيكون لدينا:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ A_1 < 0 \ , \ A_2 > 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ , \ A_1 > 0 \ , \ A_2 < 0$$

وهذه قطوع زائدية في مستوي أو سطوح أسطوانية زائدية في الفراغ بمولدات موازية للمحور oz.

تمارين محلولة (6)

التمرين (1): أوجد معادلة الكرة التي لها المركز C(2,-1,3) ونصف قطرها R = 4.

الحل: بالتعويض في المعادلة العامة للكرة، المعادلة (6) نجد أن:

$$(S)\equiv(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4^2$$

أو:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$$

التمرين (2): أوجد إحداثيات مركز الكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$$

الحل: بمقارنة المعادلة السابقة مع المعادلة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2\right)=0$$

نجد أن:

$$-2x_0=-4 \quad , \quad -2y_0=6 \quad , \quad -2z_0=-8$$

ومنه:

$$C(-2,-3,4) \quad , \quad x_0=+2 \;\; , \;\; y_0=-3 \;\; , \;\; z_0=4$$

ولدينا:

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=4 \Rightarrow R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-4$$
$$R^2=4+9+16-4 \quad , \quad R=\sqrt{25}=5$$

كما ويمكن إيجاد $C(x_0,y_0,z_0)$ من خلال ما يسمى عملية الإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2-4x+y^2+6y+z^2-8z+4=0$$

$$x^2-4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+y^2+6y+6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+$$

$$+z^2-8z+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2+4=0\Rightarrow$$

$$x^2-4x+(2)^2+y^2+6y+(3)^2+z^2-8z+(4)^2-4-9-16-4=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$$

$$C(2,-3,4) \quad , \quad R=5$$

التمرين (3):

أ – أوجد قوة كل من النقـاط: $M_4(2,-3,4), M_3(1,0,2), M_2(2,1,7), M_1(1,1,1)$

بالنسبة إلى الكرة:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$$

محدداً موقع كل منها بالنسبة إلى هذه الكرة، والبعد d بينها وبين مركز الكرة.

ب – أوجد معادلة المستوي P المماس للكرة في النقطة M_2.

الحل: النقطة $M_1(1,1,1)$

$$S^*(M_1)=(1)^2+(1)^2+(1)^2-4(1)+6(1)-8(1)+4$$
$$=1+1+1-4+6-8+4=1>0$$

النقطة M_1 خارج الكرة، ولدينا:

$$S^*(x,y,z)=d^2-R^2\Rightarrow$$
$$d^2=S^*(x,y,z)+R^2$$
$$d^2=1+(5)^2 \ , \ R=5$$

النقطة $M_2(2,1,7)$:

$$S^*(M_2)=4+1+49-4(2)+6(1)-8(7)+4=0$$

النقطة $M_2(2,1,7)$: تقع على سطح الكرة S وبالتالي فإن $d=R$.

من أجل النقطة $M_3(1,0,2)$ لدينا:

$$S^*(M_3)=1+0+4-4(1)+6(0)-8(2)+4=-11<0$$

النقطة M_3 تقع داخل الكرة ويكون:

$$d^2=S^*(M_3)+R^2=-11+25=14\ ,\ d=\sqrt{14}$$

أخيراً بالنسبة إلى النقطة $M_4(2,-3,4)$ (مركز الكرة وفق التمرين السابق)، حيث لدينا:

$$S^*(M_4)=(2)^2+(-3)^2+4^2-4(2)+6(-3)-8(4)+4$$
$$S^*(M_o)=-25=-5^2=-R^2\ ,\ d^2=S^*+R^2=0\ ,\ d=0$$

ب – إن النقطة $M_2(2,1,7)$ تقع على سطح الكرة وبالتالي يمكن التكلم عن مستو P مماس ونوجد معادلته من خلال العلاقة:

M_4 مركز الكرة: $\overline{m_4M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_4}$

$$\overline{M_4M_2}=O\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$$

وهو ناظم المستوي P المطلوب.

وبما أن P يجب أن يمر من $m_2(2,1,7)$ فإن:

$$P\equiv A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$
$$P\equiv 0(x-2)+4(y-1)+3(2-7)=0$$
$$P\equiv 4y+4z-25=0$$

التمرين (4): أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرة:

$$(C)\equiv\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}\quad ,\ a=\text{const}$$

وبالنقطة $M(a,a,a)$.

الحل: نوجد الكرة (S) المطلوبة من خلال حزمة الكرات:

$$(S)\equiv\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)+\lambda\left(x+y+z-a\right)=0$$

ونحدد λ بحيث تمر الكرة من النقطة $M(a,a,a)$ ويكون:

$$(S)\equiv\left(a^2+a^2+a^2-a^2\right)+\lambda\left(a+a+a-a\right)=0$$

$$a^2+\lambda a=0 \quad , \quad \lambda=-a \quad , \quad a\neq 0$$

نعوض قيمة λ في حزمة الكرات فنجد أن:

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-ax-ay-az=0$$

نكمل إلى مربع كامل:

$$(S)\equiv x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2-ay+\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2-az+\left(\frac{a}{2}\right)^2-3\left(\frac{a}{2}\right)^2=0$$

$$(S)\equiv\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=3\frac{a^2}{4}$$

ومركز الكرة هو النقطة: $C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ ، نصف قطرها: $R=\frac{\sqrt{2}}{2}|a|$

التمرين (5): أوجد معادلة الكرة التي تمس المستويات الإحداثية، وبحيث إن مركزها يقع على المستوي $P\equiv 2x-3y+4z-18=0$.

الحل: إن الكرة المطلوبة حسب شروط المسألة تمس المستويات $x=0, y=0, z=0$ ومركزها يقع على المستوي P المعطى، فإذا كان المركز النقطة $C(\alpha,\beta,\gamma)$ فإن $\alpha=\beta=\gamma=R$، وهذه النقطة تقع على المستوي P فهي تحقق معادلته:

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha-3\beta+4\gamma-18=0 \\ \alpha=\beta=\gamma=R \end{array}\right\}\Rightarrow 3\alpha=18 \ , \ \alpha=\beta=\gamma=R=6$$

بالتعويض في المعادلة العامة للكرة نجد أن:

$$(x-6)^2+(z-6)^2=6^2$$

التمرين (6): أوجد الحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي يكون بعد كل منها عن النقطة $A(2,0,0)$ أقرب بمرتين عن بعدها عن النقطة $B(-4,0,0)$.

الحل:

$$d_1 = \overline{AM} = \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$d_2 = \overline{BM} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

ولدينا بالفرض:

$$2d_1 = d_2 \Rightarrow 4d_1^2 = d_2^2 \Rightarrow$$

$$4\left[(x-2)^2+y^2+z^2\right] = (x+4)^2+y^2+z^2$$

$$4(x-2)^2+3y^2+3z^2-(x+4)^2=0$$

$$4x^2-16x+16+3y^2+3z^2-x^2-8x-16=0$$

$$3x^2+3y^2+3z^2-24x=0 \quad , \quad x^2+y^2+z^2-8x=0$$

وهي معادلة كرة نصف قطرها ومركزها النقطة $C(4,0,0), R=4$

التمرين (7): أوجد المستوي الأساسي للكرتين:

$$(S_1) \equiv x^2+y^2+z^2+2x+3y-z-4=0$$

$$(S_2) \equiv x^2+y^2+z^2-x-2y+2z-3=0$$

الحل: إن معادلة المستوي الأساسي للكرتين $(S_2),(S_1)$ تؤخذ من العلاقة:

$$(P) \equiv S_1^*(x,y,z)-S_2^*(x,y,z)=0$$

$$(P) \equiv \left(x^2+y^2+z^2+2x+3y-z-4\right)-$$

$$\left(x^2+y^2+z^2-x-2y+2z-3\right)=0$$

$$(P) \equiv 3x+5y-3z-1=0$$

التمرين (8) : أوجد معادلة الكرة (S) التي تمر بالدائرة:

$$(C) \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5=0 \\ x-2y-2z+1=0 \end{cases}$$

وتمس المستوي:

$$(P) \equiv 2x+2y=z-7=0$$

الحل:

نجد أولاً حزمة الكرات المارة بالدائرة (C) ويكون $(S)+\lambda P=0 \Rightarrow$

$$\left(x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5\right)-2\lambda\left(x-2y-2z+1\right)=0$$

من بين جميع الكرات هذه سنأخذ تلك التي تمس المستوي (P)، أي تلك التي يكون بعد المستوي (P) عن مركزها مساوياً لنصف القطر R، ولدينا:

$$x^2+y^2+z^2-(3+2\lambda)x+(6+4\lambda)y+(2+4\lambda)-(5+2\lambda)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)x-2(-3-2\lambda)y-2(-1-2\lambda)z-(5+2\lambda)=0$$

والمركز هو:

$$C\left[\left(\frac{3}{2}+\lambda\right),(-3-2\lambda)\,,\,(-1-2\lambda)\right].$$

ولنحسب R و d (d من دستور بعد نقطة عن مستوٍ).

$$R^2=x_o^2+y_o^2+z_o^2-a_{o'}=\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)^2+(-3-2\lambda)^2+(-1-2\lambda)^2+(5+2\lambda)$$

$$d^2=\left[\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+\lambda_o|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right]$$

$$d^2=\left[\frac{2\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)+2(-3-2\lambda)+(-1-2\lambda)}{\sqrt{4+4+1}}\right]$$

$$d^2=\left[\frac{|(3+2\lambda)-(6+4\lambda)+(-1-2\lambda)-7|}{3}\right]$$

$$d^2=R^2 \Rightarrow 4.65\lambda^2+4.101\lambda+137=0 \Rightarrow$$

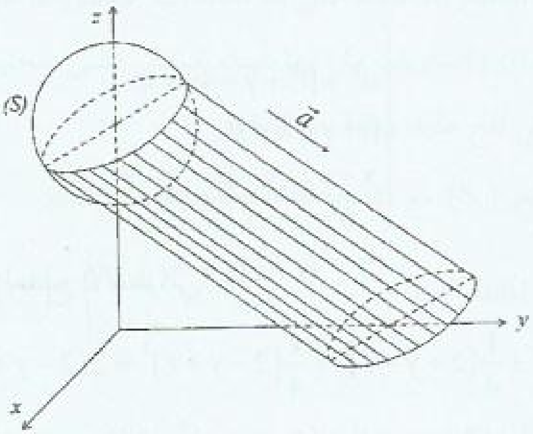
$$\lambda_1=-\frac{137}{2.62}\ ,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}\ ,\ \lambda_{1,2}=\frac{-2.101\pm 2.36}{4.65}$$

نعوض قيمتي λ_2,λ_1 في معادلة الحزمة نجد أن:

$$(S_1) \equiv x^2+y^2+z^2-\frac{58}{65}x+\frac{116}{65}y-\frac{144}{65}-\frac{188}{65}=0$$

$$(S_2) \equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$$

التمرين (9): تضاء الكرة $(S) \equiv x^2+y^2+z^2=4z$ بحزمة ضوئية أشعتها موازية للمستقيم $D \mid y=z, x=0$ والمطلوب إيجاد معادلة محيط المنطقة S_1 المشكلة لظل هذه الكرة في المستوي xoy الشكل (19-6).



الشكل (19-6)

الحل:

لإيجاد معادلة محيط المنطقة S_1 "ظل الكرة S المضاءة" في المستوي xoy، نجد أولاً معادلة السطح الأسطواني الذي أدلته المتجهات الموازية للمستقيم L وذلك بإيجاد مركبات موجهة $\vec{n}$، حيث إن الناظم على المستوي $x = 0$ هو $\vec{n}_1=(1,0,0)$ على المستوي $y=z$ هو $\vec{n}_2=(0,1,-1)$ والموجه $\vec{n}$ هو الجداء الخارجي لهذين المتجهين، ويكون:

$$\vec{n}+\vec{n}\Lambda\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

إن دليل السطح الأسطواني هو المنحني (C) والذي هو تقاطع الكرة (S) مع المستوي P المار من مركزها $C(0,0,2)$ ، وبحيث يكون عمودياً على المتجه $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}$

"معادلة P هي: $y+z-2=0$ " والدليل هو:

$$(C)\equiv\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4z=0\\ y+z-2=0\end{cases}$$

بحذف الوسطاء α,β,γ من جملة المعادلات الجبرية:

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\gamma-4\gamma=0\\ \beta+\gamma-2=0\\ \dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-\beta}{1}=\dfrac{z-\gamma}{1}\end{cases}$$

نحصل على السطح الأسطواني:

$$x^2+\frac{1}{4}(2+y-z)^2+\frac{1}{4}(2-y+z)^2=2(2-y+z)$$

أو: $$4x^2+(2+y-z)^2+(2-y+z)^2-8(2-y+z)=0$$

وتقاطع هذا السطح مع المستوي xoy هو منطقة الظل. المطلوب إيجاد محيطها لذلك يكفي أن نضع في المعادلة السابقة $z=0$ ومنه:

$$(S_1)\equiv\begin{cases}4x^2(2+y)^2+(2-y)^2-8(2-y)=0\\ z=0\end{cases}$$

ثم بفك الأقواس والترتيب يكون:

$$(S_1)\equiv\begin{cases}4x^2+2y^2+8y-8=0\\ z=0\end{cases}$$

أو:

$$(S_1)\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(4+2)^2}{8}=1\\ z=0\end{cases}$$

التمرين (10): حدد نوع السطوح التالية (اعتماداً على طريقة المقاطع):

$$1)\ \ (S_1)\equiv x^2+y^2=2(z+1)^2 \qquad 2)\ \ (S_2)\equiv \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=1$$

$$3)\ \ (S_3)\equiv \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=4(z+3)$$

الحل:

تحديد نوع السطح بالاعتماد على تقاطعاته مع مستويات عمودية على المحاور الإحداثية ox,oy,oz وبمستويات مارة بها حيث نحصل على منحنيات تعطينا بعض خواص السطح التي تقع عليه، وهذا يتم كما يلي:

1- إن تقاطع السطح (S_1) مع مستويات للمحور oz لها المعادلة:

$$(C^*)\equiv\begin{cases}x^2+y^2=2(z+1)^2\\ z=h\end{cases}\quad ,\quad h=\text{const}$$

أو:

$$(C^*): x^2+y^2=2(h+1)^2$$

وهي دوماً دوائر متمركزة في النقطة $C_0(0,0,h)$ وأنصاف أقطارها $R=\sqrt{2}|h+1|$ ما خلا من أجل $h=-1$ حيث يكون $x^2+y^2=0$ حيث تجتمع الدوائر في النقطة $v(0,0,-1)$.

بآلية مشابهة تقاطع (S_1) مع مستويات عمودية على المحور ox ,(oy) هي القطوع الزائدية (C")، (C"') على الترتيب:

$$(C'')\equiv\begin{cases}x^2+y^2=2(z+1)^2\\ x=h\end{cases}\ ,\ (C''')\equiv\begin{cases}x^2+y^2=2(z+1)^2\\ y=h\end{cases}$$

وعندما $h\neq 0$ يمكن كتابتها بالشكل:

$$(C'')\equiv\begin{cases}\dfrac{(z+1)^2}{h^2}-\dfrac{y^2}{h^2}=1\\ x=h\end{cases}\quad,\quad(C''')\equiv\begin{cases}\dfrac{(z+1)^2}{h^2}-\dfrac{x^2}{h^2}=1\\ y=h\end{cases}$$

أما عندما $h=0$ فإن التقاطعات السابقة (القطوع الزائدية) تؤول إلى المستقيمات:

$$D''\equiv\begin{cases}2(z+1)^2-y^2=0\\ x=0\end{cases}\quad,\quad D'''\equiv\begin{cases}2(z+1)^2-x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$D''\equiv\begin{cases}\left[\sqrt{2}(z+1)+y\right]\left[\sqrt{2}(z+1)-y\right]=0\\ x=0\end{cases}$$

$$D'''\equiv\begin{cases}\left[\sqrt{2}(z+1)+x\right]\left[\sqrt{2}(z+1)-x\right]=0\\ y=0\end{cases}$$

التي تمر بالنقطة $v(0,0,-1)$.

أما تقاطع السطح (S_1) مع مستويات من الشكل $y=kx$ (مستويات مارة بالمحور oz و k عدد اختياري) فهي مستقيمات من الشكل:

$$D''\equiv\begin{cases}y^2+x^2=2(z+1)^2\\ y=kx\end{cases}\quad,\quad D\equiv\begin{cases}x^2\left(1+k^2\right)-2(z+1)^2=0\\ y=kx\end{cases}$$

وبالاعتماد على المطابقة الشهيرة $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$ فإن المعادلة السابقة تكتب على الصيغة التالية:

$$D\equiv\begin{cases}\left[x\sqrt{1+k^2}\sqrt{2}(z+1)\right]\left[x\sqrt{1+k^2}+\sqrt{2}(z+1)\right]=0\\ y=kx\end{cases}$$

وهي حزمة من المستقيمات تمر بالنقطة $v(0,0,-1)$

مما سبق نستنتج أن السطح $x^2+y^2=2(z+1)^2$ ليس إلاّ المخروط الدوراني بمحور دوران oz ورأس هو النقطة $v(0,0,-1)$.

2- بالنسبة لتقاطع السطح (S_2) مع مستويات عمودية على المحور oz يكون:

$$(C)\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=1\\ z=h\end{cases}\Rightarrow (C)\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1+\dfrac{(h-1)^2}{4}\\ z=h\end{cases}$$

وهذه ليست إلاّ قطوعاً ناقصية بغض النظر عن قيمة h. أيضاً فإن تقاطع السطح (S_2). العمودي على ox,oy هي على التوالي:

$$(C')\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=1-\dfrac{h^2}{9}\\ y=h\end{cases},\quad (C'')\equiv\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(z+1)^2}{4}=1-\dfrac{h^2}{4}\\ x=h\end{cases}$$

وفي الحالتين التقاطعات بين مستويات عمودية على النمحور ox,oy هي قطوع زائدية ما عدا عندما $h=3$ " $h=2$ بالنسبة لـ "C" حيث يؤول 'C "تؤول "C" إلى مستقيمات.

أما من أجل مستويات من الشكل $y=kx$ أيضاً نحن أمام قطوع زائدية، وبالتالي نستنتج أن السطح هو عبارة عن مجسم قطعي زائدي بطية واحدة (أيضاً يمكن الوصول إلى الاستنتاج ذاته من خلال الاعتماد على المعادلة العامة لهذا المجسم: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ وذلك بأخذ التحويل $X=x, y=y, z-1=Z$.

3- هنا تقاطع السطح (S_3) مع المستويات $z=h$ هي: قطوع ناقصية من أجل $h>-3$

ومن أجل $h=3$ تكون التقاطعات هي النقطة $v(0,0,-3)$ أما من أجل $h<-3$ فالتقاطعات عبارة عن قطوع ناقصية وهمية.

التقاطعات مع مستويات من الأشكال $x=h, y=h, y=kx$ هي قطوع مكافئية، وبالتالي فالسطح (S_3) هو مجسم قطعي مكافئي ناقصي برأس $v(0,0,-3)$ ومحور oz وجميع نقاطه تحقق العلاقة $z\geq-3$.

التمرين (11):

أ – أوجد نقاط تقاطع المستقيم:

$$D_1 \equiv \frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$$

مع مجسم القطع الزائد: $(S_1) \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.

ب – أثبت أن المستقيم:

$$D_2 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

يقع على المجسم القطع المكافئي الزائدي: $(S_2) \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$

ج – أوجد مسقط المنحني (C) على المستوي xoy حيث:

$$(C) \equiv \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1 \\ x + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

د – أوجد قيمة الوسيط α التي من أجلها يتقاطع المستوي: $\sigma.x + oz - 1 = 0$ مع مجسم القطع الزائدي $(S_3) \equiv x_2 + y_2 - z_2 = -1$ بقطع ناقص.

الحل:

أ – نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم D_1 ويكون:

$$D_1 \equiv x = 4 + 4t \ , \ y = -3 + 3t \ , \ z = 2 + 2t$$

لإيجاد نقاط التقاطع بين المستقيم D_1 والسطح S_1 نحدد قيمة الوسيط λ من خلال تعويض معادلات D_1 في معادلة السطح S_1 ويكون:

$$\frac{(4+4\lambda)^2}{16} + \frac{(3+3\lambda)^2}{9} - \frac{(2+2\lambda)^2}{4} = 1 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

بالتعويض عن λ_2, λ_1 في المعادلات الوسيطية للمستقيم D_1 نجد أن:

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow M_1(4,-3,2)\ ,\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow M_2(12,3,6)$$

ب – لكي يقع المستقيم $D_2 : x = 3\lambda, y = 2-2\lambda, z = -1+2\lambda$ على الجسم (S_2) يجب أن تحقق كل نقطة $M \in D_2$ معادلة الجسم ويكون:

$$\frac{(3\lambda)^2}{9} - \frac{(2-2\lambda)^2}{4} = -1+2\lambda \Rightarrow (1-1)\lambda^2 + (2-2)\lambda + 1 - 0 = 0$$

والمعادلة الأخيرة محققة مهما تكن قيمة الوسيط λ وبالتالي فالمستقيم D_2 يقع على الجسم S_2.

جـ – إن تقاطع الجسم القطعي الناقصي مع مستويات في الحالة العامة هو قطوع حقيقية (أو وهمية)، وفي حالة خاصة التقاطعات عبارة عن دوائر (يمكن أن تؤول إلى نقاط) وذلك في الأوضاع المختلفة لهذه المستويات وللمجسم (S_3)، باختصار سنحصل على قطع ناقص أو دائرة أو نقطة.

فإذا أخذنا منحنىً (C) من المنحنيات السابقة وحذفنا z فمثلاً، نحصل على سطح أسطواني يمر بـ (C) وبمولدات موازية للمحور oz وتكون لها المعادلة:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{(4-x)}{16} = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 4x = 0$$

وبالاتمام إلى مربع كامل نحصل على المعادلة:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

والتي تعبر عن سطح أسطواني ناقصي وبالتالي فإن مسقط المنحني (C) على المستوي xoy هو القطع الناقص:

$$(C_1) \equiv \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

د – الجسم هو مجسم قطع زائدي ذو طيتين، وبالتالي فإن تقاطعه مع مستوٍ P هو قطع ناقص ومسقطه على أي مستوٍ (المسقط القائم) من المستويات الإحداثية هو قطع ناقص أيضاً (في حالة خاصة دائرة أو قطعة مستقيمة) فمثلاً المسقط على المستوي yoz يكون:

$$(C')\equiv\begin{cases}(1-\alpha z)^2+y^2-z^2+1=0\\ x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(C')\equiv\begin{cases}y^2+(\alpha^2-1)z^2-2\alpha z+2=0\\ x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(C')\equiv\begin{cases}\dfrac{y^2}{\dfrac{2-\alpha^2}{\alpha^2-1}}+\dfrac{\left(z-\dfrac{\alpha}{\alpha^2-1}\right)^2}{\dfrac{2-\alpha}{(\alpha^2-1)}}=1\Rightarrow\alpha^2-1\neq0\ ,\ 2-\alpha^2\neq0\\ x=0\end{cases}$$

ولكي يكون هذا المنحني قطعاً ناقصاً حقيقياً يجب أن يحقق الوسيط α الشرطين معاً:

$$2-\alpha^2>0\ ,\ \alpha^2-1>0$$

والحل المشترك لجملة المتراجحتين هاتين هو:

$$-\sqrt{2}<\alpha<-1\quad,\quad 1<\alpha2<\sqrt{2}$$

التمرين (12): أوجد مركز تناظر السطح:

$$F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-35=0$$

الحل: إن مركز التناظر يحدد من خلال المعادلات التالية:

مركز التناظر هو: النقطة $M_o(1,-2,3)$:

$$\begin{cases}F'_x=0\\ F'_y=0\\ F'_z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2=0\\ 2y+4=0\\ 2z-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=1\\ y=-2\\ z=3\end{matrix}$$

تمارين غير محلولة (6)

التمرين (1): أوجد إحداثيات مركز الكرة وطول نصف قطرها في الحالات التالية:

(1) $x^2+y^2+z^2=36$ (2) $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$

(3) $(x-4)^2+(y-3)^2+z^2=25$

(4) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

الأجوبة:

$$1)\ M_o(0,0,0), R=6 \quad , \quad 2)\ M_o\left(\frac{1}{2},-1,0\right), R=\frac{1}{2}$$

$$3)\ M_o(4,3,0), R=5 \quad , \quad 4)\ M_o(1,-2,3), R=3$$

التمرين (2): اكتب معادلة الكرة في الحالات التالية:

1- الكرة S بحيث: نصف قطرها $R=4$ ومركزها النقطة $M_o(2,-1,3)$.

2- الكرة S بحيث: نصف قطرها $R=6$ ومركزها مبدأ الإحداثيات.

3- الكرة S بحيث: مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة $M(-2,2,1)$.

4- تمس المستويات الإحداثية ومركزها يقع على المستوي: $P\equiv 2x-3y+4z-18=0$.

5- تمر من نقطة تقاطع المستقيم $D_1\equiv(1+\lambda)\vec{i}+2\vec{j}+(2+3\lambda)\vec{k}$ مع المستوي $P\equiv(2\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k})+10=0$ ، وتمر من النقطة 'B نظيرة النقطة B(3,4,-4)، بالنسبة إلى المستوي $z=0$ وبحيث إن المركز يقع على المستقيم:

$$D_2\equiv x=1+2\lambda, y=-4+2\lambda\ ,\ z=-1+\lambda$$

6- الكرة S تمر من الدائرة:

$$(C):\begin{cases}(S)\equiv x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5=0\\(P)\equiv x-2y-2z=1=0\end{cases}$$

وبحيث تمس المستوي: $(P_2) \equiv 2x + 2y + z - 2 = 0$

7- الكرة S تمر بالنقاط $M_3(2,2,3), M_2(1,-3,1), M_1(1,2,-4)$ وبحيث إن مركزها يقع في المستوي xoy.

8- الكرة S: المركز في المستوي $z = 4$ والكرة تمس المستوي oxy في النقطة $M(2,3,0)$.

9- أحد أقطارها له النهايتان $M_2(5,7,-1), M_1(3,5,6)$.

10- تمر من النقاط $M_4(-2,-8,-5), M_3(5,-8,2), M_2(8,-2,5), M_1(2,-5,8)$

11- المركز يقع على المستقيم:

$$D \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

وتمس كلاً من المستويين

$$P_1 \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0 \ , \ P_2 \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$$

الأجوبة:

1) $(S) \equiv (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16$

2) $(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 36$

3) $(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$

4) $(S) \equiv (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 36$

5) $(S) \equiv \left(x - \frac{29}{5}\right) + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 \left(z - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{621}{25}$

6) $(S_1) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

7) $(S) \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 36$

8) $(S) \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16$

9) $(S) \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-2.5)^2 = 49.25$

10) $(S) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 93$

11) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$

التمرين (3):

أ – ادرس وضع النقطة $A(2,-1,-3)$ بالنسبة إلى الكرة S (داخلها، خارجها، على سطحها) في الحالات التالية:

1) $(S)\equiv(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$

2) $(S)\equiv(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$

3) $(S)\equiv(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$

4) $(S)\equiv(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$

5) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$

6) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z+14=0$

الأجوبة:

1) خارجها، 2) على السطح، 3) داخلها

4) داخلها، 5) داخلها، 6) داخلها (المركز).

ب – ادرس وضع المستوي P والكرة (S) إذا كان:

1) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$, $(P):z=3$

2) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2=9$, $(P):16x-15y-12z+75=0$

3) $(S)\equiv(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$, $(P):2x+y-z+3=0$

4) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+14=$, $(P):y=1$

5) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$, $(P):x=5$

الأجوبة: 1) قاطع، 2) يمس، 3) قاطع، 4) يمس، 5) خارج.

ج – ادرس وضع المستقيم D والكرة (S) إذا كان:

$$1)\begin{cases}(S)\equiv x^2+y^2+z^2+x-4y-3z+\dfrac{1}{2}=0\\ D\equiv x=2-2t,\, y=-\dfrac{7}{2}+3\lambda,\, z=-2+\lambda\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}(S)\equiv x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0\\ D\equiv 2(x-5)=3y=-3(z+25)\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}(S)\equiv (x+2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1\\ D\equiv\begin{cases}2x+4y-z-7=0\\ 4x+5y+z=14\end{cases}\end{cases}$$

الأجوبة: 1) يقطع، 2) خارج، 3) يقطع.

التمرين (4): اكتب معادلة المستوي P المماس للكرة إذا كان:

1) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2=49$، نقطة التماس $M_1(6,-3,-2)$.

2) $(S)\equiv x^2+y^2+z^2=49$، نقطة التماس $M_1(2,-6,3)$.

3) $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$، نقطة التماس $M_1(-1,3,0)$.

الأجوبة:

$$1)\ P\equiv 6x-3y-2z-49=0$$
$$2)\ P\equiv 2x-6y+3z-49=0$$
$$3)\ P\equiv 2x-y-z+5=0$$

التمرين (5): اكتب معادلة المستوي P إذا كان:

أ – المستوي P ماراً بمنحني تقاطع الكرتين:

$$S_1\equiv 2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$$
$$S_2\equiv x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1$$

ب – المستوي P يمر من مركز الكرة (النقطة C):

$$(S)\equiv x^2+y^2+z^2-2x+y-2z=0$$

ويعامد المستقيم OC.

جـ – المستوي P هو المستوي الأساسي للكرتين:

$$(S_1) \equiv x^2 + y^2 + t - x - 2y + 2z = 3$$
$$(S_2) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y - z = 4$$

د – المستوي P هو المستوي المماس للكرة: $S: x^2 + y^2 + z^2 = 49$ في النقطة $M(6,-3,-2)$.

د – المستوي المماس للكرة في النقطة:

$$(S) \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24\ ,\ M(-1,3,0)$$

هـ – المستوي P_2, P_1 المماسين للكرة: $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 49$

والموازيين للمستوي: $P \equiv x + 2y - 2z + 15 = 0$.

الأجوبة:

أ – $P \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$

ب – $P \equiv 2x - y + 3z - 7 = 0$

ج – $P \equiv 3x + 5y - 3z + 1 = 0$

د – $P \equiv 6x - 3y - 2z - 29$

هـ – $P \equiv 2x - y - z + 5 = 0$

و – $P_{1,2} \equiv x + 2y - 2z \pm 9 = 0$

التمرين (6): أوجد مركز تناظر السطح:

1) $(S_1) \equiv x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2xy + yz + x - 4z - 3 = 0$
2) $(S_2) \equiv x^2 + y^2 + 2z^2 - xy + 2xz - 2yz - 2x + y - z = 0$
3) $(S_3) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - y - z = 0$

الأجوبة:

1) $M_1\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$ ، 2) $M_2\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},\frac{-3}{4}\right)$ ، 3) $M_3\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

التمرين (7): اكتب معادلة السطح الأسطواني الذي مولداته تمس الكرة:

$$S \equiv x^2+y^2+z^2=1$$

وتصنع مع المحاور الإحداثية زوايا متساوية.

الجواب: $S \equiv (2x-y-z)^2+(2y-x-z)^2+(2z-x-y)^2=0$

التمرين (8): أوجد نوع السطح الذي تمثله المعادلة:

1) $x^2+y^2=2(z+1)^2$

2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=1$

3) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=4(z+3)$

4) $x^2+y^2=25$

5) $x^2+y^2+z^2=25$

6) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

8) $y^2=6x$

9) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$

10) $x^2+y^2-2z=-1$

11) $x^2+y^2=2z$

12) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$

13) $x^2-y^2=z^2$

14) $x^2-y^2=2pz, p\neq 0$

15) $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$

16) $x^2=2az, a\neq 0$

17) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{6}=6z$

18) $x^2+y^2-z^2=4$

19) $x^2-y^2+z^2+4=0$

20) $x^2+y^2=1$

الأجوبة:

1) مخروط دوراني يمر بمحور دوران oz ورأس $v(0,0,-1)$.

2) مجسم زائدي ذو طية واحدة.

3) مجسم قطع ناقصي مكافئ oz ، $v(0,0,-3)$.

4) أسطوانة دائرية محورها oz ونصف قطر قاعدتها $R = 5$.

5) كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R = 5$.

6) سطح أسطوانة ناقصية بمولدات موازية للمحور oz.

7) سطح أسطوانة زائدية بمولدات موازية للمحور oz.

8) سطح أسطوانة مكافئية.

9) مجسم القطع الناقص ذو ثلاثة محاور $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$.

10) مجسم زائدي بطيتين.

11) مجسم كافئي دوراني.

12) مجسم زائدي بطية واحدة.

13) مخروط.

14) مجسم مكافئي زائدي.

15) مجسم مكافئي ناقصي.

16) أسطوانة مكافئية.

17) مجسم مكافئي زائدي.

18) مجسم زائدي بطية واحدة.

19) مجسم زائدي دوراني بطيتين.

20) سطح أسطواني دائري.

التمرين (9) أوجد تقاطع المستقيم: $D|\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{2}$ مع مجسم القطع الزائد: $S:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1+\frac{z^2}{4}$.

الجواب: $A(4,-3,2),B(12,3,6)$.

التمرين (10): حدد نوع المنحني في الحالات التالية:

1) $(C)\equiv\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z\\ 3x-y+6z-14=0\end{cases}$ 2) $(C)\equiv\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z\\ x-2y+2=0\end{cases}$

3) $(C)\equiv\begin{cases}z=x^2-y^2\\ z=1\end{cases}$ 4) $(C)\equiv\begin{cases}z=x^2-y^2\\ y=1\end{cases}$

5) $(C)\equiv\begin{cases}z=x^2-y^2\\ z=1\end{cases}$ 6) $(C)\equiv\begin{cases}z=x^2-y^2\\ z=-1\end{cases}$

7) $(C)\equiv\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ y=2\end{cases}$ 8) $(C)\equiv\begin{cases}\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1\\ z=-1\end{cases}$

الأجوبة:

1) قطع ناقص 2) قطع مكافئ

3) $x^2-y^2=1,z=1$ 4) $z+1=x^2,y=1$

5) $y^2=1,x=1$ 6) $y^2-x^2=1,z=-1$

7) قطع زائد في المستوي $y=2$, $\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$

8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ قطع زائد $a=4$, $b=3$ رؤوسه $A(4,0,-1),B(-4,0,-1)$.

المصطلحات العلمية

A

Abscissa	إحداثي سيني (فاصلة)
Absulute value	قيمة مطلقة
Abstract space	فضاء مجرد
Acute angle	زاوية حادة
Acute triangle	مثلث حاد الزوايا
Addition of vectors	جمع المتجهات
Adjcent sides	أضلاع متجاورة
Altitude	ارتفاع
Altitude of a cone	ارتفاع المخروط
Analytic geometry	هندسة تحليلية
Angle	زاوية
Angle of polygon	زاوية مضلع
Angle of rotation	زاوية الدوران
Area of a region	مساحة منطقة
Area of a surface	مساحة سطح
Axes	محاور
Axis	محور
Axis of symmetry	محور التناظر

B

Base	قاعدة
Basis	أساس
Base of triangle	قاعدة مثلث
Bounded above	محدود من الأعلى
Bounded area	مساحة محدودة
Branched of hyperbola	فرعا قطع زائد

C

Capacity of area	سعة قوس
Cartesian axes	محاور ديكارتية
Cartesian coordinates	إحداثيات ديكارتية
Cartesian plane	مستوى ديكارتي
Cartesian space	فضاء ديكارتي
Center of circle	مركز دائرة
Center of rotation	مركز الدوران
Center angle	زاوية مركزية
Circular	دائري
Circular cylinder	أسطوانة دائرية
Circumference	محيط
Common	مشترك
Coimmon side	ضلع مشترك
Common tangent	مماس مشترك
Condition	شرط
Conicoid	مجسم مخروطي
Conoid	مجسم شبه مخروطي
Coordinate axis	محور إحداثي
Curve	منحني
Cylinder	أسطوانة
Cylinderical	أسطواني
Cylinder coordinates	إحداثيات أسطوانية
Cylinder surface	سطح أسطواني
Cylindroid	مجسم أسطواني

D

Degree	درجة
Diagonal	قطر
Diagonal of polyhedron	قطر متعدد الوجوه

Diagonal of polygon	قطر مضلع
Diametre of a sphere	قطر كرة
Diametre of circle	قطر دائرة
Diamond	معين
Directed angle	زاوية موجهة
Directed line	خط موجة
Direction	اتجاه
Domain	منطلق (مجموعة التعريف)
Domain of function	مجال الدالة
Double root	جذر مضاعف
Double tangent	مماس مضاعف

E

Ecenter	مركز الدائرة الخارجية
Ecircle	دائرة خارجية
Element of area	عنصر مساحة
Element of volume	عنصر حجم
Elevation	ارتفاع (علو)
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Elliptic conical surface	سطح مخروطي ناقصي
Elliptic cylinder	أسطوانة نابضة
Elliptic paraboloid	مجسم قطع مكافئ ناقصي
Equation	معادلة
Equation of line	معادلة مستقيم
Equation of a curve	معادلة منحني
Euqation of a plane	معادلة مستوي
Equation of surface	معادلة سطح
Equilateral	متساوي الأضلاع
Equilateral polygon	مضلع متساوي الأضلاع

Equilateral traigle	مثلث متساوي الأضلاع
Exterior	جداء خارجي

F

Function	تابع
Family	حزمة
Focus	محرق
Finite	منتهية

G

Graph of function	بيان (خط بياني) الدالة
Grade	درجة
Geometry	هندسة
Geometry of space	هندسة الفضاء

H

Hyperbola	قطع زائد
Hyperboloid	مجسم قطع زائد
Hyperboloid of one sheete	مجسم قطع زائد ذو فرع واحد
Hyperboloid of two sheetes	مجسم قطع زائد ذو فرعين
Hyperbolic paraboloid	مجسم قطع زائد مكافئي
Hypotenuse	وتر المثلث

I

Inclination	ميل
Inner product	جداء داخلي
	Inverseمقلوب
Infinite	غير منتهية
Inequality	متراجحة
Integer	عدد صحيح
Increment	تزايد
Implicit function	تابع ضمني
Increasing function	تابع متزايد

Intercepts	الأجزاء المقطوعة من المحاور
Interval	مجال
Isoclines	متساوية الميل
Imaginary axis	محور تخيلي (غير قاطع)
Impossible set	مجموعة مستحيلة
Imply	يؤدي إلى

L

Less	أقل
Length	طول
Line	خط
Linear combination	تركيب خطي
Linearly dependent	مرتبطة خطياً
Linearly independent	مستقلة خطياً
Left – handed	غير مباشرة
Lowest sdimension	أصغر بعد

M

Major circle	دائرة عظمى
Major axis	المحور الكبير
Minor axis	المحور الصغير
Method	طريقة
Monotonic	على نمط واحد
Maximum	نهاية عظمى
Maximum height	أقصى ارتفاع

N

Nappe	فرع مخروطي
Normal	ناظم
Null vector	شعاع صفري
Negative	نفي
Nonempty set	مجموعة غير خالية

Notation	رمز
Normal cone	مخروط ناظمي
Number line	خط الاعداد

O

Oblique coordinates	إحداثيات مائلة
One dimentional	أحادي البعد
Ordered pair	ثنائي مرتب
Ordered triple	ثلاثي مرتب
Origine	نقطة الأصل (المبدأ)
Ordinate	ترتيب
Orthogonal	متعامد
Osculating plane	مستوي ملاصق
Outer product	جداء خارجي
Ordinate	الإحداثي الصادي (الترتيب)

P

Parallel opiped	متوازي السطوح
Parabola	قطع مكافئ
Paraboloid	مجسم قطع مكافئ
Period of a function	دور التابع
Parametric equation	معادلة وسيطية
Parallelogram	متوازي أضلاع
Perpendicular	عمودي
Plane	مستوي
Point of inflection	نقطة انعطاف
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Polygon	مضلع
Principal	رئيسي
Principal axes	محاور رئيسية
Principal diagonal	قطر رئيسي

Product	جداء
Position	وضع
Projection	إسقاط
Pyramidal	هرم
Pyramidal surface	سطح هرمي

Q

Quarangular	رباعي الزوايا
Quadrant	ربع
Quadric surface	سطح تربيعي
Quotient	نسبة
Quarter mary	رباعي

R

Ramphoid	هلالي
Radian	راديان
Radius	نصف قطر
Range of a function	مجموعة قيم التابع
Rational numbers	الأعداد العادية
Real axis	محور حقيقي
Ruled surface	سطح مسطر
Radical	أساسي
Right-handed	مباشرة
Rotation	دوران
Reciprocal	عكسي
Rectangular paralle diped	متوازي مستطيلات قائم

S

Scalar	سلمي
Scalar product	جداء سلمي
Scalar triple product	جداء مختلط
Straigh line	خط مستقيم

Subtitution	تعويض
Sum	مجموع
Solid cylinder	أسطوانة مجسمة
Solid	مجسم
Spherical calcone	مخروط كروي
Spherical surface	سطح كروي
Surface	سطح
Space	فراغ أو فضاء
Sphere	كرة
Spherical coordinates	إحداثيات كروية
Sliding vector	شعاع منزلق
Slope	ميل
Square roots	جذور تربيعية

T

Tangent line	خط مماس
Translation of axes	انسحاب المحاور
Tranverse axis	المحور القاطع
Terminal point	نقطة النهاية
Two-dimentional	ثنائي البعد
Three dimentional	ثلاثي البعد

U

Unit vector	شعاع الواحدة
Uniform convergence	تقارب منتظم
Unbounded	غير محدود

V

Vector	شعاع
Vertex	ذروة
Volume	حجم

W

Well-defined	معرف جيداً
Well ordering principle	مبدأ الترتيب الجيد

المراجع العلمية

المراجع العربية

1- ماغوط خالد ، 1979: الهندسة التحليلية في الفراغ، منشورات جامعة حلب.

2- طرابيشي محمد وداد ، 1982: الهندسة التحليلية في الفراغ، منشورات جامعة حلب.

3- ديوان مصطفى، 2000 : الهندسة التحليلية في الفراغ، أكاديمية الأسد للهندسة العسكرية.

4- كليتينيك، 1980: مسائل في الهندسة التحليلية، دار مير للنشر والطباعة، موسكو.

5- بوادقجي محمد هشام، 2000: الرياضيات (2)، منشورات جامعة حلب.

المراجع الأجنبية:

6- Dr. A.D. Kotasov, 1988: Matematics – Moscow.

7- Dr. J.H. Kendle, 1980: Analytic Geometry's series, New York.

8- Dr. A.C. Burdette, 1985: Analytic Geometry's U.S.A.

9- Dr. Adams and White, 1975: Analytic Geometry and Caculus, U.S.A.

10- Dr. Thomas, 1976: Analytic Geometry, Liondon British.

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور	الدكتور	الدكتور
نصر الدين عيد	**حمدو النجار**	**علي حناوي**

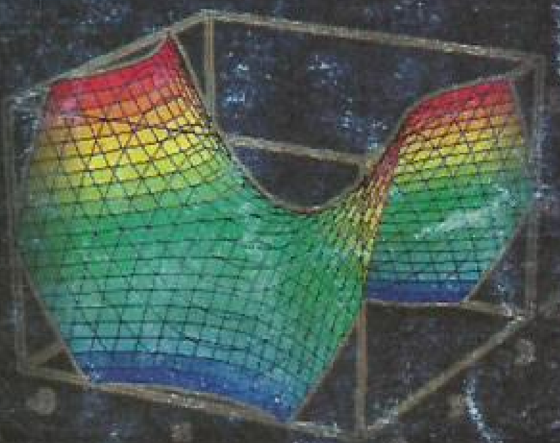
تم تدقيق الكتاب لغوياً من قبل:

الدكتور

عبد الرزاق الخشروم

Aleppo University Publications
Faculty of Science

Analytic Geometry in Space



By

M. Jamal HAMANDOSH

Abdul fattah ABBASI

Academic Year
2010-2011

سعر المبيع للطلاب
٢٥٠ ل.س.